T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY EŞİTSİZLİKLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Abdulaziz ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİKANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
Haziran - 2012

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY EŞİTSİZLİKLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Abdulaziz ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİKANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd.Doç.Dr. Ali AKBULUT

KIRŞEHİR
Haziran - 2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Prof.Dr. Vagıf S. GULİYEV
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd.Doç.Dr. Ali AKBULUT
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç.Dr.Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde Lebesgue uzayı, Hardy eşitsizlikleri ve Hardy eşitsizliğinin bazı uygulamalarına yer verilecektir.

Birinci bölümde, bundan sonraki bölümlerde işlenecek olan konuları yakından ilgilendiren temel uzay bilgisi, Lebesgue uzayı ve bu uzayda kullanılan kavram, notasyon ve teoremlere yer verilecektir. Ayrıca L_p uzayının tanımı, normu ve özelliklerinden bahsedilecektir

İkinci bölümde, Hardy eşitsizliklerinin başlangıcından bugüne gelişimi, kazandığı başka formlar eşitsizliğin ve geçerli olması için gerek ve yeter şartlar hakkında bilgiler verilecektir.

Üçüncü bölümde, uygulamalara yer verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Hardy eşitsizliği, Hardy operatörü, Hardy eşitsizliğinin uygulamaları

ABSTRACT

In this thesis, information about Lebesgue space, Hardy inequalities and some applications of Hardy inequalities will be given.

In the first chapter, we will give information about some space knowledge, definition of Lebesgue space and it's basic properties, which is very important for the other sections. Moreover, we will give information about L_p space, it's norm and it's basic properties.

In the second chapter, we talk about the beginning of Hardy inequality, developing of Hardy inequality from beginning to today, Hardy's inequalities' the other forms and necessary and sufficient conditions for realize the Hardy inequality.

In the third chapter, applications will be given.

Keywords: Hardy inequality, Hardy operator, Applications of Hardy inequality

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışmanım Yrd.Doç.Dr. Ali AKBULUT'a ve Prof.Dr. Vagıf S. GULİYEV'e ayrıca çalışmam boyunca hep destek olan aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi $(-\infty, \infty)$

H: Hardy operatörü $(Hf)(x) = \int_a^x f(t)dt$

$\tilde{H}$: eşlenik Hardy operatörü

$L^s(\omega)$: ağırlıklı Lebesgue uzayı

$(L^s(\omega))^*$: $L^s(\omega)$ dual uzayı

$\|.\|_{s,\omega}$: $L^s(\omega)$ uzayında norm

$f\uparrow$: azalan fonksiyon

$f\downarrow$: artan fonksiyon

1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1 Metrik Uzaylar

Tanım 1.1.1 X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$

(ii) $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu denir. Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay ve $(i) - (iv)$ özelliklerine de metrik aksiyomları denir. Bir küme üzerinde birden çok metrik tanımlanabilir.

Örnek 1.1.2 $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerindeki adi metrik veya öklid metriği denir.

Örnek 1.1.3 X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \ , x = y \\ 1 \ , x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe X üzerindeki ayrık metrik denir.

Örnek 1.1.4 $\mathbb{R}^n$(veya $\mathbb{C}^n$), $n \in \mathbb{N}$, tüm sıralı reel(veya kompleks) n-lilerin kümesini göstermek üzere, $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için aşağıda verilen $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

şeklindeki d dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ üzerindeki adi metrik veya öklid metriği, $(\mathbb{R}^n, d)$ ikilisine ise n-boyutlu öklid uzayı denir.

Örnek 1.1.5 X boş kümeden farklı bir küme, $B(X), X$ ten $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların kümesi ve $d : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$d(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in X\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü $B(X)$ üzerinde bir metriktir.

Örnek 1.1.6 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ için $C[a, b]$, $[a, b]$ üzerindeki sürekli ve reel değerli fonksiyonlar kümesi ve $d : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$d(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in X\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü $C[a, b]$ üzerinde bir metriktir.

Tanım 1.1.7 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X, d) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere; $\forall\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \geq n_\varepsilon$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi $x_0 \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve bu $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.1.8 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X, d) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere; $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise,

(i) x_0 limiti tektir.

(ii) (x_n) dizisi sınırlıdır.

(iii) (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin limiti de x_0 dır.

(iv) Ek olarak $y_n \to y_0$ ise $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$ olur.

Tanım 1.1.9 (X, d) metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ pozitif bir sayı olmak üzere;

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar,

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir kapalı yuvar,

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir yuvar yüzeyi denir.

Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(a, r)$ olacak şekilde bir $B(a, r)$ açık yuvarı varsa (x_n) dizisi X metrik uzayında sınırlıdır denir. Ayrıca $E \subseteq B(a, r)$ olacak şekilde $B(a, r)$ açık yuvarı varsa $E \subseteq X$ alt kümesine X metrik uzayında sınırlıdır denir.

Tanım 1.1.10 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere; eğer $B(x_0, \varepsilon) \subseteq E$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa $x_0 \in E$ sayısına E nin bir iç noktası denir.

Tanım 1.1.11 (X, d) metrik uzay ve $G \subset X$ olmak üzere; eğer G kümesinin her noktası G nin bir iç noktası ise G ye(X te) bir açık küme denir.

Tanım 1.1.12 (X, d) metrik uzay ve $G \subseteq X$ olmak üzere;

(i) $\forall\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < d(c,x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $c \in X$ sayısına G kümesinin bir yığılma noktası denir.

(ii) Eğer bir $c \in G$ noktası G nin bir yığılma noktası değilse c elemanına G nin yalıtık noktası(isolated point) denir.

Teorem 1.1.13 (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere; aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $c \in X$ noktası E kümesinin bir yığılma noktasıdır.

(ii) $\forall\varepsilon > 0$ için $B(c,\varepsilon)$ açık yuvarı E kümesinin sonsuz çoklukta elemanını kapsar.

(iii) E kümesinde bir (x_n) dizisi vardır ki $n \in \mathbb{N}$ iken $x_n \neq c$ ve $x_n \to c$ dir.

Tanım 1.1.14 (X,d) metrik uzayı ve $F \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer F tüm yığılma noktalarını kapsıyorsa F ye X te bir kapalı küme denir.

Teorem 1.1.15 (X,d) metrik uzay olmak üzere,

(i) X teki açık kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun birleşimi X te bir açık kümedir.

(ii) X teki açık kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun kesişimi X te bir açık kümedir.

Teorem 1.1.16 (X,d) metrik uzay olmak üzere, $F \subseteq X$ alt kümesi X te kapalıdır $\Leftrightarrow$ F nin tümleyeni $F^c = X \setminus F$, X te bir açık kümedir.

Teorem 1.1.17 (X,d) metrik uzay olmak üzere,

(il) X teki kapalı kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun kesişimi X te bir kapalı kümedir.

(ii) X teki kapalı kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun birleşimi X te bir kapalı kümedir.

Tanım 1.1.18 $E \subseteq X$ olmak üzere;

(i) E kümesinin tüm iç noktalarının kümesine E nin içi denir ve $intE$ şeklinde gösterilir.

(ii) E kümesinin noktalarını ve tüm yığılma noktalarını kapsayan kümeye E nin kapanışı denir ve $\bar{E}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.19 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar $E \subseteq X$, c noktası E nin bir yığılma noktası ve $l \in Y$ olsun.

$x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $d_2(f(x), l) < \varepsilon$ iken $d_1(x, c) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $l \in Y$ noktasına $f : E \to Y$ fonksiyonunun c noktasındaki limiti denir ve $\lim_{x \to c} f(x) = l$ şeklinde gösterilir. Burada c noktasının E kümesine ait olması gerekmez.

Tanım 1.1.20 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar ve $c \in X$ olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım eğer;

$\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x, c) < \delta$ iken $d_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesindeki her noktada sürekli ise f fonksiyonu X uzayında süreklidir denir.

Tanım 1.1.21 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım, eğer

$\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x_1, x_2) < \delta$ iken $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu X te düzgün yakınsaktır denir.

Düzgün yakınsak olan bir fonksiyon aynı zamanda yakınsaktır ancak tersi doğru değildir.

Tanım 1.1.22 (X, d) metrik uzay olsun. (x_n), X te bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için $m > n \geq n_0$ olmak üzere $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 1.1.23 (X, d) metrik uzay olsun. (x_n), X te bir yakınsak dizi ise (x_n) bir Cauchy dizisi olur. Bu teoremin tersi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ de adi metriğe göre doğru olmakla birlikte genel olarak doğru değildir.

Tanım 1.1.24 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun, E deki her Cauchy dizisi E deki bir noktaya yakınsıyor ise E kümesine tamdır denir.

Tanım 1.1.25 (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X teki bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 1.1.26 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun, eğer E deki her dizi, limiti E de olan yakınsak bir alt diziye sahip ise E kümesine kompakt küme denir. Eğer X kompakt ise (X, d) metrik uzayı kompakt olur.

Bir $E \subseteq X$ alt kümesinin kompaktlığı, X uzayında tanımlanan metriğe bağlıdır, örneğin $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi, $\mathbb{R}$ deki adi metriğe göre kompakttır; ancak ayrık metriğe göre kompakt değildir.

Tanım 1.1.27 (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. $X = \bar{E}$ ise E kümesine X te yoğun küme denir.

Örnek 1.1.28 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur; ancak $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğun değildir.

1.2 Vektör Uzayları

Tanım 1.2.1 V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olmak üzere, $+ : V \times V \to V, \quad (x,y) \to x + y$
$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, \quad (\lambda, x) = \lambda x$
dönüşümleri ile sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini tanımlayalım.

$\forall x, y, z \in V$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. x + y = y + x
2. x +(y + z) =(x + y) + z
3. $\forall x \in V$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in V$ vardır.
4. $\forall x \in V$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in V$ vardır.
5. $\forall x \in V$ için $1 \cdot x = x$
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
8. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Bu durumda V ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı(lineer uzay), elemanlarına ise vektör veya nokta denir. $V = \mathbb{R}$ alınırsa V ye bir reel vektör uzayı, $V = \mathbb{C}$ alınırsa V ye bir kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 1.2.2 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer W, V vektör uzayındaki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W ye V nin bir (lineer) alt uzayı denir.

Teorem 1.2.3 $\emptyset \neq W \subseteq V$ kümesinin V nin bir alt uzayı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $y_1, y_2 \in W$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ için $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in W$ olmasıdır.

Tanım 1.2.4 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.
$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in V$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyor ise V üzerinde bir norm olur ve bu durumda $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(i) - (iv)$ özelliklerine ise norm aksiyomları denir. Bu uzay $V = \mathbb{R}$ için reel normlu uzay, $V = \mathbb{C}$ için kompleks normlu uzay olur. Bir vektör uzayı üzerinde birden çok normlu uzay tanımlanabilir.

Örnek 1.2.5 $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ öklid vektör uzayını düşünelim. $x, = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

normu ile birlikte bir normlu vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya $\mathbb{R}^n$ deki adi norm veya öklid normu denir.

Örnek 1.2.6 l_p, $(1 \leq p < \infty)$ uzayı

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_{l_p} : l^p \to \mathbb{R}$ dönüşümü ile bir normlu uzaydır.

Tanım 1.2.7 Her $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayından $x, y \in V$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde bir metrik elde edilebilir. Bu metriğe $\|\cdot\|$ normu tarafından üretilen metrik veya $\|\cdot\|$ normunun indirgediği metrik denir.

Teorem 1.2.8 $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir V vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her norm V üzerinde süreklidir.

Teorem 1.2.9 $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı herhangi bir V normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir.

Tanım 1.2.10 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in V$ için

$$k\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K\|x\|_1$$

olacak şekilde $k, K \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa V üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk normlar denir.

Tanım 1.2.11 (x_n), $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in V$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterillir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama denir.

Tanım 1.2.12 $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi (x_n) olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.2.13 Bir $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi V içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayına Banach Uzayı adı verilir.

Örnek 1.2.14 $V = \mathbb{R}^n$(veya $V = \mathbb{C}^n$) vektör uzayı

(i) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(ii) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$

(iii) $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ normlarına göre birer Banach uzayıdır.

Örnek 1.2.15 $V = \mathbb{R}$(veya $V = \mathbb{C}$)olmak üzere $\mathbb{F}$ üzerinde tanımlı V vektör uzayı

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

1.3 Lebesgue İntegrali

Tanım 1.3.1 X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $\mathcal{H}$ sınıfı için

(i) $\forall A, B \in \mathcal{H}, \quad A \setminus B \in \mathcal{H}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{H}, \quad A \cup B \in \mathcal{H}$

özellikleri sağlanırsa bu $\mathcal{H}$ sınıfına bir **halka** adı verilir. Eğer (ii) yerine

$$\forall k \in N, A_k \in \mathcal{H} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}$$

şartı sağlanırsa bu takdirde $\mathcal{H}$ halkasına bir $\sigma -$ **halka** denir.

Tanım 1.3.2 X bir küme olsun. X in bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir **cebir**dir denir.

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A}, \quad E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, ..., n, \quad E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) yerine

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A} \tag{1.1}$$

şartı sağlanırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma -$ **cebir** adı verilir.

Örnek 1.3.3 X bir küme ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ- cebirdir.

Örnek 1.3.4 $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \{\varnothing, \{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}, \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}, \mathbb{N}\}$ alınırsa $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ- cebirdir.

Örnek 1.3.5 X bir sonsuz küme ve $\mathcal{A}$ da X in tüm sonlu alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ- cebiri değildir. Çünkü $E \in \mathcal{A}$ ise E sonludur. Dolayısıyla, E^c sonsuzdur, aksi takdirde X sonlu olurdu. Şu halde $E^c \notin \mathcal{A}$ dır.

Teorem 1.3.6 X üzerindeki σ- cebirlerin herhangi adetteki kesişimleri yine bir σ- cebiridir.

Teorem 1.3.7 X bir küme $\mathcal{K}$ da X in boş olmayan bir sınıfı olsun. $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ- cebirlerinin bir en küçüğü vardır.

Tanım 1.3.8 Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ- cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ- cebiri denir, $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ- cebirine **Borel Cebiri** denir. $\mathcal{B}$ $(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nin herbir elemanına bir **Borel Kümesi** denir.

Örnek 1.3.9 $X = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ve E de bir Borel kümesi olsun. $E_1 = E \cup \{-\infty\}, E_2 = E \cup \{+\infty\}$ ve $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ olsun. E kümesi $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel cebirini taradığında E, E_1, E_2, E_3 kümelerinin sınıfı $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ olsun. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ bir σ- cebiridir. Bu σ- cebirine **Genişletilmiş Borel Cebiri** adı verilir.

Tanım 1.3.10 X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ- cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathcal{A}$ daki her kümeye $\mathcal{A}$-**ölçülebilir uzay** (veya kısaca, **ölçülebilir küme**) adı verilir.

Tanım 1.3.11 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** adı verilir.
$\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir **sonlu ölçü** adı verilir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü σ- **sonludur** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir.

Örnek 1.3.12 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. $\forall E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$ biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir sonlu ölçü ve dolayısıyla bir σ- sonlu ölçüdür.

Örnek 1.3.13 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. $E \in \mathcal{A}$ için

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset \\ +\infty, & E \neq \emptyset \end{cases} \tag{1.2}$$

biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir ölçüdür. Bu ölçü ne sonlu ne de σ- sonludur.

Tanım 1.3.14 Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüsüne bir **ölçü uzayı** adı verilir.

Teorem 1.3.15 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.
Eğer $A, B \in \mathcal{A}$ ve $A \subset B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ şeklindedir. Ayrıca $\mu(A) < \infty$ ise

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A) \tag{1.3}$$

dır.

Teorem 1.3.16 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $(A_n), \mathcal{A}$ daki elemanların artan bir dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.4}$$

dır.

2. $(B_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{1.5}$$

dır.

Sonuç 1.3.17 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $(A_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.6}$$

dır.

2. $(B_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{1.7}$$

dır.

Teorem 1.3.18 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $(A_n), \mathcal{A}$ ya ait kümelerin herhangi bir dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{1.8}$$

dır.

Tanım 1.3.19 X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall E \in P(X), \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in N, A_n \in P(X) \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçüsüdür** denir.

Örnek 1.3.20 X herhangi bir küme ve μ^* da $P(X)$ üzerinde

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases} \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanan μ^* fonksiyonu bir ölçü olmayıp bir dış ölçüdür.

Örnek 1.3.21 X herhangi bir sonsuz küme ve μ^* da $P(X)$ üzerinde

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & n(A) < \infty \\ 1, & n(A) = \infty \end{cases} \tag{1.10}$$

biçiminde tanımlanan μ^* fonksiyonu bir dış ölçü değildir.

Bilindiği gibi, bir I aralığının $\ell(I)$ uzunluğu o aralığın uç noktalarının farkı olarak tanımlanır. Yani $I = [a, b]$ (veya (a,b), (a,b], [a,b)) aralığının boyu $\ell(I) = b - a$ dır. Uzunluk bir küme fonksiyonuna (bir koleksiyondaki herbir kümeye bir genişletilmiş reel sayı karşılık getiren fonksiyon) bir örnektir. Bu durumda uzunluğun tanım kümesi aralıklar koleksiyonu, değer kümesi de genişletilmiş reel sayılar kümesidir. Bu bölümde uzunluk kavramı aralıklardan daha karışık kümeler için tanımlayacağız. Örneğin açık bir kümenin uzunluğunu, bu kümeyi oluşturan açık, ayrık aralıkların uzunlukları toplamı olarak tanımlayacağız. Öyle bir λ fonksiyonu teşkil etmek istiyoruz ki, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir $\mathcal{M}$ sınıfı üzerinde tanımlı olsun ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

- λ, $\mathbb{R}$ nin herbir E alt kümesi üzerinde tanımlı olsun, yani

  $$\mathcal{M} = P(\mathbb{R})$$

  olsun.
- Her bir I aralığı için λ(I)=ℓ(I) olsun.
- Eğer (E_n) bir ayrık dizi ve λ bunların herbiri üzerinde tanımlı ise

  $$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

  olsun.
- λ öteleme altında invaryant olsun. Yani λ fonksiyonu, E ve

  $$E + y = \{x + y : x \in E\}$$

  kümeleri üzerinde tanımlı olduğunda

  $$\lambda(E + y) = \lambda(E)$$

  olsun.

Bu dört özelliği sağlayan bir küme fonksiyonu tanımlamak mümkün değildir. Bu güne kadar ilk üç şartı sağlayan bir küme fonksiyonu bilinmemektedir. Bu nedenle bunlardan birinden vazgeçmek gerekmektedir.
Son üç şartı bırakıp ilk şartı değiştirmek oldukça faydalıdır. Burada yapılacak değişiklik λ fonksiyonunu tüm alt kümeler üzerinde tanımlamayıp daha dar σ-cebiri üzerinde tanımlamaktır. Yani $\mathcal{M}$ olarak $P(\mathbb{R})$ kuvvet kümesi değil, üzerinde λ fonksiyonunu tanımlayabileceğimiz uygun bir σ- cebiri almaktır. Şimdi bu fonksiyonu inşa etmeye başlayalım.

Örnek 1.3.22 (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\mathcal{T}_A = \{(I_k) : A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf\{\Sigma_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : (I_k) \in \mathcal{T}_A\} \tag{1.11}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir.

Teorem 1.3.23 Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin herbir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir, yani $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ise

$$\lambda^*(I) = \ell(I)$$

dır.

Teorem 1.3.24 $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü herbir aralığa onun hacmini karşılık getirir.

Sonuç 1.3.25 A sayılabilir küme ise $\lambda^*(A) = 0$ dır.

Sonuç 1.3.26 $[0, 1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 1.3.27 X bir küme μ^* da X üzerinde bir dış ölçü olsun. Eğer X in herbir A alt kümesi için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.12}$$

ise X in E alt kümesi μ^*- **ölçülebilir** (μ^* ye göre ölçülebilir) denir.
μ^* fonksiyonunun alt toplamsallık özelliği de denilen $\mu^*(\cup A_k) \leq \Sigma\mu^*(A_k)$ özelliğinden, X in bütün A ve E alt kümeleri için

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

olacağından bir E kümesinin μ^*- ölçülebilir olup olmadığını anlamak için herbir $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.13}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Ayrıca, eğer $\mu^*(A) = +\infty$ ise (1.13) eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Şu halde X in bir E alt kümesinin μ^*-ölçülebilir olduğunu göstermek için X in $\mu^*(A) < +\infty$ şartını sağlayan herbir A alt kümesi için (1.13) eşitsizliğinin sağlandığı göstermek yeterlidir.

Teorem 1.3.28 X bir küme ve μ^* da X üzerinde bir dış ölçü olsun. X in herbir E alt kümesi için $\mu^*(E) = 0$ veya $\mu^*(E^c) = 0$ ise E kümesi μ^*- ölçülebilirdir.

Sonuç 1.3.29 $\emptyset$ ve X, X üzerinde tanımlanan her dış ölçüye göre ölçülebilirdir. Özel olarak $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri λ^* Lebesgue dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir.

Teorem 1.3.30 E_1 ve E_2, μ^*- ölçülebilir kümeler ise $E_1 \cup E_2$ de μ^*- ölçülebilirdir.

Teorem 1.3.31 X bir küme μ^* X üzerinde bir dış ölçü ve $\mathcal{M}(X, \mu^*)$ da X üzerinde μ^*- ölçülebilir kümelerin sınıfı olsun.

1. $\mathcal{M}(X, \mu^*)$ bir σ- cebiridir.
2. μ^* ın $\mathcal{M}(X, \mu^*)$ sınıfına kısıtlanması bir ölçüdür.

Lebesgue dış ölçüsü olan λ^* ın $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına ve $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ sınıfına olan kısıtlamasına **Lebesgue Ölçüsü** denir, λ ile gösterilir. İkisini birbirinden ayırmak gerektiğinde, üzerinde Lebesgue ölçüsünün tanımladığı sınıf belirtilir. "$\mathbf{B}(\mathbb{R})$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü" veya "$\mathcal{M}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü" gibi. Bazen de "Borel kümeleri üzerinde tanımlı Lebesgue ölçüsü" şeklinde ifade edilir.

Lemma 1.3.32 $a \in \mathbb{R}$ için $(a, +\infty)$ aralığı λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir.

Teorem 1.3.33 Herbir Borel kümesi λ^* ölçülebilirdir.

1.4 Ölçülebilir Fonksiyonlar

Bu bölümde önce reel değerli fonksiyonların ölçülebilirliği üzerinde durulacak, daha sonra genişletilmiş reel değerli fonksiyonlara yer verilecektir.

Tanım 1.4.1 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Longleftrightarrow \forall\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Şimdi bu tanımdaki kümelerin şeklini değiştirmeye imkan veren bir lemmayı ifade edelim.

Lemma 1.4.2 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ foksiyonu için aşağıdaki önermeler denktir.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

Örnek 1.4.3 Her sabit fonksiyon bir ölçülebilir fonksiyondur. Gerçekten, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ ise $\alpha \geq c$ için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{A}$$

ve $\alpha < c$ için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{A}$$

olur.

Örnek 1.4.4 $X = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ olsun. Sürekli her $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (Borel) ölçülebilirdir.
Gerçekten f sürekli olduğunda her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$$

kümesi $\mathbb{R}$ de bir açık kümedir. Her açık küme Borel cebirine ait olduğundan

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

dir, yani Borel ölçülebilirdir.

Teorem 1.4.5 f ve g ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$cf, f^2, f+g, f.g, |f|$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Tanım 1.4.6 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilirdir } \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

Lemma 1.4.2 deki denklemlerin $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için de doğru olacağı açıktır. Bu tanımların benzerleri $[-\infty, +\infty]$ değerli fonksiyonlar için de verilebilir.

Tanım 1.4.7 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olmalıdır. X üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}$ ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir. Eğer $f \in M(X, \mathcal{A})$ ise

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\}$$

$$\begin{aligned} B = \{x \in X : f(x) = -\infty\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq -n\} \\ &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right)^c \end{aligned}$$

olacağından A ve B ölçülebilirdir.

Teorem 1.4.8 Genişletilmiş reel değerli bir f fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}, B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

kümelerinin ve

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \ x \notin A \cup B \\ \quad 0, \ x \in A \cup B \end{cases} \tag{1.14}$$

biçiminde tanımlanan reel değerli f_1 fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır.

Tanım 1.4.9 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Borel ölçülebilir fonksiyon veya Borel fonksiyonu adı verilir. $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ σ- cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Lebesgue ölçülebilir fonksiyon denir. $\mathbb{R}$ nin Borel kümesi olmayan fakat Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri mevcut olduğundan, $\mathbb{R}$ de herbir Borel ölçülebilir fonksiyon Lebesgue ölçülebilirdir.

Tanım 1.4.10 f, X den $\overline{\mathbb{R}}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

biçiminde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^+ fonksiyonuna f nin pozitif parçası, f^- fonksiyonuna da f nin negatif parçası denir. Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında,

$$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ - f^-$$

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

olur. Teorem gereğince ve yukarıdaki bağıntılar göz önüne alındığında aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 1.4.11 $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır.

Teorem 1.4.12 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. f ile g, A üzerinde tanımlı $[-\infty, +\infty]$- değerli ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde

$$\{x \in A : f(x) < g(x)\}, \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}, \{x \in A : f(x) = g(x)\}$$

kümeleri ölçülebilirdir.

Teorem 1.4.13 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay $A \in \mathcal{A}$ ve f ile g, A da tanımlı $[-\infty, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonlar ise $(f \vee g)$ ve $(f \wedge g)$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

Teorem 1.4.14 $(f_n), A \in \mathcal{A}$ üzerinde tanımlı, $[-\infty, +\infty]$ - değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\sup_n f_n$ ve $\inf_n f_n$ fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Teorem 1.4.15 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $(f_n)A$ üzerinde tanımlı $[-\infty, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\liminf_{n\to\infty} f_n$ ve $\limsup_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir. Ayrıca tanım kümesi $A_0 = \{x \in A : \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\}$ olan $\lim_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.

1.5 $L_p(\Omega)$ Uzayı

Tanım 1.5.1 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere; $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L_p(\Omega)$ uzayı veya Ω bölgesinde p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L_p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty$$

şeklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_p$ gösterimine f fonksiyonunun Lp-normu denir.

Ω bölgesinde, hemen her yerde $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f(x)|$ in Ω bölgesindeki esas supremumu (esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf\{C > 0 : |\{x \in \Omega, |f(x)| > C\}| = 0\}$$

şeklinde gösterilir. Ω bölgesindeki hemen hemen sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ şeklinde gösterilir. Buna göre bir f fonksiyonunun L^∞ normu

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.5.2 (Young Eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\forall a, b > 0$ için

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur.

Teorem 1.5.3 $p \ge 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$|a+b|^p \le 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right)$$

olur.

Teorem 1.5.4 (Hölder Eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L^p, g \in L^q$ ise $f, g \in L^1$ olur ve

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|d\mu(x) \le \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizligi sağlanır.

Teorem 1.5.5 (Minkowski Eşitsizliği) Eğer $f, g \in L^p$ ve $1 \le p$ ise $f + g \in L^p$ olur ve

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Hölder teoremi ve Lebesgue integralinin özellikleri gözönünde bulundurulduğunda $L^p, 1 \le p < \infty$, nin bir vektör uzayı olduğu görülür. Bunun birlikte $\|f\|_p$; L^p üzerinde bir normdur ve tanımdan

1. $\|f\|_p \ge 0$ ve $\|f\|_p = 0$ olması için gerek ve yeter şart hemen hemen heryerde $f(x) = 0$
2. $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$,
3. $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|f\|_p$

özellikleri sağlandığından $L^p, 1 \le p \le \infty$, bir normlu uzaydır.

Teorem 1.5.6 $L_p, 1 \leq p < \infty$, uzayı

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolayısıyla Banach uzayıdır.

Tanım 1.5.7 f_n ve f fonksiyonları L^p uzayının elemanları olmak üzere; (f_n) dizisi f fonksiyonuna p. mertebeden yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$.

Bu yakınsaklık çesidine L^p de yakınsaklık da denir. Burada $p \geq 1$ olup,

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p d\mu(x) \right)$$

dir. Buna göre,
(f_n) dizisi f fonksiyonuna L^p de yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ olmalıdır.

1.6 A_p Sınıfı Fonksiyonlar

Tanım 1.6.1 ω fonksiyonu h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için $\omega(x) > 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda ω fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir. Özel olarak, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ için

$$d(x, y) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\omega(x) = (d(x))^\alpha$$

ağırlık fonksiyonuna kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu denir.
Eğer $\omega(2x) \leq C_1\omega(x)$ olacak şekilde bir $1 < C_1 < \infty$ sayısı varsa ω ağırlık fonksiyonuna çift katlı ağırlık fonksiyonu(D) ve eğer
$\omega(x) \leq C_2\omega(2x)$ olacak şekilde bir $0 < C_2 \leq 1$ sayısı varsa ω ağırlık fonksiyonuna ters çift katlı ağırlık fonksiyonu(RD) adı verilir.

Tanım 1.6.2 (($1 \leq p < \infty$)için A_p ağırlıkları) $\omega(x) \geq 0$ ve $\omega(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir $C > 0$ sabiti

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'}\, dx \right)^{p-1} \leq C \qquad (1.15)$$

$1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ denir. Burada ve aşağıda, $1/p + 1/p' = 1$ dır. $C > 0$ olmak üzere

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \qquad (1.16)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\omega \in A_1$ dir. (1.15) veya (1.16) eşitsizliklerinde görülen C sabitine ω nın A_p sabiti denir.

Uyarı 1.6.3 $\omega \in A_1$ olması için gerek ve yeter şart $C > 0$ ve herhangi Q kübü için

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx \le C \inf_{x\in Q} \omega(x) \tag{1.17}$$

olmasıdır. Burada ve aşağıda, inf ile temel infimum olarak düşünülecektir. $1 \le p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ için, A_p sabiti $C \ge 1$ olduğu görülür. Aslında, her bir Q kübü için

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1/p}\,\omega(x)^{-1/p}\,dx \\ &\le \left\{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}\,dx\right)^{p-1}\right\}^{1/p} \\ &\le C^{1/p} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi A_p ağırlık fonksiyonlarının bazı özelliklerini verelim.

Önerme 1.6.4 (A_p ağırlıklarının I. özellikleri)

i. $1 \le p < q < \infty$ için $A_p \subsetneqq A_q$,

ii. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ gerek ve yeter şart $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$.

iii. $\omega_0, \omega_1 \in A_1$ ise $1 < p < \infty$ için $\omega_0\omega_1^{1-p} \in A_p$.

iv. $(1 \le p < \infty)$ olmak üzere $\omega \in A_p$ ise herbir $0 < \varepsilon < 1$ için $\omega^\varepsilon \in A_p$.

v. $(1 \le p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise $\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\right)^p \cdot \omega(Q) \le C\int_Q |f(x)|^p \omega(x)\,dx \tag{1.18}$$

dir.

vi. $(1 \le p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise herhangi bir $\delta > 1$ için $C(n, p\delta)$ sabiti vardır öyle ki her bir Q kübü için, $\omega(\delta Q) \le C(n,p,\delta)\,\omega(Q)$. Özellikle, $\delta = 2$ alınırsa A_p ağırlıkları çift koşulu sağlar.

vii. $(1 \le p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise herhangi bir $0 < \alpha < 1$ için $0 < \beta < 1$ vardır öyle ki herhangi ölçülebilir $E \subset Q$ için $|E| \le \alpha|Q|$ ve $\omega(E) \le \beta\omega(Q)$ dir.

Sıradaki teorem ile A_p ağırlık fonksiyonlarının çok önemli ve kullanışlı olan bir özelliği verilecektir.

Teorem 1.6.5 (Ters Hölder Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda herhangi bir Q kübü için sadece p ye bağlı olan $\varepsilon > 0$ ve C, ω nın A_p sabiti olmak üzere

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}\,dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx \tag{1.19}$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 1.6.6 (A_p ağırlık fonksiyonlarının II. özellikleri)

viii. $(1 < p < \infty)$ olmak üzere $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $p - \varepsilon > 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ için $\omega \in A_{p-\varepsilon}$.

ix. $1 < p < \infty$ için $A_p = \bigcup_{q<p} A_q$.

x. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $\omega^{1+\varepsilon} \in A_p$.

xi. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $\delta > 0$ ve $C > 0$ vardır öyle ki her bir Q kübü ve $E \subset Q$ olacak şekilde ölçülebilir E kümesi için

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta} \tag{1.20}$$

şeklindedir.

Uyarı 1.6.7 ω, $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer ω (1.20) denklemini sağlarsa $\omega \in A_\infty$ denir. xi özelliği gösteriyor ki $\bigcup_{1\leq p<\infty} A_p \subset A_\infty$. Bununla birlikte $\bigcup_{1\leq p<\infty} A_p \supset A_\infty$ olduğu da ispatlanabilir. Sonuç olarak $A_\infty = \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p$ şeklindedir.

Tanım 1.6.8 ω bir ağırlık fonksiyonu, $0 < p \leq \infty$ ve $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. Bu durumda Ω bölgesinde

$$\int_\Omega |u(x)|^p \omega(x) d\mu(x) < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların oluşturduğu uzaya Ağırlıklı Lebesgue Uzayı denir ve $L^p_\omega(\Omega) = L^p(\omega)$ ile gösterilir. $L^p_\omega(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{p,\omega} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \omega(x) d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty,\ 0 < p < \infty$$

$$\|u\|_{\infty,\omega} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty$$

normları ile bir Banach uzayıdır.

Teorem 1.6.9 (I. Fubini Teoremi)

$$B = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, f : B \to \mathbb{R} \quad olsun.$$
$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

şeklindedir.

Teorem 1.6.10 (II. Fubini Teoremi)

$\varphi\ , \Psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları sürekli,* $\forall x \in [a,b]$ *için*
$\varphi\ (x) \leq \Psi(x)$*ve*
$B = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \Psi(x)\}$*olsun.*
$f\ : B \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları sürekli veya parçalı sürekli ise*

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\Psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

şeklindedir.

2 AĞIRLIKLI LEBESGUE UZAYLARINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI İÇİN GEREK VE YETER ŞARTLAR

2.1 Ağırlıklı Lebesgue Uzayları ve Hardy Operatörü

Ağırlıklı norm uzayı

$$L^s(a,b;\omega) = L^s(\omega), \tag{2.1}$$

$0 < s \leq \infty$ ve ω,(a,b) aralığında bir ağırlık fonsiyonu ve $f = f(x)$ (a,b) aralığında tüm ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} \|f\|_{s,\omega} &:= \left(\int_a^b |f(x)|^s \omega(x)dx\right)^{1/s} < \infty, \qquad 0 < s < \infty, \\ \|f\|_{s,\omega} &:= \operatorname*{ess\,sup}_{a<x<b} |f(x)| < \infty, \qquad s = \infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Eğer Hardy operatörü H ile ifade edilirse

$$(Hf)(x) := \int_a^x f(t)dt \tag{2.3}$$

şeklindedir. $f \geq 0$ olmak üzere

$$\|Hf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \tag{2.4}$$

eşitsizliğinin sağlaması için gerek ve yeter şart

$$A_{pq} < \infty \tag{2.5}$$

olmasıdır.

Burada A_{pq},

$1 < p \leq q < \infty$ ve $p' = \frac{p}{p-1}$ olmak üzere

$$A_{pq} := \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u(t)dt\right)^{1/q} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)$$

şeklindedir ve bu ifadeye denk olarak $0 < q < p < \infty$, $q \neq 1$, $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ olmak üzere

$$A_{pq} := \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t)dt\right)^{r/q} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)dx\right)^{1/r}$$

şeklindedir.

H, Hardy operatörü ile birlikte, eşlenik Hardy operatörü $\tilde{\mathrm{H}}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\tilde{H}f)(x) := \int_x^b f(t)dt. \tag{2.6}$$

Hardy eşitsizliğinin eşleniği $f \geq 0$ olmak üzere

$$\|\tilde{H}f\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \tag{2.7}$$

şeklindedir ve eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\tilde{A}_{pq} < \infty \tag{2.8}$$

olmasıdır. Buradaki $\tilde{A}_{pq}$, $1 < p \leq q < \infty$ olmak üzere

$$\tilde{A}_{pq} := \sup_{a<x<b} \left(\int_a^x u(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)dt \right)^{1/p'}$$

şeklindedir. Bu ifadeye denk olarak $0 < q < p < \infty$, $q \neq 1$, $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ olmak üzere

$$\tilde{A}_{pq} := \left(\int_a^b \left(\int_a^x u(t)dt \right)^{r/q} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)dt \right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)dx \right)^{1/r}$$

şeklindedir.

(2.4) ve (2.7) eşitsizlikleri genel ağırlıklı norm eşitsizliğinden

$$\|Tf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \tag{2.9}$$

şeklinde elde edilir. Burada T, genel integral operatörüdür. Böylece (2.9) eşitsizliğinden

$$T : L^p(v) \to L^q(u)$$

ifadesi elde edilir.

2.2 Hardy Operatörünün Duali

$1 < s < \infty$ olmak üzere $L^s(\omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzayında iç çarpım

$$< g, f >= \int_a^b g(x)f(x)dx, \qquad f \in L^s(\omega) \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır.

Buradan $L^s(\omega)$ nın dual uzayı , $L^{s'}(\tilde{\omega})$ ile tanımlanır. Burada

$$s' = \frac{s}{s-1}, \qquad \tilde{\omega} = \omega^{1-s'}$$

dir. Özellikle, $\|g\|_{s',\omega^{1-s'}} = \sup_{\|f\|_{s,\omega}=1} | < g, f > |$
ve böylece

$$(L^s(\omega))^* = L^{s'}(\omega^{1-s'}) \tag{2.11}$$

olur. Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |\langle g, f\rangle| &\le \int_a^b |g(x)|\omega^{-1/s}(x)|f(x)|\omega^{1/s}(x)dx \\ &\le \left(\int_a^b |f(x)|^s\omega(x)dx\right)^{1/s} \left(\int_a^b |g(x)|^{s'}\omega^{-s'/s}(x)dx\right)^{1/s'} \\ &= \|f\|_{s,\omega}.\|g\|_{s',\omega^{1-s'}} \end{aligned}$$

elde edilir. $s/s' = s-1 = 1/(s'-1)$ olduğundan, ve

$$f = |g|^{s'-1}\text{sgn } g\ \omega^{1-s'}/\|g\|^{s'/s}_{s',\omega^{1-s'}}$$

denirse $\|f\|_{s,\omega} = 1$ ve $\langle g, f\rangle = \|g\|_{s',\omega^{1-s'}}$ dir.

Buna ek olarak Hardy operatörleri H ve $\tilde{H}$ karşılıklı olarak eşleniktir. Eğer

$$H : L^p(v) \to L^q(u), \qquad 1 < p, q < \infty,$$

ise $(H)^* = \tilde{H}$ ve

$$\tilde{H} : L^{q'}(u^{1-q'}) \to L^{p'}(v^{1-p'})$$

dir. Fubini Teoremi'nden

$$\langle g, Hf\rangle = \int_a^b g(x)\int_a^x f(t)dtdx = \int_a^b f(t)\int_t^b g(x)dxdt = \langle f, \tilde{H}g\rangle$$

dir.

2.3 Hardy Eşitsizlikleri İçin Bazı Kriterler

Hardy Eşitsizliğinin geçerli olması için gerek ve yeter şart $A_{pq} < \infty$ olmasıdır, A_{pq}, $p \le q$ için, $p > q$ için verilmiştir. Şimdi bazı alternatif kriterler vereceğiz. Öncelikle,

$$V(x) := \int_a^x v^{1-p'}(t)dt \tag{2.12}$$

olarak gösterelim. Buradan A_{pq} sayısı

$$A_{pq} = \sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)dt\right)^{1/q} V^{1/p'}(x)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.3.1 [13, 9, 12] Her $f \geq 0$ ve $1 < p \leq q < \infty$ olsun. Buradan,

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx \right)^{1/p} \tag{2.13}$$

Hardy eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$B_{pq} < \infty \tag{2.14}$$

olmasıdır.

Burada

$$\begin{aligned} B_{pq} := \sup_{a<x<b} & \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{-1/p} \\ \times & \left(\int_a^x u(t) \left(\int_a^t v^{1-p'}(s)ds \right)^q dt \right)^{1/q} \end{aligned} \tag{2.15}$$

dir. Daha kısa olarak

$$B_{pq} = \sup_{a<x<b} V^{-1/p}(x) \left(\int_a^x u(t)V^q(t)dt \right)^{1/q} \tag{2.16}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca (2.13) eşitsizliğindeki C sabiti

$$B_{pq} \leq C \leq p' B_{pq} \tag{2.17}$$

ifadesini sağlar.

İspat. (i) (Gereklilik) Her $f \geq 0$ ve $C < \infty$ olmak üzere (2.13) eşitsizliği sağlansın. $t \in (a,b)$ keyfi bir sabit olmak üzere f fonksiyonunu

$$f_t(x) = \chi_{(a,t)}(x)v^{1-p'}(x)$$

olacak şekilde seçelim. Buradan,

$$\left(\int_a^t \left(\int_a^x v^{1-p'}(s)ds \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^t v^{1-p'}(x)dx \right)^{1/p}$$

olur. Yani;

$$\left(\int_0^t V^q(x)u(x)dx \right)^{1/q} \leq C(V(t))^{1/p}$$

dir. Sonuç olarak $B_{pq} \leq C < \infty$ olduğu görülür.

(ii) (Yeterlilik): (2.13) eşitsizliği $g \geq 0$ olmak üzere Hardy operatörünün duali şeklinde yazılmak istenirse

$$\left(\int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt\right)^{p'} v^{1-p'}(x)dx\right)^{1/p'}$$
$$\leq C\left(\int_a^b g^{q'}(x)u^{1-q'}(x)dx\right)^{1/q'} \tag{2.18}$$

şeklinde olur. Burada C sabiti (2.13) eşitsizliği ile aynıdır.

g için (a,b) aralığında kısmi integrasyon ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} J := & \int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt\right)^{p'} v^{1-p'}(x)dx \\ = & \; p'\int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt\right)^{p'-1} g(x)\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)dx \\ = & \; p'\int_a^b g(x)u^{(1-q')/q'}(x)\left(\int_x^b g(t)dt\right)^{p'-1} \\ \times & \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right))u^{(q'-1)/q'}(x)dx \\ \leq p' & \left(\int_a^b g^{q'}(x)u^{1-q'}(x)dx\right)J_1^{1/q} \end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. Burada

$$J_1 := \int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt\right)^{q(p'-1)} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^q u(x)dx$$

şeklindedir.

$$h(x) := \left(\int_x^b g(t)dt\right)^{q(p'-1)}$$

olsun. Fubini Teoremi uygulanırsa:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_a^b h(x)\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^q u(x)dx \\ &= \int_a^b h(x)V^q(x)u(x)dx = \int_a^b \int_x^b [-h'(t)]dtV^q(x)u(x)dx \\ &= \int_a^b \int_x^b [-h'(t)V^q(x)u(x)]dtdx \\ &= \int_a^b \int_a^t [-h'(t)V^q(x)u(x)]dxdt \\ &= \int_a^b [-h'(t)]\int_a^t u(x)V^q(x)dxdt \end{aligned}$$

elde edilir ve (2.16) denkleminden

$$J_1 \leq B^q \int_a^b [-h'(t)] \left(\int_a^t v^{1-p'}(x)dx \right)^{q/p} dt$$

olduğu görülür.

Minkowski integral eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq B^q \left(\int_a^b \left(\int_x^b [-h'(t)]dt \right)^{p/q} v^{1-p'}(x)dx \right)^{q/p} \\ &= B^q \left(\int_a^b h^{p/q}(x) v^{1-p'}(x)dx \right)^{q/p} \\ &= B^q \left(\int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{(p'-1)p} v^{1-p'}(x)dx \right)^{q/p} \\ &= B^q \left(\int_a^b \left(\int_x^b g(t)dt \right)^{p'} v^{1-p'}(x)dx \right)^{q/p} = B^q J^{q/p} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.19) eşitsizliği ile birlikte

$$J^{1/p'} \leq p'B \left(\int_a^b g^{q'}(x) u^{1-q'}(x)dx \right)^{1/q'}$$

olduğu görülür. Buradan (2.18) eşitsizliği sağlanır. Böylelikle (2.13) eşitsizliği elde edilmiş olur. ■

Teorem 2.3.2 [10, 9, 11] $0 < q < p < \infty, \quad p > 1, \quad 1/r = 1/q - 1/p$ ve V (2.12) denklemindeki gibi olsun. Buradan her $f \geq 0$ olmak üzere

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx \right)^{1/p}$$

Hardy Eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$B_{pq} < \infty \tag{2.20}$$

olmasıdır. Burada

$$B_{pq} := \left(\int_a^b \left(\int_a^t u(s)V^q(s)ds \right)^{r/q} V^{-r/q}(t)dV(t) \right)^{1/r} \tag{2.21}$$

dir. Burada C sabiti

$$qp^{-1/r}(p')^{1/q'} r^{-1/r'} 2^{-1/q} \cdot B_{pq} \leq C \leq q^{1/q} p' B_{pq} \tag{2.22}$$

ifadesini sağlar.

İspat.

Fubini Teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned}
J :&= \int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx \\
&= \int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)V^q(x)V^{-q}(x)dx \\
&= q\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)V^q(x)\int_x^b V^{-q-1}(s)dV(s)dx \\
&= q\int_a^b V^{-q-1}(s)\left(\int_a^s \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)V^q(x)dx\right)dV(s) \\
&\le q\int_a^b \left[\left(\int_a^s f(t)dt\right)^q V^{-q}(s)\right] \\
&\times \left[\left(\int_a^s u(x)V^q(x)dx\right)V^{-1}(s)\right]dV(s);
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{p}{q}$ ve $(\frac{p}{q})' = \frac{r}{q}$ parametreleri için Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$J \le q\left(\int_a^b \left(\int_a^s f(t)dt\right)^p \frac{dV(s)}{V^q(s)}\right)^{q/p} B^q$$

elde edilir. Teorem 2.3.1 den

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^s f(t)dt\right)^p \frac{dV(s)}{V^p(s)}\right)^{1/p} \le p'\left(\int_a^b f^p(s)v(s)ds\right)^{1/p}$$

olduğu görülür. (2.13) eşitsizliği $C \le q^{1/q}p'B < \infty$ olduğu takdirde sağlanır.

(2.13) eşitsizliği $C < \infty$ için sağlansın. Buradan (2.20) eşitsizliğinin gerek şart olduğunu gösterelim.

$$B_0 := \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t)dt\right)^{r/q} V^{r/q'}(x)dV(x)\right)^{1/r}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$C \ge q^{1/q}(p')^{1/q'}\frac{q}{r}B_0 \tag{2.23}$$

olduğunu gösterelim.

$\omega(x) := v^{1-p'}(x)$ olsun. $0 \le u_1 \le u$ ve $0 \le v \le v_1$ olacak şekilde u_1 ve v_1 verilsin. u_1, v_1 ve $\omega_1(x) := v_1^{1-p'}(x)$ fonksiyonları integrallenebilir olsun. Bununla birlikte

$$V_1(x) = \int_a^x V_1^{1-p'}(t)dt = \int_a^t \omega_1(t)dt$$

olmak üzere

$$B_1 := \left(\int_a^b \left(\int_x^b u_1(t)dt\right)^{r/q} V_1^{r/q'}(x)dV_1(x)\right)^{1/r}$$

olsun. Eğer f fonksiyonunu

$$f(x) := \left(\int_x^b u_1(t)dt\right)^{r/pq} \left(\int_a^x \omega_1(t)dt\right)^{r/pq'} \omega_1(x),$$

şeklinde seçersek,

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)dt &\geq \left(\int_x^b u_1(t)dt\right)^{r/pq} \int_a^x \left(\int_a^t \omega_1(s)ds\right)^{r/pq'} \omega_1(t)dt \\ &= \frac{p'q}{r}\left(\int_x^b u_1(t)dt\right)^{r/pq} \left(\int_a^x \omega_1(s)ds\right)^{r/p'q}\end{aligned}$$

elde edilir.

Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}&\frac{p'q}{r}(\frac{q}{p'})^{1/q}B_1^{r/q} \\ &= \left(\int_a^b \left(\frac{p'q}{r}\right)^q \left(\int_x^b u_1(t)dt\right)^{r/p} \left(\int_a^x \omega_1(t)dt\right)^{r/p'} u_1(x)dx\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u_1(x)dx\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \\ &\leq C\left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p} \\ &= C\left(\int_a^b \left(\int_x^b u_1(t)dt\right)^{r/q} \left(\int_a^x \omega_1(t)dt\right)^{r/q'} \omega_1^p(x)\omega^{1-p}(x)dx\right)^{1/p} \\ &\leq C\left(\int_a^b \left(\int_x^b u_1(t)dt\right)^{r/q} \left(\int_a^x \omega_1(t)dt\right)^{r/q'} \omega_1(x)dx\right)^{1/p} \\ &= C\left(\int_a^b \left(\int_x^b u_1(t)dt\right)^{r/q} V_1^{r/q'}(x)dV_1(x)\right) = CB_1^{r/p}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$C \geq q^{1/q}(p')^{1/q'}\frac{q}{r}B_1$$

olduğu görülür. u ve ω fonksiyonlarına integrallenebilir artan fonksiyon dizileriyle yaklaşılır ve Monoton Yakınsaklık Teoremi uygulanırsa önceki (2.23) eşitsizliğinde B_1 yerine B_0 değeri yazılabilir.

$$B \leq (2q)^{1/q}(\frac{p}{r})^{1/r}B_0, \tag{2.24}$$

olduğunu göstermemiz ispatı tamamlamak için yeterlidir. Buradan,

$$B^r = \int_a^b \left(\int_a^x V^q(t)d\left(-\int_t^x u(s)ds\right)\right)^{r/q} V^{-r/q}dV(x) \tag{2.25}$$

ve

$$\begin{aligned} J_1 :&= \int_a^x V^q(t)d\left(-\int_t^x u(s)ds\right) \\ &= q\int_a^x \left(-\int_t^x u(s)ds\right) V^{q-1}(t)dV(t) \\ &= q\int_0^x \left[\left(\int_t^x u(s)ds\right) V^{q-1+q/2p}(t)\right] V^{-q/2p}dV(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\frac{r}{q}$ ve $(\frac{r}{q})' = \frac{p}{q}$ parametreleri için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} J_1 \leq\ & q\ \left(\int_a^x \left(\int_t^x u(s)ds\right)^{r/q} V^{(q-1+q/2p)(r/q)}(t)dV(t)\right)^{q/r} \\ & \times \left(\int_0^x V^{-1/2}(t)dV(t)\right)^{q/p} \end{aligned}$$

elde edilir. Fubini Teoremi'nden

$$
\begin{aligned}
B^r &\leq q^{r/q}2^{r/p}\int_a^b\left(\int_a^x\left(\int_t^b u(s)ds\right)^{r/q}V^{(q-1+q/2p)(r/q)}(t)dV(t)\right)\\
&\times V^{r/2p-r/q}(x)dV(x)\\
&= q^{r/q}2^{r/p}\int_a^b\left(\int_t^b u(s)ds\right)^{r/q}V^{r/q'+r/2p}(t)\\
&\times\int_t^b V^{r/2p-r/q}(x)dV(x)dV(t)\\
&= \frac{q^{r/q}p2^{r/p+1}}{r}\int_a^b\left(\int_t^b u(s)ds\right)^{r/q}V^{r/q'}(t)dV(t)\\
&= \frac{(2q)^{r/q}p}{r}B_0^r
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

2.4 Türevli Hardy Eşitsizlikleri

$k \in \mathbb{N}$ için (a,b) aralığında

$$AC^{k-1}(a,b) = AC^{k-1}$$

ile tüm mutlak sürekli fonksiyonlar kümesini gösterelim ve

$$\left(\int_a^b |g(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b |g'(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.26}$$

eşitsizliğini gözönüne alalım.

$g \in AC^0$ fonksiyonları için

$$g(a) = 0 \tag{2.27}$$

veya

$$g(b) = 0 \tag{2.28}$$

sağlanır.
$W_L^{1,p}(v)$ ve $W_R^{1,p}(v)$ kümeleri için $g \in AC^0$ fonksiyonu sırasıyla (2.27) ve (2.28) eşitliklerini sağlar ve (2.26) eşitsizliğinin sağ tarafı için sonludur.

$$\|g'\|_{p,v} < \infty.$$

Buradan $W_L^{1,p}(v)$ ve $W_R^{1,p}(v)$ normlu lineer uzaylar ile aynı norm $\|g'\|_{p,v}$ ve (2.26) eşitsizliği Hardy eşitsizliğidir. Gerçekten

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt = (Hf)(x)$$

ve/veya

$$g(x) = \int_x^b f(t)dt = (\tilde{H}f)(x)$$

şeklindedir.

Sonuç olarak (2.26) Hardy eşitsizliğini aşağıdaki şekilde yazılırsa:

$$\|g\|_{q,u} \leq C\|g'\|_{p,v}, \tag{2.29}$$

sürekli gömme ifadesi

$$W_L^{1,p}(v) \hookrightarrow L^q(u) \tag{2.30}$$

ve/veya

$$W_R^{1,p}(v) \hookrightarrow L^q(u) \tag{2.31}$$

şeklindedir. (2.30) ifadesinin sağlanması için gerek ve yeter şart (2.5) denkleminin sağlanmasıdır. Benzer olarak (2.31) ifadesinin sağlanması için gerek ve yeter şart (2.8) denkleminin sağlanmasıdır.

Uyarı 2.4.1 (İki taraflı durumlar):

(2.26) Hardy eşitsizliği

$$g \in W_L^{1,p}(v) \cap W_R^{1,p}(v),$$

fonksiyonları için de düşünülebilir. Burada

$$g(a) = g(b) = 0 \tag{2.32}$$

şeklindedir. Bu durumda (2.26) Hardy eşitsizliğinin gerçeklenebilmesi için gerek ve yeter şart $1 < p \leq q < \infty$ olmak üzere

$$\sup_{(c,d)\subset(a,b)} \left[\left(\int_c^d u(t)dt \right)^{1/q} \right. \tag{2.33}$$

$$\left. \times \left(min \left\{ \int_a^c v^{1-p'}(t)dt, \int_d^b v^{1-p'}(t)dt \right\} \right)^{1/p'} \right] < \infty$$

olmasıdır.

2.5 Bazı Gösterim ve Uygulamalar

Uyarı 2.5.1 (i) Hardy eşitsizliğinin geçerliliği için gerek ve yeter şartlar A ve $\tilde{A}$ sabitlerinin terimlerinde ifade edilmiştir. Sırasıyla u, v ağır fonksiyonlarının özelliklerini vurgulamak için ve (a, b) aralığında

$$A = A(a, b; u, v), \qquad \tilde{A} = \tilde{A}(a, b; u, v) \tag{2.34}$$

şeklinde kullanılmıştır.

(ii)Bazen modifiye ağırlıklı Lebesgue uzayı için

$$\mathcal{L}^s(a, b; \omega) = \mathcal{L}^s(\omega) \tag{2.35}$$

ifadesi kullanılmıştır.

f tüm ölçülebilir fonksiyonlar için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$f\omega \in L^s$$

Yani normlu ($1 \leq s < \infty$ için)

$$\|f\|_{s,\omega} := \left(\int_a^b |f(x)\omega(x)|^s dx \right)^{1/s}.$$

Ağırlıklı Lebesgue uzayları $L^s(\omega)$ ile bağlantı daha önce

$$\mathcal{L}^s(\omega) = L^s(\omega^s)$$

şeklinde verilmişti. Bu bölümde ağırlık koşullarına A nın sonlu olması dahil edildi.

$$A := A(a, b; u^q, v^p) < \infty$$

Örneğin (2.26) eşitsizliğinde u ve v yerine sırasıyla u^q ve v^p değiştirilirse, (2.27) koşulu g fonksiyonları yeterlidir. Yani eşitsizlik;

$$\left(\int_a^b |g(x)u(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b |g'(x)v(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

şeklinde olabilmesi için gerek ve yeter şart $1 < p \leq q < \infty$ olmak üzere

$$\sup_{a<x<b} \left(\int_b^x u^q(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_a^x v^{-p'}(t)dt \right)^{1/p'} < \infty \tag{2.36}$$

olmasıdır.

(iii) Bazen, H Hardy operatörünün ağırlıklı Lebesgue uzayları, $L^p(v)$ ve $L^q(u)$ arasındaki hareketi yerine $\mathcal{H}$

$$(\mathcal{H}f)(x) := u(x) \int_a^x f(t)v(t)dt, \tag{2.37}$$

modifiye operatörünün ağırlıksız Lebesgue uzayları

$$\mathcal{H} : L^p \to L^q \tag{2.38}$$

arasındaki hareketleri incelenmişdir. Modifiye Hardy operatörünün $\|\mathcal{H}f\|_q \leq C\|f\|_p$ sınırlı olması için gerek ve yeter şart $1 < p \leq q < \infty$ olmak üzere

$$\left(\int_a^b \left(\int_x^b u^q(t)dt\right)^{r/q} \left(\int_a^x v^{p'}(t)dt\right)^{r/q'} v^{p'}(x)dx\right)^{1/r} < \infty$$

ve $p > q$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ olmak üzere

$$\left(\int_a^b \left(\int_x^b u^q(t)dt\right)^{r/q} \left(\int_a^x v^{p'}(t)dt\right)^{r/q'} v^{p'}(x)dx\right)^{1/r} < \infty$$

şeklindedir. Benzer şekilde $\hat{\mathcal{H}}$ operatörü

$$(\hat{\mathcal{H}}f)(x) := u(x) \int_x^b f(t)v(t)dt$$

şeklinde elde edilir.

(2.26) ifadesi Hardy eşitsizliğinin diferensiyel formu olduğundan (2.7), (veya (2.4)) ifadelerine bağlıdır. Bundan dolayı

$$\begin{array}{llll} g'(x) = f(x), & g(x) = (Hf)(x) & için & g(a) = 0, \\ g'(x) = -f(x), & g(x) = (\tilde{H}f)(x) & için & g(b) = 0, \end{array}$$

ifadeleri H ve $\tilde{H}$ Hardy operatörlerinin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında incelenmesi için daha uygundur.

(iv) A_{pq} ve $\tilde{A}_{pq}$ için $p > q$ durumundaki formüller

$$A^*_{pq} := \left(\int_a^b \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{r/p'} \left(\int_x^b u(t)dt\right)^{r/p} u(x)dx\right)^{1/r}$$

ve

$$\tilde{A}^*_{pq} := \left(\int_a^b \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)dt\right)^{r/p'} \left(\int_a^x u(t)dt\right)^{r/p} u(x)dx\right)^{1/r}$$

şeklinde yeniden yazılabilir ve tüm bunlardan

$$A_{pq} = \left(\frac{p'}{q}\right)^{1/r} A^*_{pq} \qquad ve \qquad \tilde{A}_{pq} = \left(\frac{p'}{q}\right)^{1/r} \tilde{A}^*_{pq}$$

ifadesi elde edilir.

2.6 Hardy Eşitsizliğinin Kullanıldığı Bazı Özel Sınıflardaki Fonksiyonlar

Diferensiyel Hardy eşitsizliği

$$\left(\int_a^b |g(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b |g'(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.39}$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitsizliğin sağlanması için $g \in AC^0$ fonksiyonları

$$g(a) = 0 \quad veya \quad g(b) = 0 \quad veya \quad g(a) = g(b) = 0 \tag{2.40}$$

şeklinde ifade edilir.

$g \in AC^0$ fonksiyonlarının sağlanması durumunda veya $c \in (a, b)$ için

$$g(c) = 0 \tag{2.41}$$

olmalıdır. O halde λ_1 ve λ_2 parametreleri yardımıyla

$$\lambda_1 g(a) + \lambda_2 g(b) = 0 \tag{2.42}$$

elde edilir.

(2.42) eşitliği

$$g(a) + \lambda g(b) = 0, \quad \lambda \neq 0 \tag{2.43}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.6.1 [4] a)Diferensiyel Hardy eşitsizliğinin her $g \in AC^0$ fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter şart $c \in (a, b)$ olmak üzere

$$\tilde{A}(a, c; u, v) < \infty \tag{2.44}$$

ve

$$A(c, b; u, v) < \infty \tag{2.45}$$

olmasıdır.

b) Diferensiyel Hardy eşitsizliğinin her $g \in AC^0$ fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter şart $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq -1$ olmak üzere

$$A(a, b; u, v) < \infty \tag{2.46}$$

ve

$$\tilde{A}(a, b; u, v) < \infty \tag{2.47}$$

olmasıdır.

İspat. (i) (Gereklilik) Kabul edelim ki (2.39) eşitsizliğinin her g fonksiyonunu sağlaması için $x \in [c,b)$ $g(x) \equiv 0$ olacak şekilde bir g fonksiyonu seçelim. Buradan (2.39) eşitsizliği

$$\left(\int_a^c |g(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^c |g'(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.48}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak (a,c) aralığında Hardy eşitsizliğinin sağlanması için (2.45) şartı yeterlidir. Benzer şekilde $x \in (a,c]$ olmak üzere $g(x) \equiv 0$ sağlayan g fonksiyonları için,

$$\left(\int_b^c |g(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_c^b |g'(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.49}$$

(2.39) şeklinde elde edlilir. Sonuç olarak (c,b) aralığında Hardy eşitsizliğinin sağlanması için (2.45) şartı yeterlidir.

(ii)(Yeterlilik) Kabul edelim ki (2.44) ve (2.45) şartları sağlansın. Buradan (2.48) eşitsizliği $g_1 \in AC^0(a,c)$ ve $g_1(c) = 0$ için ve (2.49) eşitsizliği $g_2 \in AC^0(c,b)$ ve $g_2(c) = 0$ için sağlanır. $g \in AC^0(a,b)$ olmak üzere

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) \ x \in (a,c] \text{ için} \\ g_2(x) \ x \in [c,b) \text{ için} \end{cases}$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned}\int_a^b |g(x)|^q u(x)dx &= \int_a^c |g_1(x)|^q u(x)dx + \int_c^b |g_2(x)|^q u(x)dx \\ &\leq C^q\left[\left(\int_a^c |g_1^{'}(x)|^p v(x)dx\right)^{q/p} + \left(\int_c^b |g_2^{'}(x)|^p v(x)dx\right)^{q/p}\right] \\ &\leq C^q\left[\left(\int_a^b |g'(x)|^p v(x)dx\right)^{q/p} + \left(\int_a^b |g'(x)|^p v(x)dx\right)^{q/p}\right] \\ &= 2C^q\left(\int_a^b |g'(x)|^p v(x)dx\right)^{q/p}\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) Eğer bir T operatörünü $\frac{1}{\lambda+1}H - \frac{\lambda}{\lambda+1}\tilde{H}$ şeklinde tanımlanırsa Yani;

$$(Tf)(x) = \frac{1}{\lambda+1}\int_a^x f(t)dt - \frac{\lambda}{\lambda+1}\int_x^b f(t)dt, \tag{2.50}$$

burada $g(x) = (Tf)(x)$ olacak şekilde tanımlanırsa, (2.43) şartı ve $g' = f$ için sağlanır. Sonuç olarak (2.39) Hardy eşitsizliği yerine

$$\|Tf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \tag{2.51}$$

eşitsizliğini düşünebiliriz.

Buradan

$$\|Tf\|_{q,u} \le \left|\frac{1}{\lambda+1}\right| \|Hf\|_{q,u} + \left|\frac{\lambda}{\lambda+1}\right| \|\tilde{H}f\|_{q,u},$$

(2.46) ve (2.47) şartlarının (2.51) eşitsizliği için yeterlidir.

Sonuç olarak $\lambda \in (-1, 0)$ için $\frac{1}{\lambda+1} > 0$ ve $-\frac{\lambda}{\lambda+1} > 0$ ve $f \ge 0$ olmak üzere

$$Hf \le (\lambda+1)Tf, \qquad \tilde{H}f \le \frac{\lambda+1}{|\lambda|}Tf$$

şeklinde elde edilir.

Böylece $f \ge 0$ için (2.46) ve (2.47) şartları da (2.51) eşitsizliği gerekli şarttır, buradan eşitsizlik

$$\|Hf\|_{q,u} \le C(\lambda+1)\|f\|_{p,v} \qquad ve \qquad \|\tilde{H}f\|_{q,u} \le C(\lambda+1)|\lambda|^{-1}\|f\|_{p,v}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca eşitsizlik (2.46) ve (2.47) şartları için de sağlanır. $\lambda < -1$ veya $\lambda > 0$ olmak üzere, T, H ve $\tilde{H}$ nin bir pozitif ve bir negatif kombinasyonu olur. ■

2.7 (a, b) Aralığında Hardy Eşitsizlikleri

Önceki bölümlerde (a, b) aralığı keyfi olarak $-\infty \le a < b \le +\infty$ şeklinde alınıyordu. Klasik durumda G.H.Hardy özellikle

$$(a, b) = (0, \infty) \tag{2.52}$$

şeklini kabul etmiştir.

Bu aralık, (2.26) genel Hardy eşitsizliğinin geçerliliği için gerek ve yeter şarttır yani $f \ge 0$ olmak üzere

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.53}$$

ve $1 < p \le q < \infty$, $g(0) = 0$ olmak üzere

$$\left(\int_0^\infty |g(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_0^\infty |g'(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliklerinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$A = A(0, \infty; u, v) := \sup_{x>0}\left(\int_x^\infty u(t)dt\right)^{1/q}$$

$$\times\left(\int_0^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'} < \infty \tag{2.54}$$

olmasıdır. Tüm diğer mümkün seçimler (a,b) aralığının kısıtlanmış özel bir durumu olduğunu gösterelim.

(i)
$$(a,b)=(-\infty,\infty)$$

durumunu düşünelim. Buradan eşitsizlik

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.55}$$

olur ve tüm $f \geq 0$ fonksiyonlarının sağlanması için gerek ve yeter şart

$$A(-\infty,\infty;u,v)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{\infty} u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_{-\infty}^{x} v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'} < \infty \tag{2.56}$$

olmasıdır.

Gerçekten $t=lns$ ve $x=lny$ olarak seçilirse $dt=\frac{1}{s}ds, dx=\frac{1}{y}dy$ olur. (2.55) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{y}\frac{f(lns)}{s}ds\right)^q \frac{u(lny)}{y}dy\right)^{1/q}$$
$$\leq C\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{f(lny)}{y}\right)^p y^{p-1}v(lny)dy\right)^{1/p} \tag{2.57}$$

şeklinde elde edilir.

$$\tilde{u}(y)=\frac{u(lny)}{y}, \qquad \tilde{f}(y)=\frac{f(lny)}{y}, \qquad \tilde{v}(y)=y^{p-1}v(lny)$$

denirse (2.57) eşitsizliği

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{y}\tilde{f}(s)ds\right)^q \tilde{u}(y)dy\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^{\infty}\tilde{f}^p(y)\tilde{v}(y)dy\right)^{1/p}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $\tilde{f},\tilde{u},\tilde{v}$ için (2.53) ve (2.54) eşitsizliklerinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^{\infty}\tilde{u}(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_0^{r}\tilde{v}^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} < \infty$$

olmasıdır. Başka bir ifadeyle

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty \frac{u(lns)}{s}ds\right)^{1/q}\left(\int_0^r \frac{v^{1-p'}(lns)}{s}ds\right)^{1/p'}<\infty$$

şeklindedir. Yukarıda belirtilen değiştirmeler yapıldığında

$$\sup_{r>0}\left(\int_{lnr}^\infty u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_{-\infty}^{lnr} v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'}<\infty$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak bu ifade (2.56) ifadesinde $r>0$ için $x=lnr$ alınmasıyla elde edilir.

(ii) $a=0,\quad 0<b<\infty$ durumunu düşünelim. Buradan eşitsizlik $f\geq 0$ olmak üzere

$$\left(\int_0^b\left(\int_0^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q}\leq C\left(\int_0^b f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.58}$$

olur ve bu eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$A(0,b;u,v)=\sup_{0<x<b}\left(\int_x^b u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_0^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'}<\infty \tag{2.59}$$

olmasıdır.

Tekrar $t=\frac{b}{s+1}$ ve $x=\frac{b}{y+1}$ alalım. Buradan $dt=-\frac{b}{(s+1)^2}ds$ ve $dx=-\frac{b}{(y+1)^2}dy$ şeklinde elde edilir. (2.58) eşitsizliğinde yerlerine yazılırlarsa (2.58) eşitsizliği

$$\begin{aligned}&\left(\int_\infty^0\left(\int_\infty^y f\left(\frac{b}{s+1}\right)\frac{-b}{(s+1)^2}ds\right)^{1/q} u\left(\frac{b}{y+1}\right)\frac{-b}{(y+1)^2}dy\right)^{1/q}\\ &\leq C\left(\int_\infty^0 f^p\left(\frac{b}{y+1}\right)v\left(\frac{b}{y+1}\right)\frac{-b}{(y+1)^2}dy\right)^{1/p}\end{aligned} \tag{2.60}$$

halini alır. Eğer

$$\begin{aligned}\tilde{u}&=u\left(\frac{b}{y+1}\right)\frac{b}{(y+1)^2},\\ \tilde{f}(y)&=f\left(\frac{b}{y+1}\right)\frac{b}{(y+1)^2},\\ \tilde{v}(y)&=v\left(\frac{b}{y+1}\right)\left(\frac{b}{(y+1)^2}\right)^{1-p},\end{aligned}$$

olursa ve buradan (2.60) eşitsizliği

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_y^\infty \tilde{f}(s)ds\right)^q \tilde{u}(y)dy\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty \tilde{f}^p(y)\tilde{v}(y)dy\right)^{1/p}$$

şeklinde elde edilir. $\tilde{f}.\tilde{u}, \tilde{v}$ olmak üzere eşlenik Hardy operatörünün sınırlılığı için gerek ve yeter şart

$$\tilde{A}(0,\infty;\tilde{u},\tilde{v}) = \sup_{r>0}\left(\int_0^r \tilde{u}(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_r^\infty \tilde{v}^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} < \infty$$

olmasıdır. Başka bir ifadeyle

$$\sup_{r>0}\left(\int_0^r u\left(\frac{b}{s+1}\right)\frac{b}{(s+1)^2}ds\right)^{1/q}$$

$$\times\left(\int_r^\infty v^{1-p'}\left(\frac{b}{s+1}\right)\left(\frac{b}{(s+1)^2}\right)^{(1-p)(1-p')}ds\right)^{1/p'} < \infty$$

olmasıdır. Yukarıdaki yer değiştirme yapıldığında:

$$\sup_{r>0}\left(\int_{\frac{b}{r+1}}^b u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_0^{\frac{b}{r+1}} v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'} < \infty,$$

elde edilir. Bu ifade (2.59) ifadesinde $r>0$ için $x = \frac{b}{r+1}$ alınmasıyla elde edilir.

(iii) Son olarak

$$-\infty < a < b \leq \infty$$

durumunu düşünelim. Buradan (2.53) ve (2.54) eşitsizliğinden $f \geq 0$ olmak üzere

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b f^p(x)u(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.61}$$

eşitsizliği elde edilebilir. Bu eşitsizliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart

$$A(a,b;u,v) = \sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'} < \infty \tag{2.62}$$

olmasıdır.

$$h_c(x) := h(x+c)$$

denirse (2.61) eşitsizliğinde $t = s+a$ ve $x = y+a$ olacak şekilde değişken değiştirmeler yapılırsa ve (ii) durumunda b yerine $b-a$ ve f,u,v yerine sırasıyla f_a, u_a, v_a, yazılırsa

$$\left(\int_0^{b-a}\left(\int_0^y f_a(s)ds\right)^q u_a(y)dy\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^{b-a} f_a^p(y)v_a(y)dy\right)^{1/p}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece bu eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart;

$$\sup_{0<r<b-a}\left(\int_r^{b-a} u_a(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_0^r v_a^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} < \infty$$

veya

$$\sup_{0<r<b-a}\left(\int_r^{b-a} u(s+a)ds\right)^{1/q}\left(\int_0^r v^{1-p'}(s+a)ds\right)^{1/p'} < \infty$$

olmasıdır. Bir başka deyişle (2.62) ifadesinde $x = r + a$ alınırsa

$$\sup_{a<r+a<b}\left(\int_{r+a}^{b} u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_a^{r+a} v^{1-p'}(t)dt\right) < \infty$$

ifadesi elde edilmiş olur.

3 UYGULAMALAR

3.1 Multilineer Konvolisyon İçin O'Neil Eşitsizliği

Bu bölümde k lineer konvolisyonu için O'Neil eşitsizliğini Hardy eşitsizliğinin yardımıyla elde edeceğiz. Bu uygulamada Vagif S. Guliyev ve Sh. A. Nazirova [3] çalışmalarından faydalanılmıştır. k lineer konvolisyonu

$$(\mathbf{f} \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x - \theta_1 y) \cdots f_k(x - \theta_k y)\, g(y)\, dy,$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^n$, n ölçülü bir Öklid uzayıdır. $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ vektörleri için $\mathbb{R}^n$ de $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$, $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$ olsun. g, $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir fonksiyon olsun. g nin bir dağılım fonksiyonu

$$\lambda_g(s) = |\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |g(x)| > s\}|, \quad s \geq 0$$

şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda g fonksiyonunun yeniden düzenlenme fonksiyonu

$$g^*(t) = \inf\{s > 0 \ : \ \lambda_g(s) \leq t\}, \quad t \geq 0$$

şeklinde elde edilir. $]0, \infty[$ üzerinde artan olmayan ve $|g(x)|$ ve her $\tau \geq 0$ için

$$|\{t > 0 \ : \ g^*(t) > \tau\}| = \lambda_g(\tau)$$

şeklindedir. g fonksiyonlarını $L_0(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ ölçülebilen, hemen her yerde sonlu olan ve her $s > 0$ için $\lambda_g(s) < \infty$ olacak şekilde ifade edilir. Her $f_1,\ f_2 \in L_0(\mathbb{R}^n)$ için Hardy Little-wood teoreminden

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) f_2(x)|\, dx \leq \int_0^\infty f_1^*(t) f_2^*(t)\, dt$$

elde edilir. Aşağıda bazı özellikler yeniden düzenlenerek verilecek

1) Eğer $0 < t < t + \tau$ ve $(g + h)^*(t + \tau) \leq g^*(t) + h^*(\tau)$.

2) Eğer $0 < p < \infty$, olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\, dx = \int_0^\infty (g^*(t))^p\, dt \tag{3.1}$$

şeklindedir.

3) $t > 0$ için

$$\sup_{|E|=t} \int_E |g(x)|\, dx = \int_0^t g^*(\tau)\, d\tau$$

şeklindedir.

$WL_p(\mathbb{R}^n)$ ile L_p uzayında tüm ölçülebilen g fonksiyonlarının normu

$$\|f\|_{WL_p} = \sup_{t>0} t^{1/p} g^*(t) < \infty, \quad 1 \le p < \infty$$

şeklindedir. $g^{**} : (0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonu $g^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$ gibi tanımlanır.

Lemma 3.1.1 [3] $f_1, f_2, \ldots, f_k \in L_0(\mathbb{R}^n)$, $k \ge 2$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve sıfırdan farklı $\theta_1, \ldots, \theta_k$ sayıları için $C_\theta = |\theta_1 \ldots \theta_k|^{-n}$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x-\theta_1 y) f_2(x-\theta_2 y) \cdots f_k(x-\theta_k y)| dy \le C_\theta \int_0^\infty f_1^*(t) f_2^*(t) \cdots f_k^*(t) dt \quad (3.2)$$

elde edilir.

3.2 Multilineer Konvolisyonlarının Yeniden Düzenlemeler İçin O'Neil Eşitsizliği

Bu bölümde multilineer konvolisyon için O'Neil eşitsizliğini inceleyeceğiz. $\mathbf{f}$, $(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ olmak üzere

$$\mathbf{f}^*(t) = f_1^*(t) \ldots f_k^*(t),$$
$$\mathbf{f}^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f_1^*(\tau) \ldots f_k^*(\tau)\, d\tau, \qquad t > 0$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.2.1 [3] $f_1, f_2, \ldots, f_k, g \in L_0(\mathbb{R}^n)$ olsun. Her $0 < t < \infty$ için

$$(\mathbf{f} \otimes g)^{**}(t) \le C_\theta \left(t\, \mathbf{f}^{**}(t)\, g^{**}(t) + \int_t^\infty \mathbf{f}^*(s)\, g^*(s)\, ds \right) \quad (3.3)$$

şeklindedir.

Lemma 3.2.2 [3] $f_1, f_2, \ldots, f_k, g \in L_0(\mathbb{R}^n)$ olsun. $t > 0$ için

$$(\mathbf{f} \otimes g)^{**}(t) \le C_\theta \int_t^\infty \mathbf{f}^{**}(t)\, g^{**}(t)\, dt \quad (3.4)$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.3 [3] $1 < m < \infty$, $f_1, f_2, \ldots, f_k \in L_0(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in WL_m(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(\mathbf{f} \otimes g)^*(t) &\leq (\mathbf{f} \otimes g)^{**}(t) \\ &\leq C_\theta \, \|g\|_{WL_m} \left(m' \, t^{-\frac{1}{m}} \int_0^t \mathbf{f}^*(\tau)\, d\tau + \int_t^\infty \tau^{-\frac{1}{m}} \, \mathbf{f}^*(\tau)\, d\tau \right) \qquad (3.5)\end{aligned}$$

şeklindedir.

3.3 Multilineer Konvolisyonlar İçin O'Neil Eşitsizliği

Bu bölümde $\mathbf{f} \otimes g$ multilineer konvolisyonu için O'Neil eşitsizliğini inceleyeceğiz. Eğer $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k}$ ise $p_1, p_2, \ldots, p_k > 1$ harmonik ortalaması p dir. Eğer her $j = 1, 2, \cdots, k$ için $f_j \in L_{p_j}(\mathbb{R}^n)$ olursa $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_k)$ için $\mathbf{f} \in L_{p_1} \times L_{p_2} \times \cdots \times L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$ olur.

Teorem 3.3.1 [3] (*Multilineer konvolisyon için O'Neil Eşitsizliği*) $1 < m < \infty$, $g \in WL_m(\mathbb{R}^n)$ ve p, $p_1, p_2, \ldots, p_k > 1$ in harmonik ortalaması olsun. Eğer $m'/(1+m') \leq p < m'$ (eşdeğer olarak $1 \leq q < \infty$), $\mathbf{f} \in L_{p_1} \times L_{p_2} \times \cdots \times L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$ ve q, $1/p - 1/q = 1/m'$ olmak üzere ve $\mathbf{f} \otimes g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|\mathbf{f} \otimes g\|_q \leq C_\theta \, K(p,q,m) \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{p_j} \|g\|_{WL_m}$$

elde edilir. Burada

$$K(p,q,m) = \begin{cases} m' \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, & \text{eğer } \ 1 < \mathrm{p} < \mathrm{m}', \\ (m')^{1+\frac{1}{q'}} (p')^{\frac{1}{p}} \; B(m', q+1)^{\frac{1}{q}}, & \text{eğer } \ \frac{\mathrm{m}'}{1+\mathrm{m}'} \leq \mathrm{p} \leq 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. $1 < m < \infty$, $\frac{m'}{1+m'} \leq p < m'$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{m'}$ olsun. Kabul edelim ki p, $p_1, p_2, \ldots, p_k > 1$ ifadesinin harmonik ortalaması ve $\mathbf{f} \in L_{p_1} \times L_{p_2} \times \cdots \times L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

I. durumda $1 < p < m'$ (veya eşdeğer olarak $m < q < \infty$) olsun. Eşitsizlik kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{f} \otimes g\|_q &= \|(\mathbf{f} \otimes g)^* (t)\|_{L_q(0,\infty)} \\
&\le C_\theta \left(\int_0^\infty \left(m'\, t^{-\frac{1}{m}} \int_0^t \mathbf{f}^*(\tau)\, d\tau + \int_t^\infty \tau^{-\frac{1}{m}}\, \mathbf{f}^*(\tau)\, d\tau \right)^q dt \right)^{1/p}. \\
&\le C_\theta\, m' \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \mathbf{f}^*(\tau)\, d\tau \right)^q t^{-\frac{q}{m}} dt \right)^{1/q} \\
&+ C_\theta \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \tau^{-\frac{1}{m}} \mathbf{f}^*(\tau) d\tau \right)^q dt \right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.53) Hardy eşitsizliği kullanılarak

$$
\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \mathbf{f}^*(\tau)\, d\tau \right)^q t^{-\frac{q}{m}}\, dt \right)^{1/q} \le C_1 \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\, \mathbf{f}^*(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \tag{3.6}
$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $p > 1$, $q > m$, $C_1 \le \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{q}}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \tau^{-\frac{q}{m}}\, d\tau \right)^{1/q} \left(\int_0^t d\tau \right)^{1/p'} \\
&\qquad = q^{-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{q} \right)^{-\frac{1}{q}} \sup_{t>0} t^{-\frac{1}{m} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p'}} < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{m'},
\end{aligned}
$$

olmasıdır. (2.57) eşitsizliği kullanılarak

$$
\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \tau^{-\frac{1}{m}} \mathbf{f}^*(\tau)\, d\tau \right)^q dt \right)^{1/q} \le C_2 \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\, \mathbf{f}^*(t) \right)^r \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \tag{3.7}
$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $p < m'$, $C_2 \le \left(\frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t>0} \left(\int_0^t d\tau \right)^{1/q} \left(\int_t^\infty \tau^{-\frac{p'}{m}}\, d\tau \right)^{1/p'} \\
&\qquad = \left(\frac{p'}{m} - 1 \right)^{-\frac{1}{p'}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{m} + \frac{1}{q}} < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{m'},
\end{aligned}
$$

olmasıdır.

Bu eşitsizlikler kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{f}\otimes g\,\mathbf{f}\|_q &\leq C_\theta\,(C_1+C_2)\left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\,\mathbf{f}^*(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}\|g\|_{WL_m}\\
&= C_\theta\,K(p,q,m)\left(\int_0^\infty \prod_{j=1}^k \left(f_j^*(t)\,t^{1/p_j}\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}\|g\|_{WL_m}\\
&\leq C_\theta\,K(p,q,m)\prod_{j=1}^k\left(\int_0^\infty \left(f_j^*(t)\right)^{p_j}dt\right)^{1/p_j}\|g\|_{WL_m}\\
&= C_\theta\,K(p,q,m)\prod_{j=1}^k\|f_j\|_{p_j}\|g\|_{WL_m}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

II. durumda $\frac{m'}{1+m'}\leq p\leq 1$, $p<q<\infty$ olsun.

$$
\left(\int_0^\infty\left(\int_t^\infty \tau^{-\frac{1}{m}}\,\mathbf{f}^{**}(\tau)\,d\tau\right)^q dt\right)^{1/q}\leq \mathbb{C}_0\left(\int_0^\infty \left(\mathbf{f}^{**}(t)\right)^p dt\right)^{1/p} \tag{3.8}
$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{m'}$ olmasıdır. Hölder eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{f}\otimes g\|_q &\leq C_\theta\,\mathbb{C}_0\,\|\mathbf{f}^{**}\|_p\,\|g\|_{WL_m}\\
&\leq (p')^{1/p}C_\theta\mathbb{C}_0\,\|\mathbf{f}^*\|_p\,\|g\|_{WL_m}\\
&= (p')^{1/p}C_\theta\mathbb{C}_0\,\|f_1^*\dots f_k^*\|_p\,\|g\|_{WL_m}\\
&= (p')^{1/p}C_\theta\mathbb{C}_0\prod_{j=1}^k\left\|f_j^*\right\|_{p_j}\|g\|_{WL_m}\\
&= (p')^{1/p}C_\theta\mathbb{C}_0\prod_{j=1}^k\|f_j\|_{p_j}\|g\|_{WL_m}
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

KAYNAKLAR

[1] J. S. Bradley, *Hardy's inequalities with mixed norms.* Canad. Math. Bull. 21 (1978), (4), 405-408.

[2] A. Gogatishvili, A. Kufner, L.-E. Persson, A. Wedestig, *Equivalence Theorem for some discrete conditions related to Hardy's inequality.* Real Anal. Exchange 29 (2003-2004), (2), 867-880.

[3] V.S. Guliyev and Sh. A. Nazirova, *O'Neil inequality for multilinear convolutions and some applications.* Integr. Equ. Oper. Theory 60 (2008), (4), 485-497.

[4] A. Kufner and L.E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type.* World Scientific, New Jersey-London-Singapore-Hong Kong, (2003).

[5] A. Kufner, L. Maligranda, and L.-E. Persson, *The prehistory of the Hardy inequality.* Am. Math. Month 113 (2006), (8), 715-732.

[6] B. Muchenhoupt, *Hardy's inequality with weights.* Studia Math. 44 (1972), 33-38.

[7] C.A. Okpoti, L. E. Persson and G. Sinnamon, *An equivalence theorem for some integral conditions with general measures related to Hardy's inequality.* JJ. Math. Anal. Appl. 326 (2007), (1), 398-413.

[8] B. Opic and A. Kufner, *Hardy-Type Inequalities.* Longman, Harlow Essex, England, (1990).

[9] L.-E. Persson, V. D. Stepanov, and P. Wall, *Some scales of equivalent weight characterizations of Hardy's inequality: the case $q < p$.* Inequal. Appl. 10 (2007), (2), 267-279.

[10] G. Sinnamon, *Hardy-Type Inequalities for a new class of integral operators.* in: Analysis of divergence (Orono, ME, 1997), Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhauser, Boston, (1999), 297-307.

[11] G. Sinnamon and V.D. Stepanov, *The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$.* J. London Math. Soc. 54 (1996), (2), 89-101.

[12] V. D. Stepanov, *Weighted Hardy inequality.* Siberian Math. J. 28 (1987), 515- 517.

[13] G. Tomaselli, *A Class Of Inequalities*, Boll. un. Mat. Ital. 2 (1969), 622-631.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Çorum'da doğdu. İlköğretimi Çorum 'un Alaca ilçesinde Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda tamamladı. Lise öğretimimi 2001-2005 yılları arasında Alaca Mehmet Çelik Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversite'si Eğitim Fakülte'si İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü kazandı. 2009 yılında buradan mezun oldu. 2010 yılında Ahi Evran Üniversite'si Fen Bilimleri Enstitü'sü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.

Abdulaziz ŞAHİN