T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜSTEL SIFIRLI ELEMANLAR ÜZERİNDE YARI DEĞİŞMELİ HALKALAR

Ayşe DÜRÜST

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2020

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜSTEL SIFIRLI ELEMANLAR ÜZERİNDE YARI DEĞİŞMELİ HALKALAR

Ayşe DÜRÜST

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Handan KÖSE

KIRŞEHİR / 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ayşe DÜRÜST

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-nin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarım sırasında her konudaki araştırmalarımda bana rehberlik eden ve bu çalışmanın gerçekleşmesinde büyük katkıları olan tez danışmanım Doç. Dr. Handan KÖSE' ye teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bana destek olan eşime ve bu süreçte zaman zaman ilgilenemediğim kızlarım Zeynep Kübra ve Zehra'ya çok teşekkür ederim.

Temmuz, 2020 Ayşe DÜRÜST

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ iv
İÇİNDEKİLER v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ vi
ÖZET vii
ABSTRACT viii
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
2.1. Temel Tanımlar 3
2.2. Bazı Halka Sınıfları 6
3. YARI DEĞİŞMELİ HALKALAR 9
4. NİL-YARI DEĞİŞMELİ-I HALKALAR 10
4.1. Nil-Yarı Değişmeli-I Halkaların Polinom Genişlemeleri 20
5. NİL-YARI DEĞİŞMELİ-II HALKALAR 29
5.1. α-Uyumluluk Şartını Sağlayan Yarı Değişmeli Halkalar 32
6. SOL (SAĞ) N-YARI DEĞİŞMELİ HALKALAR 36
6.1. Sol (Sağ) N-Yarı Değişmeli Halkaların Bazı Genişlemeleri 38
KAYNAKLAR 40
ÖZGEÇMİŞ 44

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

R	: Birimli halka
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$nil(R)$	: R deki üstel sıfır elemanların kümesi
$C(R)$	: R halkasının merkezi
$J(R)$	: R halkasının Jacobson radikali
$P(R)$	: R halkasının asal radikali
$R[x]$	: R üzerinde x bilinmeyen olmak üzere polinom halkası
$T_n(R)$	: $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası
$T(R,R)$	: R halkasının aşikar genişlemesi
$R[x;x^{-1}]$	: R üzerindeki Laurent polinom halkası
C_f	: $f(x) \in R[x]$ olmak üzere $f(x)$ in katsayıları
$D(R;\mathbb{Z})$	: R nin Dorroh genişlemesi

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL SIFIRLI ELEMANLAR ÜZERİNDE YARI DEĞİŞMELİ HALKALAR

Ayşe DÜRÜST

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Handan KÖSE

Tez temel kavramlar ve dört ana başlıktan oluşmaktadır. Birinci ana başlık "Yarı Değişmeli Halkalar", ikinci ana başlık "Nil-Yarı Değişmeli-I Halkalar", üçüncü ana başlık "Nil-Yarı Değişmeli-II Halkalar" ve son ana başlık "Sol (Sağ) N-Yarı Değişmeli Halkalar" olarak adlandırılmıştır. İlk iki bölüm giriş ve temel kavramlara ayrılmıştır. Üçüncü bölümde yarı değişmeli halka kavramı tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde üstel sıfırlı elemanlar üzerinde yarı değişme özelliği tanımlanmış olup bu özelliğe sahip halkalar nil-yarı değişmeli-I olarak adlandırılmıştır. Bu bölümde nil-yarı değişmeli-I olan ancak yarı değişmeli olmayan halka örnekleri verilmiş; nil-yarı değişmeli-I halkaların ne zaman yarı değişmeli halka kavramına denk olduğu incelenmiştir. Üstelik nil-yarı değişmeli-I halkaların genişlemeleri: aşikar, polinom ve Laurent polinom halka genişlemelerine değinilmiştir. Beşinci bölümde nil-yarı değişmeli halkaların başka bir çeşidi olan nil-yarı değişmeli-II halka kavramı ele alınmıştır. Bu halkaların da değişmeli olmayan halka teorisinde sınıflandırılması yapılmıştır. Son bölümde ise Sol (Sağ) N-yarı değişmeli kavramı tanıtılmış ve bazı genişlemelerine yer verilmiştir.

Temmuz 2020, 52 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Yarı değişmeli halka, Armendariz halka, Zayıf Armendariz halka, Nil-yarı değişmeli-I halka, Nil-yarı değişmeli-II halka, Sol (Sağ) N-yarı değişmeli halka.

ABSTRACT

MSc THESIS

NIL-SEMICOMMUTATIVE RINGS

Ayşe DÜRÜST

Kırşehir Ahi Evran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Handan KÖSE

The thesis consists of abstract, basic concepts, introduction, and four main chapters. The first main section is "Semicommutative Rings", the second main section is "Nil-semicommutative-I Rings", the third section is "Nil-semicommutative-II Rings" and the last main section is Left (Right) N-semicommutative Rings. In the fourth chapter, it is introduced the property of semicommutativity of rings on nilpotent elements. These rings are called nil-semicommutative-I rings. It is investigated when nil-semicommutative-I ring is semicommutative. This chapter also includes some extensions of nil-semicommutative-I ring: trivial extension, polynomial extension and Laurent polynomial extension. In the fifth chapter, it is defined the other version of nil-semicommutative rings. This ring is called nil-semicommutative-II ring. Also, this ring is classified in non-commutative ring theory. In the last chapter, the "Left (Right) N-semmicomutative Rings" is introduced and some of its extensions are included.

July 2020, 52 Pages.

Keywords: Semicommutative ring, Armendariz ring, Weak Armendariz ring, Nil-semicommutative-I ring, Nil-semicommutative-II ring, Right (Left) N-semicommutative ring.

1. GİRİŞ

Tez boyunca R birimli halkayı gösterecektir. Bell, 1970' te R halkası için $a, b \in R$ olmak üzere eğer $ab = 0$ iken $aRb = 0$ sağlanıyorsa R halkasını IFP (sıfır çarpanlama özelliği) özelliğine sahip olarak adlandırdı [7]. Simmons II, 1982' de R halkasının sıfır sıkıştırma özelliğine sahip olması ile her $a \in R$ için a nın sol sıfırlayan $l(a) = \{r \in R|ra = 0\}$ kümesinin iki-yanlı ideal olması ile denk olduğunu ispatladı [39]. Habeb, 1990 da IFP özelliğine sahip halkaları sıfır sıkıştırma (zi) özelliğine sahip olarak adlandırdı ve bu özelliğe sahip halkaların eşkare elemanlarının merkezde yer aldığını gösterdi [12]. Shine ve Narbonne; IFP özelliği için sırasıyla S I ve yarı değişmeli kavramlarını kullandılar [35, 38]. Tez boyunca; bu notasyon için yarı değişmeli kavramı kullanıldı.

Halka teorisinde yarı değişmelilik notasyonu önemli ve geniş bir rol oynar. Yarı değişmeli halkalar ile bu halkaların genelleştirmeleri pek çok bilim insanı tarafından çalışıldı. Yarı değişmeli halkaların bazı genelleştirmeleri [1, 8, 34] te verildi. R halkası için $a, b \in R$ olmak üzere eğer $ab = 0$ iken her $x \in R$ için axb merkezde oluyorsa R ye *merkezi yarı değişmeli halka* denir [43]. Mohammadi ve diğerleri; 2012 de yarı değişmeli halkaların bir diğer genelleştirmesi olarak nil-yarı değişmeli halka kavramını tanıttılar. R halkası için a ve b üstel sıfırlı elemanlar olmak üzere eğer $ab = 0$ iken $aRb = 0$ sağlanıyorsa R ye *nil-yarı değişmeli halka* denir [34]. Herhangi bir karışıklığa yol açmamak için bu halkalar tez boyunca nil-yarı değişmeli-I notasyonu ile gösterildi. Bu çalışmada R deki bütün üstel sıfırlı elemanlarının kümesinin; R nin bir ideali olduğu gösterildi. Her yarı değişmeli halkanın nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip olduğu ancak tersinin doğru olmadığı örneklendirildi.

Nil-yarı değişmeli halkaların bir çeşidi de Chen tarafından verildi [8]. Buna göre R halkası için $a, b \in R$ olmak üzere eğer ab üstel sıfırlı eleman iken aRb; R nin nil alt kümesi oluyorsa R ye *nil-yarı değişmeli halka* denir. Herhangi bir karışıklığa yol açmamak için bu halkalar tez boyunca nil-yarı değişmeli-II notasyonu ile gösterildi.

Tezin son bölümünde N-yarı değişmeli halka tanımlandı. Buna göre R bir halka olmak üzere eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a \in nil(R)$ ve $b \in R$ için $arb = 0$ oluyorsa, R *sol N-yarı değişmeli* olarak adlandırıldı. Benzer şekilde eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a \in R$ ve $b \in nil(R)$ için $arb = 0$ oluyorsa R *sağ N-yarı değişmeli* olarak adlandırıldı. Sonuç olarak R

halkası hem sol hem de sağ N-yarı değişmeli ise *N-yarı değişmeli halka* olarak adlandırıldı. Ayrıca sol N-yarı değişmeli halkalar için örnekler verilerek bazı genişlemelerine değinildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılan temel kavramlar verilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1. [4] R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa, bu durumda **a** ya ***üstel sıfırlı eleman*** denir. R halkasının bütün üstel sıfırlı elemanlarının kümesi nil(R) ile gösterilir.

Tanım 2.2. [26] R bir halka olsun. Eğer $e \in R$ için $e^2 = e$ oluyorsa, **e** ye ***eşkare eleman*** denir. Birimli bir halkada halkanın 0_R (sıfır) ve 1_R (birim) elemanları eşkare elemanlardır.

Örnek 2.3. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesi bileşensel toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkanın eşkare elemanlarının kümesi $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$.

Tanım 2.4. [43] R bir halka olsun.

$$C(R) = \{a \in R \mid \text{her } r \in R \text{ için } ar = ra\}$$

kümesine halkanın ***merkezi*** denir.

Tanım 2.5. [26] R bir halka olsun. Eğer $e^2 = e \in R$ merkezde ise **e** ye ***merkezi eşkare eleman*** denir.

Örnek 2.6. R bir halka ve e, R de merkezi eşkare eleman olmak üzere $1_R - e$ merkezi eşkare elemandır.

Tanım 2.7. [27] R bir halka ve I; R nin bir ideali olsun. $R/I = \{x + I \mid x \in R\}$ ile tanımlansın. Her $x+I, y+I \in R/I$ için $(x+I) \oplus (y+I) = x+y+I$ ve $(x+I) \odot (y+I) = xy + I$ işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya ***bölüm halkası*** denir.

Tanım 2.8. [26] R bir halka olmak üzere eğer her $a \in R$ için $a = aba$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa R ye ***von Neumann düzenli halka*** denir.

Örnek 2.9. Düzenli halkaların direk çarpımları da düzenlidir.

Tanım 2.10. [26] R bir halka olsun. Eğer $aRa = 0$ olacak şekildeki her $a \in R$ için $a = 0$ oluyorsa R halkasına ***yarı asal*** denir.

Tanım 2.11. [26] R bir halka olsun. X; R nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere $r_R(X) = \{a \in R \mid Xa = 0\}$ ile tanımlanan bu kümeye X in R deki ***sağ sıfırlayanı*** denir. Benzer şekilde $l_R(X) = \{a \in R \mid aX = 0\}$ kümesine ise X in R deki ***sol sıfırlayanı*** denir.

Tanım 2.12. [26] R bir halka $S \subseteq R$ olmak üzere eğer S kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa;

(1) $1_R \in S$

(2) $a, b \in S$ için $ab \in S$

S ye ***çarpımsal kapalı alt küme*** denir.

Örnek 2.13. Bir halkanın tersinir elemanlarının kümesi R nin çarpımsal kapalı alt kümesidir.

İspat: R bir halka ve $U(R) = \{r \in R \mid rx = xr = 1_R\}$ ile R halkasındaki çarpımsal tersi olan elemanların kümesi gösterilsin. Bu durumda; $1_R 1_R = 1_R$ olduğundan $1_R \in U(R)$. Her $r, s \in U(R)$ için $rs \in U(R)$ olduğunu gösterelim. $(rs)(s^{-1}r^{-1}) = r(ss)^{-1}r^{-1} = r1_R r^{-1} = 1_R$ ve $(s^{-1}r^{-1})(rs) = s^{-1}(r^{-1}r)s = s^{-1}1_R s = 1_R$ olup $rs \in U(R)$. ■

Tanım 2.14. R bir halka, x bir bilinmeyen, $a_0, a_1, \ldots a_n$ R nin elemanları olmak üzere

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

ile tanımlanan f ye R üzerinde bir polinom denir. R üzerindeki bütün polinomların kümesi

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in R\}$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i, g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j \in R[x]$$

için $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının toplam ve çarpımı;

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_j)x^i$$

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$$

şeklinde tanımlanır. Burada $k = maks\{m, n\}$ ve $c_t = \sum_{j=0}^{t} a_j b_{t-j}$. Tanımlanan toplama ve çarpma ile $R[x]$ bir halkadır. Bu halkaya ***polinom halkası*** denir.

Tanım 2.15. [42] R bir halka olsun. x bilinmeyen olmak üzere

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(k ve n negatif tamsayı olabilir) kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya ***Laurent polinom halkası*** denir.

Tanım 2.16. [32] R halka ve M bir modül olsun. $(r_1, m_1), (r_2, m_2) \in T(R, M)$ olmak üzere

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

ve

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya R nin M tarafından ***aşikar genişlemesi*** denir. Özel olarak

$$T(R, R) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.17. [11] R bir halka olsun. $R \times \mathbb{Z}$ üzerinde ikili işlem aşağıdaki gibi tanımlansın. $(r_1, n_1), (r_2, n_2) \in R \times \mathbb{Z}$ ve $r_i \in R$ ve $n_i \in \mathbb{Z}$ için $i = 1, 2$ olmak üzere;

$$(r_1, n_1) + (r_2, n_2) = (r_1 + r_2, n_1 + n_2)$$

$$(r_1, n_1)(r_2, n_2) = (r_1 r_2 + n_1 r_2 + n_2 r_1, n_1 n_2)$$

işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya R nin ***Dorroh genişlemesi*** denir ve $D(R, \mathbb{Z})$ ile gösterilir.

Tanım 2.18. R bir halka olmak üzere R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi, matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halka $M_n(R)$ ile gösterilir.

$$M_n(R) = \{[a_{ij}]_{n\times n} \mid a_{ij} \in R, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm üst üçgensel matrislerin halkası ise

$$T_n(R) = \{[a_{ij}]_{n\times n} \mid a_{ij} \in R, i > j, a_{ij} = 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.19. [4] R bir halka olsun. $T_n(R)$ üst üçgensel matris halkasının üstel sıfırlı elemanlarının kümesi $nil(T_n(R))$:

$$nil(T_n(R)) = \begin{pmatrix} nil(R) & R & R \\ 0 & \ddots & R \\ 0 & 0 & nil(R) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.20. Herhangi bir R halkası üzerinde i. satır j. sütunundaki bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan matrislere ***elemanter matris*** denir ve matris E_{ij} ile gösterilir.

Tanım 2.21. [38] R bir halka olsun. $P(R)$; R nin asal radikali olmak üzere eğer $P(R) = nil(R)$ ise R ye ***2-asallı*** denir.

2.2. Bazı Halka Sınıfları

Tanım 2.22. [1] R bir halka olsun. Eğer her $e^2 = e \in R$ için $e \in C(R)$ ise R ye ***Abel halka*** denir.

Tanım 2.23. [29] R bir halka olsun. Eğer $nil(R) = \{0_R\}$ ise R ye ***indirgenmiş halka*** denir.

Örnek 2.24. Her tamlık bölgesi indirgenmiştir.

Teorem 2.25. [29] R bir halka olsun. Bu durumda R nin indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $a^2 = 0$ olacak şekildeki her $a \in R$ için $a = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.26. [10] R bir halka olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa R ye ***terslenebilir halka*** denir.

Örnek 2.27. [44] Her indirgenmiş halka terslenebilirdir. Kabul edelim ki; R indirgenmiş halka olsun ve $a, b \in R$ için $ab = 0$. $(ba)^2 = b(ab)a = 0$ olup R indirgenmiş olduğundan $ba = 0$ elde edilir.

Tanım 2.28. [37] R bir halka ve $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ olsun. Eğer $f(x)g(x) = 0$ olması her i, j $(0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$ için $a_i b_j = 0$ olmasını gerektiriyorsa R ye ***Armendariz halka*** denir.

Örnek 2.29. [5] Her indirgenmiş halka Armendariz halkadır.

Tanım 2.30. [31] R bir halka olsun. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ için eğer $f(x)g(x) = 0$ olması her i, j için $a_i b_j \in nil(R)$ olmasını gerektiriyorsa R ye ***zayıf Armendariz halka*** denir.

Örnek 2.31. [31] Her Armendariz halka zayıf Armendarizdir.

Tanım 2.32. [31] R bir halka olsun. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ için $f(x)g(x) \in nil(R)[x]$ iken her i, j için $a_i b_j \in nil(R)$ oluyorsa R ye ***nil Armendariz halka*** denir.

Tanım 2.33. [24] R bir halka olsun $\alpha : R \to R$ endomorfizması için eğer $a\alpha(a) = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa α ya ***katı endomorfizma*** denir. Eğer R böyle bir α katı endomorfizmasına sahip ise R ye ***α-katı halka*** denir [18].

Örnek 2.34. [17] Her katı halka indirgenmiştir.

İspat: $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Kabul edelim ki; R katı halka ve $\alpha : R \to R$ bir endomorfizma olmak üzere $\alpha(a^2) = 0$ olup $0 = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = a\alpha(a)\alpha(a)\alpha(\alpha(a)) = a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a))$ bulunur. R halkası katı olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve tekrar kabulden $a = 0$ elde edilir. Dolayısıyla R indirgenmiştir. ■

Tanım 2.35. [28] R bir halka olsun. Eğer $abc = 0$ olacak şekildeki her $a, b, c \in R$ için $acb = 0$ oluyorsa R ye ***simetrik halka*** denir.

Örnek 2.36. [38] Her indirgenmiş halka simetriktir.

Tanım 2.37. [18] α, R halkası üzerinde bir endomorfizma olmak üzere her i, j için $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $f(x)g(x) = 0$ iken $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ oluyorsa R ye ***α-katı Armendariz halka*** denir.

Örnek 2.38. [18] R halkası α-katı ise R α-katı Armendariz halkadır.

3. YARI DEĞİŞMELİ HALKALAR

Bu bölümde yarı değişmeli halkalar tanıtılacak ve bu halkaların özelliklerinden bahsedilecektir. Değişmeli bir halkada; üstel sıfır elemanların kümesi $nil(R)$; halkanın asal radikali olan $P(R)$ ye eşittir. Bu özellik değişmeli olmayan halkalarda **iki-asallı (2-asallı)** olarak adlandırılır.

Tanım 3.1. [7] R bir halka olsun. Her $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ oluyorsa R ye ***yarı değişmeli halka*** denir.

Örnek 3.2. Sıfırdan başka üstel sıfır elemanı olmayan halkalar yarı değişmelidir. Gerçekten $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(ba)^2 = b(ab)a = 0$ olup $ba = 0$. Her $r \in R$ için $(arb)^2 = (arb)(arb) = ar(ba)rb = 0$ olup halkanın sıfırdan başka üstel sıfır elemanı olmadığından $arb = 0$. Yani R yarı değişmeli halkadır.

Lemma 3.3. [12] Yarı değişmeli halkalar Abel halkadır.

İspat: R bir halka, $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $e(1 - e) = 0$ olup R halkası yarı değişmeli olduğundan her $r \in R$ için $er(1 - e) = 0$ ve buradan $er - ere = 0$ elde edilir. O halde $er = ere$ şeklindedir. Ayrıca, $(1 - e)e = 0$ ve R yarı değişmeli olduğundan her $r \in R$ için $(1 - e)re = 0$ olup, $re = ere$ elde edilir ki her iki durumdan $er = re$ bulunur. Dolayısıyla R Abel halkadır. ■

Lemma 3.4. [31] R bir halka olsun. R yarı değişmeli halka ise $nil(R)$, R de idealdir.

4. NİL-YARI DEĞİŞMELİ-I HALKALAR

Bu bölümde üstel sıfırlı elemanlar üzerinde yarı değişmeli olma özelliği incelenecek ve yarı değişmeli halkaların sınıfını içeren nil-yarı değişmeli-I halkalar tanıtılacaktır. Bu sınıflandırma yarı değişmeli halka kavramının bir genelleştirmesidir. Bu özellik [34] te tanıtıldı ve bu halkalar nil-yarı değişmeli-I halka olarak adlandırıldı. Nil-yarı değişmeli-I halkalar; yarı değişmeli olmayan büyük bir halka sınıfını oluşturmaktadır. Bu bölümde, Anderson ve Camillo'nun sonuçlarının değişmeli olmayan bir genelleştirilmesini vermek için yarı değişmeli halkaların bir genelleştirilmesi olan nil-yarı değişmeli-I halka kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca, R nin nil-yarı değişmeli-I halka olma şartı altında $nil(R[x]) = nil(R)[x]$ olduğu ispatlanmıştır. Yine, R nil-yarı değişmeli-I halkaların *2-asallı* olduğu gösterilmiştir. Bununla beraber R nin nil-yarı değişmeli-I halka olması durumunda $R[x]$ polinom halkası ve $R[x]/(x^n)$ halkalarının zayıf Armendariz olduğu ispatlanmıştır. [31] de verilen sonuçlara ilişkin bazı genelleştirmeler yapılmıştır.

Tanım 4.1. [34] R bir halka olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in nil(R)$ için $aRb = 0$ oluyorsa, R ye ***nil-yarı değişmeli-I halka*** denir.

Örnek 4.2. [34] Yarı değişmeli halkalar nil-yarı değişmeli-I halkadır.

İspat: R yarı değişmeli halka olsun. $ab = 0$ olacak şekildeki $a, b \in nil(R)$ alalım. R yarı değişmeli olduğundan $ab = 0$ için $arb = 0$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan R nin nil-yarı değişmeli-I olduğu görülür. ■

Örnek 4.3. [34] Nil-yarı değişmeli-I halkaların alt halkaları da nil-yarı değişmeli-I halkadır.

Aşağıda nil-yarı değişmeli-I olma özelliğine sahip fakat yarı değişme özelliğine sahip olmayan halka örneği verilecektir.

Örnek 4.4. [34] Her indirgenmiş R halkası için 3×3 tipinde matris halkası $T_3(R)$; nil-yarı değişmeli-I halkadır. Buna rağmen yarı değişmeli halka değildir.

İspat: Kabul edelim ki $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in nil(T_3(R))$ için $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olsun. Buradan $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ elde edilir.

R indirgenmiş halka olduğundan $a_{12}Rb_{23} = 0$ şeklindedir.

$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}c_{22}b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ elde edilir. Şimdi $T_3(R)$ halkasının yarı değişmeli olmadığını gösterelim. $E_{11}, E_{22} \in T_3(R)$ için $E_{11}E_{22} = 0$ olmasına rağmen $E_{11}E_{12}E_{22} = E_{12} \neq 0$ olduğundan $T_3(R)$ yarı değişmeli halka değildir. ■

Anderson ve Camillou Armendariz halkaların abelyan olduğunu gösterdi [3]. Başer yarı değişmeli halkaların abelyan olduğunu gösterdi [6, Sonuç 2.8]. Buna rağmen nil-yarı değişmeli-I halkalar abelyanlığı gerektirmez. Örnek 4.4 teki halka göz önüne alındığında $(E_{22})^2 = E_{22} \in T_3(R)$ eşkare eleman olmak üzere E_{22} merkezde olsaydı $E_{11}E_{12}E_{22} = 0$ bulunurdu. Oysa ki $E_{11}E_{12}E_{22} = E_{12} \neq 0$.

Örnek 4.5. [34] R bir halka olmak üzere

$$V(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in R, 0 \leq i, j \leq 4 \right\}$$

ile tanımlı $V(R); T_4(R)$ halkasının alt halkasıdır.

Örnek 4.6. [34] Her indirgenmiş R halkası için $V(R)$ nil-yarı değişmeli-I olma özelliğine sahip fakat yarı değişmeli özelliğine sahip olmayan bir halkadır.

İspat: Kabul edelim ki

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in nil(V(R)) \text{ olsun.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}b_{23} & a_{12}b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ve $a_{12}b_{23} = 0$, $a_{12}b_{24} = 0$ bulunur. R indirgenmiş olduğundan $a_{12}Rb_{23} = 0$, $a_{12}Rb_{24} = 0$. Buradan

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}c_{22}b_{23} & a_{12}c_{22}b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

elde edilir.

$E_{11}, E_{22} \in V(R)$ için $E_{11}E_{22} = 0$ olmasına rağmen $E_{11}E_{12}E_{22} = E_{12} \neq 0$. Dolayısıyla $V(R)$ halkası yarı değişmeli değildir. ■

Örnek 4.7. [34] R halka olmak üzere

$$S(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in R, 0 \leq i, j \leq 4 \right\}$$

şeklinde tanımlı $S(R)$; $T_4(R)$ nin alt halkasıdır.

Örnek 4.8. [34] Her indirgenmiş R halkası için $S(R)$ nil-yarı değişmeli-I halka olma özelliğine sahip fakat yarı değişmeli özelliğine sahip olmayan bir halkadır.

İspat: Örnek 4.6 nın ispatına benzer şekilde yapılır. ■

Armendariz halka ve zayıf Armendariz halka literatüründe karşılaşılan pek çok örnekte üstel sıfırlı elemanların kümesi $nil(R)$ nin bir ideal formatında olduğu görülür. Ancak Antoine Armendariz halkalarda bu durumun doğru olmadığına yönelik karşı bir örnek vermiştir [4].

Örnek 4.9. [4] K bir cisim ve $n \geq 2$ olsun. $R = K < a, b | a^n = 0 >$ halkası Armendarizdir. Fakat $nil(R)$ bir ideal değildir. Ayrıca Huh, Lee ve Smoktunowicz bu halkanın yarı değişmeli olmadığını göstermişlerdir [20]. Buna göre $a, a^{n-1} \in R$ için $aa^{n-1} = 0$ olmasına rağmen $aba^{n-1} \neq 0$.

Aşağıda nil-yarı değişmeli-I halkası için $nil(R)$ kümesinin bir ideal oluşturduğu gösterilir.

Teorem 4.10. [34] R bir halka olsun. Eğer R nil-yarı değişmeli-I halka ise $nil(R)$, R nin idealidir.

İspat: Kabul edelim ki $a^{2m} = 0$ olsun. Bu durumda R nil-yarı değişmeli-I halka olduğundan her $r \in R$ için $a^m r a^m = 0$ dır. Diğer taraftan $(ara^m)^2 = ara^m ara^m = (ara)(a^m r a^m) = (ara)0 = 0$ ve özel olarak $r = a^{m-3} \in R$ için $a^m a^{m-3} a^m = a^{m-1} a a^{m-3} a a^{m-1}$ olduğundan $a^{m-1}, ara^m \in nil(R)$ dir. $a^{m-1}(ara^m) = a^m r a^m = 0$ ve R nin nil-yarı değişmeli-I halka olmasından $a^{m-1} rara^m = 0$ elde edilir. $a^{m-1}(ra)ra^m = 0$ eşitliğinden $a^{m-1} raraa^{m-1} = 0$. Her iki taraf sağdan $(ra)^2$ ile çarpıldığında $a^{m-1}(ra)^2 a^{m-1}(ra)^2 = 0$ yani $(a^{m-1}(ra)^2)^2 = 0$ bulunur. Bu ise $a^{m-1}(ra)^2 \in nil(R)$ olmasıdır. Yine R nil-yarı değişmeli-I özelliğinden $a^{m-1} \in nil(R), a^{m-1}(ra)^2 \in nil(R)$ ve $a^{m-1}(ar)^2 a^{m-1} = 0$ iken $a^{m-1}(ra)^2 ra^{m-1} = 0$. Buradan $a^{m-1}(ra)^2 ra^{m-1} = a^{m-1}(ra)^2 raa^{m-2} = a^{m-1}(ra)^3 a^{m-2} = 0$ bulunur. Yeniden $a^{m-2}, (ar)^4 a^{m-2} \in nil(R)$ elde edilir. İşlemlere bu şekilde devam edildiğinde $(ar)^{2m} = 0$ olur ve böylece $ar, ra \in nil(R)$ bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $a^m = 0, b^n = 0$ ve $k = m + n + 1$ olsun. $0 \leq i_1, j_1, \ldots, i_s, j_s \leq k$ için $(a + b)^k = \sum_{i_1+j_1+\ldots+i_s+j_s=k} (a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \ldots a^{i_s} b^{j_s})$. Eğer $i_1 + i_2 + \ldots + i_s \geq m$ ise $a^{i_1} a^{i_2} \ldots a^{i_s} = 0$ ve her $0 \leq p \leq s$ için $a^{i_p} \in nil(R)$ dir. Buradan R nil-yarı değişmeli-I olduğundan $a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \ldots a^{i_s} b^{j_s} = 0$ elde edilir. Eğer $i_1 + i_2 + \ldots + i_s \leq m$ ve $j_1 + j_2 + \ldots +$

$j_s \geq n$ ise $b^{j_1+j_2+\dots j_s} = 0$ ise benzer şekilde $a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2}\dots a^{i_s}b^{j_s} = 0$ bulunur. Dolayısıyla $(a+b)^k = 0$ dır. ■

Sonuç 4.11. [31] Eğer R yarı değişmeli halka ise $nil(R), R$ nin idealidir.

İspat: [31, Önerme 3.1] den ispat açıktır. ■

Uyarı 4.12. Artin ve Wedderburn'a göre R halkasının Wedderburn radikali R nin üstel sıfırlı elemanların ideallerinin toplamıdır. $N_0(R)$ olarak gösterilir. Ayrıca $Nil_*(R), R$ nin daha düşük nil-radikalidir.

Lemma 4.13. [34] Nil-yarı değişmeli-I halkalar *2-asallı* dır.

İspat: $nil(R) \subseteq Nil_*(R)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in nil(R)$ olsun. Teorem 4.10 dan $nil(R), R$ nin ideali ve $RaR \subseteq Nil_*(R)$ dir. R nil-yarı değişmeli-I ve RaR nil ideal olduğundan $RaR \in N_0(R) \subseteq Nil_*(R)$ elde edilir. Böylece her üstel sıfırlı eleman için keyfi bir ideal içerir. ■

Uyarı 4.14. Teorem 4.10 ile nil-yarı değişmeli-I halka sınıfı için Köthe varsayımının doğru olduğu gösterilmiştir. Gerçekten de tüm nil-yarı değişmeli-I halkalar *2-asallı* dır. *2-asallı* halkalar için de Köthe varsayımı doğrudur.

Aşağıda *2-asallı* olan nil-yarı değişmeli-I olmayan halka örneği verilecektir.

Örnek 4.15. R indirgenmiş olmayan herhangi bir halka olsun. Üst üçgensel matris halkası $T_5(R)$ abelyan değildir. Gerçekten de $E_{11}, E_{13} \in T_5(R)$ olmak üzere $E_{13}E_{11} = 0$ fakat $E_{11}E_{13} \neq 0$.

Örnek 4.16. R indirgenmiş bir halka olsun. Örnek 4.15 ten $T_5(R)$ nin nil-yarı değişmeli-I halka olmadığı ve dolayısıyla abelyan olmadığı gösterildi. Ancak $T_5(R)$, *2-asallı* dır.

Sonuç 4.17. [34] Nil-yarı değişmeli-I halkalar nil-Armendarizdir.

İspat: R nil-yarı değişmeli-I halka olsun. Teorem 4.10 dan $nil(R), R$ nin idealidir. Antoine göre $nil(R), R$ nin ideali ise R nil-Armendariz halkadır [4, Önerme 2.1]. ■

Sonuç 4.18. [34] Nil-yarı değişmeli-I halkalar zayıf Armendarizdir.

İspat: Sonuç 4.17 de nil-yarı değişmeli-I halkaların nil-Armendariz halka olduğu gösterildi. Antoine nil-Armendariz halkaların ise zayıf Armendariz halka olduğunu gösterdi [4]. Böylece nil-yarı değişmeli-I halkalar nil Armendariz ve nil Armendariz halkalar zayıf Armendariz olduğundan sonuç açıktır. Burada nil-yarı değişmeli-I halkaların yarı değişmeli halkaların ve özel olarak zayıf Armendariz halkaların bir genelleştirilmesi olduğu görülür. Eğer nil-yarı değişmeli-I halka ise her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n(R)$ üst üçgensel matris halkası da nil-yarı değişmeli-I halkadır. Aşağıda verilen örnek yukarıdaki olasılığı kaldırır. ■

Örnek 4.19. Herhangi bir R halkası için $T_5(R)$ üst üçgensel matris halkası nil-yarı değişmeli-I değildir. Gerçekten $0 \neq a \in nil(R)$ için $aE_{11}, E_{23} \in nil(T_5(R))$ ve $aE_{11}E_{23} = 0$ olmasına rağmen $aE_{11}E_{12}E_{23} = aE_{13} \neq 0$ şeklindedir.

Şimdi aşağıda bir R halkası için $nil(R)$; R nin ideali olmasına rağmen nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip olmayan bir halka örneği verilecektir.

Örnek 4.20. R indirgenmiş bir halka olsun. [31, Önerme 2.2] den $T_4(R)$ zayıf Armendariz halkadır ve $nil(T_4(R))$; $T_4(R)$ nin bir idealidir. Buna rağmen $E_{12}, E_{34} \in nil(T_4(R))$ için $E_{12}E_{34} = 0$ ancak $E_{12}E_{23}E_{34} = E_{14} \neq 0$ olduğundan $T_4(R)$ nil-yarı değişmeli-I halka değildir.

Lemma 4.21. [34] Nil-yarı değişmeli-I halkaların sonlu dik çarpımları da nil-yarı değişmeli-I halkadır.

İspat: İlk olarak $nil\left(\prod_{i=0}^{n} R_i\right) = \prod_{i=0}^{n} nil(R_i)$ olduğunu gösterelim. Bunu görmek için $nil\left(\prod_{i=0}^{n} R_i\right) \subseteq \prod_{i=0}^{n} nil(R_i)$ ve $\prod_{i=0}^{n} nil(R_i) \subseteq nil\left(\prod_{i=0}^{n} R_i\right)$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in nil\left(\prod_{i=0}^{n} R_i\right)$ olsun. Bu durumda $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^k = 0$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. Burada her bir $i = 0, 1, \ldots, n$ için $a_i^k = 0$ elde edilir. Bu ise her $= 0, 1, 2, \ldots, n$ için $a_i \in nil(R_i)$. Böylece $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \prod_{i=0}^{n} nil(R_i)$. O halde

$$nil\left(\prod_{i=0}^{n} R_i\right) \subseteq \prod_{i=0}^{n} nil(R_i)$$

şeklindedir. Şimdi $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \prod_{i=0}^{n} nil(R_i)$ olsun. Bu durumda her bir $i = 0, 1, \ldots, n$ için $b_i \in nil(R_i)$. Yani her $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ için $b_i^{k_i} = 0$ olacak şekilde k_i pozitif tamsayıları vardır. $k = maks(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ olsun. Buradan $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^k = 0$, yani $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^k \in nil\left(\prod_{i=0}^{n} R_i\right)$. O halde

$$\prod_{i=0}^{n} nil(R_i) \subseteq nil\left(\prod_{i=0}^{n} R_i\right)$$

şeklindedir.
$(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in nil\left(\prod_{i=0}^{n} R_i\right)$ için $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$ olsun. Bu durumda her bir $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_i b_j = 0$ elde edilir. Her bir i için R_i de nil-yarı değişmeli-I olduğundan $a_i R_i b_i = 0$. Böylece $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prod_{i=0}^{n} R_i (b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Önerme 4.22. [34] R bir halka ve Ω, R nin merkezi düzenli elemanlardan oluşan çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda R nin nil-yarı değişmeli-I halka olması için gerek ve yeter şart $\Omega^{-1}R$ nin nil-yarı değişmeli-I halka olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $\Omega^{-1}R$ nil-yarı değişmeli-I halka olsun. Nil-yarı değişmeli-I halkaların alt halkaları da nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip olduğundan R de nil-yarı değişmeli-I halkadır. Tersine R nil-yarı değişmeli-I halka olsun. $\alpha = u^{-1}a, \beta = v^{-1}b \in nil(\Omega^{-1}R)$ için $\alpha\beta = 0$ olsun. Bu durumda her $u, v \in \Omega$ için $a, b \in nil(R)$ ve $\Omega \subseteq C(R)$ olduğundan $\alpha\beta = u^{-1}v^{-1}ab = 0$ elde edilir. Yani $ab = 0$. R nil-yarı değişmeli-I halka olduğundan her $r \in R$ için $arb = 0$. Böylece her bir $\gamma = \omega^{-1}r \in \Omega^{-1}R$ için $\alpha\gamma\beta = (u^{-1}a)(\omega^{-1}r)(v^{-1}b) = (u\omega v)^{-1}(arb) = 0$ olur ki bu ise $\Omega^{-1}R$ nil-yarı değişmeli-I halka olmasıdır. ■

Sonuç 4.23. [34] R bir halka olsun. Bu durumda $R[x]$ nil-yarı değişmeli-I halkadır gerek ve yeter şart $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkası nil-yarı değişmeli-I halkadır .

İspat: Kabul edelim ki $R[x]$ nil-yarı değişmeli-I olsun. $\Omega = \{1, x, x^2, \ldots\}$ alındığında $R[x; x^{-1}] = \Omega^{-1}R[x]$ olup Önerme 4.22 den $R[x; x^{-1}]$ nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahiptir. Tersine $R[x]$ polinom halkası; $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının alt halkaları da nil-yarı değişmeli-I olma özelliğinin kalıtımlı olmasından elde edilir. ■

Aşağıdaki örnekte nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip R halkası için; aşikar genişlemesi olan $T(R,R)$ nin nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip olmadığı verilmiştir.

Örnek 4.24. [34] R indirgenmiş bir halka olsun. Örnek 4.4 te R halkası üzerine kurulan 3×3 tipindeki üst üçgensel matris halkasının nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip olduğu gösterildi. Bunu görmek için, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in nil(T(S,S))$ ve $\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & e \end{pmatrix} \in T(S,S)$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$ ancak $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \neq 0$. Burada $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir. $(a,b)(c,d) = 0$ bulunur. Ancak $(a,b)(e,f)(c,d) \neq 0$ olup $T(S,S)$ nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip değildir.

Önerme 4.25. [34] R yarı asal bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R indirgenmiştir.

(2) R simetriktir.

(3) R terslenebilirdir.

(4) R yarı değişmelidir.

(5) R nil-yarı değişmeli-I.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) R halkası için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(ba)^2 = b(ab)a = 0$ olup $ba \in nil(R)$. R indirgenmiş olduğundan $ba = 0$. Yani R terslenebilirdir.

(3) $\Rightarrow$ (4) R halkası için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Bu durumda R terslenebilir olduğundan $ba = 0$. Her $r \in R$ için eşitliği r ile çarpalım. Buradan $b(ar) = 0$ ve kabulden $arb = 0$ bulunur. Yani $aRb = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (2) R halkası için $a, b, c \in R$ olmak üzere $abc = 0$ olsun. R yarı değişmeli olduğundan $aRbc = 0$. Eşitliğin her iki yanı soldan bc ve sağdan a ile çarpıldığında $bcaRbca = 0$ elde

edilir. R yarı asal halka olduğundan $bca = 0$. Bu ise R halkasının simetrik olduğunu gösterir.
(4) $\Rightarrow$ (5) R halkası için $a, b \in nil(R)$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. R yarı değişmeli olduğundan $aRb = 0$. Yani R nil-yarı değişmeli-I halkadır.
(5) $\Rightarrow$ (4) R halkası için $a, b \in R$ $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(ba)^2 = b(ab)a = 0$ olup $ba \in nil(R)$. Diğer taraftan R nil-yarı değişmeli-I ve yarı asal halka olduğundan $ba = 0$. Buradan $(arb)(arb) = 0$ olup her $r \in R$ için $arb \in nil(R)$ ve R nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip olduğundan $(arb)R(arb) = 0$. Buradan R nin yine asal halka olmasından $arb = 0$ bulunur. Yani R yarı değişmelidir. ■

Sonuç 4.26. [34] R von Neumann düzenli halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R indirgenmiştir.

(2) R simetriktir.

(3) R terslenebilirdir.

(4) R yarı değişmelidir.

(5) R nil-yarı değişmeli-I.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R halkası için $a, b, c \in R$ olmak üzere $abc = 0$ olsun. $(bca)^2 = bc(abc)a = 0$ olup $bca \in nil(R)$ ve R indirgenmiş olduğundan $bca = 0$ yani R simetriktir.
(2) $\Rightarrow$ (3) R halka olmak üzere $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $1ab = 0$. R simetrik olduğundan $1ba$ yani $ba = 0$ olup R terslenebilirdir.
(3) $\Rightarrow$ (4) R halkası için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ her $r \in R$ için $bar = 0$ ve $arb = 0$. Yani $aRb = 0$ olup R yarı değişmelidir.
(4) $\Rightarrow$ (5) R halkası için $a, b \in nil(R)$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. $nil(R) \subset R$ ve R yarı değişmeli olduğundan $aRb = 0$.
(5) $\Rightarrow$ (1) R halkası için $a \in R$ olmak üzere $a^2 = 0$ olsun. $a \in nil(R)$ ve R nil-yarı değişmeli-I halka olduğundan $aRa = 0$. R von Neumann regular halka ve $a \in aRa = 0$ olduğundan $a = 0$. ■

Tanım 4.27. [36] I; R halkasının sağ yada sol ideali olmak üzere eğer $a, b \in \sqrt{I}$ için $ab \in I$ olması $aRb \subseteq I$ olmasını gerektiriyor ise I ya nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip ideal denir. Burada $\sqrt{I} = \{s \in R |$ Bir n pozitif tamsayısı için $s^n \in I\ \}$.

Lemma 4.28. [34] R bir halka ve I; R nin bir ideali olsun. Bu durumda R/I nın nil-yarı değişmeli-I halka olması için gerek ve yeter şart I nın nil-yarı değişmeli-I ideal olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $\bar{R} := R/I$ nil-yarı değişmeli-I halka olsun. $a, b \in \sqrt{I}$ olmak üzere $ab \in I$ olsun. Buradan $a^n, b^m \in I$ olacak şekilde n, m pozitif tamsayıları vardır. Yani $\bar{a}^n = \bar{0}, \bar{b}^m = \bar{0}$ ve $\bar{ab} = \bar{0}$. Kabulden $a\bar{R}b = \bar{0}$. Dolayısıyla $aRb \subseteq I$ elde edilir. Böylece I nil-yarı değişmeli-I idealdir.
Tersine kabul edelim ki; I nil-yarı değişmeli-I ideal olsun. $\bar{a}, \bar{b} \in nil(R/I)$ olmak üzere $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ olsun. Buradan $\bar{a}^k = \bar{0}$ ve $\bar{b}^t = \bar{0}$ olacak şekilde k, t pozitif tamsayıları vardır ve $ab \in I$. Kabulden $aRb \subseteq I$ olup $\bar{a}\bar{R}\bar{b} = \bar{0}$ elde edilir. Bu ise R/I bölüm halkasının nil-yarı değişmeli-I olma özelliğine sahip olduğunu gösterir. ■

Tanım 4.29. R bir halka, U; R nin bir alt kümesi olmak üzere,

$$r_{nil(R)}(U) = \{r \in R | Ur = 0\} \text{ ve } l_{nil(R)}(U) = \{l \in R | rU = 0\}$$

şeklide tanımlıdır.

Önerme 4.30. [34] R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir :

(1) R nil-yarı değişmeli-I halkadır.

(2) Her $U \subseteq nil(R)$ için $r_{nil(R)}(U)$, R nin idealidir.

(3) Her $V \subseteq nil(R)$ için $l_{nil(R)}(V)$, R nin idealidir.

İspat: (1) ⇒ (2) Kabul edelim ki R nil-yarı değişmeli-I halka olsun. $r \in r_{nil(R)}(U)$ olmak üzere R nil-yarı değişmeli-I olma özelliğine sahip olduğundan $Ur = 0$ ve $URr = 0$ elde edilir. Yani $Rr \subseteq r_{nil(R)}(U)$. Ayrıca $Ur = O$ olduğundan $UrR = 0$. Dolayısıyla $rR \in r_{nil(R)}(U)$. Her $r, s \in r_{nil(R)}(U)$ için $Ur = 0$ ve $Us = 0$. Buradan $U(r + s) = Ur + Us = 0 + 0 = 0$ elde edilir. Böylece $r + s \in r_{nil(R)}(U)$. Bu yüzden her bir $U \subseteq nil(R)$ için $r_{nil(R)}(U), R$ nin idealidir.
(2) ⇒ (1) $a, b \in nil(R)$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. $U = \{a\} \subset nil(R)$ alındığında $b \in r_{nil(R)}(U)$ elde edilir. Kabulden her $r \in R$ için $rb \in r_{nil(R)}(U)$ olup $Urb = 0$ yani $arb = 0$ bulunur. Böylece R nil-yarı değişmeli-I halkadır.
(1) ⇒ (3) ispatı (1) ⇒ (2) ye benzer şekide yapılır. ■

Önerme 4.31. [34] R nil-yarı değişmeli-I halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır:

(1) Her $U \subseteq nil(R)$ için $R/r_{nil(R)}(U)$ nil-yarı değişmeli-I halkadır.

(2) Her $V \subseteq nil(R)$ için $R/l_{nil(R)}(V)$ nil-yarı değişmeli-I halkadır.

İspat: $\overline{a}, \overline{b} \in nil(R/r_{nil(R)}(U)$ olmak üzere $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ olsun. Bu durumda $\bar{a}^n = \bar{0}, \bar{b}^m = \bar{0}$ olacak şekilde n, m pozitif tamsayıları vardır. Yani; $a^n, b^m \in r_{nil(R)}(U)$ elde edilir. Buradan $a, b \in nil(R)$ ve $ab \in r_{nil(R)}(U)$ olduğundan $Uab = 0$ şeklindedir. R nil-yarı değişmeli-I olduğundan her $r \in R$ için $Uarb = 0$. Ayrıca $nil(R)$; R nin ideali olduğundan $arb \in r_{nil(R)}(U)$ bulunur. Böylece her $r \in R$ için $\overline{ar}\overline{b} = \overline{arb} = \overline{0}$ elde edilir. Bu ise $R/r_{nil(R)}(U)$ bölüm halkasının nil-yarı değişmeli-I özelliğine sahip olduğunu gösterir.
(2) nin ispatı (1) e benzer şekilde yapılır. ∎

4.1. Nil-Yarı Değişmeli-I Halkaların Polinom Genişlemeleri

Kim ve Lee , R terslenebilir iken $R[x]$ yarı değişmeli olmayacak şekilde örnek verdiler [22, Örnek 2.1]. Hirano R yarı değişmeli halka iken $R[x]$ te yarı değişmeli halkadır iddasında bulundu [15]. Ancak [20, Örnek 2] de bu iddianın yanlış olduğu gösterildi. [4, Teorem 5.3] teki nil-Armendariz halkalar için $nil(R[x]) = nil(R)[x]$ olup olmadığı buna denk olarak nil halkalar üzerinde polinom halkalarının nil olup olmadığı sorusu soruldu. Amitsur, sayılamayan K-cebirleri için bu ifadenin doğruluğunu ispatladı [2]. Ancak son zamanlarda, [40] ta Agata Smoktunowicz, sonucun sayılabilir alanlar üzerindeki cebirler için doğru olmadığını kanıtladı.
R bir halka ve $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$ olsun. C_f; f nin katsayılar kümesini göstersin.

Lemma 4.32. [34] R nil-yarı değişmeli-I halka olsun. $f_1f_2\ldots f_n \in R[x]$ olmak üzere $C_{f_1f_2\cdots f_n} \subseteq nil(R)$ ise $C_{f_1}C_{f_2}\ldots C_{f_n} \subseteq nil(R)$.

İspat: R nil-yarı değişmeli-I halka olduğundan ve teorem 4.10. dan $nil(R)$; R nin idealidir. Sonuç [31, Önerme 3.3] ten elde edilir. ∎

Sonuç 4.33. [34] Eğer R nil-yarı değişmeli-I halka ise $nil(R[x]) \subseteq nil(R)[x]$.

Teorem 4.34. [34] Eğer R nil-yarı değişmeli-I halka ise $nil(R[x]) = nil(R)[x]$.

İspat: Sonuç 4.33 te $nil(R[x]) \subseteq nil(R)[x]$ olduğundan diğer hesaplamayı yani; $nil(R)[x] \subseteq nil(R[x])$ göstermeliyiz. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in nil(R)[x]$ olsun. Bu durumda $a_0, a_1, \ldots, a_n \in nil(R)$. Kabul edelim ki; $i = 0, 1, \ldots, n$ için $a_i^{m_i} = 0$ olacak şekilde $m_i > 0$ vardır. $k = m_0 + m_1 + \cdots + m_n + 1$ olsun. Bu durumda;

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)^k = \sum_{s=0}^{nk} \left(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=s} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k} \right) x^s,$$

$a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k} \in \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ düşünelim. $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$ da yer alan a_0 ın sayısı m_0 dan fazla ise $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$ elemanını $b_0a_0^{j_1}b_1a_0^{j_2}\ldots b_{t-1}a_0^{j_t}b_t$ olarak yazarız. Burada $1 \leq j_1, j_2, \ldots, j_t, m_0 \leq j_1 + j_2 + \ldots + j_t$ ve her bir i için $0 \leq i \leq t$ olmak üzere b_i; $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ deki bazı elemanların çarpımına ya da 1 e eşittir. $a_0^{j_1+j_2+\ldots+j_t} = 0$ ve R nil-yarı değişmeli-I olduğundan $a_0^{j_1}b_1a_0^{j_2}a_0^{j_3}\ldots a_0^{j_t} = 0$ elde edilir. Teorem 4.10 dan $a_0^{j_1}b_1, a_0^{j_2}a_0^{j_3}\ldots a_0^{j_t} \in nil(R)$ bulunur. Burada nil-yarı değişmeli-I olma özelliğinden; $a_0^{j_1}b_1a_0^{j_2}b_2a_0^{j_3}a_0^{j_4}\ldots a_0^{j_{t-1}}a_0^{j_t} = 0$. Bu işleme devam edildiğinde $b_0a_0^{j_1}b_1a_0^{j_1}\ldots b_{t-1}a_0^{j_t}b_t = 0$ olur ve buradan $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k} = 0$ bulunur. Eğer $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$ lerin sayısı m_i den daha büyükse benzer sonuçla $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k} = 0$ ve buradan

$$\sum_{s=0}^{nk} \left(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=s} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k} \right) x^s = 0.$$

Bu ise $f(x)^k = 0$ yani $f(x) \in nil(R[x])$. ■

[31] de; R halkasının yarı değişmeli olması durumunda $nil(R[x]) \subseteq nil(R)[x]$ olduğu ispatlandı.

Sonuç 4.35. [34] Eğer R yarı değişmeli halka ise bu durumda $nil(R[x]) = nil(R)[x]$ sağlanır.

İspat: Eğer R yarı değişmeli halka ise R nil-yarı değişmeli-I halkadır. Teorem 4.34 ten sonuç açıktır. ■

Teorem 4.36. [34] Eğer R nil-yarı değişmeli-I ve Armendariz halka ise bu durumda $R[x]$ polinom halkası nil-yarı değişmeli-I halkadır.

İspat: $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i, g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in nil(R[x])$ olsun. R nil-yarı değişmeli olduğundan Teorem 4.34 e göre $nil(R[x]) = nil(R)[x]$. Dolayısıyla $0\le i\le m, 0\le j\le n$ için $a_i, b_j\in nil(R)$. Kabul edelim ki; $f(x)g(x)=0$. R Armendariz halka olduğundan her i,j için $a_ib_j=0$. Nil-yarı değişmeli-I özelliğinden; $a_iRbj=0$. Her bir $h(x)=\sum_{k=0}^{p}c_kx^k\in R[x]$ polinomu için $f(x)h(x)g(x) = \sum_{s=0}^{m+n+p}\left(\sum_{i+j+k=s}a_ic_kb_j\right)x^s = 0$. Yani $f(x)R[x]g(x) = 0$ olup $R[x]$ nil-yarı değişmeli-I halkadır. ■

Teorem 4.37. [34] Eğer R nil-yarı değişmeli-I halka ise bu durumda $R[x]$ polinom halkası zayıf Armendariz halkadır.

İspat: $F = \sum_{i=0}^{p}f_iy^i, G = \sum_{j=0}^{q}g_jy^j \in R[x][y]$ olmak üzere $FG = 0$ olsun. Burada $f_i=\sum_{s=0}^{m_i}a_s^ix^s$ ve $g_j=\sum_{t=0}^{n_j}b_t^jx^t$ şeklindedir. [3, Teorem.1] göre R nil-yarı değişmeli-I halka olduğundan ve Teorem 4.10 dan $a_s^ib_t^j\in nil(R)$. Böylece her bir i,j,s,t için $\sum_{s+t=k}a_s^ib_t^j\in nil(R)$. Teorem 4.34 ten $f_ig_j=\left(\sum_{s=0}^{m_i}a_s^ix^s\right)\left(\sum_{t=0}^{n_j}b_t^jx^t\right) = \sum_{k=0}^{m_i+n_j}\left(\sum_{s+t=k}a_s^ib_t^j\right)x^k\in nil(R[x])$. Bu durumda $R[x]$ zayıf Armendarizdir. ■

Sonuç 4.38. [31, Teorem 3.8] Eğer R yarı değişmeli halka ise $R[x]$ zayıf Armendariz halkadır.

Teorem 4.39. [34] Eğer R nil-yarı değişmeli-I halka ise her n pozitif tamsayısı için $R[x]/(x^n)$ zayıf Armendariz halkadır.

İspat: Kabul edelim ki R nil-yarı değişmeli-I halka olsun. $\bar{R}=R[x]/(x^n)$ ile tanmlansın, R deki elemanlar u ile değiştirilirse $u^n=0$ için $R[x]/(x^n)=R[u]=R+Ru+Ru^2+\ldots+Ru^{n-1}$ şeklindedir. Burada $fg=0$ olacak şekilde $f,g\in R[u][y]$ olsun. Ayrıca $f=\sum_{i=0}^{p}f_iy^i$ ve $g=\sum_{j=0}^{q}g_jy^j$ şeklinde tanımlıdır. $f_i=\sum_{s=0}^{n-1}a_s^iu^s, g_j=\sum_{t=0}^{n-1}b_t^ju^t$ olmak üzere f ve g de yerine yazıldığında $f=\sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{s=0}^{n-1}a_s^iu^s\right)y^i=\sum_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{p}a_s^iy^i\right)u^s$ elde edilir. Buradan

$$g=\sum_{j=0}^{q}\left(\sum_{t=0}^{n-1}b_t^ju^t\right)y^j=\sum_{t=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{q}b_t^jy^j\right)u^t$$ bulunur ve $fg=0$ denkleminden

$$\left(\sum_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{p}a_s^iy^i\right)u^s\right)\left(\sum_{t=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{q}b_t^jy^j\right)u^t\right)=0.$$

İşlemler yapıldığında $k=0,1,\ldots,n-1$ için

$$\sum_{s+t=k}\left(\sum_{i=0}^{p}a_s^iy^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q}b_t^jy^j\right)=0 \tag{4.1}$$

denklemi elde edilir. $0\leq i\leq p$ ve $0\leq j\leq q$ olmak üzere $a_s^ib_t^j\in nil(R)$ olduğunu göstermek için her $s+t=0,1,\ldots,n-1$ için $s+t$ üzerinde tümevarım uygulanır. İlk olarak eğer $s+t=0$ ise $s=t=0$ dır. Böylece $\left(\sum_{i=0}^{p}a_0^iy^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q}b_0^jy^j\right)=0$ elde edilir. Sonuç 4.17 ye göre R nil-yarı değişmeli-I olduğundan zayıf Armendariz halkadır. Buradan $0\leq i\leq p$ ve $0\leq j\leq q$ için $a_0^ib_0^j\in nil(R)$ elde edilir. Daha sonra $k\leq n-1$ olacak şekilde $0\leq i\leq p$ ve $0\leq j\leq q$ için $a_s^ib_t^j\in nil(R)$ olsun. İspatı tamamlamak için $s+t=k$ olacak şekildeki her s,t için $a_s^ib_t^j\in nil(R)$ olduğu gösterilecektir. Bulunan (4.1) denkleminden

$$0=\sum_{s+t=k}\left(\sum_{i=0}^{p}a_s^iy^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q}b_t^jy^j\right)=\sum_{s+t=k}\sum_{l=0}^{p+q}\left(\sum_{i+j=l}a_s^ib_t^j\right)y^l$$

$$=\sum_{l=0}^{p+q}\left(\sum_{s+t=k}\sum_{i+j=l}a_s^ib_t^j\right)y^l=\sum_{l=0}^{p+q}\left(\sum_{i+j=l}\sum_{s+t=k}a_s^ib_t^j\right)y^l$$

işlemleri yapıldığında

$$\sum_{s+t=k}a_s^0b_t^0=0$$

$$\sum_{s+t=k}a_s^0b_t^1+\sum_{s+t=k}a_s^1b_t^0=0\ldots,$$

$$\sum_{s+t=k}a_s^0b_t^{p+q}+\sum_{s+t=k}a_s^1b_t^{p+q-1}+\ldots+\sum_{s+t=k}a_s^{p+q}b_t^0=0$$

eşitlikleri bulunur. Eğer $s\geq 1$, ise $k-s<k$. Burada tümevarım hipotezinden $a_0^0b_{k-s}^0\in nil(R)$ olur ve $b_{k-s}^0a_0^0\in nil(R)$. Böylece R nil yarı değişmeli-I olduğundan $a_1^0b_{k-1}^0a_0^0+a_2^0b_{k-2}^0a_0^0+\ldots+a_k^0b_0^0a_0^0\in nil(R)$ elde edilir. Eğer $\sum_{s+t=k}a_s^0b_t^0=0$ sağdan a_0^0 ile çarpılırsa

$a_0^0 b_k^0 a_0^0 \in nil(R)$ bulunur ve bu yüzden $a_0^0 b_k^0 \in nil(R)$ dir. Daha sonra aynı denklem sağdan a_1^0 ile çarpılırsa

$$0 = a_0 b_k a_1 + a_1^0 b_{k-1}^0 a_1^0 + a_2^0 b_{k-2}^0 a_1^0 + \ldots + a_k^0 b_0^0 a_1^0$$

$$a_1^0 b_{k-1}^0 a_1^0 = -a_0 b_k a_1 - (a_2^0 b_{k-2}^0 a_1^0 + \ldots + a_k^0 b_0^0 a_1^0)$$

Burada $a_0^0 b_k^0 \in nil(R)$ olduğundan $a_0^0 b_k^0 a_1^0 \in nil(R)$ ve hipotezden $a_2^0 b_{k-2}^0 a_1^0, \ldots, a_k^0 b_0^0 a_1^0 \in nil(R)$. R nil-yarı değişmeli-I olduğundan $a_1^0 b_{k-1}^0 \in nil(R)$ bulunur. Benzer şekilde işlemlere devam edildiğinde $a_2^0 b_{k-2}^0 \in nil(R), \ldots, a_k^0 b_0^0 \in nil(R)$ elde edilir. Her s, t için $s + t = k$ ve her i, j için $i + j = 0$ olmak üzere $a_s^i b_t^j \in nil(R)$ olduğu ispatlanmış olur. Şimdi varsayalım ki her s, t için $s + t = k$ ve her i, j için $i + j = l$ olmak üzere $l \leq p + q$ olacak şekilde $a_s^i b_t^j \in nil(R)$ olsun. Her s, t için $s+t = k$ ve her i, j için $i+j = l$ olmak üzere $a_s^i b_t^j \in nil(R)$ olduğu gösterilecektir. Eğer $t \leq k$ ise tümevarım hipotezinden $a_0^0 b_t^j \in nil(R)$ ve böylece $b_t^j a_0^0 \in nil(R)$. Eğer $i \geq 1$ ise $l - i < 1$ olur. $p + q$ üzerinde uygulanan tümevarım hipotezinden, her $i \geq 1$ için $a_0^0 b_k^{l-i} \in nil(R)$ ki bunun anlamı $b_k^{l-i} a_0^0 \in nil(R)$.

$$\sum_{s+t=k} a_s^0 b_t^l + \sum_{s+t=k} a_s^1 b_t^{l-1} + \ldots + \sum_{s+t=k} a_s^l b_t^0 = 0$$

denklemi sağdan a_0^0 ile çarpılırsa $a_0^0 b_k^l a_0^0 \in nil(R)$ ve bu yüzden $a_0^0 b_k^l \in nil(R)$ bulunur. Benzer şekilde her s, t için $s + t = k$ ve her i, j için $i + j = l$ olmak üzere $a_s^i b_t^j \in nil(R)$ olduğu gösterilebilir. Böylece tümevarım hipotezinden her $0 \leq i \leq p$, $0 \leq j \leq q$ ve s, t için $s + t = 0, 1, \ldots, n - 1$ olmak üzere $a_s^i b_t^j \in nil(R)$ elde edilir.

$$f_i g_j = \left(\sum_{s=0}^{n-1} a_s^i u^s\right)\left(\sum_{t=0}^{n-1} b_t^j u^t\right) = \sum_{k=0}^{2n-2}\left(\sum_{s+t=k} a_s^i b_t^j\right)u^k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{s+t=k} a_s^i b_t^j\right)u^k$$

Burada R nil-yarı değişmeli-I olduğundan ve Teorem 4.10 dan $\sum_{s+t=k} a_s^i b_t^j \in nil(R)$. Böylece Teorem 4.34 ten $f_i g_j \in nil(R[u])$ olduğu açıktır. Bu da $R[u]$ nun zayıf Armendariz olduğunu ispatlar. ∎

Sonuç 4.40. [31, Teorem 3.9] R bir halka olsun. Eğer R yarı değişmeli halka ise her n pozitif tamsayısı için $R[x]/(x^n)$ zayıf Armendarizdir.

[31, Teorem 3.6] da R halkası ve R nin I ideali için eğer R/I zayıf Armendariz ve I yarı değişmeli (birimsiz halka) ise bu durumda R nin zayıf Armendariz olduğunu ispatladılar. Liu ve Zhao' nun sonucu benzer bir ispatla aşağıdaki gibi genişletilebilir.

Önerme 4.41. [34] R bir halka, I; R nin ideali olsun. Kabul edelim ki R/I zayıf Armendariz olsun. Eğer I nil-yarı değişmeli-I halka ise bu durumda R zayıf Armendariz halkadır.

Tanım 4.42. R bir halka olsun. Eğer

$$a\alpha(a) \in nil(R) \Leftrightarrow a \in nil(R)$$

sağlanıyorsa R ye ***zayıf*** α***-katı*** halka denir.

Tanım 4.43. [36] R bir halka olsun. Eğer $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ polinomları için $pq = 0$ iken her $0 \leq i \leq m$ $0 \leq j \leq n$ için $a_i\alpha^i(b_j) \in nil(R)$ sağlanıyorsa R halkası ***zayıf*** α***-skew*** Armendarizdir.

Önerme 4.44. R bir zayıf α-katı halka ve $nil(R)$, R nin ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır. [36, Önerme 2.3].

(1) Eğer $ab \in nil(R)$ ise her m, n pozitif tamsayıları için $a\alpha^m(b) \in nil(R)$, $\alpha^n(a)b \in nil(R)$.

(2) Eğer bir k pozitif tamsayısı için $\alpha^k(a)b \in nil(R)$ ise bu durumda $ab, ba \in nil(R)$.

(3) Eğer bir t pozitif tamsayısı için $a\alpha^t(b) \in nil(R)$ ise bu durumda $ab, ba \in nil(R)$

İspat:

(1) Eğer $ab \in nil(R)$ ise $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$. $nil(R), R$ nin ideali olduğundan $b\alpha(a)\alpha(b)\alpha^2(a) = b\alpha(a)\alpha(b\alpha(a)) \in nil(R)$ elde edilir. Bu durumda $b\alpha(a) \in nil(R)$ ve $\alpha(a)b \in nil(R)$ olur. Bu şekilde işlemlere devam edildiğinde her m pozitif tamsayısı için $\alpha^m(a)b \in nil(R)$. Benzer şekilde $ba \in nil(R)$ için de her n pozitif tamsayısı için $\alpha^n(a)b \in nil(R)$ ispatlanır.

(2) Eğer her k pozitif tamsayısı için $\alpha^k(a)b \in nil(R)$ ise

$$\alpha^k(a)\alpha^k(b) = \alpha^k(ab) = \alpha(\alpha^{k-1})(ab) \in nil(R).$$

Böylece $nil(R)$, R nin ideali olduğundan $(\alpha^{k-1}(ab))\alpha((\alpha^{k-1})(ab)) \in nil(R)$ ve tanım gereği $\alpha^{k-1}(ab) \in nil(R)$ bulunur. Bu işlemlere devam edildiğinde $ab \in nil(R)$ elde edilir.

(3) (2) deki yöntem kullanılarak ispatlanır.

■

[36, Teorem 3.3] de $nil(R)$, R nin ideali iken R zayıf α-katı olması durumunda R nin zayıf α-katı Armendariz olduğu ispatlanmıştır. [36, Teorem 3.9] da R zayıf α-katı ve yarı değişmeli halka olması durumunda $R[x]$ in zayıf α-katı Armendariz olduğu ispatlanmıştır. Benzer bir ispatla daha genel bir sonuca ulaşılır. Örnek 4.4, 4.6, 4.8 de R α-katı halka alınırsa o zaman nil-yarı değişmeli-I halkaların alt halkaları da nil-yarı değişmeli-I olduğu görülür [36, Teorem 3.1]. Ancak yarı değişmeli olmayan zayıf α-katı olan çeşitli halka örnekleri vardır. [14] de α-uyumlu halkalar tanıtılmış ve incelenmiştir. R bir halka ve her $a, b \in R$ iken $ab = 0$ olması için gerek ve yeter şart $a\alpha(b) = 0$ olması durumunda R halkasına α-katı denir. Bu durumda α nın birebir endomorfizma olduğu açıktır. Ayrıca [14, Teorem 2.2] de R bir halka olmak üzere R nin α-katı olması için gerek ve yeter şart R nin α-uyumlu ve indirgenmiş olmasıdır.

Teorem 4.45. [34] R bir halka olsun. Eğer R zayıf α-katı ve nil-yarı değişmeli-I halka ise $R[x]$ zayıf α-skew Armendariz halkadır.

İspat: $fg = 0$ olacak şekilde $f, g \in R[x][y; \alpha]$ olsun. $f = f_0 + f_1 y + \ldots + f_p y^p$ ve $g = g_0 + g_1 y + \ldots + g_q y^q$ şeklide tanımlıdır. Varsayalım ki $f_i = \sum_{s=0}^{m_i} a_s^i x^s$ olsun. $i = 0, 1, 2, \ldots, p$ olmak üzere $m = maks\{m_i\}$ için her $f_i = \sum_{s=0}^{m} a_s^i x^s$ yazılabilir. [36, Teorem 2.4] de $\alpha(1) = 1$ ve $xy = yx$. Her $a \in R$ için $xa = ax$. Böylece

$$f = \sum_{i=0}^{p} \left(\sum_{s=0}^{m} a_s^i x^s \right) y^i = \sum_{s=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{p} a_s^i y^i \right) x^s$$

.

Benzer şekilde her g_j için $g_j = \sum_{t=0}^{n} b_t^j x^t$ yazılabilir. Buradan

$$g = \sum_{j=0}^{q}\Big(\sum_{t=0}^{n} b_t^j x^t\Big)y^j = \sum_{t=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{q} b_t^j y^j\Big)x^t$$

bulunur. $fg = 0$ olduğundan aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\sum_{s+t=k}\Big(\sum_{i=0}^{p} a_s^i y^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{q} b_t^j y^j\Big) = 0, k = 0, 1, \ldots, m+n \tag{4.2}$$

Her s, t için $s+t = 0, 1, \ldots, m+n$ üzeride tümevarım yöntemini kullanarak her $0 \leq i \leq p$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_s^i\alpha^i(b_t^j) \in nil(R)$ olduğunu gösterelim. İlk olarak $s+t=0$ için $s=t=0$ olur ve $\Big(\sum_{i=0}^{p} a_0^i y^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{q} b_0^j y^j\Big) = 0$ bulunur. Teorem 4.10 a göre $nil(R)$, R nin idealidir. Böylece R zayıf α-katı ve $nil(R)$, R nin ideali olduğundan R zayıf α-skew Armendarizdir [36, Teorem 3.3]. Bu yüzden her $0 \leq i \leq p$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_0^i\alpha^i(b_0^j) \in nil(R)$. Şimdi varsayalım ki $s+t < k$ ve $k \leq m+n$ olacak şekilde her $0 \leq i \leq p$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_s^i\alpha^i(b_t^j) \in nil(R)$ olsun. $s+t=k$ için her $0 \leq i \leq p$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_s^i\alpha^i(b_t^j) \in nil(R)$ olduğunu gösterelim. Denklem 4.7 den

$$\sum_{s+t=k}\Big(\sum_{i=0}^{p} a_s^i y^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{q} b_t^j y^j\Big) = \sum_{s+t=k}\sum_{l=0}^{p+q}\Big(\sum_{i+j=l} a_s^i\alpha^i(b_t^j)\Big)y^l$$

$$= \sum_{l=0}^{p+q}\Big(\sum_{s+t=k}\sum_{i+j=l} a_s^i\alpha^i(b_t^j)\Big)y^l = \sum_{l=0}^{p+q}\Big(\sum_{i+j=l}\sum_{s+t=k} a_s^i\alpha^i(b_t^j)\Big)y^l$$

Böylece

$$\sum_{s+t=k} a_s^0 b_t^0 = 0;$$

$$\sum_{s+t=k} a_s^0 b_t^1 + \sum_{s+t=k} a_s^1\alpha(b_t^0) = 0;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{s+t=k} a_s^0 b_t^l + \sum_{s+t=k} a_s^1\alpha(b_t^{l-1}) + \ldots + \sum_{s+t=k} a_s^l\alpha^l(b_t^0) = 0;$$

$$\sum_{s+t=k} a_s^p\alpha^p(b_t^q) = 0.$$

Eğer $s < k$ ise tümevarım hipotezinden $a_s^0 b_0^0 \in nil(R)$ ve buradan $b_0^0 a_s^0 \in nil(R)$ yazılabilir. $\sum_{s+t=k} a_s^0 b_t^0 = 0$ eşitliği soldan b_0^0 ile çarpılırsa $b_0^0 a_0^0 b_k^0 + b_0^0 a_1^0 b_{k-1}^0 + \cdots + b_0^0 a_{k-1}^0 b_1^0 \in nil(R)$. Buradan R nil-yarı değişmeli-I olduğundan $b_0^0 a_k^0 b_0^0 \in nil(R)$ ve $b_0^0 a_k^0 \in nil(R)$ bulunur. Dolayısıyla $a_k^0 b_0^0 \in nil(R)$ olur. Eğer aynı eşitlik soldan b_1^0 ile çarpılırsa $b_1^0 a_{k-1}^0 b_1^0 = (b_1^0 a_0^0 b_k^0 + b_1^0 a_1^0 b_{k-1}^0 + \ldots + b_1^0 a_{k-2}^0 b_2^0) - b_1^0 a_k^0 b_0^0 = -(b_1^0 a_0^0) b_k^0 - (b_1^0 a_1^0) b_{k-1}^0 - \cdots - (b_1^0 a_{k-2}^0) b_2^0 - b_1^0 (a_k^0 b_0^0) \in nil(R)$ bulunur. R nil-yarı değişmeli-I olduğundan $a_{k-1}^0 b_1^0 \in nil(R)$. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse $a_{k-2}^0 b_2^0 \in nil(R), \ldots, a_0^0 b_k^0 \in nil(R)$ olduğu görülür. Öyleyse her s, t için $s + t = k$ ve her i, j için $i + j = 0$ olmak üzere $a_s^i \alpha^i(b_t^j) \in nil(R)$ olduğunu göstermeliyiz. Varsayalım ki her s, t için $s + t = k$ ve her i, j için $i + j < l$ olsun. Her s, t için $s + t = k$ ve her i, j için $i + j = l$ olmak üzere $a_s^i \alpha^i(b_t^j) \in nil(R)$. Eğer $s < k$ ise tümevarım hipotezinden $a_s^i \alpha^i(b_0^0) \in nil(R)$. Önerme 4.44 ten $a_s^i b_0^0 \in nil(R)$ ve bu sebeple $b_0^0 a_s^i \in nil(R)$. Eğer $i < l$ ise l üzerinde tümevarım hipotezinden $a_k^i b_0^0 \in nil(R)$ ve bu yüzden $b_0^0 a_k^i \in nil(R)$ dir. $\sum_{s+t=k} a_s^0 b_t^l + \sum_{s+t=k} a_s^1 \alpha(b_t^{l-l}) + \ldots + \sum_{s+t=k} a_s^l \alpha^l(b_t^0)$ denklemi sol taraftan b_0^0 ile çarpılırsa $nil(R), R$ nin ideali olduğundan $b_0^0 a_k^l \alpha^l(b_0^0) \in nil(R)$ bulunur. Böylece $b_0^0 a_k^l \alpha^l(b_0^0) \alpha^l(a_k^l) = b_0^0 a_k^l \alpha^l(b_0^0 a_k^l) \in nil(R)$. Dolayısıyla $b_0^0 a_k^l \in nil(R)$ ve buradan $a_k^l b_0^0 \in nil(R)$ olduğu görülür. Önerme 4.44 ten $a_k^l \alpha^l(b_0^0) \in nil(R)$ bulunur. Benzer şekilde işlemler yapılarak her s, t için $s + t = k$ ve her i, j için $i + j = l$ iken $a_s^i \alpha^i(b_t^j) \in nil(R)$ elde edilir. Böylece tümevarım ispatlanmış olur. Yani her s, t için $s + t = 0, 1, \ldots, m + n$ ve her i, j için $0 \le i \le p$ ve $0 \le j \le q$ iken $a_s^i \alpha^i(b_t^j) \in nil(R)$

$$f_i \alpha^i(g_j) = \sum_{s=0}^{m} a_s^i x^s \alpha^i\left(\sum_{t=0}^{n} b_t^j x^t\right) = \sum_{s=0}^{m} a_s^i x^s \left(\sum_{t=0}^{n} \alpha^i(b_t^j) x^t\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{s+t=k} a_s^i \alpha^i(b_t^j)\right) x^k$$

R nil-yarı değişmeli-I olduğundan ve Teorem 4.10 dan $\sum_{s+t=k} a_s^i \alpha^i(b_t^j) \in nil(R)$. Teorem 4.34 ten $f_i \alpha^i(g_j) \in nil(R[x])$. Böylece $R[x]$ zayıf α-skew Armendariz halkadır. ■

Sonuç 4.46. [36, Teorem 3.9] R zayıf α-katı ve yarı değişmeli halka ise $R[x]$ zayıf α-skew Armendariz halkadır.

Sonuç 4.47. [34] R zayıf α-katı ve nil-yarı değişmeli-I halka olsun. Bu durumda $R[x]/ < x^n >$ zayıf α-skew Armendariz halkadır.

Sonuç 4.48. R zayıf α-katı ve yarı değişmeli halka olsun. Bu durumda $R[x]/ < x^n >$ zayıf α-skew Armendariz halkadır [36, Teorem 3.10].

5. NİL-YARI DEĞİŞMELİ-II HALKALAR

Bu bölümde nil-yarı değişmeli halkalar için yeni bir tanımlama yapılacak ve genişlemeleri incelenerek örnekler verilecektir.

Tanım 5.1. R bir halka olsun. Eğer $ab \in nil(R)$ iken her $r \in R$ için $arb \in nil(R)$ ise R ye **nil-yarı değişmeli-II** halka denir.

Uyarı 5.2. [8] R halkası nil-yarı değişmeli-II halkadır gerek ve yeter şart $n \geq 2$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ için $a_1 a_2 \ldots a_n \in nil(R)$ iken $a_1 r_1 a_2 r_2 \ldots a_{n-1} r_{n-1} a_n \in nil(R)$ olacak şekilde $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} \in R$ vardır.

İspat: R nil-yarı değişmeli-II halka olsun. Her $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ için $a_1 a_2 \ldots a_n \in nil(R)$. R nil-yarı değişmeli-II olduğundan

$$a_1 r_1 a_2 \ldots a_n \in nil(R)$$

$$a_1 r_1 a_2 r_2 \ldots a_n \in nil(R)$$

$$\vdots$$

$$a_1 r_1 a_2 r_2 \ldots a_{n-1} r_{n-1} a_n \in nil(R)$$

bulunur. Yani; $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} \in R$ için $a_1 r_1 a_2 r_2 \ldots a_{n-1} r_{n-1} a_n \in nil(R)$. Şimdi $n \geq 2$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ için $a_1 a_2 \ldots a_n \in nil(R)$ olduğunda $a_1 r_1 a_2 r_2, \ldots a_{n-1} r_{n-1} a_n \in nil(R)$ olacak şekilde $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} \in R$ olsun. $n = 2$ için R nin nil-yarı değişmeli-II olduğunu göstermek yeterlidir. $a_1 a_2 \in nil(R)$ olduğunda $a_1 r_1 a_2 \in nil(R)$ olur. R nil-yarı değişmeli-II halkadır. ■

Sonuç 5.3. [8] R nil-yarı değişmeli-II halka olsun. $a \in nil(R)$ ve $r \in R$ olmak üzere $ar, ra \in nil(R)$. Yani R halkasındaki her $a \in nil(R)$ için aR ve Ra; R halkasının tek taraflı idealleridir.

İspat: $a \in nil(R)$ olsun. Bu durumda $a^k = 0$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. $a^k r = 0$ ve $aa^{k-1} r \in nil(R)$. R nil-yarı değişmeli-II olduğundan $ara^{k-1} r \in nil(R)$ ve $arara^{k-2} r \in nil(R)$. Bu şekilde işleme devam edildiğinde $(ar)^m = 0$ olacak şekilde m

pozitif tamsayısı bulunur. Dolayısıyla $ar \in nil(R)$. Benzer şekilde $ra \in nil(R)$ olduğu gösterilir. ■

Teorem 5.4. [8] R bir halka ve I; R nin ideali olsun. Eğer I ve R/I nın her ikiside nil-yarı değişmeli-II halka ise R de nil-yarı değişmeli-II halkadır.

İspat: I ve R/I nil-yarı değişmeli-II halka olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in nil(R)$ olsun. Bu durumda $(ab)^k = 0$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. $\bar{R} = R/I$, $\bar{a} = a + I$, $\bar{b} = b+I$ ve $\bar{r} = r+I$ olmak üzere $\bar{a}\bar{b} \in nil(\bar{R})$. Burada $\bar{R}$ nil-yarı değişmeli-II olduğundan $\bar{a}\bar{r}\bar{b} \in nil(\bar{R})$ olur. $(arb)^n \in I$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. $s = 1, 2, \ldots, k-1$ için $rb(arb)^n ar, (arb)^n a, b(ab)^s(arb)^n \in I$. $(ab)^k = 0$ olduğundan $[(arb)^n a][b(ab)^{k-1}(arb)^n] = (arb)^n(ab)^k(arb)^n = 0$ şeklindedir. Burada iki köşeli parantez arasına $rb(arb^n)ar$ eklenirse, I nil-yarı değişmeli-II olduğundan $(arb)^n a(rb(arb)^n ar)b(ab)^{k-1}(arb)^n \in nil(I)$ bulunur. Buradan $(arb)^{2n+2}(ab)^{k-1}(arb)^n \in nil(I)$ olduğu görülür.

$$(arb)^{2n+2}(ab)^{k-1}(arb)^n = [(arb)^{2n+2}a][b(ab)^{k-2}(arb)^n] \in nil(I).$$

Benzer şekilde yukarıdaki işleme devam edildiğinde

$$[(arb)^{2n+2}a]rb(arb)^n ar[b(ab)^{k-2}(arb)^n] \in nil(I)$$

elde edilir. Yani; $(arb)^{3n+4}(ab)^{k-2}(arb)^n \in nil(I)$. Sürece devam edildiğinde $(arb)^{(k+2)n+2k} \in nil(I) \subseteq nil(R)$ bulunur. Böylece R nil-yarı değişmeli-II halkadır.

■

Sonuç 5.5. [8] R bir halka ve $I \subseteq nil(R)$; R nin bir ideali olsun. Bu durumda R nil-yarı değişmeli-II halkadır gerek ve yeter şart R/I nil-yarı değişmeli-II halkadır.

Önerme 5.6. [8] R bir halka ve $n \geq 2$ olsun. Bu durumda R nil-yarı değişmeli-II halkadır gerek ve yeter şart $T_n(R)$ halkası nil-yarı değişmeli-II halkadır gerek ve yeter şart $R[x]/(x^n)$ halkası nil-yarı değişmeli-II halkadır.

İspat: Nil-yarı değişmeli-II halkaların sonlu dik toplamları da nil-yarı değişmeli-II halkadır. $T_n(R)/Nil^*(T_n(R)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/Nil^*(R)$ olduğundan Sonuç 5.6 ya göre $T_n(R)$

nil-yarı değişmeli-II halkadır. Ayrıca $R[x]/(x^n)$, $T_n(R)$ nin alt halkası olan $V_n(R)$

$$V_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_0 & a_1 \\ & & & & a_0 \end{pmatrix} \mid a_i \in R \right\}$$

ye izomorf olduğundan $R[x]/(x^n)$ nil-yarı değişmeli-II halkadır [9, Teorem 3.9]. ■

Önerme 5.7. [8] R nil-yarı değişmeli-II halka olsun. Eğer R Armendariz halka ise $R[x]$ nil-yarı değişmeli-II halkadır.

İspat: R Armendariz halka olduğundan $nil(R)$, R nin (birim olmaksızın) alt halkasıdır [4, Sonuç 3.3]. Burada $R[x]$ de Armendariz halkadır [3, Teorem 1]. Böylece $nil(R)[x] = nil(R[x])$
[4, Önerme 2.7 ve Teorem 5.3]. Kabul edelim ki $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ için $f(x)g(x) \in nil(R[x])$ olsun. Ayrıca R Armendariz olduğundan her i, j için $a_i b_j \in nil(R)$ [3, Önerme 1]. Her $h(x) = \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \in R[x]$ için $f(x)h(x)g(x)$ yazıldığında katsayıları $\sum a_i c_k b_j$ formunda bulunur. R nil-yarı değişmeli-II olduğundan $a_i b_j \in nil(R)$ iken $a_i c_k b_j \in nil(R)$. Buradan $\sum a_i c_k b_j \in nil(R)$ elde edilir. Yani $f(x)h(x)g(x) \in nil(R)[x] = nil(R[x])$. ■

Önerme 5.8. [8] R bir halka olsun. Nil-yarı değişmeli-II özelliğine sahip R halkası dik sonludur.

İspat: R halkasının dik sonlu olmadığını kabul edelim. O zaman $i, j, k, l = 1, 2, \dots$ için $0 \neq e_{ij}$ ve $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ birim matrisleri içermelidir [25]. $e_{11}e_{21} = 0$ olmasına rağmen $e_{11}e_{12}e_{21} = e_{11}$ sıfır olmayan eşkare elemandır. Bu ise kabulle çelişir. O halde R dik sonludur. ■

Önerme 5.10 un ispatı, herhangi bir R halkası için, $M_n(R)$ matris halkasının, $n \geq 2$ olduğunda nil-yarı değişmeli-II olmadığını gösterir.

5.1. α-Uyumluluk Şartını Sağlayan Yarı Değişmeli Halkalar

R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0 \Leftrightarrow a\alpha(b) = 0$ oluyorsa R ye α-***uyumlu halka*** denir. R nin α-uyumlu olması için gerek ve yeter şart $ab = 0 \Leftrightarrow a\alpha^n(b) = 0, n \geq 0$.

Lemma 5.9. [8] R bir αendomorfizması için α-uyumluluk şartını sağlasın. Bu durumda

$$a_1a_2 \ldots a_n = 0 \Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2) \ldots \alpha^{k_n}(a_n) = 0.$$

Burada $k_1, k_2, \ldots, k_n$ negatif olmayan tamsayılar ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ R nin elemanlarıdır.

İspat: Kabul edelim ki R bir α endomorfizması için α-uyumluluk şartını sağlasın. Bu durumda α monomorfizmadır. Ayrıca herhangi bir negatif olmayan k tamsayısı için α^k monomorfizmadır. Gerçekten; $\alpha^k(a) = 0$ olsun. Bu durumda $1\alpha(\alpha^{k-1}(a)) = 0$ ve R α-uyumluluk şartını sağladığından $\alpha^{k-1}(a) = 0$ elde edilir. Sürece devam edildiğinde $a = 0$ bulunur ki; bu ise α^k nın monomorfizma olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned}
a_1a_2 \ldots a_n = 0 &\Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1a_2 \ldots a_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_1}(a_2 \ldots a_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)a_2 \ldots a_n = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2 \ldots a_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2)\alpha^{k_2}(a_3 \ldots a_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2)(a_3 \ldots a_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2)\alpha^{k_3}(a_3 \ldots a_n) = 0
\end{aligned}$$

İşlemlere bu şekilde devam edilirse $a_1a_2 \ldots a_n = 0 \Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2) \ldots \alpha^{k_n}(a_n)$ elde edilir. ■

Sonuç 5.10. R α-uyumlu bir halka olsun. Bu durumda

$$a_1a_2 \ldots a_n \in nil(R) \Leftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2) \ldots \alpha^{k_n}(a_n) \in nil(R)$$

olmasıdır. Özel olarak, $ab \in nil(R) \Leftrightarrow a\alpha(b) \in nil(R)$ olmasıdır.

Lemma 5.11. [8] R yarı değişmeli halka ve α; R nin bir endomorfizması olsun. Eğer R α-uyumluluk şartını sağlarsa, bu durumda $nil(R[x;\alpha]) = nil(R)[x;\alpha]$.

İspat: İlk olarak $nil(R[x;\alpha]) \subseteq nil(R)[x;\alpha]$ olduğunu gösterelim. R yarı değişmeli halka olduğundan *2-asallı* ve aynı zamanda $nil(R) = Nil_*(R)$. R nin endomorfizması olan α, $R/nil(R)$ nin de endomorfizmasıdır. Burada $\bar{\alpha}$ tanımlanırsa $a \in R$ için

$$a + nil(R) \mapsto a(\alpha) + nil(R)$$

şeklinde gösterilir. $R/nil(R)$ indirgenmiş halkadır. R halkası α-uyumluluk şartını sağladığından $R/nil(R)$ $\bar{\alpha}$-katıdır. Bu yüzden $R/nil(R)[x;\bar{\alpha}]$ halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

$$\bar{\alpha} : R[x;\alpha] \mapsto R/nil(R)[x;\alpha]$$
$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \mapsto a_0 + nil(R) + (a_1 + nil(R))x + \ldots + (a_n + nil(R))x^n$$

$\bar{\alpha}$ homomorfizmadır ve buradan $R[x;\alpha]/nil(R)[x;\alpha] \cong R/nil(R)[x;\alpha]$ elde edilir. Şimdi $f(x) = a_0 + a_1(x) + \ldots + a_nx^n \in nil(R[x;\alpha])$ için $f(x)^k = 0$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır. Dolayısıyla $\bar{f}(x) = \bar{a_0} + \bar{a_1}(x) + \ldots + \bar{a_n}x^n \in R/nil(R[x;\bar{\alpha}])$ için $\bar{f}(x)^k = \bar{0}$ sağlanır. Böylece Lemma 5.13 ten her $i = 0, 1, \ldots, n$ için $\bar{a}_i\bar{\alpha}^i(\bar{a}_i)\ldots\bar{\alpha}^{(k-1)i}(\bar{a}_i) = \bar{0}$. Lemma 5.11 den $\bar{a}_i^k = \bar{0}$ olduğu görülür. Böylece her i için $a_i \in nil(R)$ elde edilir. Diğer taraftan [30, Önerme 3.4] te $nil(R)[x;\alpha] \subseteq nil(R[x;\alpha])$ olduğu ispatlandı. Dolayısıyla $nil(R)[x;\alpha] = nil(R[x;\alpha])$ olur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.12. [8] R yarı değişmeli bir halka olsun. Eğer R; R nin bir α endomorfizması için α-uyumluluk şartını sağlarsa bu durumda $R[x;\alpha]$ nil-yarı değişmeli-II halkadır.

İspat: Kabul edelim ki $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m \in nil(R[x;\alpha])$ için $f(x)g(x) \in nil(R[x;\alpha])$ olsun. $(f(x)g(x))^k = 0$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır ve bu yüzden $\bar{f}(x), \bar{g}(x) \in R/nil(R)[x;\alpha]$ için $(\bar{f}(x)\bar{g}(x))^k = \bar{0}$ dır. Lemma 5.11 den $R/nil(R)[x;\alpha]$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir. $(\bar{f}(x)\bar{g}(x))^k = \bar{0}$ olduğundan her $i = 0, 1\ldots, n$ ve $j = 0, 1, \ldots, m$ için Lemma 5.11 den

$$\bar{a}_i\bar{\alpha}^i(\bar{b}_j)\bar{\alpha}^{i+j}(\bar{a}_i)\bar{\alpha}^{i+j+i}(\bar{b}_j)\ldots\bar{\alpha}^{(k-1)i+(k-1)j}(\bar{a}_i)\bar{\alpha}^{ki+(k-1)j}(\bar{b}_j) = \bar{0}$$

elde edilir. Böylece Lemma 5.11 den $(\bar{a}_i\bar{b}_j)^k = \bar{0}$ bulunur. Buradan da $a_ib_j \in nil(R)$ elde edilir. Şimdi herhangi bir $h(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_px^p \in R[x;\alpha]$ için $f(x)h(x)g(x) \in nil(R)[x;\alpha]$ olduğunu göstermeliyiz. $h(x) \in R[x;\alpha]$ ve $l = 0, 1, \ldots, p$ için $a_ic_lb_j \in nil(R)$ vardır. $nil(R)$ de $f(x)h(x)g(x)$ işlemleri yapıldığında $\sum a_i\alpha^i(c_l)\alpha^{i+l}(b_j)$ formunda katsayılar elde edilir. Böylece Sonuç 5.12 den $f(x)h(x)g(x) \in nil(R)[x;\alpha] = nil(R[x;\alpha])$. ■

Sonuç 5.13. [30, Teorem 3.1] R yarı değişmeli bir halka ve α, R nin endomorfizması olsun. Eğer R α-uyumluluk şartını sağlarsa, bu durumda $R[x;\alpha]$ zayıflatılmış yarı değişmeli bir halkadır.

Önerme 5.14. [8] R yarı değişmeli bir halka ve R nin bir α endomorfizması için R α-uyumluluk şartını sağlasın. Eğer R α-skew Armendariz ise bu durumda $R[x;\alpha]$ nil-yarı değişmeli-II halkadır.

İspat: Kabul edelim ki $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m \in R[x;\alpha]$ için $f(x)g(x) = 0$ koşulunu sağlasın. R, α-skew Armendariz olduğundan her i, j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$. Lemma 5.11 den her i, j için $a_ib_j = 0$ olduğu görülür. R yarı değişmeli olduğundan herhangi bir $h(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_px^p \in R[x;\alpha]$ ve $l = 0, 1, \ldots, p$ için $a_ic_lb_j = 0$ elde edilir. Yine Lemma 5.11 den $a_i\alpha^i(c_l)\alpha^{i+l}(b_j) = 0$ olur ve $f(x)h(x)g(x) = 0$ bulunur. $R[x;\alpha]$ yarı değişmeli halkadır. ■

Nil-yarı değişmeli-II halkalar, NI-halkalar ile birçok ortak özelliğe sahiptir [21]. Ancak nil-yarı değişmeli-II olan bir halkanın NI-halkası olup olmadığı sorusunu cevaplamak zordur. Köthe varsayımında nil-yarı değişmeli-II olan bir halkanın NI halkası olduğunu gösteren olumlu bir soru varsa olumlu bir de çözümü vardır. Ancak olumsuz bir soru varsa çözümü de olumsuzdur. Aslında herhangi bir $a \in nil(R)$ için Ra, R nin sol idealidir ve bu yüzden $Ra \subseteq Nil^*(R)$ dir. Benzer olarak $aR \subseteq Nil^*(R)$ dir. Dolayısıyla $a, b \in nil(R)$ için $a, b \subseteq Nil^*(R)$ ve bu yüzden $a - b \in Nil^*(R) \subseteq nil(R)$ dir. Bu da $Nil^*(R) = nil(R)$ eşitliğini verir. Özellikle eğer bir R halkası sınırsızlık indeksini sınırladıysa sorunun olumlu bir cevabı vardır. Bu durumda $a \in nil(R)$ için $aR, Ra \subseteq L - rad(R)$ [41]. Dolayısıyla $nil(R) = L - rad(R)$ dir.

Önerme 5.15. [8] R bir halka olsun. Eğer $R[x]$ nil-yarı değişmeli-II ise bu durumda R bir NI-halkadır.

İspat: [2, Teorem 1] e göre herhangi bir R halkası için I, R nin nil ideali olmak üzere $J(R[x]) = I[x]$. Dolayısıyla $J(R[x]) \subseteq nil(R)[x]$ olur. $R[x]$ nil-yarı değişmeli-II halka olduğundan $nil(R[x]) \subseteq J(R[x])$. Şimdi herhangi bir $a, b \in nil(R)$ için $a, b \in nil(R[x]) \subseteq J(R[x])$. Böylece $a - b \in J(R[x]) \subseteq nil(R)[x]$ bulunur yani $a - b \in nil(R)$. R, $R[x]$ in alt halkası ve nil-yarı değişmeli-II olduğundan $ab \in nil(R)$ ve bu yüzden $nil(R)$ de R nin alt halkasıdır. Buradan da $nil(R)$, R nin ideali olduğu ve $nil(R) = Nil^*(R)$ elde edilir. ■

Önerme 5.16. [8] R nil-yarı değişmeli-II halka olsun. Eğer $nil(R)[x] = nil(R[x])$ ise bu durumda $R[x]$ NI-halkadır.

İspat: $a, b \in nil(R)$ olsun. Sonra $a - bx \in nil(R)[x]$ ve bu yüzden $a - b \in nil(R)$. Önerme 5.17 nin ispatında R nin NI halkası olduğu gösterilmiştir. R, NI halkası olduğundan nil Armendarizdir. Buradan $nil(R)[x] = nil(R[x])$. [4, Önerme 2.3] e göre $nil(R[x])$, $R[x]$ in alt halkasıdır. Herhangi bir $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in nil(R[x])$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ için $a_i b_j \in nil(R)$ olduğundan $f(x)g(x) \in nil(R[x])$ dir. Benzer olarak $g(x)f(x) \in nil(R[x])$ elde edilir. Böylece $nil(R[x])$, $R[x]$ in idealidir. ■

6. SOL (SAĞ) N-YARI DEĞİŞMELİ HALKALAR

Tanım 6.1. R bir halka olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a \in nil(R)$ ve $b \in R$ için $arb = 0$ oluyorsa, R halkasına ***sol N-yarı değişmeli*** denir. Benzer şekilde eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a \in R$ ve $b \in nil(R)$ için $arb = 0$ oluyorsa R halkasına ***sağ N-yarı değişmeli*** denir. Halkanın sıfır ideali sol (sağ) N-yarı değişmeli ise halka da sol (sağ) N-yarı değişmelidir. R halkası hem sol hem de sağ N-yarı değişmeli ise R halkasına ***N-yarı değişmeli halka*** denir.

Örnek 6.2. Her yarı değişmeli halka sol (sağ) N-yarı değişmeli halkadır. Her sol (sağ) N-yarı değişmeli halka da nil-yarı değişmeli-I halkadır.

$$\{\text{Yarı değişmeli halka}\} \subseteq \{\text{Sol (Sağ) N-yarı değişmeli halka}\} \subseteq \{\text{Nil-yarı değişmeli-I halka}\}$$

Aşağıda nil-yarı değişmeli olan ancak sol N-yarı değişmeli olmayan halka örneği verilecektir.

Örnek 6.3. Örnek(4.4) te her indirgenmiş R halkası için $T_3(R)$ nin nil-yarı değişmeli-I halka olduğu gösterildi. Ancak $T_3(R)$ halkası sol N-yarı değişmeli halka değildir.

İspat: $AB = 0$ olacak şekilde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in nil(T_3(R)), B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in$ $T_3(R)$ olsun. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_3(R)$ için $ACB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Dolayısıyla $T_3(R)$ sol N-yarı değişmeli halka değildir. ■

Önerme 6.4. R sol N-yarı değişmeli bir halka olsun. Herhangi bir e eşkare elemanı için eRe sol N-yarı değişmeli halkadır.

İspat: $eae \in eRe$ üstel sıfırlı eleman ve $ebe \in eRe$ için $(eae)(ebe) = 0$ olsun. R sol N-yarı değişmeli halka olduğundan $(eae)R(ebe) = 0$. Burada $e = e^2 \in R$ eşkare eleman olduğundan $eae(eRe)ebe = 0$. Dolayısıyla eRe sol N-yarı değişmeli halkadır. ∎

Önerme 6.5. R bir halka olsun. R sol N-yarı değişmeli halkadır gerek ve yeter şart $a \in nil(R)$ için $r_R(a) \subseteq r_R(aR)$.

İspat: Gerek şart için, herhangi bir $a \in nil(R)$ ve $x \in r_R(a)$ için $ax = 0$ olsun. R sol N-yarı değişmeli halka olduğundan $aRx = 0$. Buradan $x \in r_R(aR)$ olur. Tersine, $a \in nil(R)$ ve $b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $b \in r_R(a)$ olur. Hipotezden $(aR)b = 0$. Böylece R sol N-yarı değişmeli halkadır. ∎

Önerme 6.6. R indirgenmiş bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır:

(1) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c \in R \right\}$ bir halka olsun. S sol N-yarı değişmeli halkadır.

(2) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c \in R \right\}$ bir halka olsun. S sol N-yarı değişmeli halkadır.

İspat:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in nil(S)$ sıfırdan farklı üstel sıfırlı eleman ve $B = \begin{pmatrix} u & v & t \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \in S$ olsun. Varsayalım ki $AB = 0$. Buradan $bu = 0$ ve $cu = 0$ denklemleri elde edilir. R indirgenmiş olduğundan R yarı değişmelidir. Dolayısıyla herhangi bir $x \in R$ için $bxu = 0$ ve $cxu = 0$ elde edilir. Herhangi bir $C = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \in S$ için

$ACB = \begin{pmatrix} 0 & bxu & cxu \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ bulunur. Böylece S sol N-yarı değişmeli halkadır.

(2) (1) ile benzer şekilde ispatlanır.

■

6.1. Sol (Sağ) N-Yarı Değişmeli Halkaların Bazı Genişlemeleri

Bu bölümde, sol (sağ) N-yarı değişmeli halkaların bazı genişlemeleri incelenecektir.

Önerme 6.7. R halkası sol N-yarı değişmeli halkadır gerek ve yeter şart R halkasının Dorroh genişlemesi sol N-yarı değişmeli halkadır.

İspat: $nil(D(R,\mathbb{Z})) = \{(r,0)|r \in nil(R)\}$ olsun. Gerek şart için, $(a,b) \in D(R,\mathbb{Z})$ ve $(r,0) \in nil(D(R,\mathbb{Z}))$ iken $(r,0)(a,b) = 0$ olsun. Sonra $(ra+br,0) = 0$. Buradan $ra+br = 0$ ve $r(a+b1_R) = 0$. R sol N-yarı değişmeli halka olduğundan $rR(a+b1_R) = 0$. Böylece her $(x,y) \in D(R,\mathbb{Z})$ için $(r,0)(x,y)(a,b) = (r(x+y1_R)(a+b1_R),0) = 0$. Dolayısıyla R nin Dorroh genişlemesi $D(R,\mathbb{Z})$ sol N-yarı değişmeli halkadır. Tersine, $r \in nil(R)$, $s \in R$ için $rs = 0$ olsun. $(r,0) \in nil(D(r.\mathbb{Z}))$ için $(r,0)(s,0) = 0$. Hipotezden $(r,0)D(R,\mathbb{Z})(s,0) = 0$. Özellikle $x \in R$ için $(r,0)(x,0)(s,0) = 0$. Böylece $rxs = 0$. R sol N-yarı değişmeli halkadır. ■

Şimdi 3×3 tipindeki matris halkasının özel bir alt halkası olan $H_{(s,t)}(R)$ halkası incelenecektir. R bir halka ve s, t; R nin merkezinde olmak üzere;

$$H_{(s,t)}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in M_3(R) | a,c,d,e,f \in R, a-d = sc, d-f = te \right\}$$

şeklindedir. $H_{(s,t)}(R)$ matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır. Ayrıca $H_{(s,t)}(R)$, $M_3(R)$ nin alt halkasıdır. Elemanları;

$$\begin{pmatrix} sc+te+f & 0 & 0 \\ c & te+f & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

formundadır.

Lemma 6.8. R bir halka ve s, t, halkanın merkezinde olsun. Üstel sıfırlı elemanların kümesi

$$nil(H_{(s,t)}(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} | a, d, f \in nil(R), c, e \in R \right\}$$

şeklindedir.

İspat: $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in nil(H_{(s,t)}(R))$ üstel sıfırlı eleman olsun. $A^n = 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı vardır. Buradan $a^n = d^n = f^n = 0$. Tersine n, m, k pozitif tamsayıları için $a^n = 0, d^m = 0$ ve $f^k = 0$ olsun. $p = max\{n, m, k\}$ olmak üzere $A^{2p} = 0$. ■

Teorem 6.9. R indirgenmiş halka olsun. $H_{(0,0)}(R)$ sol N-yarı değişmeli halkadır ancak indirgenmiş halka değildir.

İspat: R indirgenmiş halka ve $a \in nil(R)$ olmak üzere $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & a & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in nil(H_{(0,0)}(R))$ olsun. R indirgenmiş halka olduğundan $a = 0$. Şimdi $B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ l & k & n \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \in H_{(0,0)}(R)$ için $AH_{(0,0)}(R)B = 0$ olsun. Bu durumda $AB = 0$ iken $ck = ek = 0$. $ACB = 0$ olacak şekildeki herhangi bir $C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & u \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \in H_{(0,0)}(R)$, her $x \in R$ için $cxk = exk = 0$ bulunur.

Böylece $H_{(0,0)}(R)$ sol N-yarı değişmeli halkadır. Ayrıca $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in H_{(0,0)}(R)$ olmak üzere A sıfırdan farklı bir üstel sıfır elemandır. Dolayısıyla $H_{(0,0)}(R)$ indirgenmiş halka değildir. ■

KAYNAKLAR

[1]. Agayev, N., Ozen, T. and Harmancı, A., 2009, On a class of semicommutative modules, *Proceedings mathematical sciences*, 119(2), 149-158.

[2]. Amitsur, S. A., 1956, Radicals of polynomials rings, *Canadian journal of mathematics*, 8, 355–361.

[3]. Anderson, D. D. and Camillo, V., 1998, Armendariz rings and Gaussian rings, *Communications in algebra*, 26, 2265-2272.

[4]. Antoine, R., 2008, Nilpotent elements and Armendariz rings, *Journal of algebra*, 319(8), 3128-3140.

[5]. Armendariz, E. P., 1974, A note on extensis of Baer and P. P.- rings, *Journal of the Australian mathematical society*, 18, 470-473.

[6]. Baser, M., Harmanci, A., and Kwak, T. K., 2008, Generalized semicommutative rings and their extensions, *Bulletin of the Korean mathematical society*, 45, 285-297.

[7]. Bell, H. E., 1970, Near-rings in which each element is a power of itself, *Bulletin of the Australian mathematical society*, 2, 363-368.

[8]. Chen, W., 2011, On nil-semicommutative rings, *Thai journal of mathematics*, 9(1), 39-47.

[9]. Chen, W. and Tong, W., 2007, On skew Armendariz rings and rigid rings, *Houston journal of mathematics*, 33(2), 341-353.

[10]. Cohn, P., 1999, Reversible rings, *Bulletin of the London mathematical society*, 31(6), 641-648.

[11]. Dorroh, J. L., 1932, Concerning adjunctions to algebras, *Bulletin of the American mathematical society*, 38(2), 85-88.

[12]. Habeb, J. M., 1990, A note on zero commutative and duo rings, *Mathematical journal of Okayama universty*, 32, 73-76.

[13]. Harmanci, A. and Kose, H., 2017, On a class of semicommutative rings, *New Zeland journal of mathematics*, 47, 69-85.

[14]. Hashemi, E. and Moussavi, A., 2005, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta mathematica hungarica*, 107, 207-224.

[15]. Hirano, Y., 2002, On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring, *Journal of pure and applied algebra*, 168, 45-52.

[16]. Hirano, Y., Huynh, D. and Park, J. K., 1996, On rings whose prime radical contains all nilpotent elements of index two, *Archiv der mathematical*, 66, 360-365.

[17]. Hong, C. Y., Kim, N. K. and Kwak, T. K., 2000, Ore extensions of Baer and p.p.-rings, *Journal of pure and applied algebra*, 151(3), 215-226.

[18]. Hong, C. Y., Kim, N. K. and Kwak, T. K., 2003, On skew Armendariz rings, *Communications in algebra*, 31, 103–122.

[19]. Huh, C., Kim, N. K. and Lee, Y., 2008, An Anderson's theorem on noncommutative rings, *Bulletin of the Korean mathematical society*, 45, 797-800.

[20]. Huh, C., Lee, Y. and Smoktunowicz, A., 2002, Armendariz rings and semicommutative rings, *Communications in algebra*, 30, 751-761.

[21]. Hwang, S. U., Jeon, Y. C. and Lee, Y., 2006, Structure and topological condition of NI rings, *Journal of algebra*, 302, 186–199.

[22]. Kim, N. K. and Lee, Y., 2003, Extensions of reversible rings, *Journal of pure and applied algebra*, 185, 207-223.

[23]. Kose, H. and Ungor, B., 2015, Semicommutativity of the rings relative to prime radical, *Commentationes mathematicae universitatis Carolinae*, 56(4), 401-415.

[24]. Krempa, J., 1996, Some examples of reduced rings, *Algebra colloquium*, 3, 289–300.

[25]. Lam, T. Y., 1991, A First course in noncommutative rings, *Graduate texts in mathematics springer-verlag*, 328–329.

[26]. Lam, T. Y., 1999, Lectures on modules and rings, *Graduate texts in mathematics springer-verlag*, 189.

[27]. Lambek, J., 1976, Lectures on rings and modules, *Chelsea Publishing Company*.

[28]. Lambek, J., 1971, On the representation of modules by shaves of factor mo dules, *Canadian mathematical bulletin*, 14(3), 359-368.

[29]. Lee, T. K. and Zhou, Y., 2004, Armendariz and reduced rings, *Communications in algebra*, 32(6), 2287-2299.

[30]. Liang, L., Wang, L. and Liu, Z., 2007, On a generalization of semicommutative rings, *Taiwanese journal of mathematics*, 11(5), 1359-1368.

[31]. Liu, Z. and Zhao, R., 2006, On weak Armendariz rings, *Communications in algebra*, 34, 2607-2616.

[32]. Maiada, N. M., Areej, M. A. and Anwar, K. H., 2018, Trivial extensions of Armendariz rings, *Journal of AL-Qadisiyah for computer science and mathematics*, 10(3), 73-79.

[33]. Marks G., 2003, A taxonomy of 2-primal rings, *Journal of algebra*, 266, 494-520.

[34]. Mohammadi, R., Moussavi, A. and Zahiri, M., 2012, On nil-semicommutative rings, *International electronic journal of algebra*, 11, 20-37.

[35]. Narbonne, L. M., 1982, Anneaux semi-commutatifs et unis riels anneaux dont les id aux principaux sont idempotents, *Proceedings of the* 106^{th} *national congress of learned societies*, 71-73.

[36]. Ouyang, L., 2008, Extensions of generalized α-rigid rings, *International electronic journal of algebra*, 3, 103-116.

[37]. Rege, M. B. and Chhawchharia, S., 1997, Armendariz rings, *Japan academy proceedings series mathematical sciences*, 73, 14-17.

[38]. Shin, G., 1973, Prime ideals and sheaf represantations of a pseudo symmetric ring, *Transactions of the American mathematical society*, 184, 43-60.

[39]. Simmons II, J. W., 1982, *Zero commutative group algebras and algebras of small orders over the field* $\mathbb{Z}_2$ *and other fields*, Thesis (PhD), Indiana University.

[40]. Smoktunowicz, A., 2000, Polynomial rings over nil rings need not be nil, *Journal of algebra*, 233, 427-436.

[41]. Szâsz, F. A., 1981, Radicals of Rings, *Wiley-Interscience Publication*, 106–112.

[42]. Varma, P. L. N., 1992, On maximal ideals in polynomial and Laurent polynomial rings, *Journal of algebra*, 148, 433-443.

[43]. Wang, L. and Wei J. C., 2014, Central semicommutative rings, *Indian journal of pure and applied mathematics*, 45(1), 13-25.

[44]. Zhao, L., Zhu X. and Gu Q., 2013, Reflexive rings and their extensions, *Mathematica Slovaca*, 63(3), 417-430.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Ayşe DÜRÜST
Doğum Yeri	Araklı
Doğum Tarihi	13.07.1983
Uyruğu	T.C.
Telefon	05056699291
E-Posta Adresi	durustayse@gmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2005

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Ana Bilim Dalı
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	2020

Makale ve Bildiriler
Dürüst A., Köse H., 2020, Some notes on semicommutative rings, 6^{th} *International Conference on Engineering and Natural Science (ISPEC-2020)*, 24-26 January 2020, Harran University, Şanlıurfa, Turkey.