T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAPHIN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN SINIRLAR

Koray BOZDAYI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2011

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAPHIN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN SINIRLAR

Koray BOZDAYI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd. Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

KIRŞEHİR 2011

ONAY

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Doç. Dr. Mahir KADAKAL

Üye Yrd. Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Üye Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

…/…/20..

(İmza Yeri)

Prof. Dr. Nadir DEMİREL Enstitü Müdürü

ÖZ

G(V,E) graphının komşuluk matrisi;

$$A(G)=\left[a_{ij}\right]=\begin{cases}1 & ; \quad i\sim j\\ 0 & ; \quad \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Graphın spektral yarıçapı, komşuluk matrisi A(G)'nin en büyük özdeğeridir.

Bu çalışmada graphın spektral yarıçapı için yeni sınırlar bulunmuş ve bu sınırların bir karşılaştırması yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Graph, Komşuluk Matrisi, Spektral Yarıçap.

ABSTRACT

The adjacency matrix of *G(V,E)* graph is defined as

$$A(G) = \left[a_{ij} \right] = \begin{cases} 1 & ; \quad i \sim j \\ 0 & ; \quad otherwise \end{cases}$$

The spectral radius of *G* graph is the biggest eigenvalues of its adjacency matrix.

In this study, we have found the new bounds of the spectral radius of G graph and this bounds compare with the other bounds.

Key words: Graph, Adjacency Matrix, Spectral Radius.

ÖN SÖZ

Bu çalışmada, graphın spektral yarıçapı için sınırlar üzerinde çalışılmıştır. Çalışmamız 4 bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde kısaca ‘graph kavramı’ verilmiştir.

İkinci bölümde graph ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde spektral yarıçapın sınırları üzerinde durulmuş ve daha önce yapılan çalışmaların etrafında yeni sınırlar tespit edilmiştir.

Dördüncü bölümde örneklerle daha önceki sınırlar ile bulunan yeni sınırların karşılaştırması yapılmıştır.

Kaynakça da bu çalışmada kullandığımız kaynakların yanı sıra ‘Graphın Spektral Yarıçapı’ ile ilgili tespit edebildiğimiz tüm çalışmalara yer verilerek bu konuda yapılacak çalışmalar için zengin bir literatür oluşturulmuştur.

“Graphın Spektral Yarıçapı İçin Sınırlar’’ konulu yüksek lisans tezimin hazırlanmasında öneri ve katkılarının yanı sıra değerli zamanını hiç esirgemeyen, bilgisinden ve tecrübesinden yararlandığım danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE’ye, desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen AEÜ Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü hocalarıma ve her zaman yanımda olan eşim Havva BOZDAYI’ ya teşekkürlerimi sunarım.

Şubat 2011
Kırşehir
Koray BOZDAYI

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

G	: Graph
V	: Noktalar kümesi
E	: Kenarlar kümesi
K_n	: n noktalı tam graph
$K_{m,n}$	: İki parçalı tam graph
$K_{1,n}$	: Star graph
A(G)	: G graphının komşuluk matrisi
L(G)	: G graphının Laplacian matrisi
D(G)	: G graphının köşegen matrisi
d; $d(v_i)$	: v_i noktasının derecesi
$\rho(G)$	: G graphının spektral yarıçapı (en büyük özdeğeri)
$\mu(G)$	: G graphının Laplacian spektral yarıçapı
$\overline{d}$	: Ortalama derece
X	: Maksimal özvektör
δ	: Minimum derece
Δ	: Maksimum derece
D	: Diameter
R_i	: i. satır toplamı
m_i	: i. noktanın komşu derecelerinin ortalaması
$N(v_i)$	: v_i noktasının komşu noktaları kümesi

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Graph Teorisi ilk olarak 1736 yılında İsviçre'li matematikçi Leonardo Euler' in *Königsberg Köprü* problemini çözmesi ile ortaya atıldı. Sonraki yüzyıl boyunca üzerinde herhangi bir çalışma yapılmayan teori, 1847 yılında G. R. Kirchhoff' un (1824 – 1887) *Ağaç Teorisinin Elektrik Devrelerine Uygulanması* başlıklı çalışması ile yeniden gündeme geldi. Bundan on yıl kadar sonra A. Cayley (1821 – 1895) C_nH_{2n+2} *Doymuş Hidrokarbon*
İzomerlerinin Sınıflaması çalışması sırasında ağaç kavramını keşfetti. Kirchhoff ve Cayley ile aynı zamanlarda graph teorisi için iki ayrı kilometre taşı kondu.

Bu kilometre taşlarından birincisi bir harita üzerinde, birbirlerine sınır komşusu olan ülkelerin farklı renklerle boyanarak birbirlerinden ayrılması için dört rengin kullanımının yeterli olduğunu gösteren *Dört Renk Varsayımıdır*. Dört renk varsayımı ilk kez A. F. Möbius (1790 – 1868) tarafından 1840 yılında verdiği bir ders sırasında ortaya atılmıştır. Bu varsayım 1879 yılında Cayley' in *Proceedings of the Royal Geographic Society* adlı dergide yaptığı makale ile çok bilinen bir problem durumuna geldi.

İkinci kilometre taşı ise Sir W. R. Hamilton (1805 – 1865) tarafından geliştirilen bir bulmaca yardımıyla kondu. Bu bulmaca, her köşesine dünyanın 20 önemli şehrinin yerleştirildiği tahtadan, düzgün bir 12-yüzlüden (her bir yüzü düzgün bir beşgen olan 20 köşeli, her bir köşede 3 ayrıtın birleştiği çokyüzlü) oluşmaktaydı.

Burada hedef; 12 yüzlünün kenarları kullanılarak her bir şehirden bir defa geçmek koşuluyla 20 şehri içeren bir tam tur yapmaktı.

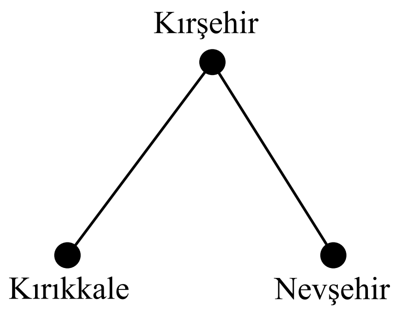
Bu emekleme dönemini bir yarım yüzyıllık duraklama dönemi izledi. Bu dönem sonunda 1939 yılında D.Köning kendinden önceki çalışmaları derleyerek konu hakkındaki ilk kitabı yayınladı. İzleyen 30 yıl boyunca teorik ve uygulama alanında konuyu içeren çok yoğun çalışmalar yapıldı. Günümüzde de halen yukarıda sözü edilen çözülmüş ya da çözülmemiş problemlerin ifadesi ve çözümü anlamında pek çok çalışma yapılmaktadır.

Son on yıllık periyotta ise yine graph teori kullanılarak, Kriptografi, Bilişim ağı sistemleri ve elektronik, mekanik sistemler vb. konularında gerekli çalışmalar yapılmış olup, halen teorik matematiksel kavramlar (özellikle cebirsel konular) üzerinde, adı geçen uygulama alanlarına adaptasyonlar yapılmaktadır. **[15]**

İki nesne arasında daima bir ilişkiden söz etmek mümkündür. Bu ilişki nesnelerin boyları, ağırlıkları, konumları, büyüklükleri renkleri v.s hakkında olabilir.

Sözgelimi iller arasında komşuluk ilişkisini ele alalım. Bu komşuluk ilişkisinde her bir ili bir nokta ile temsil edelim. Eğer herhangi iki il birbiri ile komşu ise bu noktaları bir çizgi ile birleştirelim. Komşu değillerse noktaları birleştirmeden öylece bırakalım.

Örneğin; Kırşehir, Nevşehir, Kırıkkale illerini ele alalım. Kırşehir; Kırıkkale ve Nevşehir ile komşu fakat, Kırıkkale ve Nevşehir birbirleri ile komşu olmadığından bu ilişki aşağıdaki şekilde gösterilir.



Şekil 1.1. Graph

İşte basit olarak graph yukarıdaki gibidir. Burada nokta sayısı artabilir. Bu noktalar bir çizgi ile birleştirilerek bir ilişki var anlamına gelir. Çizgilerin boyları, şekli ve konumu önemli değildir.

Spektral graph teorisi uzun bir geçmişe sahiptir. Uzun yıllar önce graphların komşuluk matrislerini çözümlemek için matris teorisi ve lineer cebir kullanılırdı. Kullanılan cebirsel metotlar regüler ve simetrik graphları ele almak açısından oldukça etkilidir.

Bir graphın öz değerlerinin çalışılması matematiğin diğer alanları ile zengin bağlantılar oluşturur. Oldukça önemli bir bağlantı, spektral graph teorisi ve diferansiyel geometri arasında etkileşimidir. Spektral Riemann geometri ve spektral graph teorisi arasında ilginç bir benzerlik de vardır.

Spektral graph teorisinin matematiğin dışında diğer alanlarda da uygulamaları vardır. Kimyada; özdeğerler moleküllerin kararlılığı ile birleştirilebilir. Bunun yanısıra graph spektrali, teorik olarak fizik ve kuantum mekaniğinin çeşitli problemlerini de ortaya çıkarır. Spektral graph teorisinin cebirsel kısmı ile ilgili olarak bir hayli çalışmalar yapılmıştır. Cebirsel kısımla ilgili çalışmalar 1980'li yıllarda ortaya çıkmıştır.

Yapılan çalışmalarda amaç, genel graphlar için en yakın ya da diğer deyişle daha yakın sınır bulmaktır.

Yapılan bu çalışmalar ışığında bazı temel tanım ve kavramlar ile birlikte graphlar için komşuluk matrisi tanıtılmış olup graphların spektral yarıçapları için kullanışlı bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir.

İKİNCİ BÖLÜM

2. GRAPH KAVRAMI, BAZI ÖZEL GRAPHLAR VE GRAPH İLE İLGİLİ MATRİSLER

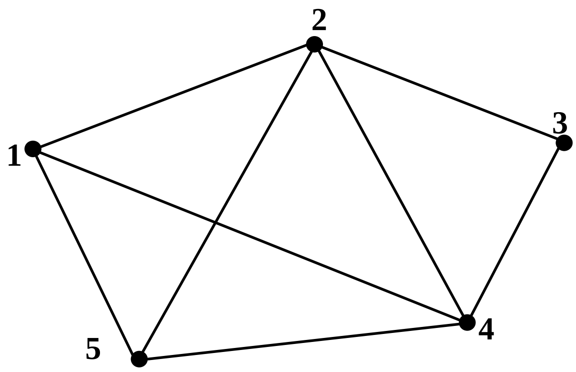
2.1. Graph [1] V, noktalar kümesi ve E, kenarlar kümesi olmak üzere G=(V,E) yapısına graph denir.

Noktadan çıkan kenar sayısına noktanın derecesi denir ve *d(v)* ile gösterilir.

Örnek 1.

Noktalar kümesi V={1,2,3,4,5} ve kenarlar kümesi

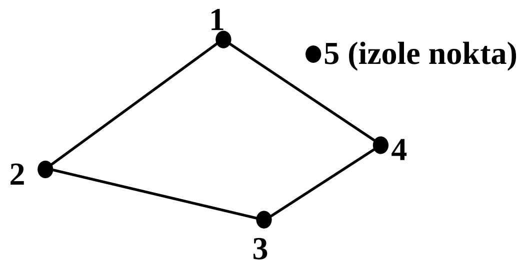
E={(1,2), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (4,5)} olan bir G=(V,E) graphı aşağıdaki gibidir.



1 ve 2'yi birleştiren kenar için $1 \sim 2$ yazılabilir.

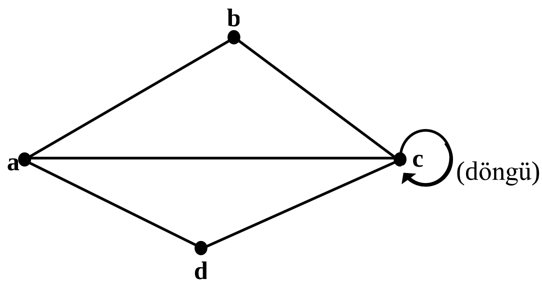
Şekil 2. 1. G Graphı

2.2. İzole Nokta [6] Graphda bir başka nokta ile bağlantısı ve kenarı olmayan noktalara izole nokta denir.



Şekil 2. 2. Graphda İzole Nokta

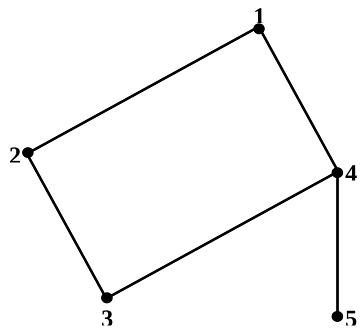
2.3. Döngü [6] Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan kenarlara döngü denir.



Şekil 2. 3. Graphda Döngü

2.4. Basit Graph [7]

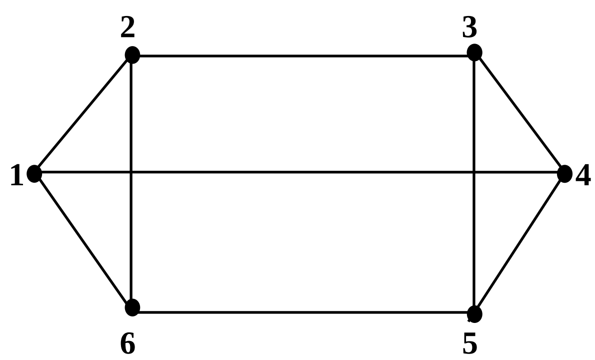
Yönsüz ve döngü içermeyen graphlara basit graph denir.



Şekil 2. 4. Basit Graph

2.5. Regüler (Düzenli) Graph [7]

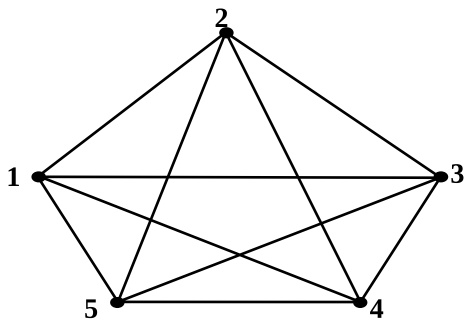
Bütün noktalarının dereceleri aynı olan graphlara denir.



Şekil 2. 5. Regüler (Düzenli) Graph

2.6. Tam Graph [18]

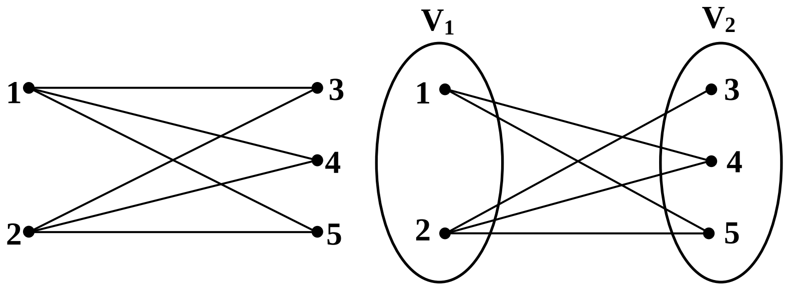
Her noktası diğer noktalara bir kenar ile bağlı olan graphlardır ve K_n şeklinde gösterilir.



Şekil 2. 6. K_5 Tam Graphı

2.7. İki Parçalı Tam Graph ($K_{m,n}$) [18]

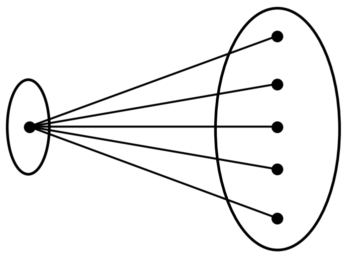
G=(V,E) graphının noktalar kümesi; bir kenarı bağlayan iki nokta farklı alt kümelerin elemanı olacak şekilde $V = V_1 \cup V_2$ parçalanışına sahip ise *G* graphına iki parçalı graph denir.



Şekil 2. 7. $K_{2,3}$ İki Parçalı Tam Graph

2.8. Star (Yıldız) Graph [18]

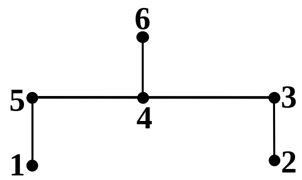
İki parçalı tam graph da m=1 ise; bu grapha star graph denir.



Şekil 2. 8. $K_{1,5}$ Star (Yıldız) Graph

2.9. Ağaç Graph [6]

İki noktası arasında tek bir yol olan grapha denir.



Şekil 2. 9. Ağaç Graph

2.10. Komşuluk Matrisi [2]

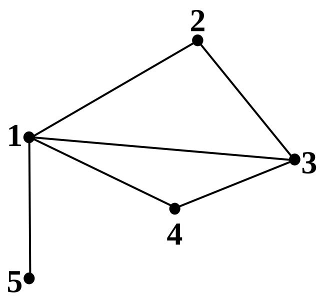
G(V,E) graphında iki noktayı bağlayan bir kenar varsa bu iki noktaya komşu denir ve $i \sim j$ şeklinde gösterilir. Bir *G* graphının komşuluk matrisi *A(G)* ile gösterilir.

$$A(G) = \left[a_{ij} \right] = \begin{cases} 1 & ; \quad i \sim j \\ 0 & ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Komşuluk matrisinin her bir satırının toplamı o noktanın derecesini verir.

Örnek 2.



$$\mathrm{A}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 2. 10. Graphın komşuluk matrisi

2.11. Laplacian Matris [1]

G=(V,E) graphının Laplacian matrisi

$$L(G) = \left[l_{ij} \right] \begin{cases} d(v_i) & ; \quad i = j \\ \text{-1} & ; \quad i \neq j \ \ ve \ \ i \sim j \\ 0 & ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

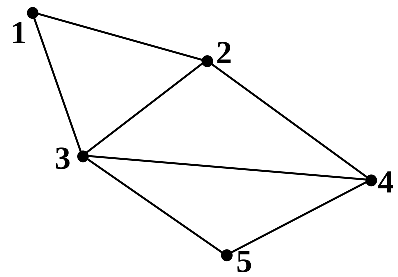
şeklinde tanımlanır.

Laplacian matrisinin satır ve sütun toplamı 0’dır.

$$L(G)=D(G)-A(G)$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Örnek 3. Şekildeki *G* graphının Laplacian matrisini bulalım.



Laplacian Matris

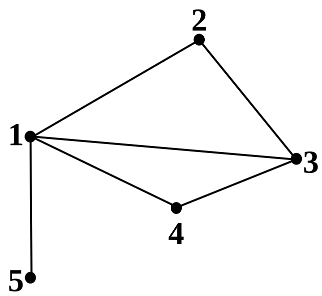
$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Şekil 2. 11. Graphın Laplacian matrisi

2.12. Spektral Yarıçap [4]

A(G) komşuluk matrisinin en büyük özdeğerine spektral yarıçap denir ve $\rho(G)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.



Komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 2. 12. Graphın spektral yarıçapı

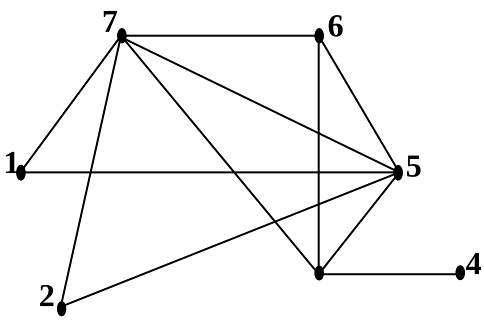
özdeğerleri

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -1{,}791 \\ \lambda_2 = -1{,}2713 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0{,}3349 \\ \lambda_5 = 2{,}6855 \end{array}\right\} \rho(G) = \lambda_5 = 2{,}6855 \text{ (spektral yarıçap)}$$

2.13. Laplacian Spektral Yarıçap [6]

L(G) Laplacian matrisinin en büyük özdeğerine Laplacian spektral yarıçap denir ve $\mu(G)$ şeklinde gösterilir

Örnek 4:



Laplacian Matris

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Şekil 2. 13. Graphın Laplacian spektral yarıçapı

özdeğerleri

μ_1 =-0.5438

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2 = 0.8394 \\ \mu_3 = 2.0000 \\ \mu_4 = 2.3077 \\ \mu_5 = 4.6922 \\ \mu_6 = 6.0000 \\ \mu_7 = 6.1605 \end{array}\right\} \quad \mu(G) = \mu_7 = 6{,}1605 \text{ (Laplacian spektral yarıçap)}$$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3.GRAPHIN SPEKTRAL YARIÇAPI İLE İLGİLİ TEOREMLER

Lemma 3.1. [19] *G*, basit, bağlantılı, *n* noktalı, nokta dereceleri sırasıyla $d_1, d_2, \ldots, d_n$ olan bir graph olsun. Eğer

$X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ *G*' nin maksimal özvektörü ise;

$$\rho \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \tag{3.1}$$

dir.

İspat: Açık olarak

$$\rho x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1, 2, ..., n$$

dir. Buradan

$$\rho \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j$$

olur.

Teorem 3.1. [19] *G*, basit, bağlantılı, regüler olmayan, *n* noktalı, noktalarının derecesi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ olan Δ maksimum dereceli, δ minimum dereceli bir graph olsun. *G*'nin ortalama derecesini $\bar{d}$ ile gösterelim. Yani $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i$ dir. Eğer $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ *G*'nin maksimal özvektörü ise;

$$\gamma = \max_{1 \le i, j \le n} \frac{x_i}{x_j} \ge \frac{(\Delta - \bar{d})(\rho - \delta)}{(\Delta - \rho)(\bar{d} - \delta)} \tag{3.2}$$

dir.Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $0 \le k < \Delta$ ve $0 \le l < \delta$ pozitif tamsayıları için V_1'deki her bir nokta V_1 ve V_2'de sırasıyla k ve $\Delta - k$ noktaya komşu; V_2'deki her bir nokta sırasıyla V_2 ve V_1'de l ve δ-l noktaya komşu olacak şekilde $V = V_1 \cup V_2$ parçalanışa sahip olmasıdır.

İspat: Genelliği bozmaksızın $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$ kabul edelim. Lemma 3.1'den

$$(\Delta - \rho) \sum_{i=1}^{n} x_i = \Delta \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \ge \sum_{i=1}^{n} (\Delta - d_i) x_n = n(\Delta - \bar{d}) x_n \tag{3.3}$$

yazarız. Benzer şekilde;

$$(\rho-\delta)\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}(d_i-\delta)x_i \leq \sum_{i=1}^{n}(d_i-\delta)x_1 = (\bar{d}-\delta)nx_1 \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.4)'den

$$(\bar{d}-\delta)(\Delta-\rho)n(\sum_{i=1}^{n} x_i)x_1 \geq (\Delta-\bar{d})(\rho-\delta)n(\sum_{i=1}^{n} x_i)x_n \tag{3.5}$$

olur. Böylece

$$\gamma = \frac{x_1}{x_n} \geq \frac{(\Delta-\bar{d})(\rho-\delta)}{(\Delta-\rho)(\bar{d}-\delta)}$$

dir.

(3.2)'de eşitliğin olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.3) ve (3.4) ifadesinde de eşitlik olur. Böylece $d_i \neq \Delta$ için $x_i = x_n$ ve $d_i \neq \delta$ için $x_i = x_1$ olur.

$V_1 = \{i \in V \ : \ d_i = \Delta\}$, $V_2 = \{i \in V \ : \ d_i = \delta\}$ ve $V = V_1 \cup V_2$ olsun. Bu durumda , eğer $i \in V \backslash (V_1 \cup V_2)$ olacak şekilde noktalar varsa bu taktirde $d_i \neq \Delta$ ve $d_i \neq \delta$ olur. Bundan dolayı $x_i = x_n$ ve $x_i = x_1$ olur. Bu da $x_1 = x_2 = ... = x_n$ olmasını sağlar. Böylece G düzenlidir. Bu da çelişkidir. Üstelik $i \in V_1$ için $x_i = x_1$ ve $i \in V_2$ için $x_i = x_n$ dir. Buradan $X = (x_1 e^T, x_n e^T)^T$ ve $A(G) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ matrisi $V = V_1 \cup V_2$ parçalanışına karşılık gelir. Burada e uygun boyutta 1'lerden oluşan vektördür.

$$A(G)x = \rho x$$

eşitliğinden

$$x_1 A_{11} e + x_n A_{12} e = \rho x_1 e$$
$$x_1 A_{21} e + x_n A_{22} e = \rho x_n e$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$A_{11}e + A_{12}e = \Delta e \ \text{ ve } A_{21}e + A_{22}e = \delta e$$

dir. Böylece

$$A_{11}e = \frac{\rho x_1 - \Delta x_n}{x_1 - x_n} e = \frac{\rho\gamma - \Delta}{\gamma - 1} e = ke$$

ve

$$A_{22}e = \frac{\delta x_1 - \rho x_n}{x_1 - x_n} = \frac{\delta\gamma - \Delta}{\gamma - 1} e = le$$

elde ederiz. Böylece V_1'deki her bir nokta V_1 ve V_2'de sırasıyla k ve $\Delta - k$ noktaya komşu ve V'deki her bir nokta V_2 ve V_1'de sırasıyla l ve $\delta - l$ noktaya komşudur.

Tersine olarak ρ;

$$z^2 - (k+l)z + kl - (\Delta - k)(\delta - 1) = 0$$

denklemin sağlayan en büyük kök olsun. Basit bir hesaplamayla

$$(\Delta - k)(\delta - l) = (\rho - k)(\rho - l) \qquad (3.6)$$

elde ederiz. Buradan

$$y = (y_1 e^T, y_n e^T)^T \text{ ve } A(G) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

V'nin parçalanışına karşılık gelsin. Burada $y_1 = \Delta - k$ $y_n = \rho - k$' dır. Bazı hesaplamalar ve (3.6) ile $A(G)y = \rho y$ buluruz. Böylece y, G'nin ρ spektral yarıçapına karşılık gelen maksimal özvektörü olur. Buradan;

$$\gamma = \frac{y_1}{y_n} = \frac{\Delta - k}{\rho - k}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$|V_1|(\Delta - k) = |V_2|(\delta - l)$$

ve

$$\bar{d} = \frac{|V_1|\Delta + |V_2|\delta}{|V_1| + |V_2|} = \frac{\Delta(\delta - l) + \delta(\Delta - k)}{(\delta - l) + (\Delta - k)}$$

olduğu kolayca görülür. δ'nın tanımından

$$(\rho - \delta)(\delta - k) = (\Delta - \rho)(\delta - l)$$

elde edilir.

$$\frac{(\Delta - \bar{d})(\rho - \delta)}{(\Delta - \rho)(\bar{d} - \delta)} = \frac{\Delta - k}{\delta - l} \cdot \frac{\rho - \delta}{\Delta - \rho} = \frac{(\Delta - k)(\rho - \delta)}{(\rho - \delta)(\rho - k)} = \gamma$$

Böylece (3.2)' de eşitlik bulunur.

Teorem 3.2.[4] *G*, basit, bağlantılı, regüler olmayan bir graph olsun. Bu taktirde;

$$\gamma \geq \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}} \qquad (3.7)$$

dir.

İspat: $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ *G*'nin ρ'ya karşılık gelen maksimal özvektörü ve $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$; $1 \leq p, q \leq n$ için $d_p = \Delta$ ve $d_q = \delta$ olsun.

$$A(G)x = \rho x$$

$$\rho x_p = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j \geq \Delta x_n \qquad (3.8)$$

$$\rho x_q = \sum_{j=1}^{n} a_{qj} x_j \leq \delta x_1 \qquad (3.9)$$

(3.8) ve (3.9)' dan

$$\frac{x_1^{\ 2}}{x_n^{\ 2}} \geq \frac{x_p}{x_n} \cdot \frac{x_1}{x_q} \geq \frac{\Delta}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\delta} \qquad (3.10)$$

olur. Böylece (3.7) elde edilir.

Sonuç 3.1.[9] *G*, basit, bağlantılı, regüler olmayan graph olsun. (3.7) ifadesinde eşitlik varsa

$$\rho = \sqrt{\Delta \delta} \qquad (3.11)$$

dir.

İspat: (3.7)'de eşitlik varsa (3.8), (3.9) ve (3.10)'da eşitlik vardır. Kolayca görülür ki

$$\frac{\Delta}{\rho} = \gamma = \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}$$

olur. Buradan istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.[5] *G* yarı-düzenli graph olsun. (3.7) ifadesinde eşitliğin olması için gerek ve yeter şart *G*'nin yarı-regüler(düzenli) graph olmasıdır. Yani, *G* iki parçalı ve yarı regüler bir graph olur.

İspat: Genelliği bozmaksızın $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ ρ'a karşılık gelen G'nin en büyük özvektörü olsun. $(x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n)$ Ayrıca (3.7)'de eşitlik olsun.

$V_1=\{i \in V \ : \ d_i=\Delta\}$ $V_2=\{i \in V \ : \ d_i=\delta\}$ ise V_1 ve V_2, V'nin bir parçalanışıdır. Bu durumda G bir yarı-düzenlidir. Ayrıca (3.8)-(3.10) ifadelerinde eşitlik mevcut olur. Bu taktirde $i \in V_1$ için $x_i=x_1$ ve $i \in V_2$ için $x_i=x_n$ dir. Üstelik $i \in V_1$ için $i \sim j$ ise $x_j=x_n$ dir. Bu da G'nin iki parçalı graph olmasını gerektirir. Böylece G, semi-regüler graphdır.

Tersine $y=(\Delta,...,\Delta,\delta,...,\delta)^T$ semi-regüler graphın $\rho=\sqrt{\Delta\delta}$'ya karşılık gelen maksimal özvektörü olduğundan

$$\gamma=\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}$$

dir.

Sonuç 3.3.[13] G, basit, bağlantılı, regüler olmayan graph olsun. (3.2)'nin (3.7)' den daha iyi olması için gerek ve yeter şart

$$\rho > \Delta - \frac{\sqrt{\delta}(\Delta-\delta)(\Delta-\bar{d})}{\sqrt{\delta}(\Delta-\bar{d})+\sqrt{\Delta}(\bar{d}-\delta)} \tag{3.12}$$

olmasıdır.

İspat: Basit bir hesaplama ile sonuç kolayca görülür.

Teorem 3.3.[19] G, basit, bağlantılı, regüler olmayan n noktalı graph ve D, G'nin diameteri (iki komşu nokta arasındaki maksimum yol) olsun. Bu taktirde;

$$\rho < \Delta - \frac{\Delta+\delta-2\sqrt{\Delta\delta}}{D \cdot n \cdot \Delta} \tag{3.13}$$

dir.

İspat: $X=(x_1,...,x_n)$ ρ'ya karşılık gelen normalleştirilmiş yani $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$ olan maksimal özvektör olsun. Böylece

$$\Delta-\rho=\Delta\sum_{i=1}^{n}x_i^2-x^T A(G)x > \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 - 2\sum_{i\sim j} x_i x_j = \sum_{i\sim j}(x_i-x_j)^2$$

p ve q G'de $x_p = \max\{x_i;\ 1 \le i \le n\}$ $x_q = \min\{x_i;\ 1 \le i \le n\}$ olacak şekilde iki nokta olsun. p 'den q 'ya uzunluğu l olan $p = t_0, t_1, ..., t_l = q$ olan bir yolu vardır. $l \le D$ dir. Bu durumda;

$$\sum_{i=0}^{l-1} \left| x_{t_i} - x_{t_{i+1}} \right| \ge \sum_{i=0}^{l-1} (x_{t_i} - x_{t_{i+1}}) = x_p - x_q$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\Delta - \rho > \sum_{i \sim j} (x_i - x_j)^2 \ge \frac{\left(\sum_{i=0}^{l-1} \left| x_{t_i} - x_{t_{i+1}} \right| \right)^2}{l} \ge \frac{(x_p - x_q)^2}{l}$$

olur.Diğer taraftan (3.7)'den

$$\gamma = \frac{x_p}{x_q} \ge \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}$$

$$x_p - x_q \ge x_p - x_p \sqrt{\frac{\delta}{\Delta}} = \frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}} x_p$$

olur. Üstelik $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ olduğundan $x_p > \sqrt{\frac{1}{n}}$ olur. Böylece

$$\Delta - \rho > \frac{(x_p - x_q)^2}{l} \ge \frac{\Delta + \delta - 2\sqrt{\Delta\delta}}{Dn\Delta}$$

olur. Bu da istenendir.

Teorem 3.4.[10] G, basit, bağlantılı, n noktalı, düzenli olmayan graph ise

$$\rho < \Delta - \frac{2\Delta - 1 - 2\sqrt{\Delta(\Delta - 1)}}{n(n-1)\Delta} \qquad (3.14)$$

dir.

İspat: G, düzenli olmadığından $D \le n-1$ ve $\delta \le \Delta - 1$ olup dolayısıyla Teorem 3.3'ün uygulanmasıyla görülür.

Lemma 3.2. [12] $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = 1$ olacak şekilde $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in IR^n$ olsun. Böylece her bağlantılı graph için

$$\rho \geq 2\sum_{i\sim j} x_i x_j \qquad (3.15)$$

dir. Eşitlik için gerek ve yeter koşul X'in ρ 'ya karşılık gelen özvektör olmasıdır.

İspat: A simetrik olduğundan $Av_i = \lambda v_i$ olacak şekilde bir $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ortanormal vektörlere sahiptir. Bu durumda her bir $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ için $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n$ ve $c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2 = \|x\|^2 = 1$ olacak şekilde $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitleri vardır. Böylece;

$$\begin{aligned} 2\sum_{i\sim j} x_i x_j &= x^T A x \\ &= \sum_{i,j} c_i v_i^T A c_j v_j \\ &= \sum_{i,j} c_i c_j \lambda_j v_i^T v_j \\ &= \sum_i c_i^2 \lambda_i \\ &\leq \lambda_i \sum_i c_i^2 = \rho \end{aligned}$$

eşitlik için gerek ve yeter koşul $c_1 = \pm 1$; $x = \pm v_1$ dir

Lemma 3.3.[11] $M=(m_{ij})$, $n{\times}n$ tipinde indirgenemeyen negatif olmayan bir matris, spektral yarıçapı $\rho(M)$ ve $R_i(M)$'de M'nin i. satır toplamı olsun.

$$R_i(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$$

Bu durumda;

$$\min\{R_i(M) : 1 \leq i \leq n\} \leq \rho(M) \leq \max\{R_i(M) : 1 \leq i \leq n\} \qquad (3.16)$$

dir.Üstelik M'nin satır toplamlarının eşit olmadığında bu eşitsizlik daha da kuvvetli (<) hale gelir.

Lemma 3.4. [5] G, iki parçalı graph ve $V = U \cup W$ olsun. Eğer her bir $u \in U$ noktanın derecelerinin ortalaması m_1 ve herbir $w \in W$ nokta derecelerinin ortalaması m_2 ise bu durumda;

$$\rho(G) = \sqrt{m_1 . m_2}$$

dir.

İspat: $\rho(G)$,*A(G)'* nin en büyük özdeğeri olsun. Bu durumda

$\rho(G)$, $M=K^{-1}(D^{-1}A(G)D)K$' nın da en büyük özdeğeridir. Burada K ve D sırasıyla köşegen elemanları noktaların derecelerinin ortalamasının karekökü ve köşegen elemanları noktaların dereceleri olan köşegen matrisler olmak üzere,

$$M=(m_{ij})=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}\dfrac{d_j}{d_i} & ;\quad i\sim j,\ i\in U\\ \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}\dfrac{d_j}{d_i} & ;\quad i\sim j,\ i\in W\\ 0 & ;\quad \text{aksi halde}\end{cases}$$

olur. Burada

$$\sum_j\{d_j;\quad i\sim j\}=m_i d_i \quad \text{ve} \quad x_j=\max\{x_k;\ i\sim j$$

Eğer Lemma 3.3 M üzerine uygulanırsa $\rho(G)=\sqrt{m_1.m_2}$ elde edilir.

Teorem 3.5.[5] G basit, bağlantılı graph ve $\rho(G)$'de spektral yarıçap ise

$$\rho(G)\le \max\left\{\sqrt{m_i.m_j}:\quad 1\le i,j\le n,\quad i\sim j\right\} \tag{3.17}$$

dir. Bu eşitsizlikte, eşitliğin olması için gerek ve yeter şart G'nin bütün noktalarının derece ortalamalarının eşit olan bir graph ya da aynı küme içerisindeki derece ortalamaları eşit iki parçalı graph olmasıdır.

İspat: $X=(x_1,\ldots,x_n)^T$; $D(G)^{-1}A(G)D(G)$'nin $\rho(G)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. Ayrıca öz elemanlarından biri mesala 1 ve diğerleri de 1'den küçük yada eşit olsun. Yani $x_i=1$ ve $\forall k\neq i$ için $0\le x_k<1$ dir.

$$x_j=\max\ \{x_k:\quad i\sim j\}$$

olsun.

$$D(G)^{-1}A(G)D(G)\ \text{ matrisinin } (i,j) \text{ elemanı } \rightarrow\begin{cases}\dfrac{d_j}{d_i} & ;\quad i\sim j\\ 0 & ;\quad \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklindedir. Bu durumda;

$$\{\,D(G)^{-1}A(G)\,D(G)\,\}\,X=\rho(G)\,X \tag{3.18}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin *i*. eşitliği

$$\rho(G)x_i = \sum_k \left\{ \frac{d_k x_k}{d_i} : \quad i \sim j \right\} \quad \text{yani} \quad \rho(G) \le m_i x_j \tag{3.19}$$

şeklindedir. (3.18) ifadesinin j. eşitliği;

$$\rho(G)x_j = \sum_k \left\{ \frac{d_k x_k}{d_j} : \quad i \sim j \right\} \quad \text{yani} \quad \rho(G)x_j \le m_j \tag{3.20}$$

şeklindedir. (3.19) ve (3.20)'den

$$\{\rho(G)\}^2 \le m_i\, \rho(G)\, x_j \le m_i\, m_j$$

elde edilir. Böylece ;

$$\rho(G) \le \sqrt{m_i m_j}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad i \sim j$$

$$\rho(G) \le \max\left\{ \sqrt{m_i m_j} : \quad 1 \le i, j \le n, \quad i \sim j \right\}$$

olur.(3.17) ifadesinde eşitliğin olduğunu kabul edelim. O halde bütün eşitsizlikler eşitlik haline dönüşür. Özellikle (3.19)'dan $i \sim j$ olacak şekilde $\forall k$ için $x_k = x_j$ elde edilir. Ayrıca (3.20)'den $i \sim k$ olacak şekilde $\forall k$ için x_k=1'dir.

1.Durum: $x_j = 1, \quad V_1 = \{k, \ x_k = 1\}$ olsun. Eğer $V_1 \neq V(G)$ ise G bağlantılı olduğundan

$r \sim p$ ve $p \sim q$ olacak şekilde $r \sim p$ noktaları vardır. Böylece

$$\rho(G)x_r = \sum_j \left\{ \frac{d_j x_j}{d_r}; \quad r \sim j \right\} \le m_r$$

ve

$$\rho(G)x_p = \sum_j \left\{ \frac{d_j x_j}{d_p}; \quad p \sim j \right\} \le m_p$$

den

$$\rho(G) < \sqrt{m_r m_p}$$

elde edilir. Bu durumda (3.17)'deki eşitlik elde edilir. Böylece $V_1 = V(G)$ ve G'de bütün noktaların derecelerinin ortalaması eşit bir graphdır.

2. Durum: $x_j < 1$ olsun. Bu takdirde; *i*'nin komşuluğundaki *k*'lar için yani $k \in N_G(i)$ için $x_k = 1$ ve $k \in N_G(i)$ için $x_j = x_k$'dır.

$U = \{k, \quad x_k = 1\}$ $\quad W = \{k, \quad x_k = x_j\}$ seçelim. Böylece ;

$$N_G(i) \subseteq U \quad ve \quad N_G(i) \subseteq W$$

dır. Ayrıca; herhangi bir $r \in N_G(N_G(i))$ kümesi için $i \sim j$ ve $r \sim p$ olacak şekilde bir $p \in N_G(i)$ noktası vardır. Böylece;

$$x_p = x_j \quad ve \quad \rho(G)x_p = \sum_k \left\{ \frac{d_k x_k}{d_p}; \quad p \sim k \right\} \leq m_p$$

olur. (3.19) kullanılırsa

$$\rho^2 \left(G\right) \leq m_j m_p$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\rho^2 \left(G\right) \leq m_j m_p$$

olduğundan

$$\rho^2 \left(G\right) \geq m_i m_p \quad x_r = 1$$

dir. Böylece $N_G(N_G(i)) \subseteq U$ olur. Benzer bir düşünceyle; $N_G(N_G(j)) \subseteq W$ olduğu da gösterilir. Buna devam edilerek *G* bağlantılı graph olduğundan *U* ve *W* kısıtlanmış alt graphlar olmak üzere $V = U \cup W$ yazılabilir. Böylece *G* iki parçalıdır. Üstelik *U*'daki ve W'deki her bir noktanın derece ortalaması aynıdır. Tersine; eğer *G* bütün noktalarının derecelerinin ortalaması eşit bir graph ise bu durumda eşitlik sağlanır. *G*, $V = U \cup W$ olacak şekilde iki parçalı graph olsun. Öyleki *U* veya *W*' deki aynı küme içerisindeki iki noktanın derece ortalaması eşit ise Lemma 3.4 kullanılarak; (3.17) ifadesinde eşitliğin olduğu gösterilir.

Lemma 3.5.[14] $q_1, q_2, \ldots, q_n$ pozitif sayılar ve bazı $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reel sayıları için;

$$\min_i \frac{p_i}{q_i} \leq \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n} \leq \max_i \frac{p_i}{q_i} \qquad (3.21)$$

dir. Her iki tarafta da eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $\frac{p_i}{q_i}$ oranının eşit olmasıdır.

Lemma 3.6.[4] *G*, *n* noktalı, *e* kenarlı basit bağlantılı bir graph olsun. Δ ve δ sırasıyla *G*'nin noktalarının derecelerinin maksimumu ve minimumu olsun. Eğer *A(G)'* nin spektral yarıçapı $\rho(G)$ ise bu takdirde;

$$\rho(G) \leq \sqrt{2e-(n-1)\delta+(\delta-1)\Delta} \qquad (3.22)$$

dir. Ayrıca (3.22) ifadesinde eşitliğin olması için gerek ve yeter şart *G* nin regüler graph veya bir star graph olmasıdır.

İspat: A_i , *A(G)* matrisinin *i*. satırını ve d_i de *i*. satır toplamını göstersin. $X=(x_1, \ldots, x_n)^T$, *A(G)*' nin $\rho(G)$ özdeğerine karşılık gelen birim uzunlukta özvektörü olsun. i=1,2, … ,n için $X(i)$; $a_{ij}=0$ olacak şekilde *X*'in x_j bileşeninin 0'la yer değiştirmesi sonucu elde edilen vektör olsun. Bu durumda;

$$A(G)X=\rho(G)X$$

olduğundan

$$A_iX(i) = A_iX = \rho(G)x_i$$

elde ederiz. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden i=1,2, …. ,n için;

$$\rho^2(G)x_i^2 = |A_iX(i)|^2 \leq |A_i|^2\,|X(i)|^2 = d_i\sum_j\{x_j^2 : \; i\sim j\}$$

olur. Bu eşitlikten toplam alınırsa;

$$\begin{aligned}
\rho^2(G) &\leq \sum_{i=1}^{n} d_i \sum_j \{x_j^2 : \; i\sim j\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_j \{d_j : \; i\sim j\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i m_i x_i^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} [2e-d_i-(n-1-d_i)\delta]x_i^2 && (3.23) \\
&= 2e-(n-1)\delta+(\delta-1)\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 \quad (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \;\; \textit{kullanırsak}) \\
&\leq 2e-(n-1)\delta+(\delta-1)\,\Delta && (3.24)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi (3.22)'de eşitliğin olduğunu kabul edelim. Bu takdirde yukarıdaki bütün eşitsizlikler, eşitlik olmak zorundadır. Özellikle (3.23)'den $\forall i \in V$ için

$$\rho(G) \leq \sqrt{2e-(n-1)\delta+(\delta-1)\Delta}$$
$$d_i m_i = 2e - d_i - (n-1-d_i)\delta$$

elde edilir. Bu sebeple $\forall i \in V, \quad i \nsim j$ için ya $d_i=n$-1 ya da $d_j=\delta$ 'dır ki bu ya G'nin düzenli (regüler) graph olmasını ya da G'nin her bir noktasının derecesi ya δ ya da n-1 olan iki dereceli bir graph olmasını gerektirir. Eğer δ >1 ise;

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 = \Delta \tag{3.25}$$

elde ederiz. Lemma 3.5 ve (3.25) kullanılarak $d_1=d_2=\ldots=d_n$ elde edilir. Eğer δ >1 ise G bir regüler graph olur. Böylece G bir regüler graph ya da bir star graph'dır. Tersine eğer G regüler graph veya star graphsa eşitlik sağlanır.

Sonuç 3.4.[4] *G*, *n* noktalı, *e* kenarlı, basit, bağlantılı graph olsun. Bu taktirde

$$\rho(G) \leq \sqrt{2e-n+1} \tag{3.26}$$

dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart G'nin $K_{1,n-1}$ star graph veya K_n tam graph olmasıdır.

Teorem 3.6.[19] $V=\{1,2,\ldots k,\ \ldots s,\ \ldots n\}$ olacak şekilde $G=(V,E)$ bir graph ve $V_1=\{1,\ldots,k\}$ alt nokta kümesi ile $\{k+1,\ldots,j\}$ aynı komşuluk kümesine sahip olsun. Bu takdirde G en az k-1 tane *0* özdeğerine sahiptir. *(k-1)* özvektör de

$$(\underbrace{1,-1}_{2},0,\ldots,0)^T,\ (\underbrace{1,0,-1}_{3},0,\ldots,0)^T,\ \ldots\ldots,\ (\underbrace{1,0,\ldots,-1}_{k},0,\ldots)^T$$

şeklindedir.

İspat: $X=(x_1,\ldots\ldots,x_n)^T$, $A(G)$ nin ρ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. Böylece $\rho\, x_i = \sum_j \{x_j;\ i \sim j\}$ i=1,2,….,n

dir. "0" özdeğerine;

$$(\underbrace{1,-1}_{2},0,\ldots,0)^T,\ (\underbrace{1,0,-1}_{3},0,\ldots,0)^T,\ \ldots\ldots,\ (\underbrace{1,0,\ldots,-1}_{k},0,\ldots0)^T \tag{3.27}$$

özvektörlerinin karşılık geldiği kolayca görülür.

Teorem 3.7.[14] *G*, bir noktalı ve en büyük derecesi Δ olan basit bir graph olsun. Bu taktirde;

$$\rho(G) \geq \sqrt{\frac{(\Delta + d_j - 1) + \sqrt{(\Delta + d_j - 1)^2 - 4(d_j - 1) + 4C_1^2 + 8C_{ij}\sqrt{\Delta}}}{2}} \tag{3.28}$$

dir. Burada $d_j = max\{d_k \,; i \sim k\ \}$; C_{ij} i ile j arasındaki ortak komşu sayısıdır.

Teorem 3.8. [17] Eğer *A* bir $n \times n$ reel simetrik matris ise, o zaman *A*'nın bütün özdeğerleri reeldir.

İspat: İlk olarak hemen hatırlatalım ki; eğer $z = a + ib$ ise, o zaman

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

dir. Bundan başka *x* kompleks bileşenlere sahip

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde bir $n \times 1$ vektör ise, o zaman $\overline{x}$

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ . \\ . \\ \overline{x}_n \end{bmatrix}$$

ile verilir. Böylece;

$$\overline{x}^T x = x^T \overline{x} = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + ... + x_n\overline{x}_n$$

yazarız ve açık olarak eğer *x* bir sıfır vektörü değilse, o zaman $\overline{x}^T x$ bir pozitif reel sayıdır. A bir reel simetrik matris ve $x \neq 0$ olmak üzere $Ax = \lambda x$ olduğunu varsayalım. Buna göre;

$$\overline{x}^T Ax = \lambda \overline{x}^T x$$

yazarız. Diğer taraftan Ax bir vektör olarak göz önüne alınarak

$$\overline{x}^T Ax = (Ax)^T \overline{x}$$

yazabiliriz. Böylece aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\lambda \overline{x}^T x = \overline{x}^T A x = (Ax)^T \overline{x} = x^T A^T \overline{x} = x^T A \overline{x}$$

Halbuki;

$$A\overline{x} = \overline{\lambda}\,\overline{x}$$

idi. Dolayısıyla;

$$\lambda \overline{x}^T x = \overline{\lambda} x^T \overline{x}$$

yazarız. Diğer taraftan;

$$x^T \overline{x} = \overline{x}^T x$$

olduğu açıktır ve $x \neq 0$ olduğundan $\overline{x}^T x \neq 0$'dır. Böylece $\overline{\lambda} = \lambda$ yazarız. Bu ise λ'nın reel olduğunu gösterir.

Tanım 3.1. [20] Bir *A* Hermit matrisi için

$$R(x) = \frac{< Ax, x >}{< x, x >} \tag{3.29}$$

ifadesine Rayleigh oranı denir.

Teorem 3.9. [11] (Rayleigh-Ritz) *A* matrisi $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ özdeğerlerine sahip *n-kare* bir Hermityen matris olsun. $\overline{x} \in \mathbb{C}^n (x \neq 0)$ için

$$\lambda_n \overline{x}^T \overline{x} \leq \overline{x}^T A \overline{x} \leq \lambda_1 \overline{x}^T \overline{x}$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\overline{x}^T A \overline{x}}{\overline{x}^T x} = \max_{\overline{x}^T \overline{x} = 1} \mathrm{x}^T A x \tag{3.30}$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{\overline{x}^T A \overline{x}}{\overline{x}^T \overline{x}} = \min_{\overline{x}^T \overline{x} = 1} \mathrm{x}^T A \overline{x} \tag{3.31}$$

ifadeleri sağlanır.

Teorem 3.10. [1] (Gersgorin) $A = \left[a_{ij} \right]$, *n- kare* matrisi için

$$R_i '(A) = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \left| a_{ij} \right| \tag{3.32}$$

olmak üzere *A*'nın bütün özdeğerleri

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \quad : \quad \left| z - a_{ij} \right| \leq R_i '(A) \right\} \tag{3.33}$$

kümesi içindedir.

Tanım 3.2. [11] $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}$ ve $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{m,n}$ matrislerinin Hadamard çarpımı (Schur çarpımı)

$$A\circ B=\left[a_{ij}.b_{ij}\right]\in M_{m,n}$$

şeklindedir.

Tanım 3.3. [17] F, bir cisim ve $M_n(F)$**,** $n\times n$ matrislerin kümesini göstermek üzere

$$M_N : M_n(F)\to IR^{+}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm aşağıdaki şartları sağlarsa o zaman bu dönüşüme **matris normu** denir ve matris normu $A\in M_n(F)$ için $M_N(A)=\|A\|$ şeklinde gösterilir.

M_{N1}) $A\in M_n(F)$ için $A\neq 0$ ise $\|A\|>0$ ve $A=0\Leftrightarrow\|A\|=0$'dır.

M_{N2}) $A\in M_n(F)$ ve $\alpha\in F$ için $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$'dır.

M_{N3}) $A,B\in M_n(F)$ için $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$'dir.

M_{N4}) $A,B\in M_n(F)$ için $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$'dir.

Eğer sadece M_{N1} M_{N2} ve M_{N3} aksiyomları sağlanırsa, o zaman bu norma **genelleştirilmiş matris normu** denir. Eğer M_{N1} M_{N2} M_{N3} ve M_{N4} aksiyomlarının hepsi sağlanırsa buna da matris normu denir. Bu tanım aynı zamanda $m\times n$ dikdörtgen matrisleri için de geçerlidir.

Şimdi biz *G* graphının *A(G)* komşuluk matrisini, tanımlayacağımız iki matrisin Hadamard çarpımı şeklinde yazmaya çalışacağız.

Tanım 3.4. Basit bağlantılı bir G graphı için (1,-1,0) matrisi *B(G)* ve (-1,0) matrisi *C(G)* olmak üzere;

$$B(G)=\left[b_{ij}\right]=\begin{cases}1 & ; \; i=j\\ \text{-1} & ; \; i\sim j\\ 0 & ; \; \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve

$$C(G) = \left[c_{ij} \right] = \begin{cases} -1 & ; \ i \sim j \\ 0 & ; \ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

Lemma 3.7.[11] *G* graphının (1,-1,0) matrisi *B(G)* ile (-1,0) matrisi *C(G)*’ nin Hadamard çarpımı, *A(G)* komşuluk matrisine eşittir. Yani

$$A(G) = B(G) \circ C(G) \tag{3.34}$$

dir.

İspat : *A(G)* komşuluk matrisinin tanımı ve Hadamard çarpımının tanımından açıktır.

Lemma 3.8. [11] Hadamard çarpım ile norm arasındaki bağıntı

$$\|A \circ B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$

şeklindedir.

Teorem 3.11. *G*’ nin spektral yarıçapı ρ olmak üzere

$$\rho \le \sqrt[p]{\left\{ \sum_{i=1}^{n} (1 + d_i) \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n} d_i \right\}} \qquad (1 \le p < \infty) \tag{3.35}$$

İspat : Norm ile spektral yarıçap arasındaki bağıntıdan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \rho = \lambda_{\max}\left(A(G)\right) &\le \|A(G)\| = \|B \circ C\| \le \|B\| \cdot \|C\| \\ &\le \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^p \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^p \right\}^{1/p} \\ &\le \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \right\}^{1/p} \\ &\le \left\{ \sum_{i=1}^{n} (1 + d_i) \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n} d_i \right\}^{1/p} \\ &\le \sqrt[p]{\left\{ \sum_{i=1}^{n} (1 + d_i) \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n} d_i \right\}} \end{aligned}$$

Sonuç 3.5. G' nin spektral yarıçapı ρ olmak üzere

$$\rho \leq \sqrt{\sum d_i} \tag{3.36}$$

dir.

İspat: Norm ile spektral yarıçapın tanımı kullanılarak

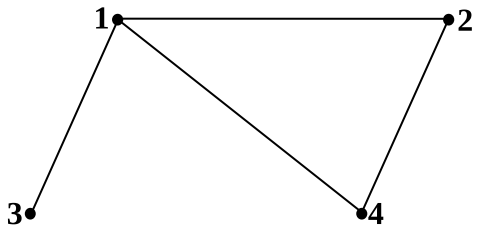
$$\rho \leq \|A(G)\| = \sqrt{\sum d_i}$$

elde edilir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

ÖRNEKLER

Örnek 4.1.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

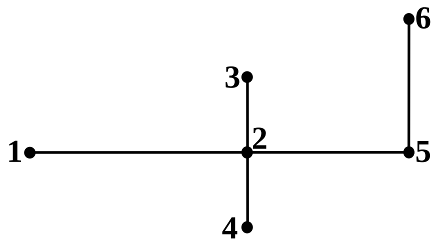
A(*G*)'nin özdeğerleri ;

-1.481194304, -1.000000000, 0.3111078175, 2.170086487

ρ	3.14	3.17	3.22	3.35	3.36
2.170	2.998	2.500	2.236	2.49	2.828

Tablo 4. 1.

Örnek 4.2.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

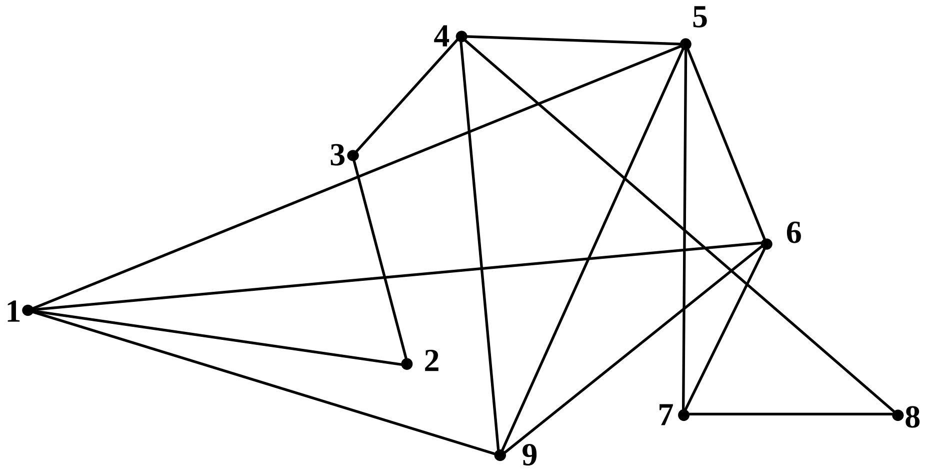
A(G)'nin özdeğerleri ;

-2.074313293, -0.8349996181, 0., 0., 0.8349996181, 2.074313293

ρ	3.14	3.17	3.22	3.35	3.36
2.074	3.999	2.236	2.236	2.329	3.162

Tablo 4. 2

Örnek 4.3.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

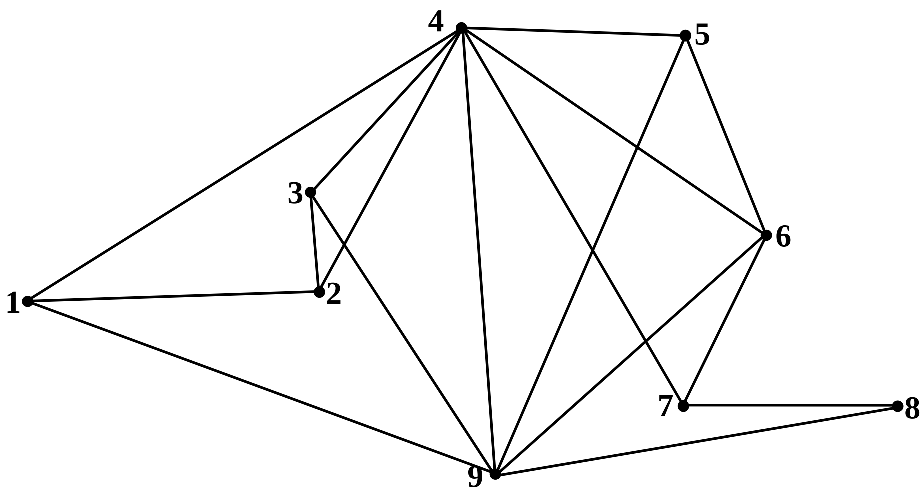
A(*G*)'nin özdeğerleri;

-2.287441595, -1.847076680, -1.512685747, -0.9262184190, -0.3865574404, 0.5226818427, 1.285601056, 1.379095380, 3.772601603

ρ	3.14	3.17	3.22	3.35	3.36
3.372	4.999	4.018	4.358	4.1	5.477

Tablo 4. 3

Örnek 4.4.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

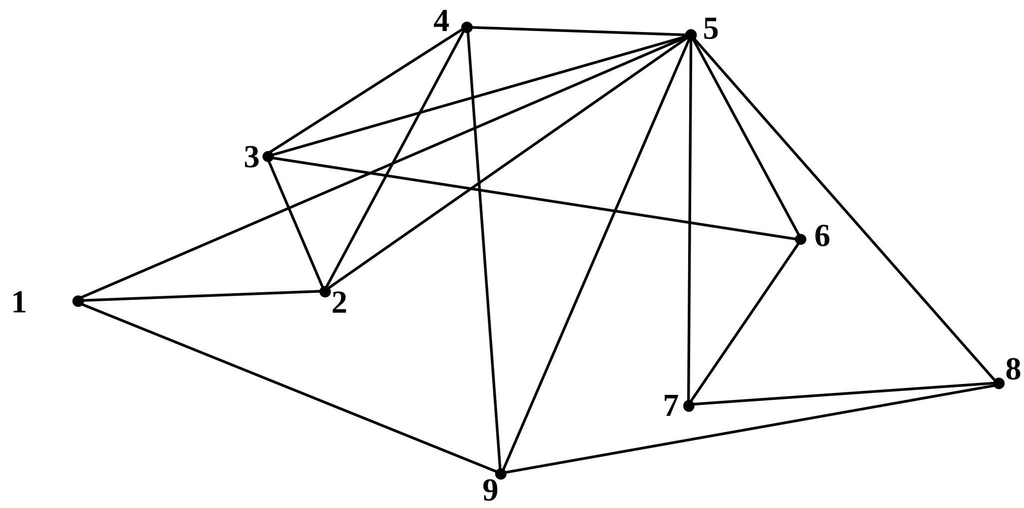
A(*G*)'nin özdeğerleri;

-2.477278246, -2.080100948, -1.284800480, -0.9240180463, 0.5551115123 10^{-16}, 0.2961931943, 0.6736993606, 1.539555346, 4.256749818

ρ	3.14	3.17	3.22	3.35	3.36
4.256	6.999	5.188	5	4.295	5.830

Tablo 4. 4

Örnek 4.5.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

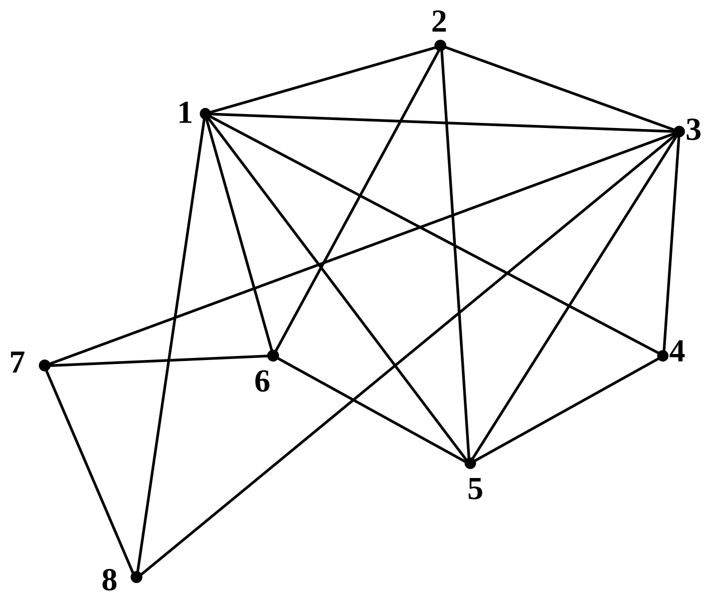
A(*G*)'nin özdeğerleri;

-2.238901760, -1.826985675, -1.801937736, -1., -0.4450418679, 0.1457362983, 1.246979604, 1.527576278, 4.392574860

ρ	3.14	3.17	3.22	3.35	3.36
4.392	7.999	4.873	5.567	6.34	6

Tablo 4. 5

Örnek 4.6.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A(*G*)'nin özdeğerleri;

-2.313136837, -2.000000000, -1.330222637, -0.5362326601, -0.2986247276, 0.7397680566, 1.212264928, 4.526183877

ρ	3.14	3.17	3.22	3.35	3.36
4.526	5.999	5.105	5	6.14	5.830

Tablo 4. 6

KAYNAKLAR

1. Bondy, J. A.; Murty, U. S. R. *Graph Theory with Applications*, Macmillan Co., New York, **1976.**

2. Brualdi, R. A.; Hoffman, A. J. *On the spectral radius of (0,1) matrix,* Linear Algebra. Appl. 65, **(1985),** 133-146.

3. Chetkovic, D.; Powlinson, P.; Simic, S. *Eigenspaces of graphs,* Cambridge University Pres. **1997.**

4. Cioab, S. M.; Gregory, D. A.; Nikiforov, V. *Extreme eigenvalues for nonregular graphs*, J. Combin. Theory Ser.B. **(2006),** doi: 10. 1016 / j. jctb.

5. Das Ch, K.; Kinnar, P. *Some new bounds on the spectral radius of graphs,* Discrete Math. 281, **(2004),** 149-161.

6. Diestel, R. *Graph Theory Electronic edition 2005*, Springer-Verlag Heidelberg, **(2005),** New York.

7. Godsil**,** C.; Royle, G. *Algebraic Graph Theor*y, Springer-Verlag, **2001**.

8. Gregory, D. A.; Herstkowitz, D.; Kirkland, S. J, *The spread of the spectrum of a graph,* Linear Algebra. Appl. 332-334, **(2001),** 23-25.

9. Hong, Y. *A bound on the spectral radius,* Linear Algebra Appl. 108, (**1988),** 135-139.

10. Hong, Y.; Shu, J. L.; Kunfu Fang, *A sharp upper bound of the spectral radius of graphs,* J. Combin. Theory Ser. B. 81, **(2001)** , 177-183.

11. Horn, R.; Johnson, C. R. *Matrix Analysis*, Cambridge University Pres, New York, **1985.**

12. Lui, B.; Shen, J.; Wong, X. *On the largest eigenvalue of non-regular graphs,* Journal of Combinatorial Theory,Series B 97**(2007)** 1010-1018

13. Lui, B.; Li, G. *A note on the largest eigenvalue of non-regular graphs,* Electronic Journal of Linear Algebra. Appl. 17, **(2008),** 54-61

14. Papendieck, B.; Recht, P. *On maximal entries in the principal eigenvector of graphs,* Linear Albegra. Appl. 310, **(2000)**,129-138.

15. Saran, M.S. *Graph teorisinin bazı mühendislik uygulamaları* Balıkesir Ünv. Yüksek Lisans Tezi, **(2008)**

16. Stevanovic, D. *The largest eigenvalue of nonregular graphs, Journal of Combinatorial Theory,* Series B.91, **(2004),** 143-146.

17. Taşcı D. "*Lineer Cebir*" Gazi Kitabevi **(2005)** Ankara.

18. Vetkoviç, D. M. C.; Doop, M.; Sachs, H. *Spectral of Graphs,* Academic Press, San Diego, **1980.**

19. Zhang, D. *Eigenvectors and eigenvalues of non-regular graps,* Linear Algebra. Appl. 409, **(2005),** 79-86.

20. Zhao, S. Q.; Hong, Y. *On the bounds of maximal entries in the principal eigenvector of symmetric nonnegative matrix,* Linear Algebra. Appl. 340, **(2002),** 245-252.

ÖZGEÇMİŞ

29.11.1969 yılında Kırşehir'de doğdu. İlkokulu Yeşilyurt, ortaokulu Kale, liseyi Kırşehir Endüstri Meslek Lisesi'nde bitirdi. 1989 yılında, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 1994 yılında aynı bölümden mezun oldu. Aynı yıl Erzincan'ın Tercan ilçesi Yatılı İlköğretim Bölge okulu, 1996 Mucur lisesi, 1996 Kırşehir Mehmet Akif Ersoy lisesi ve 2000 yılından itibaren de Kırşehir lisesinde çalışmaktadır. Halen Kırşehir Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.