T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

BURCU GÖRMEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR
2025

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

BURCU GÖRMEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL

KIRŞEHİR
2025

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

12/09/2025
Burcu GÖRMEZ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca akedemik birikimiyle çalışmalarıma yön veren, desteğini esirgemeyen, beni yüreklendiren ayrıca ahlaki ve insani değerleriyle örnek aldığım danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL'e büyük bir içtenlikle teşekkür ederim.

Hayatımın boyunca bana güç veren, yanımda durarak bu başarıya ulaşmamda katkı sağlayan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen kıymetli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Eylül, 2025 Burcu GÖRMEZ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Burcu GÖRMEZ

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman:	**Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL**
	Yıl: 2025, Sayfa: 43
Jüri:	**Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL**
	Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN
	Doç. Dr. Naime DEMİRTAŞ

Bu tez çalışması, esnek topolojik uzayların karşılaştırılmasını vermek amacıyla yapılmıştır. Shabir ve Naz (2011) bir başlangıç evreni üzerinde parametrelerin sabitlenmiş bir kümesiyle esnek topoloji kavramını tanımlamış ve esnek topolojik uzayda temel kavramları vermişlerdir. Ayrıca iki esnek topolojinin kesişiminin esnek topoloji olduğunu ancak birleşiminin genellikle esnek topoloji olmadığını örnekler ile göstermişlerdir. Ancak bu örnekler problemlidir. Bu tez çalışmasında bu problemi giderecek örnekler verilmiştir. Ayrıca esnek açık küme ve esnek alt küme kavramları yardımı ile esnek topolojik uzayların karşılaştırılması incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, Esnek topolojik uzay, Esnek açık küme, Esnek alt küme

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

COMPARISON OF SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Burcu GÖRMEZ

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor:	**Assist. Prof. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL**
	Year: 2025, Pages: 43
Juries:	**Assist. Prof. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL**
	Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN
	Assoc. Prof. Dr. Naime DEMİRTAŞ

This thesis study was conducted with the aim of comparing soft topological sapaces. Shabir and Naz (2011) defined the concept of soft topology with a set fixed on the initial universe through parameters and provided the basic concepts in soft topological space. They also showed that the intersection of two soft topologies is a soft topology, but the union is not necessarily a soft topology, using examples. However, these examples are problematic. In this thesis, examples were given to eliminate this problem. Furthermore, the comparison of soft topological spaces has been examined using the concepts of soft open sets and soft subsets.

Key Words: Soft set, Soft topological space, Soft open set, Soft subset

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler		Açıklama
$=$	:	Eşittir
$\neq$	:	Eşit değildir
$\in$	:	Ait
$\notin$	:	Ait değil
$\forall$	:	Her
$\exists$	:	Vardır
$\ni$	:	Öyle ki
$\Longrightarrow$	:	Gerek koşul
$\Longleftarrow$	:	Yeter koşul
$\Longleftrightarrow$	:	Gerek ve yeter koşul
$\emptyset$	:	Boş küme
X	:	Evren küme
$\mathcal{P}(X)$	:	Güç kümesi
$\subseteq$	:	Alt küme
$\cup$	:	Birleşim
$\cap$	:	Kesişim
A^c	:	Tümleyen
P	:	Parametre kümesi
(S,P)	:	Esnek küme
$\mathcal{S}(X,P)$	:	Esnek kümelerin ailesi
ϕ_A	:	Boş esnek küme
$\tilde{A}$	:	Evrensel esnek küme
$\sqsubseteq$	:	Esnek alt küme
$\sqcup$	:	Esnek birleşim
$\sqcap$	:	Esnek kesişim
$(S,A)^c$	:	Esnek relatif tümleyen
$(X,\tilde{\tau},P)$	:	Esnek topolojik uzay
$\tilde{\tau}'$	:	Esnek kapalı kümelerin ailesi

1. GİRİŞ

Günlük hayatta ya da bilimsel çalışmalarda karşılaşılan ve içerisinde belirsizlik durumları bulunduran bazı problemlerin çözümünde klasik matematiğin yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Böyle problemlerin çözümü ile ilgili yeni teoriler geliştirilmiştir. Bunlardan biri olan esnek küme teori ve topolojik yapısı birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Bir esnek küme, bilinen anlamda klasik bir küme olmadığından; esnek topolojik uzay kavramı, klasik topolojiden farklıdır. Esnek kümeler geleneksel kümelerden farklı olarak parametreler içerir. Esnek topolojik uzay kavramında, her bir parametreye karşılık başlangıç evreni üzerinde bir klasik topoloji tanımlı olduğundan, parametreler önemli rol oynar. Esnek topolojik uzay, bir başlangıç evreni üzerindeki klasik topolojilerin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Bu durumun karşıtı doğru değildir. Yani her bir parametreye karşılık bir klasik topolojik uzay verildiğinde, esnek kümelerin bazı ailesi esnek topolojik uzay oluşturmayabilir. Dolayısıyla esnek topolojik uzayların klasik topolojik uzaylardan daha kapsamlı ve daha genel olduğunu söyleyebiliriz.

Biz bu tez çalışması için yurt içi ve yurt dışında yayınlanan çalışmaları inceledik; Shabir ve Naz (2011) bir başlangıç evreni üzerinde parametrelerin sabitlenmiş bir kümesiyle esnek topoloji kavramını tanımlamış ve esnek topolojik uzayda temel kavramları vermişlerdir. Ayrıca iki esnek topolojinin kesişiminin esnek topoloji olduğunu ancak birleşiminin genellikle esnek topoloji olmadığını örnekler ile göstermişlerdir. Ancak bu örnekler problemlidir. Bu tez çalışmasında amacımız bu problemi giderecek örnekler vermektir. Ayrıca esnek topolojik uzayların karşılaştırılmasını esnek açık küme ve esnek alt küme kavramları yardımı ile incelemektir.

Bu tez çalışmasında klasik topolojik uzaylardan daha genel olan esnek topolojik uzayları inceleyip, klasik topolojide bilinen bazı temel yapıları esnek topolojik uzaylara genişletmek önem arz etmektedir. Çünkü klasik topolojide bilinen her temel yapı esnek topolojik uzaylarda tanımlanamayabilir. Böylece literatürde yer almayan bazı özgün sonuçlara ulaşılabilecektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Günlük hayatta ve mühendislik, eğitim, tıp, ekonomi gibi hemen hemen her alanda kesin olmayan kavramlar mevcuttur. Bu gibi kesin olmayan kavramlar belirsiz olarak adlandırılır. Belirsizliğin bulunduğu problemlerin çözülmesine yardımcı olmak üzere, araştırmacılar tarafından yeni teoriler geliştirilmiştir. Bunlardan biri olan esnek küme teori ve topolojik yapısı birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu tez çalışmasında esnek kümeler ve esnek topolojik uzaylar üzerinde durulacaktır. Şimdi bu kavramlar ile ilgili daha önce yapılan çalışmaları hatırlatacağız.

Belirsizlik için farklı bir matematiksel yaklaşım olarak önerilen esnek küme teori Molodtsov (1999) tarafından tanımlanmıştır. Molodtsov esnek kümeyi, bir evren kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesi olarak tanımlamıştır. Ayrıca Molodtsov (1999), yaklaşım tanımında hiçbir kısıtlama olmayan esnek küme teorisini kullanarak, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, oyun teorisi, olasılık teorisi, ölçüm teorisi gibi alanlarda başarılı çalışmalar yapmıştır (Molodtsov, 2004).

Esnek kümelerin Molodtsov tarafından ortaya atılmasından sonra, ilk olarak Maji ve ark. (2003) esnek kümelerin küme-teorisel özelliklerini tanımlamışlar ve ilişkilerini incelemişlerdir. Daha sonra esnek küme işlemleri üzerine birçok araştırmacı çalışma yapmıştır. Bu çalışmalarda temel kavramların birçoğunda yetersizlikler bulunmuştur. Daha sonra yeni tanımlar ve örnekler verilerek bu yetersizlikler ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Bunlardan bazıları; Chen ve ark., 2005; Pei ve Miao, 2005; Aktaş ve Çağman, 2007; Feng ve ark., 2008; Ali ve ark., 2009 olarak sıralanabilir. Özellikle Ali ve ark. (2009) tarafından verilen esnek kümeler üzerinde bazı işlemlerin analizine dayalı, iki esnek kümenin kısıtlanmış kesişimi, kısıtlanmış birleşimi, kısıtlanmış farkı ve genişletilmiş kesişimi gibi kavramlar verilmiştir. Hatta bir esnek kümenin tümleyen tanımını iyileştirilerek bu yeni tanımlara göre önceki çalışmanın aksine DeMorgan kurallarının sağlandığı gösterilmiştir.

Esnek küme teorisi, belirsizlik içeren problemlerde karşılaşılan güçlüklerin çözümlenmesinde çok kullanışlı matematiksel bir araç olduğundan karar verme problemleri üzerine birçok çalışmanın yapılmasını ve dolayısıyla esnek karar verme metotlarının ortaya atılmasını sağlamıştır. Molodsov'un belirsizliğe karşı önerdiği esnek küme teorisinin bu kadar güçlü olmasının nedeni, diğer küme teorilerinde bulunmayan ve karar verme sürecini ifade etmede oldukça elverişli olan bir parametreleştirme aracının eksikliğini giderebilmesidir. Karşılaşılan belirsizlik problemlerini ifade etmedeki bu başarısı sayesinde de birçok alana kolaylıkla uygulanmıştır (Maji ve ark., 2003; Molodtsov, 2004; Chen ve ark., 2005; Pei ve Miao, 2005; Feng ve ark., 2008; Ali ve ark., 2009; Aktaş ve Çağman, 2010; Feng, 2011; Çetkin ve ark., 2016; Zhan ve ark., 2017; Güzel Ergül ve Yüksel, 2019; Suo ve ark., 2021).

2011 yılından itibaren de bazı yazarlar tarafından esnek kümelerin topolojik yapısı incelenmeye başlanmıştır: Shabir ve Naz (2011) sabit bir başlangıç evreni ve sabit bir parametre kümesi üzerinde esnek topoloji kavramını tanımlamış ve esnek topolojik uzayda esnek açık küme, esnek kapalı küme, esnek iç nokta, esnek kapanış noktası gibi temel kavramları vermişlerdir. Ayrıca esnek alt uzay, esnek T_i- uzaylar, esnek normal ve esnek regüler uzay kavramlarını tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemişlerdir. Daha sonra bazı araştırmacılar (Min, 2011; Hussain ve Ahmad, 2011; Aygünoğlu ve Aygün, 2012; Zorlutuna ve ark., 2012; Pazar Varol ve Aygün, 2013; Nazmul ve Samanta, 2013; Das ve Samanta, 2013; Yüksel ve ark., 2014) esnek topolojik uzayların genel özellikleri, esnek ayırma aksiyomları, esnek kompaktlık, esnek süreklilik, esnek çarpım topolojisi, esnek bağlantılılık gibi kavramlar üzerinde çalışmışlardır. Ayrıca bazı araştırmacılar da klasik topolojide bilinen bazı küme çeşitlerini esnek topolojik uzaylarda incelemişlerdir. Chen (2013) esnek topolojik uzaylarda esnek semi açık kümeleri, Kandil ve ark. (2014) esnek pre açık, esnek α-açık, esnek semi açık ve esnek β-açık kümeleri, ayrıca Yumak ve Kaymakçı (2013) Akdağ ve Özkan (2014), esnek β-açık kümeleri çalışmışlardır. Kannan (2012) ve Yüksel ve ark. (2013) esnek genelleştirilmiş kapalı kümeleri incelemişlerdir.

Esnek kümelerin topolojik yapıları farklı açılardan da ele alınmıştır. Örneğin, Çağman ve ark. (2011) esnek topolojik uzayı Shabir ve Naz (2011)'dan daha genel bir yaklaşımla tanımlamış ve temel kavramları vermişlerdir. El-Sheikh ve Abd El-Latif (2014) bir başlangıç evreni üzerinde parametrelerin sabitlenmiş bir kümesiyle supra esnek topolojik uzay kavramını tanımlamış ve Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen esnek topolojik uzaylardan daha genel olan supra esnek topolojik uzaylarda supra esnek açık küme, supra esnek kapalı küme, supra esnek iç nokta, supra esnek kapanış noktası gibi temel kavramları vermişlerdir. Ayrıca supra esnek küme çeşitleri ve supra esnek süreklilik çeşitlerini inceleyip bazı ayrışımlar elde etmişlerdir. Mustafa ve Sleim (2014) esnek ideal kavramını tanımlamış ve esnek genelleştirilmiş kapalı kümeleri bir esnek ideale dayalı olarak incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasında, klasik topolojik uzaylardan daha genel olan esnek topolojik uzayların karşılaştırılması esnek açık küme ve esnek alt küme kavramları yardımı ile örnekler vererek incelenmiştir. Shabir ve Naz (2011) esnek topolojik uzaylarda iki esnek topolojinin kesişiminin esnek topoloji olduğunu ancak birleşiminin genelde esnek topoloji olmadığını örnekler ile göstermişlerdir. Ancak bu örnekler problemlidir. Bu tez çalışmasında bu problemi giderecek örnekler verilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu tez çalışmasında ilk olarak literatür taraması yapılmıştır. Bu çalışma boyunca esnek topolojik uzaylar ile ilgili kaynaklar kısmında belirtilen makale ve kitaplardan yararlanılmıştır. Bunlara bağlı olarak elde edilen bulgulardan birtakım sonuçlar çıkarılmıştır. Çalışmalara, elde edilen sonuçlara göre yön verilmiştir.

Bu çalışma boyunca literatürde kullanılan, bazı tanım ve teoremlerden aşağıda bahsedilmiştir.

3.1. Esnek Kümeler

Bu bölümde esnek kümeler ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir.

3.1.1.Tanım (Molodtsov, 1999) X bir başlangıç evreni ve P tüm parametrelerin kümesi olsun. $\mathcal{P}(X)$, X kümesinin güç kümesi ve A, P'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $S: A \to \mathcal{P}(X)$ bir dönüşüm olmak üzere (S, A) ikilisine X üzerinde bir esnek küme denir. Buna göre

$$(S, A) = \{(p, S(p)) : p \in A, S(p) \in \mathcal{P}(X)\}$$

sıralı ikililerin kümesidir.

Diğer bir deyişle; X üzerinde bir esnek küme, X evreninin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir. $p \in A$ için $S(p)$, (S, A) esnek kümesinin $p -$ tahmini elemanlarının kümesi gibi düşünülebilir. Sonuç olarak bir esnek küme klasik anlamda bir küme değildir.

Eğer $(p, S(p))$, (S, A) esnek kümesine ait ise $(p, S(p)) \in (S, A)$, aksi taktirde $(p, S(p)) \notin (S, A)$ şeklinde yazarız.

3.1.2.Tanım (Çağman ve Enginoğlu, 2010) X bir başlangıç evreni ve P tüm parametrelerin kümesi olsun. $\mathcal{P}(X)$, X kümesinin güç kümesi ve A, P'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. X üzerinde bir S_A esnek kümesi $s_A: P \to \mathcal{P}(X) \ni p \notin A$ için $s_A(p) = \emptyset$ şeklinde tanımlanır. Burada s_A yaklaşım fonksiyonu olarak da adlandırılır. Buna göre

$$S_A = \{(p, s_A(p)) : p \in P, s_A(p) \in \mathcal{P}(X)\}$$

sıralı ikililerin kümesidir.

Eğer $\left(p, s_A(p)\right)$, S_A esnek kümesine ait ise $\left(p, s_A(p)\right) \in S_A$, aksi takdirde $\left(p, s_A(p)\right) \notin S_A$ şeklinde yazarız.

Bundan sonra, X kümesi üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi $S(X, P)$ ile gösterilecektir.

3.1.1.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme ve $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ parametreler kümesi verilsin. $A = \{p_2, p_3, p_4, p_5\} \subseteq P$ ve

$$s_A(p_2) = \{x_2, x_4\}, \qquad s_A(p_3) = \emptyset, \qquad s_A(p_4) = X, \qquad s_A(p_5) = \{x_1, x_5, x_6\}$$

olmak üzere S_A esnek kümesi

$$S_A = \{(p_1, \emptyset), (p_2, \{x_2, x_4\}), (p_3, \emptyset), (p_4, X), (p_5, \{x_1, x_5, x_6\})\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde

$$S(p_2) = \{x_2, x_4\}, \qquad S(p_3) = \emptyset, \qquad S(p_4) = X, \qquad S(p_5) = \{x_1, x_5, x_6\}$$

olmak üzere (S, A) esnek kümesi

$$(S, A) = \{(p_2, \{x_2, x_4\}), (p_3, \emptyset), (p_4, X), (p_5, \{x_1, x_5, x_6\})\}$$

şeklinde tanımlanır.

3.1.3.Tanım (Maji ve ark., 2003) (S, A), X evreni üzerinde bir esnek küme olsun.

i) Eğer her $a \in A$ için $S(a) = \emptyset$ ise (S, A) boş esnek küme olarak adlandırılır ve kısaca ϕ_A ile gösterilir.

ii) Eğer her $a \in A$ için $S(a) = X$ ise (S, A) evrensel esnek küme olarak adlandırılır ve kısaca $\widetilde{A}$ ile gösterilir.

3.1.2.Örnek. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evren küme ve $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ parametreler kümesi verilsin. $A = \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq P$ ve $B = \{p_1, p_2, p_3, p_5\} \subseteq P$ olsun**.**

i) (S, B) esnek kümesi aşağıdaki şekilde verilsin;

$$S(p_1) = \emptyset,\ S(p_2) = \emptyset,\ S(p_3) = \emptyset,\ S(p_5) = \emptyset$$

Bu durumda her $p \in B$ için $S(p) = \emptyset$ olduğundan (S, B) boş esnek küme olarak adlandırılır**.**

ii) (S, A) esnek kümesi aşağıdaki şekilde verilsin;

$$S(p_1) = X,\ S(p_2) = X,\ S(p_3) = X$$

Bu durumda her $p \in A$ için $S(p) = X$ olduğundan (S, A) evrensel esnek küme olarak adlandırılır.

3.1.4.Tanım (Shabir ve Naz, 2011) Y, X evreninin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $p \in P$ için $Y(p) = Y$ ise $\tilde{Y}$ sembolü, X üzerindeki (Y, P) esnek kümesini gösterir. Benzer şekilde, (X, P) esnek kümesi de $\tilde{X}$ ile gösterilir.

3.1.5.Tanım (Maji ve ark., 2003) (S, A) ve (G, B), X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin birleşimi, $(S, A) \sqcup (G, B) = (H, C)$ esnek kümesidir. Burada $C = A \cup B$ ve her $p \in C$ için

$$H(p) = \begin{cases} S(p) & , eğer\ p \in A - B\ ise \\ G(p) & , eğer\ p \in B - A\ ise \\ S(p) \cup G(p), & eğer\ p \in A \cap B\ ise \end{cases}$$

şeklindedir.

3.1.6.Tanım (Feng ve ark., 2008) (S, A) ve (G, B), X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin kesişimi, $(S, A) \sqcap (G, B) = (H, C)$ esnek kümesidir. Burada $C = A \cap B$ ve her $p \in C$ için

$$H(p) = S(p) \cap G(p)$$

şeklindedir.

3.1.7.Tanım (Zorlutuna ve ark., 2012) I, keyfi bir indis kümesi ve $\{(S_i, P)\}_{i \in I}$ ailesi, X evreni üzerindeki P parametre kümesine bağlı esnek kümelerin bir alt ailesi olsun. Bu esnek kümelerin birleşimi, $(G, P) = \bigsqcup_{i \in I}(S_i, P)$ esnek kümesi ile gösterilir öyle ki her $p \in P$ için $G(p) = \bigcup_{i \in I} S_i(p)$ şeklindedir. Bu esnek kümelerin keşisimi, $(H, P) = \bigsqcap_{i \in I}(S_i, P)$ esnek kümesi ile gösterilir öyle ki her $p \in P$ için $H(p) = \bigcap_{i \in I} S_i(p)$ şeklindedir.

3.1.8.Tanım (Shabir ve Naz, 2011) X evreni üzerinde (S,P) ve (G,P) esnek kümeleri verilsin. Bu iki esnek kümenin farkı $(H,P) = (S,P) - (G,P)$ esnek kümesidir. Burada her $p \in P$ için

$$H(p) = S(p) - G(p)$$

şeklindedir.

3.1.9.Tanım (Shabir ve Naz, 2011) X evreni üzerindeki (S,A) esnek kümesinin relatif tümleyeni $(S,A)^c$ ile gösterilir ve $(S,A)^c = (S^c, A)$ şeklinde tanımlanır öyle ki her $p \in A$ için $S^c(p) = X \setminus S(p)$ ile verilen $S^c: A \to \mathcal{P}(X)$ bir dönüşümdür.

3.1.3.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme, $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ parametreler kümesi ve $A = \{p_1, p_3, p_4, p_5\} \subseteq P$ olsun. (S,A) esnek kümesi aşağıdaki şekilde verilsin;

$$(S,A) = \{(p_1, \{x_2, x_4, x_5\}), (p_3, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}), (p_4, \emptyset), (p_5, \{x_1\})\}$$

Bu durumda (S,A) esnek kümesinin relatif tümleyeni

$$(S,A)^c = \{(p_1, \{x_1, x_3, x_6\}), (p_3, \{x_1, x_2\}), (p_4, X), (p_5, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\})\}$$

şeklindedir.

3.2. Esnek Topolojik Uzaylar

Bu bölümde, sabit bir başlangıç evreni ve sabit bir parametre kümesi üzerinde tanımlanmış esnek topolojik uzay ve esnek topolojik uzayda bazı kavramlar verilecektir.

3.2.1.Tanım (Shabir ve Naz, 2011) X evren kümesi ve P parametre kümesi olsun. X üzerindeki P parametre kümesine bağlı esnek kümelerin bir alt ailesi olan $\tilde{\tau}$, aşağıdaki özellikleri sağlarsa, $\tilde{\tau}$, ailesine X evreni üzerinde bir esnek topoloji denir.

i) $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}$,

ii) $\tilde{\tau}$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}$ ailesine aittir,

iii) $\tilde{\tau}$ ailesine ait iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}$ ailesine aittir.

$\tilde{\tau}$ ailesinin her elemanına, esnek açık küme ve $(X, \tilde{\tau}, P)$ üçlüsüne, esnek topolojik uzay denir.

3.2.1. Örnek (Shabir ve Naz, 2011) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$$H_1(p_1) = \{x_1, x_2\}, H_1(p_2) = \{x_1, x_2\}$$

$$H_2(p_1) = \{x_2\}, H_2(p_2) = \{x_1, x_3\}$$

$$H_3(p_1) = \{x_2, x_3\}, H_3(p_2) = \{x_1\}$$

$$H_4(p_1) = \{x_2\}, H_4(p_2) = \{x_1\}$$

$$H_5(p_1) = \{x_1, x_2\}, H_5(p_2) = X$$

$$H_6(p_1) = X, H_6(p_2) = \{x_1, x_2\}$$

$$H_7(p_1) = \{x_2, x_3\}, H_7(p_2) = \{x_1, x_3\}$$

olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\phi_P, \tilde{X}, (H_1, P), (H_2, P), (H_3, P), (H_4, P), (H_5, P), (H_6, P), (H_7, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzaydır.

Çözüm:

i) $\phi_P,\ \tilde{X} \in \tilde{\tau}$ şartı sağlanır. $\tilde{\tau}$ ailesinin tanımından açıktır.

ii) $\tilde{\tau}$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}$ ailesine ait midir?

$$(H_i, P) \sqcup \phi_P = (H_i, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_i, P) \sqcup \tilde{X} = \tilde{X} \in \tilde{\tau}$$
$$(H_1, P) \sqcup (H_2, P) = (H_5, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_1, P) \sqcup (H_3, P) = (H_6, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_1, P) \sqcup (H_4, P) = (H_1, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_1, P) \sqcup (H_5, P) = (H_5, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_1, P) \sqcup (H_6, P) = (H_6, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_1, P) \sqcup (H_7, P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}$$
$$(H_2, P) \sqcup (H_3, P) = (H_7, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_2, P) \sqcup (H_4, P) = (H_2, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_2, P) \sqcup (H_5, P) = (H_5, P) \in \tilde{\tau}$$

$(H_2, P) \sqcup (H_6, P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}$

$(H_2, P) \sqcup H_7, P) = (H_7, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_3, P) \sqcup (H_4, P) = (H_3, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_3, P) \sqcup (H_5, P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}$

$(H_3, P) \sqcup (H_6, P) = (H_6, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_3, P) \sqcup (H_7, P) = (H_7, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_4, P) \sqcup (H_5, P) = (H_5, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_4, P) \sqcup (H_6, P) = (H_6, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_4, P) \sqcup (H_7, P) = (H_7, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_5, P) \sqcup (H_6, P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}$

$(H_5, P) \sqcup (H_7, P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}$

$(H_6, P) \sqcup (H_7, P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}$

şeklinde olduğundan **ii)** sağlanır.

iii) $\tilde{\tau}$ ailesine ait iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}$ ailesine ait midir?

$(H_i, P) \sqcap \phi_P = \phi_P \in \tilde{\tau}$

$(H_i, P) \sqcap \tilde{X} = (H_i, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_1, P) \sqcap (H_2, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_1, P) \sqcap (H_3, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_1, P) \sqcap (H_4, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_1, P) \sqcap (H_5, P) = (H_1, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_1, P) \sqcap (H_6, P) = (H_1, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_1, P) \sqcap (H_7, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_2, P) \sqcap (H_3, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_2, P) \sqcap (H_4, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_2, P) \sqcap (H_5, P) = (H_2, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_2, P) \sqcap (H_6, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_2, P) \sqcap (H_7, P) = (H_2, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_3, P) \sqcap (H_4, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_3, P) \sqcap (H_5, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_3, P) \sqcap (H_6, P) = (H_3, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_3, P) \sqcap (H_7, P) = (H_3, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_4, P) \sqcap (H_5, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$(H_4, P) \sqcap (H_6, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$

$$(H_4, P) \sqcap (H_7, P) = (H_4, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_5, P) \sqcap (H_6, P) = (H_1, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_5, P) \sqcap (H_7, P) = (H_2, P) \in \tilde{\tau}$$
$$(H_6, P) \sqcap (H_7, P) = (H_3, P) \in \tilde{\tau}$$

şeklinde olduğundan **iii)** sağlanır.

Bu durumda $\tilde{\tau} = \{\phi_P, \tilde{X}, (H_1, P), (H_2, P), (H_3, P), (H_4, P), (H_5, P), (H_6, P), (H_7, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzaydır.

3.2.1.Önerme (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, P)$ esnek topolojik uzayı verilsin.

$$\tilde{\tau}_p = \{S(p): (S, P) \in \tilde{\tau}\}$$

ailesi her $p \in P$ için X evreni üzerinde bir klasik topoloji tanımlar.

3.2.2.Tanım (Shabir ve Naz, 2011) X evren kümesi ve P parametre kümesi olsun. $\tilde{\tau} = \mathcal{S}(X, P)$ ise $\tilde{\tau}$ ailesine, X evreni üzerinde esnek ayrık topoloji ve $\tilde{\tau} = \{\phi_P, \tilde{X}\}$ ise $\tilde{\tau}$ ailesine, X evreni üzerinde esnek ayrık olmayan topoloji denir.

3.2.3.Tanım (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, P)$ esnek topolojik uzay olsun. X evreni üzerindeki (S, P) esnek kümesinin relatif tümleyeni olan $(S, P)^c$ esnek kümesi, $\tilde{\tau}$ ailesine ait ise (S, P) esnek kümesine, esnek kapalı küme denir.

3.2.2.Önerme (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}, P)$ esnek topolojik uzay ve $\tilde{\tau}'$ ailesi, tüm esnek kapalı kümelerin ailesini göstersin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}'$,

ii) $\tilde{\tau}'$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin kesişimi $\tilde{\tau}'$ ailesine aittir,

iii) $\tilde{\tau}'$ ailesine ait iki esnek kümenin birleşimi $\tilde{\tau}'$ ailesine aittir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde iki esnek topolojinin kesişimi ve birleşimi örnekler verilerek yeniden ele alınmıştır. Ayrıca esnek açık küme ve esnek alt küme kavramları yardımı ile esnek topolojik uzayların karşılaştırılması yapılmıştır ve örnekler verilerek incelenmiştir.

4.1. Esnek Topolojilerin Kesişimi ve Birleşimi

Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen "On Soft Topological Spaces" makalesinde iki esnek topolojinin kesişiminin esnek topoloji olduğunu ancak birleşiminin genellikle esnek topoloji olmadığını örnekler ile göstermişlerdir. Bu makaledeki bazı esnek topolojik uzay örnekleri problemlidir. Bu tez çalışmasında bu problemi giderecek örnekler verilmiştir.

İlk olarak Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen "On Soft Topological Spaces" makalesindeki iki esnek topolojinin kesişiminin esnek topoloji olduğunu gösterelim.

4.1.1.Önerme (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}_1, P)$ ve $(X, \tilde{\tau}_2, P)$ aynı X evreni üzerinde iki esnek topolojik uzay olsun. Bu takdirde $(X, \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2, P)$, X evreni üzerinde bir esnek topolojik uzaydır.

i) $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1$, ϕ_P, $\tilde{X} \in \tilde{\tau}_2$ olduğundan $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ elde edilir.

ii) $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ailesine ait I, keyfi bir indis kümesi olmak üzere $\{(S_i, P)\}_{i \in I}$ ailesi verilsin. Bu durumda her $i \in I$ için $(S_i, P) \in \tilde{\tau}_1$ ve $(S_i, P) \in \tilde{\tau}_2$ olur. $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ aileleri esnek topolojik uzay olduğundan $\sqcup_{i \in I} (S_i, P) \in \tilde{\tau}_1$ ve $\sqcup_{i \in I} (S_i, P) \in \tilde{\tau}_2$ olur. Böylece $\sqcup_{i \in I} (S_i, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ elde edilir.

iii) $(S, P), (G, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ olsun. Bu durumda $(S, P), (G, P) \in \tilde{\tau}_1$ ve $(S, P), (G, P) \in \tilde{\tau}_2$ elde edilir. $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ aileleri esnek topolojik uzay olduğundan $(S, P) \sqcap (G, P) \in \tilde{\tau}_1$ ve $(S, P) \sqcap (G, P) \in \tilde{\tau}_2$ olur. Böylece $(S, P) \sqcap (G, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ elde edilir.

O halde $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ailesi X üzerinde bir esnek topolojidir ve $(X, \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2, P)$ bir esnek topolojik uzaydır.

Şimdi iki esnek topolojinin kesişiminin esnek topoloji olduğunu göstermek için ilk olarak kullanacağımız bazı esnek topolojik uzay örnekleri verelim.

4.1.1.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$$S_1(p_1) = \{x_2\},\ S_1(p_2) = \{x_2\}$$

$$S_2(p_1) = \{x_1, x_2\}, S_2(p_2) = \{x_1, x_2\}$$

$$S_3(p_1) = \{x_2, x_3\}, S_3(p_2) = \{x_2, x_3\}$$

olmak üzere $\tilde{\tau}_1 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P), (S_2, P), (S_3, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzaydır.

4.1.2.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$$G_1(p_1) = \{x_2\}, G_1(p_2) = \{x_2\}$$

$$G_2(p_1) = \{x_3\}, G_2(p_2) = \{x_3\}$$

$$G_3(p_1) = \{x_2, x_3\}, G_3(p_2) = \{x_2, x_3\}$$

olmak üzere $\tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (G_1, P), (G_2, P), (G_3, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzaydır.

4.1.3.Örnek (Shabir ve Naz, 2011) 3.2.1. Örnekte verilen

$\tilde{\tau}_3 = \{\phi_P, \tilde{X}, (H_1, P), (H_2, P), (H_3, P), (H_4, P), (H_5, P), (H_6, P), (H_7, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzaydır.

4.1.4. Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun. X evreni üzerinde 4.1.1.Örnek, 4.1.2.Örnek ve 4.1.3.Örnekte sırasıyla verilen $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ ve $\tilde{\tau}_3$ esnek topolojik uzayları için aşağıdakiler sağlanır:

a) $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ailesi esnek topolojik uzaydır.

b) $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesi esnek topolojik uzaydır.

c) $\tilde{\tau}_2 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesi esnek topolojik uzaydır.

Çözüm:

a) $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ailesi esnek topolojik uzaydır. Gerçekten ilk olarak $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ailesini belirleyelim.

$$\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P) = (G_1, P), (S_3, P) = (G_3, P)\}$$

ailesi olmak üzere

i) $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ şartı sağlanır.

ii) $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ailesine ait midir?

$(S_i, P) \sqcup \phi_P = (S_i, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$

$(S_i, P) \sqcup \tilde{X} = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$

$(S_1, P) \sqcup (S_3, P) = (S_3, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$

şeklinde olduğundan **ii)** sağlanır.

iii) $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ailesine ait iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ailesine ait midir?

$(S_i, P) \sqcap \phi_P = \phi_P \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$

$(S_i, P) \sqcap \tilde{X} = (S_i, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$

$(S_1, P) \sqcap (S_3, P) = (S_1, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$

şeklinde olduğundan **iii)** sağlanır.

Bu durumda $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P) = (G_1, P), (S_3, P) = (G_3, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzaydır.

b) $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesi esnek topolojik uzaydır. Gerçekten ilk olarak $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesini belirleyelim.

$\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_2, P) = (H_1, P)\}$ ailesi olmak üzere

i) $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$ şartı sağlanır.

ii) $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesine ait midir?

$(S_i, P) \sqcup \phi_P = (S_i, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$

$(S_i, P) \sqcup \tilde{X} = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$

şeklinde olduğundan **ii)** sağlanır.

iii) $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesine ait iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesine ait midir?

$(S_i, P) \sqcap \phi_P = \phi_P \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$

$(S_i, P) \sqcap \tilde{X} = (S_i, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3$

şeklinde olduğundan **iii)** sağlanır.

Bu durumda $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_3 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_2, P) = (H_1, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzaydır.

c) $\tilde{\tau}_2 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesi esnek topolojik uzaydır. Gerçekten $\tilde{\tau}_2 \sqcap \tilde{\tau}_3 = \{\phi_P, \tilde{X}\}$ olmak üzere $\tilde{\tau}_2 \sqcap \tilde{\tau}_3$ ailesi 3.2.2. Tanım gereği esnek topolojik uzaydır.

4.1.1. Uyarı (Shabir ve Naz, 2011) $(X, \tilde{\tau}_1, P)$ ve $(X, \tilde{\tau}_2, P)$ aynı X evreni üzerinde iki esnek topolojik uzay olsun. Fakat $(X, \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2, P)$, X evreni üzerinde bir esnek topolojik yapı oluşturmayabilir.

Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen "On Soft Topological Spaces" makalesinde iki esnek topolojinin birleşiminin esnek topoloji olmadığını Example 3 ile göstermişlerdir. Ancak makaledeki bu örnek problemlidir. "On Soft Topological Spaces" makalesindeki bu hatalı problemi çözelim ve hatayı belirleyelim. İlk olarak "On Soft Topological Spaces" makalesinde verilen Example 3 ile bağlantılı olan Example 1'deki hatayı gösterelim.

4.1.5.Örnek (Shabir ve Naz, 2011) **Example 1** $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$S_1(p_1) = \{x_2\}, S_1(p_2) = \{x_1\}$

$S_2(p_1) = \{x_2, x_3\}, S_2(p_2) = \{x_1, x_2\}$

$S_3(p_1) = \{x_1, x_2\}, S_3(p_2) = X$

$S_4(p_1) = \{x_1, x_2\}$, $S_4(p_2) = \{x_1, x_3\}$

olmak üzere $\tilde{\tau}_1 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P), (S_2, P), (S_3, P), (S_4, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzaydır.

Shabir ve Naz (2011) yukarıdaki örnekte ifade edildiği gibi Example 1'deki $\tilde{\tau}_1$ ailesinin esnek topolojik uzay olduğunu göstermiştir. Fakat $\tilde{\tau}_1$ ailesi esnek topolojik uzay değildir. Gerçekten aşağıda gösterildiği şekilde **i), ii)** şartı sağlanır. Fakat **iii)** şartı sağlanmaz.

i) $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1$ şartı sağlanır. $\tilde{\tau}_1$ ailesi tanımından açıktır.

ii) $\tilde{\tau}_1$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}_1$ ailesine ait midir?

$(S_i, P) \sqcup \phi_P = (S_i, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_i, P) \sqcup \tilde{X} = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1$

$(S_1, P) \sqcup (S_2, P) = (S_2, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_1, P) \sqcup (S_3, P) = (S_3, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_1, P) \sqcup (S_4, P) = (S_4, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_2, P) \sqcup (S_3, P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1$

$(S_2, P) \sqcup (S_4, P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1$

$(S_3, P) \sqcup (S_4, P) = (S_3, P) \in \tilde{\tau}_1$

şeklinde olduğundan **ii)** sağlanır.

iii) $\tilde{\tau}_1$ ailesine ait iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}_1$ ailesine ait midir?

$(S_i, P) \sqcap \phi_P = \phi_P \in \tilde{\tau}_1$

$(S_i, P) \sqcap \tilde{X} = (S_i, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_1, P) \sqcap (S_2, P) = (S_1, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_1, P) \sqcap (S_3, P) = (S_1, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_1, P) \sqcap (S_4, P) = (S_1, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_2, P) \sqcap (S_4, P) = (S_1, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_3, P) \sqcap (S_4, P) = (S_4, P) \in \tilde{\tau}_1$

$(S_2, P) \sqcap (S_3, P) = \{(p_1, \{x_2\}), (p_2, \{x_1, x_2\})\} \notin \tilde{\tau}_1$

olduğundan **iii)** şartı sağlanmaz. Bu durumda $\tilde{\tau}_1$ ailesi, X evreni üzerinde bir esnek topolojik uzay değildir. Dolayısıyla Example 1 hatalıdır.

4.1.6. Örnek (Shabir ve Naz, 2011) **Example 3** $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$S_1(p_1) = \{x_2\}, S_1(p_2) = \{x_1\}$

$S_2(p_1) = \{x_2, x_3\}, S_2(p_2) = \{x_1, x_2\}$

$S_3(p_1) = \{x_1, x_2\}, S_3(p_2) = X$

$S_4(p_1) = \{x_1, x_2\}, S_4(p_2) = \{x_1, x_3\}$

olmak üzere $\tilde{\tau}_1 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P), (S_2, P), (S_3, P), (S_4, P)\}$ ailesi ve

$G_1(p_1) = \{x_2\}, G_1(p_2) = \{x_1\}$

$G_2(p_1) = \{x_2, x_3\}, G_2(p_2) = \{x_1, x_2\}$

$G_3(p_1) = \{x_1, x_2\}, G_3(p_2) = \{x_1, x_2\}$

$G_4(p_1) = \{x_2\}$, $G_4(p_2) = \{x_1, x_3\}$

olmak üzere $\tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (G_1, P), (G_2, P), (G_3, P), (G_4, P)\}$ ailesi verilsin.

$\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ ailesi esnek topolojik uzay değildir.

Shabir ve Naz (2011) Example 3 de $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ ailelerinin esnek topolojik uzay olduğunu ifade etmiştir. Fakat $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ aileleri esnek topolojik uzay olmadığı için birleşimleri de esnek topolojik uzay olamaz.

Gerçekten ilk olarak 4.1.5. Örnek (Shabir ve Naz, 2011) Example 1 de verilen $\tilde{\tau}_1$ ailesinin esnek topolojik uzay olmadığını gösterdik. Şimdi yukarıda verilen $\tilde{\tau}_2$ ailesinin de esnek topolojik uzay olmadığını gösterelim. Aşağıda gösterildiği şekilde **i)** şartı sağlanır. Fakat **ii), iii)** şartı sağlanmaz.

i) $\phi_P,\ \tilde{X}\ \in \tilde{\tau}_2$ şartı sağlanır. $\tilde{\tau}_2$ ailesi tanımından açıktır.

ii) $\tilde{\tau}_2$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}_2$ ailesine ait midir?

$(G_i, P) \sqcup \phi_P = (G_i, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_i, P) \sqcup\ \tilde{X} = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_2$

$(G_1, P) \sqcup (G_2, P) = (G_2, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_1, P) \sqcup (G_3, P) = (G_3, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_1, P) \sqcup\ (G_4, P) = (G_4, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_2, P) \sqcup\ (G_3, P) = \{(p_1, X), (p_2, \{x_1, x_2\})\} \notin\ \tilde{\tau}_2$

$(G_2, P) \sqcup\ (G_4, P) = \{(p_1, \{x_2, x_3\}), (p_2, X)\} \notin\ \tilde{\tau}_2$

$(G_3, P) \sqcup (G_4, P) = \{(p_1, \{x_1, x_2\}), (p_2, X)\} \notin\ \tilde{\tau}_2$

olduğundan **ii)** şartı sağlanmaz.

iii) $\tilde{\tau}_2$ ailesine ait iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}_2$ ailesine ait midir?

$(G_i, P) \sqcap \phi_P = \phi_P \in \tilde{\tau}_2$

$(G_i, P) \sqcap\ \tilde{X} = (G_i, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_1, P) \sqcap (G_2, P) = (G_1, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_1, P) \sqcap (G_3, P) = (G_1, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_1, P) \sqcap\ (G_4, P) = (G_1, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_2, P) \sqcap\ (G_4, P) = (G_1, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_3, P) \sqcap (G_4, P) = (G_1, P) \in \tilde{\tau}_2$

$(G_2, P) \sqcap (G_3, P) = \{(p_1, \{x_2\}), (p_2, \{x_1, x_2\})\} \notin \tilde{\tau}_2$

olduğundan **iii)** şartı sağlanmaz. Bu durumda $\tilde{\tau}_2$ ailesi, X evreni üzerinde bir esnek topolojik uzay değildir. Dolayısıyla Example 3 hatalıdır.

Şimdi iki esnek topolojinin birleşiminin genellikle esnek topoloji olmadığını yeniden örnekler ile gösterelim.

4.1.7. Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun. X evreni üzerinde 4.1.1.Örnek, 4.1.2.Örnek ve 4.1.3.Örnekte sırasıyla verilen $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ ve $\tilde{\tau}_3$ esnek topolojik uzayları için aşağıdakiler sağlanır:

a) $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ ailesi esnek topolojik uzaydır.

b) $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesi esnek topolojik uzay değildir.

c) $\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesi esnek topolojik uzay değildir.

Çözüm:

a) $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ ailesi esnek topolojik uzaydır. Gerçekten ilk olarak $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ ailesini belirleyelim.

$\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P) = (G_1, P), (S_2, P), (S_3, P) = (G_3, P), (G_2, P)\}$ ailesi olmak üzere

i) $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ şartı sağlanır. $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ ailesi tanımından açıktır.

ii) $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ ailesine ait midir?

$(S_i, P) \sqcup \phi_P = (S_i, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_i, P) \sqcup \tilde{X} = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(G_i, P) \sqcup \phi_P = (G_i, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(G_i, P) \sqcup \tilde{X} = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_1, P) \sqcup (S_2, P) = (S_2, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_1, P) \sqcup (S_3, P) = (S_3, P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_1,P) \sqcup (G_2,P) = (S_3,P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_2,P) \sqcup (S_3,P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_2,P) \sqcup (G_2,P) = \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_3,P) \sqcup (G_2,P) = (S_3,P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

şeklinde olduğundan **ii)** sağlanır.

iii) $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ ailesine ait iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ ailesine ait midir?

$(S_i,P) \sqcap \phi_P = \phi_P \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_i,P) \sqcap \tilde{X} = (S_i,P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(G_i,P) \sqcap \phi_P = \phi_P \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(G_i,P) \sqcap \tilde{X} = (G_i,P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_1,P) \sqcap (S_2,P) = (S_1,P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_1,P) \sqcap (S_3,P) = (S_1,P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_1,P) \sqcap (G_2,P) = \phi_P \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_2,P) \sqcap (S_3,P) = (S_1,P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_2,P) \sqcap (G_2,P) = \phi_P \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

$(S_3,P) \sqcap (G_2,P) = (G_2,P) \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$

şeklinde olduğundan **iii)** sağlanır. Bu durumda

$$\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1,P) = (G_1,P), (S_2,P), (S_3,P) = (G_3,P), (G_2,P)\}$$

ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzaydır.

b) $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesi esnek topolojik uzay değildir. Gerçekten ilk olarak $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesini belirleyelim.

$$\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3 = \left\{ \begin{matrix} \phi_P, \tilde{X}, (S_1,P), (S_2,P) = (H_1,P), (S_3,P), (H_2,P), (H_3,P), (H_4,P), \\ (H_5,P), (H_6,P), (H_7,P) \end{matrix} \right\}$$

ailesi olmak üzere

i) $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ şartı sağlanır. $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesi tanımından açıktır.

ii) $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesine ait midir?

$$(S_1, P) \sqcup (H_4, P) = \{(p_1, \{x_2\}), (p_2, \{x_1, x_2\})\} \notin \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$$

şeklinde olduğundan **ii)** şartı sağlanmaz.

iii) $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesine ait iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesine ait midir?

$$(S_1, P) \sqcap (H_3, P) = \{(p_1, \{x_2\}), (p_2, \emptyset)\} \notin \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$$

şeklinde olduğundan **iii)** şartı sağlanmaz.

Bu durumda $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesi, X evreni üzerinde bir esnek topolojik uzay değildir.

c) $\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesi esnek topolojik uzay değildir. Gerçekten ilk olarak $\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesini belirleyelim.

$$\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3 = \begin{Bmatrix} \phi_P, \tilde{X}, (G_1, P), (G_2, P), (G_3, P), (H_1, P), (H_2, P), (H_3, P), (H_4, P), \\ (H_5, P), (H_6, P), (H_7, P) \end{Bmatrix}$$

ailesi olmak üzere;

i) $\phi_P, \tilde{X} \in \tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ şartı sağlanır. $\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesi tanımından açıktır.

ii) $\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki esnek kümelerin birleşimi $\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesine ait midir?

$$(G_1, P) \sqcup (H_2, P) = \{(p_1, \{x_2\}), (p_2, X)\} \notin \tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$$

şeklinde olduğundan **ii)** şartı sağlanmaz.

iii) $\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesine ait iki esnek kümenin kesişimi $\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesine ait midir?

$$(G_1, P) \sqcap (H_2, P) = \{(p_1, \{x_2\}), (p_2, \emptyset)\} \notin \tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$$

şeklinde olduğundan **iii)** şartı sağlanmaz.

Bu durumda $\tilde{\tau}_2 \sqcup \tilde{\tau}_3$ ailesi, X evreni üzerinde bir esnek topolojik uzay değildir.

4.2. Esnek Açık Küme Kavramı Yardımı ile Karşılaştırmalar

Bu bölümde esnek topolojilerin karşılaştırmasını yapmak için klasik topolojik uzaylardaki karşılaştırma tanımını dikkate alarak esnek açık küme kavramı kullanılacaktır.

4.2.1.Tanım Bir X kümesi üzerinde $(X, \tilde{\tau}_1, P)$ ve $(X, \tilde{\tau}_2, P)$ esnek topolojik uzayları verilsin. Eğer $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisine göre esnek açık olan her küme, $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisine göre de esnek açık ise, $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisine $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisinden (esnek açık kümelere göre) daha kaba ya da $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisine $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisinden (esnek açık kümelere göre) daha ince denir ve $\tilde{\tau}_1 \sqsubset \tilde{\tau}_2$ şeklinde gösterilir.

Eğer $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisinden hem daha kaba hem de daha ince ise; yani $\tilde{\tau}_1 \sqsubset \tilde{\tau}_2$ ve $\tilde{\tau}_2 \sqsubset \tilde{\tau}_1$ ise bu iki esnek topoloji eşittir denir ve $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2$ şeklinde yazılır.

4.2.2.Tanım Bir X kümesi üzerinde $(X, \tilde{\tau}_1, P)$ ve $(X, \tilde{\tau}_2, P)$ esnek topolojik uzayları verilsin. Eğer $\tilde{\tau}_1$ ailesi, $\tilde{\tau}_2$ ailesinden daha kaba veya $\tilde{\tau}_2$ ailesi $\tilde{\tau}_1$ ailesinden daha kaba ise, $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ ailelerine esnek açık kümelere göre karşılaştırılabilir iki esnek topolojik yapı denir.

4.2.1.Uyarı Sabit bir başlangıç evreni ve sabit bir parametre kümesi üzerinde tanımlanmış farklı esnek topolojik uzaylar esnek açık kümelere göre her zaman karşılaştırılmayabilir.

4.2.2. Uyarı 4.2.2. Tanım gereği, daha ince olan bir esnek topolojinin daha kaba olan bir esnek topolojiden daha çok açık kümelerin olduğu, dolayısıyla daha çok kapalı kümelerinin olduğu söylenebilir.

4.2.1. Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun. 4.1.1. Örnek deki

$S_1(p_1) = \{x_2\},\ S_1(p_2) = \{x_2\}$

$S_2(p_1) = \{x_1, x_2\}, S_2(p_2) = \{x_1, x_2\}$

$S_3(p_1) = \{x_2, x_3\}, S_3(p_2) = \{x_2, x_3\}$

olmak üzere $\tilde{\tau}_1 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P), (S_2, P), (S_3, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzayı verilsin.

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun.

$T_1(p_1) = \{x_2\},\ T_1(p_2) = \{x_2\}$

$T_2(p_1) = \{x_3\}, T_2(p_2) = \{x_3\}$

$T_3(p_1) = \{x_1, x_2\}, T_3(p_2) = \{x_1, x_2\}$

$T_4(p_1) = \{x_2, x_3\}, T_4(p_2) = \{x_2, x_3\}$

olmak üzere $\tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (T_1, P), (T_2, P), (T_3, P), (T_4, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzayı verilsin.

Gerçekten $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri karşılaştırıldığında $\tilde{\tau}_1 \sqsubset \tilde{\tau}_2$ olduğu görülür.

4.2.2. Örnek X evren kümesi ve P parametre kümesi olsun. $\tilde{\tau}_1 = \{\phi_P, \tilde{X}\}$ ve $\tilde{\tau}_2 = \mathcal{S}(X, P)$ esnek topolojik uzayları için $\tilde{\tau}_1 \sqsubset \tilde{\tau}_2$ olduğu açıktır.

4.2.3. Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun. X evreni üzerinde 4.1.4 Örnek ve 4.1.7. Örnek te verilen $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ve $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ esnek topolojik uzayları için $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2 \sqsubset \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ olduğu açıktır.

4.2.4. Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun. 4.1.1. Örnek te

$S_1(p_1) = \{x_2\},\ S_1(p_2) = \{x_2\}$

$S_2(p_1) = \{x_1, x_2\}, S_2(p_2) = \{x_1, x_2\}$

$S_3(p_1) = \{x_2, x_3\}, S_3(p_2) = \{x_2, x_3\}$

olmak üzere $\tilde{\tau}_1 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P), (S_2, P), (S_3, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzayı verilsin.

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $P = \{p_1, p_2\}$ parametreler kümesi olsun. 4.1.2. Örnekte

$G_1(p_1) = \{x_2\}, G_1(p_2) = \{x_2\}$

$G_2(p_1) = \{x_3\}, G_2(p_2) = \{x_3\}$

$G_3(p_1) = \{x_2, x_3\}, G_3(p_2) = \{x_2, x_3\}$

olmak üzere $\tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (G_1, P), (G_2, P), (G_3, P)\}$ ailesi, X evreni üzerinde esnek topolojik uzayı verilsin.

Gerçekten $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisine göre esnek açık olan (S_2, P) kümesi, $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisine göre esnek açık küme değildir. Bu yüzden $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri için $\tilde{\tau}_1 \sqsubset \tilde{\tau}_2$ sağlanmaz. Ayrıca $\tilde{\tau}_2 \sqsubset \tilde{\tau}_1$ sağlanmadığından $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri karşılaştırılamaz.

4.3. Esnek Alt Küme Kavramı Yardımı ile Karşılaştırmalar

Bu bölümde esnek topolojilerin karşılaştırmasını yapmak için esnek alt küme kavramı kullanılacaktır. Maji ve ark. (2003) esnek kümelerin alt küme ve eşitlik kavramları ile ilgili bazı işlemleri tanımladılar. Daha sonra Pei ve Miao (2005) ve Çağman ve Enginoğlu (2010) bu kavramları cebirsel yapılarda incelemek için yeniden ifade edip, buna bağlı bazı işlemler tanımladılar. İlk olarak literatürde verilen alt küme tanımlarını hatırlayalım. Bunların karşılaştırmasını yapalım.

4.3.1.Tanım (Maji ve ark., 2003) X evreni üzerinde (S, A) ve (G, B) esnek kümeleri verilsin. Eğer

i) $A \subseteq B$

ii) Her $p \in A$ için $S(p)$ ve $G(p)$ aynı özdeş yaklaşımlar

ise (S, A) esnek kümesine, (G, B) esnek kümesinin esnek alt kümesi denir ve $(S, A) \sqsubseteq_\mu (G, B)$ ile gösterilir.

4.3.2.Tanım (Pei ve Miao, 2005) X evreni üzerinde (S, A) ve (G, B) esnek kümeleri verilsin. Eğer

i) $A \subseteq B$

ii) Her $p \in A$ için $S(p) \subseteq G(p)$

ise (S,A) esnek kümesine, (G,B) esnek kümesinin esnek alt kümesi denir ve $(S,A) \sqsubseteq_{\rho} (G,B)$ ile gösterilir.

4.3.3.Tanım (Çağman ve Enginoğlu, 2010) S_A ve G_B, X evreni üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer $\forall\ p \in P$ için $s_A(p) \subseteq g_B(p)$ ise S_A esnek kümesine G_B esnek kümesinin esnek alt kümesi denir ve $S_A \sqsubseteq_{ç} G_B$ şeklinde gösterilir.

4.3.4.Tanım (Maji ve ark., 2003; Pei ve Miao, 2005) (S,A) ve (G,B), X evreni üzerinde esnek kümeler olmak üzere; $(S,A),(G,B)$'nin bir esnek alt kümesi ve $(G,B),(S,A)$'nın bir esnek alt kümesi ise (S,A), (G,B)'ye esnek eşittir denir.

4.3.5.Tanım (Çağman ve Enginoğlu, 2010) S_A ve G_B, X evreni üzerinde esnek kümeler olmak üzere; S_A, G_B'nin bir esnek alt kümesi ve G_B, S_A'nın bir esnek alt kümesi ise S_A, G_B'ye esnek eşittir denir.

4.3.1.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme ve $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ parametreler kümesi verilsin. $A = \{p_1, p_3, p_5\} \subseteq P$ ve $B = \{p_1, p_2, p_3, p_5\} \subseteq P$ olmak üzere (S,A) ve (G,B) aynı X evreni üzerinde iki esnek küme olsun. Öyle ki,

$$(S,A) = \{(p_1, \{x_2, x_4\}), (p_3, \{x_3, x_4, x_5\}), (p_5, \emptyset)\}$$

$$(G,B) = \{(p_1, \{x_2, x_4,\}), (p_2, \{x_1, x_3\}), (p_3, \{x_3, x_4, x_5\}), (p_5, \emptyset)\}$$

$A \subseteq B$ ve her $p \in A$ için

$$S(p_1) = G(p_1)$$

$$S(p_3) = G(p_3)$$

$$S(p_5) = G(p_5)$$

olduğundan Maji ve ark. (2003) tarafından verilen esnek alt küme tanımına göre, $(S,A),(G,B)$' nin esnek alt kümesidir ve $(S,A) \sqsubseteq_{\mu} (G,B)$ şeklinde gösterilir.

4.3.2.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme ve $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ parametreler kümesi verilsin. $A = \{p_1, p_3, p_5\} \subseteq P$ ve $B = \{p_1, p_2, p_3, p_5\} \subseteq P$ olmak üzere (S,A) ve (G,B) aynı X evreni üzerinde iki esnek küme olsun. Öyle ki,

$$(S,A) = \{(p_1, \{x_2, x_4\}), (p_3, \{x_3, x_4, x_5\}), (p_5, \emptyset)\}$$

$$(G,B) = \{(p_1,\{x_2,x_4,x_5\}),(p_2,\{x_1,x_3\}),(p_3,\{x_3,x_4,x_5\}),(p_5,\{x_1,x_6\})\}.$$

$A \subseteq B$ ve her $p \in A$ için

$$S(p_1) \subseteq G(p_1)$$

$$S(p_3) \subseteq G(p_3)$$

$$S(p_5) \subseteq G(p_5)$$

olduğundan, Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımına göre, (S,A), (G,B)' nin bir esnek alt kümesidir ve $(S,A) \sqsubseteq_\rho (G,B)$ şeklinde gösterilir.

4.3.3.Örnek $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ evren küme ve $P = \{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ parametreler kümesi verilsin. $A = \{p_1,p_3,p_4\} \subseteq P$ ve $B = \{p_2,p_3,p_4\} \subseteq P$ olmak üzere S_A ve G_B aynı X evreni üzerinde iki esnek küme olsun. Öyle ki,

$$s_A(p_1) = \emptyset,\ s_A(p_3) = \{x_3,x_4\},\ s_A(p_4) = \{x_2,x_3\},$$

$$g_B(p_2) = \{x_1\},\ g_B(p_3) = \{x_3,x_4\},\ g_B(p_4) = \{x_1,x_2,x_3\}$$

olmak üzere

$$S_A = \{(p_1,\emptyset),(p_2,\emptyset),(p_3,\{x_3,x_4\}),(p_4,\{x_2,x_3\})\},$$

$$G_B = \{(p_1,\emptyset),(p_2,\{x_1\}),(p_3,\{x_3,x_4\}),(p_4,\{x_1,x_2,x_3\})\}$$

şeklinde verilsin.

$$s_A(p_1) = \emptyset \subseteq g_B(p_1) = \emptyset$$

$$s_A(p_2) = \emptyset \subseteq g_B(p_2) = \{x_1\}$$

$$s_A(p_3) = \{x_3,x_4\} \subseteq g_B(p_3) = \{x_3,x_4\}$$

$$s_A(p_4) = \{x_2,x_3\} \subseteq g_B(p_4) = \{x_1,x_2,x_3\}$$

olduğundan, Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından verilen esnek alt küme tanımına göre, S_A, G_B' nin bir esnek alt kümesidir ve $S_A \sqsubseteq_ç G_B$ şeklinde gösterilir.

4.3.1.Uyarı $(S,A) \sqsubseteq_\mu (G,B) \Rightarrow (S,A) \sqsubseteq_\rho (G,B)$. Fakat aşağıdaki örnekte verildiği üzere bu durumun karşıtı genelde doğru değildir.

4.3.4.Örnek 4.3.2. Örnekte verilen esnek kümeler, Maji ve ark. (2003) tarafından verilen esnek alt küme tanımına göre her $p \in A$ için $S(p)$ ve $G(p)$ aynı özdeş yaklaşımlar olması gerektiğinden, $(S, A) \not\sqsubseteq_{\mu} (G, B)$ olur.

4.3.2.Uyarı Bir esnek kümenin Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından verilen tanıma göre esnek alt küme olması, Maji ve ark. (2003) ve Pei ve Miao (2005) tarafından verilen tanımlara göre esnek alt küme olmasını gerektirmez.

4.3.5.Örnek 4.3.3. Örnekte $A \not\subseteq B$ olduğundan, Maji ve ark. (2003) ve Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımlarına göre $S_A \not\sqsubseteq_{\mu} G_B$ ve $S_A \not\sqsubseteq_{\rho} G_B$ olur.

4.3.3.Uyarı $S_A \sqsubseteq_{ç} G_B$ olması, S_A nın her elemanının G_B nin elemanı olması anlamına gelmez.

4.3.6.Örnek 4.3.3. Örnek gereği $S_A \sqsubseteq_{ç} G_B$ olup,

$(p_1, s_A(p_1)) \in S_A$ iken, $\big(p_1, g_B(p_1)\big) \in G_B$

$(p_2, s_A(p_2)) \in S_A$ iken, $\big(p_2, g_B(p_2)\big) \notin G_B$

$(p_3, s_A(p_3)) \in S_A$ iken, $\big(p_3, g_B(p_3)\big) \in G_B$

$(p_4, s_A(p_4)) \in S_A$ iken, $\big(p_4, g_B(p_4)\big) \notin G_B$

şeklindedir.

4.3.4.Uyarı $(S, A) \sqsubseteq_{\rho} (G, B)$ olması, (S, A) nın her elemanının (G, B) nin elemanı olması anlamına gelmez.

4.3.7.Örnek 4.3.2. Örnek gereği $(S, A) \sqsubseteq_{\rho} (G, B)$ olup,

$\big(p_1, S(p_1)\big) \in (S, A)$ iken, $\big(p_1, G(p_1)\big) \notin (G, B)$

$\big(p_3, S(p_3)\big) \in (S, A)$ iken, $\big(p_3, G(p_3)\big) \in (G, B)$

$\big(p_5, S(p_5)\big) \in (S, A)$ iken, $\big(p_3, G(p_5)\big) \notin (G, B)$

şeklindedir.

4.3.5.Uyarı $(S,A) \sqsubseteq_{\mu} (G,B)$ olması, (S,A) nın her elemanının (G,B) nin elemanı olmasını gerektirir.

4.3.8.Örnek 4.3.1. Örnek gereği $(S,A) \sqsubseteq_{\mu} (G,B)$ olup,

$$\big(p_1, S(p_1)\big) \in (S,A) \text{ iken, } \big(p_1, G(p_1)\big) \in (G,B)$$

$$\big(p_3, S(p_3)\big) \in (S,A) \text{ iken, } \big(p_3, G(p_3)\big) \in (G,B)$$

$$\big(p_5, S(p_5)\big) \in (S,A) \text{ iken, } \big(p_3, G(p_5)\big) \in (G,B)$$

şeklindedir.

4.3.6.Uyarı Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen esnek topolojik uzaylar sabit bir parametre üzerinde tanımlanır. Esnek topolojik uzayların karşılaştırılması yapılırken esnek alt küme tanımı dikkate alındığında Pei ve Miao (2005) tarafından verilen tanım ile Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından verilen tanım eşdeğer olur. Bu yüzden biz esnek alt küme tanımına göre karşılaştırma yaparken Maji ve ark. (2003) ve Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımlarını dikkate alacağız.

Aşağıda tanımda $\sqsubseteq_{\mu}, \sqsubseteq_{\rho}, \sqsubseteq_{\varsigma}$ ifadelerini genellemek için bunların yerine $\sqsubseteq$ ifadesi kullanılacaktır.

4.3.6.Tanım Bir X kümesi üzerinde $(X, \tilde{\tau}_1, P)$ ve $(X, \tilde{\tau}_2, P)$ esnek topolojik uzayları verilsin. Her $(S,P) \in \tilde{\tau}_1$ için $(S,P) \sqsubseteq (G,P)$ olacak şekilde en az bir $(G,P) \in \tilde{\tau}_2$ varsa $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisine $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisinden (esnek alt kümelere göre) daha kaba ya da $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisine $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisinden (esnek alt kümelere göre) daha ince denir ve $\tilde{\tau}_1 \sqsubseteq_* \tilde{\tau}_2$ şeklinde gösterilir.

Eğer $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisinden hem daha kaba hem de daha ince ise; yani $\tilde{\tau}_1 \sqsubseteq_* \tilde{\tau}_2$ ve $\tilde{\tau}_2 \sqsubseteq_* \tilde{\tau}_1$ ise bu iki esnek topoloji eşittir denir ve $\tilde{\tau}_1 =_* \tilde{\tau}_2$ şeklinde yazılır.

4.3.7.Tanım Bir X kümesi üzerinde $(X, \tilde{\tau}_1, P)$ ve $(X, \tilde{\tau}_2, P)$ esnek topolojik uzayları verilsin. Eğer $\tilde{\tau}_1$ ailesi, $\tilde{\tau}_2$ ailesinden daha kaba veya $\tilde{\tau}_2$ ailesi $\tilde{\tau}_1$ ailesinden daha kaba ise, $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ ailelerine esnek alt kümelerine göre karşılaştırılabilir iki esnek topolojik yapı denir.

Şimdi esnek topolojik uzayları Maji ve ark. (2003) ve Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımlarını dikkate alarak örnekler üzerinde karşılaştıralım.

Aşağıdaki örnekler hem Maji ve ark. (2003) hem de Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımlarına göre karşılaştırılabilirdir.

4.3.9.Örnek 4.2.1. Örnekteki $\tilde{\tau}_1 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P), (S_2, P), (S_3, P)\}$ ailesi ve $\tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (T_1, P), (T_2, P), (T_3, P), (T_4, P)\}$ ailesi olmak üzere X evreni üzerinde esnek topolojik uzayları verilsin.

Gerçekten $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri karşılaştırıldığında $\tilde{\tau}_1 \sqsubseteq_* \tilde{\tau}_2$ olduğu görülür. Yani hem Maji ve ark. (2003) hem de Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımlarına göre karşılaştırılabilirdir.

4.3.10.Örnek 4.2.2. Örnekteki $\tilde{\tau}_1 = \{\phi_P, \tilde{X}\}$ ve $\tilde{\tau}_2 = \mathcal{S}(X, P)$ esnek topolojik uzayları verilsin. Hem Maji ve ark. (2003) hem de Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımlarına göre karşılaştırılabilirdir. Yani $\tilde{\tau}_1 \sqsubseteq_* \tilde{\tau}_2$ olur.

4.3.11.Örnek 4.2.3. Örnekteki $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2$ ve $\tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ esnek topolojik uzayları verilsin. Hem Maji ve ark. (2003) hem de Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımlarına göre karşılaştırılabilirdir. Yani $\tilde{\tau}_1 \sqcap \tilde{\tau}_2 \sqsubseteq_* \tilde{\tau}_1 \sqcup \tilde{\tau}_2$ olur.

Aşağıdaki örnek Maji ve ark. (2003) tarafından verilen esnek alt küme tanımına göre karşılaştırılamaz. Fakat Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımına göre karşılaştırılabilirdir.

4.3.12.Örnek 4.2.4. Örnekteki $\tilde{\tau}_1 = \{\phi_P, \tilde{X}, (S_1, P), (S_2, P), (S_3, P)\}$ ailesi ve $\tilde{\tau}_2 = \{\phi_P, \tilde{X}, (G_1, P), (G_2, P), (G_3, P)\}$ ailesi olmak üzere X evreni üzerinde esnek topolojik uzayları verilsin.

Gerçekten $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisine göre esnek açık olan (S_2, P) kümesi için, Maji ve ark. (2003) tarafından verilen esnek alt küme tanımına göre her $p \in P$ için $S_2(p)$ ve $G_i(p)$ aynı özdeş yaklaşımlar olması gerektiğinden $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisine ait (S_2, P) esnek kümesine karşılık $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisinde eleman yoktur. Bu yüzden $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri için $\tilde{\tau}_1 \sqsubseteq_* \tilde{\tau}_2$ sağlanmaz. Ayrıca $\tilde{\tau}_2 \sqsubseteq_* \tilde{\tau}_1$ sağlanmadığından $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri karşılaştırılamaz. Fakat Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme tanımına göre $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisine ait (S_2, P) esnek kümesine karşılık $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisinde $\tilde{X}$ elemanı vardır yani $(S_2, P) \sqsubseteq \tilde{X}$ olur. Bu yüzden $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri için $\tilde{\tau}_1 \sqsubseteq_* \tilde{\tau}_2$ olduğu görülür.

Yukarıdaki örneklere bağlı olarak aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

4.3.1.Sonuç Bir X kümesi üzerinde $(X, \tilde{\tau}_1, P)$ ve $(X, \tilde{\tau}_2, P)$ esnek topolojik uzayları verilsin. Aynı evren üzerindeki sabit parametreli $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri Pei ve Miao (2005) tarafından verilen esnek alt küme kavramına göre her zaman karşılaştırılabilirdir.

4.3.2.Sonuç Bir X kümesi üzerinde $(X, \tilde{\tau}_1, P)$ ve $(X, \tilde{\tau}_2, P)$ esnek topolojik uzayları verilsin. Aynı evren üzerindeki sabit parametreli $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojilerinin esnek açık küme kavramına göre karşılaştırılabilir olması için gerek ve yeter koşul Maji ve ark. (2003) tarafından verilen esnek alt küme tanımına göre de karşılaştırılabilir olmasıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada yurt içi ve yurt dışında yayınlanan çalışmalar incelenerek; esnek topolojik uzayların karşılaştırılması ve iki esnek topolojinin kesişiminin esnek topoloji olduğu ancak birleşiminin genellikle esnek topoloji olmadığı örnekler ile gösterilmiştir.

Bir küme üzerindeki iki esnek topolojik yapının her zaman karşılaştırılabilir olması gerekli değildir. Ayrıca ince dokulu esnek topolojinin kaba dokulu esnek topolojiden daha çok açık kümesi olduğundan ince dokulu esnek topolojinin daha çok esnek kapalı kümesi olduğunu ve ince dokulu esnek topolojiye göre bir esnek noktanın komşuluklarının daha çok olduğunu söyleyebiliriz.

Gelecekteki çalışmalarda iki esnek topolojinin karşılaştırılması için özdeşlik dönüşümünün, esnek topolojik tabanlarının ya da esnek komşuluklar ailesinin nasıl kullanıldığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Akdag, M., & Ozkan, A. (2014). On soft β-open sets and soft β-continuous functions. *Hindawi Publishing Corporation, The Scientific World Journal*, Article ID 843456, 6 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2014/843456.

Aktaş, H., & Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177, 2726-2735.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.

Aygünoğlu, A., & Aygün, H. (2012). Some notes on soft topological spaces. *Neural Computing and Applications,* 21 (1), 113-119.

Chen, B. (2013). Soft semi-open sets and related properties in soft topological spaces. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 7 (1), 287-294.

Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., & Wang, X. (2005). The parameterization reduction of soft set sandit sapplications. *Computers and Mathematics with Applications*, 49, 757-763.

Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010). Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research,* 207, 848-855.

Çağman, N., Karataş, S., & Enginoğlu, S. (2011). Soft topology. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 351-358.

Çetkin, V., Aygünoğlu, A., & Aygün, H. (2016). A new approach in handling soft decision making problems. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 231-239.

Das, S., & Samanta, S. K. (2013). Soft metric. *Annals of Fuzzy Math Inform,* 6, 77-94

El-Sheikh, S. A., & Abd El-latif, A. M. (2014). Decompositions of some types of supra soft sets and soft continuity. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 9 (1), 37-56.

Feng, F. (2011). Soft rough sets applied to multicriteria group decision making. *Annals Fuzzy Math. Inform.*, 2 (1), 69-80.

Feng, F., Jun, Y. B., & Zhao, X. (2008). Soft semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 2621-2628.

Güzel Ergül, Z., & Yüksel, Ş. (2019). A new type of soft covering based rough sets applied to multicriteria group decision making for medical diagnosis. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 7(1), 28-38.

Hussain, S., & Ahmad, B. (2011). Some properties of soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 4058-4067.

Kandil, A., Tantawy, O. A. E., El-Sheikh, S. A., & Abd El-Latif, A. M. (2014). γ-operation and decompositions of some forms of soft continuity in soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7 (2), 181-196.

Kannan, K. (2012). Soft generalized closed sets in soft topological spaces. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 37 (1), 17-21.

Maji, P., Biswas, R., & Roy, A. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications,* 45 (4), 555-562.

Min, W. K. (2011). A note on soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 3524-3528.

Molodtsov, D. (1999). Soft set theory first results. *Computers and Mathematics with,* Applications, 37 (4), 19-31.

Molodtsov, D. (2004). The theory of soft sets. *URSS Publishers*, Moscow.

Mustafa, H. I., & Sleim, F. M. (2014). Soft generalized closed sets with respectto an ideal in soft topological spaces. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 8 (2), 665-671.

Nazmul, S. K., & Samanta, S. K. (2013). Neighborhood properties of soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,* ISSN: 2093–9310.

Pazar Varol, B., & Aygün, H. (2013). On soft Hausdorff spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 5 (1), 15-24.

Pei, D., & Miao, D. (2005). From soft sets to information systems. *Granular Computing* 2005 *IEEE International Conference,* 2, 617-621.

Shabir, M., & Naz, M. (2011). On soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 1786-1799.

Suo, C. F., Li, Y. M., & Li, Z. H. (2021). A series of information measures of hesitant fuzzy soft sets and their application in decision making. *Soft Computing*, 25, 4771 4784.

Yumak, Y., & Kaymakcı, A. K. (2013). Soft β-Open sets and their applications. *Journal of New Theory,* ISSN: 2149-1402.

Yüksel, Ş., Güzel Ergül, Z., & Güven, Z. (2014). Soft connected spaces. *International Journal of Pure & Engineering Mathematics*, 2 (3), 121-134.

Yüksel, Ş., Tozlu, N., & Güzel Ergül, Z. (2013). On soft generalized closed sets in soft topological spaces. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 55 (2), 273-279.

Zhan, J., Liu, Q., & Herewan, T. (2017). A novel soft rough set: Soft rough hemirings and corresponding multicriteria group decision making. *Appl. Soft Comput*., 54, 393-402.

Zorlutuna, İ., Akdag, M., Min, W. K., & Atmaca, S. (2012). Remarks on soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3 (2), 171-185.

EKLER

EK-1 Kongre katılım belgesi

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ 1982

35. ULUSAL MATEMATİK SEMPOZYUMU

75 TMD TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ

Belge sahibi

Burcu Takcı

4-8 Eylül 2023 tarihleri arasında Trakya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Türk Matematik Derneği'nin desteği ile düzenlenen 35. Ulusal Matematik Sempozyumu'na

"Esnek Topolojik Uzayların Karşılaştırılması"

başlıklı bildiri ile katıldığınız için teşekkür ederiz.

Prof. Dr. Figen ÖKE

Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi

Matematik Bölüm Başkanı

Düzenleme komitesi adına

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	Burcu GÖRMEZ
Uyruğu:	T.C.
Orcid Numarası:	0009-0009-0677-0739

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran
Fakülte:	Fen Edebiyat
Bölümü:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2021
Yüksek Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran
Enstitü:	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2025

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler

Ulusal Konferans ve Senpozyumlarda Sunulan Bildiriler

Takcı, B. ve Güzel Ergül Z., (4-8 Eylül 2023), Esnek Topolojik Uzayların Karşılaştırılması. 35. Ulusal Matematik Sempozyumu, https://ums2023.trakya.edu.tr/news/ozet-kitabimiz-yayinlanmistir