

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL EĞRİLER YARDIMIYLA BAZI
ÖZEL UZAY EĞRİLERİNİN
KARAKTERİZASYONLARI

MESUT ALTINOK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
AĞUSTOS - 2011

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL EĞRİLER YARDIMIYLA BAZI
ÖZEL UZAY EĞRİLERİNİN
KARAKTERİZASYONLARI

MESUT ALTINOK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
DOÇ. DR. LEVENT KULA

KIRŞEHİR
AĞUSTOS - 2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: PROF. DR. KAZIM İLARSLAN

İmza:

Üye: DOÇ. DR. LEVENT KULA

İmza:

Üye: YARD. DOÇ. DR. BAKİ YAĞBASAN

İmza:

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

DOÇ. DR. MUSTAFA KURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

DÜZLEMSEL EĞRİLER YARDIMIYLA BAZI ÖZEL UZAY EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Mesut ALTINOK

Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili giriş yapıldı.

İkinci bölümde, temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, bazı özel düzlemsel eğriler verildi.

Dördüncü bölümde, düzlemsel eğriler yardımıyla bazı özel uzay eğrilerinin karakterizasyonları yapıldı ve bu karakterizasyonlarla ilgili denklemler elde edildi.

Beşinci bölümde, bu konuyla ilgili örnekler verildi.

Anahtar Kelimeler: Düzlemsel Eğriler, Episikloid, Epitrokoid, Genel Helis, Slant Helis.

ABSTRACT

THE CHARACTERIZATION OF SOME SPECIAL SPACE CURVES WITH PLANE CURVES

Mesut ALTINOK

This thesis consists of five chapters.

In first section, there is an introduction about the content of the thesis.

In the second section, some definitions and theorems in the thesis were given.

In the third section, some special plane curves were given.

In the fourth section, some special space curves were characterized with plane curves and equations were obtained about this characterization.

In the fifth section, some applications were done about the subject.

Key Words: Plane Curves, Epicycloid, Epitrochoid, General Helix, Slant Helix.

TEŞEKKÜR

Bu alıőmada emeği geen ve benden yardımlarını esirgemeyen danıőmanım Do. Dr. Levent KULA'ya, ayrıca manevi desteğini hi esirgemeyen aileme ve eőim Maya KANTAROĞLU ALTINOK'a ok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. GENEL HELİS VE SLANT HELİS	18
2.1.1. Slant Helis İçin Eksen	19
2.1.2. Slant Helisler Arasındaki Bağntı	21
3 BAZI ÖZEL DÜZLEMSEL EĞRİLER	25
4 DÜZLEMSEL EĞRİLER YARDIMIYLA UZAY EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONU	30
4.1. GENEL HELİSLER İÇİN BİR KARAKTERİZASYON	35
4.2. SLANT HELİSLER İÇİN BİR KARAKTERİZASYON	38

5	ÖZEL DÜZLEMSEL EĞRİLER YARDIMIYLA ELDE EDİLEN SLANT HELİSLER	41
5.1.	EPİTROKOİD EĞRİSİNE KARŞILIK GELEN SLANT HELİS	41
5.2.	HIZ VEKTÖRÜ KARDİOİD EĞRİSİ OLAN EPİTROKOİD EĞRİSİNE KARŞILIK GELEN SLANT HELİS . . .	45
5.3.	HIZ VEKTÖRÜ NEPROİD EĞRİSİ OLAN EPİTROKOİD EĞRİSİNE KARŞILIK GELEN SLANT HELİS . . .	46
5.4.	LİMAÇON EĞRİSİNE KARŞILIK GELEN SLANT HELİS	47
	KAYNAKLAR	54
	ÖZGEÇMİŞ	56

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1	Eğri.	2
2.2	Parametre değişimi.	3
2.3	Yay uzunluğu.	4
2.4	Düzlemsel eğri.	13
2.5	Silindirik helis.	18
2.6	Slant helis.	19
2.7	Salkowski eğrisi.	19
2.8	Anti-Salkowski eğrisi.	20
3.1	Epitrokoid eğrisi.	25
3.2	Episikloid eğrisi.	27
3.3	$[-16, 16]$ aralığında $a = \frac{16}{306}$, $b = \frac{9}{306}$ değerleri için elde edilen epitrokoid.	28
3.4	$[-16, 16]$ aralığında $a = \frac{16}{306}$, $b = \frac{9}{306}$ değerleri için elde edilen episikloid.	28
4.1	Çemberden elde edilen silindirik helis.	38
5.1	$a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen epitrokoid eğrisi.	42
5.2	$a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen epitrokoid eğrisinin hız vektörü.	42
5.3	$a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen slant helis. . .	43
5.4	$a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen slant helisin teğetler göstergesinin şekli.	43
5.5	$a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen slant helisin binormaller göstergesi.	44

5.6	$a = \frac{16}{34}, b = \frac{9}{34}$ değerleri iin elde edilen slant helisin asli normaller göstergesi.	44
5.7	$a = \frac{16}{34}, b = \frac{9}{34}$ değerleri iin elde edilen slant helisin Kuresel göstergelerinin kure uzerindeki goruntusu. . .	45
5.8	Kardioid eğrisi.	45
5.9	Hız vektoru kardioid olan epitrokoid eğrisi.	46
5.10	Hız vektoru kardioid olan epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helis.	46
5.11	Neproid eğrisi.	47
5.12	hız vektoru neproid eğrisi olan epitrokoid.	47
5.13	Hız vektoru neproid eğrisi olan epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helis.	47
5.14	$a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ değerleri iin limaon eğrisi.	48
5.15	$a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ değerleri iin limaon eğrisinden elde edilen slant helis.	49
5.16	$a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ değerleri iin limaon eğrisinden elde edilen slant helisin teğetler göstergesi.	49
5.17	$a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ değerleri iin limaon eğrisinden elde edilen slant helisin binormaller göstergesi.	50
5.18	$a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ değerleri iin limaon eğrisinden elde edilen slant helisin asli normaller göstergesi.	50
5.19	Limaon eğrisine karşılık gelen slant helisin kuresel göstergelerinin kure uzerindeki goruntusu.	51
5.20	$a = \frac{3}{5}, b = \frac{1}{5}$ değerleri iin epitrokoid eğrisinin hız vektoru olan episikloid.	51
5.21	$a = \frac{3}{5}, b = \frac{1}{5}$ değerleri iin epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helis.	52
5.22	$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{6}$ değerleri iin epitrokoid eğrisinin hız vektoru olan episikloid.	52

5.23	$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{6}$ değerleri iin epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helisi.	53
------	---	----

SİMGELER VE KISALTMALAR

$T_{\mathbb{R}^3}(t)$: Tanjant uzay
\langle, \rangle	: İç çarpım
\wedge	: Vektörel çarpım
(I, α)	: Koordinat komşuluğu
$\ \cdot\ $: Norm
T	: Teğetler göstergesi
N	: Normaller göstergesi
B	: Binormaller göstergesi
κ	: Eğrilik
τ	: Torsiyon
D	: Darboux vektörü
\tilde{D}	: Genelleştirilmiş Darboux vektörü

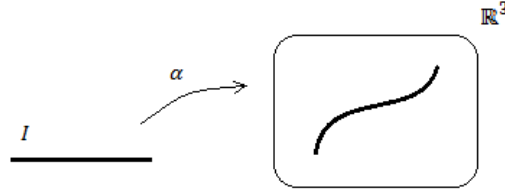
1 GİRİŞ

Bu tezde, slant helisleri, özel düzlemsel eğriler yardımıyla karakterize edilecek. Ayrıca bu karakterizasyonla ilgili uygulamalar verilecektir.

Bu çalışma, birinci bölüm giriş olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, bazı özel düzlemsel eğriler ve bu eğrilerin parametrik denklemlerinin elde edilmesi verildi. Dördüncü bölümde, düzlemsel eğriler yardımıyla bazı özel uzay eğrilerinin karakterizasyonları yapıldı ve bu karakterizasyonlarla ilgili denklemler elde edildi. Beşinci bölümde, bazı düzlemsel eğrilerden elde edilen slant helisler verildi.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 I , \mathbb{R} nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biçiminde düzgün bir α dönüşümüne, \mathbb{R}^3 uzayı içinde bir eğri denir [11].



Şekil 2.1: Eğri.

\mathbb{R}^3 uzayında dik koordinat fonksiyonları x_1, x_2, x_3 olmak üzere bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin verildiğini varsayalım. α dönüşümün değer kümesi \mathbb{R}^3 olduğundan, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ile gösterilen 3 tane bileşeni vardır. Daha açık bir anlatımla

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

biçimindedir. Burada $1 \leq j \leq 3$ olacak biçimdeki her j doğal sayısı için

$$x_j \circ \alpha = \alpha_j$$

dir. Her bir α_j fonksiyonu, I aralığından \mathbb{R} ye giden bir fonksiyondur.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünün düzgün olması demek $1 \leq j \leq 3$ için α_j fonksiyonlarının düzgün olması demektir [11].

Tanım 2.2

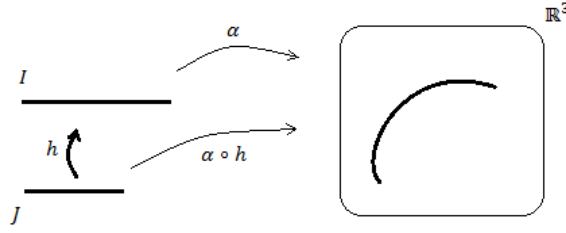
$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

eğrisi için

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d\alpha}{dt}(t) \\ &= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)\end{aligned}$$

olmak üzere $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{\mathbb{R}^3}(t)$ vektörüne α eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha'(t)$ noktasındaki hız vektörü veya tangent vektörü denir [3].

Tanım 2.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. J açık bir aralık olmak üzere, bir $h : J \rightarrow I$ difeomorfizmine, α eğrisi için bir parametre dönüşümü denir. $\alpha \circ h$ eğrisine de α eğrisinin h ile yeniden parametrelendirilmiş denir, (şekil 2.2) [11].



Şekil 2.2: Parametre değişimi.

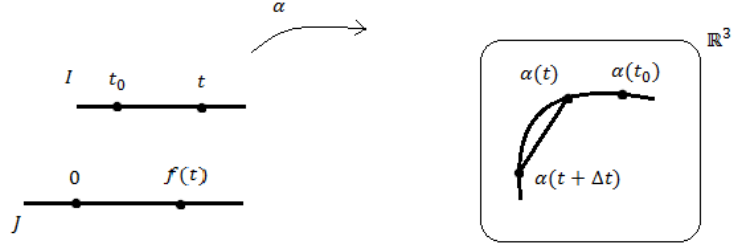
Tanım 2.4 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli (regüler) eğri denir [11].

Tanım 2.5 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $t_0 \in I$ olmak üzere, eğri üstünde $\alpha(t_0)$ noktasından başlayarak yay uzunluğunu ölçmeye başladığımızı varsayalım, (şekil 2.3).

$t < t_0$ ise $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasında kalan eğri parçasının uzunluğunu negatifine $f(t)$ diyelim.

$t = t_0$ için $f(t_0) = 0$ olarak tanımlayalım.

$t > t_0$ ise $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasında kalan eğri parçasının uzunluğunun $f(t)$ diyelim.



Şekil 2.3: Yay uzunluğu.

Böylece I aralığından \mathbb{R} içine tanımlı $f : t \rightarrow f(t)$ fonksiyonu tanımlanmış olur. Bu f fonksiyonuna, α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu denir [11].

Teorem 2.6 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f olduğuna göre

$$f' = \|\alpha'\| \quad (2.1)$$

dir [11].

Teorem 2.7 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f olduğuna göre

$$f(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \quad (2.2)$$

dir [11].

Tanım 2.8 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f olduğuna göre

$$f(t) = 1 \quad (2.3)$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri, t parametresine de yay parametresi adı verilir [11].

Tanım 2.9 \mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (2.4)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [11].

T fonksiyonu, I aralığının her bir s noktasına, $\alpha(s)$ noktasındaki $\alpha'(s)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre T , α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, α eğrisinin birim teğet vektör alanı denir [11].

Tanım 2.10 \mathbb{R}^3 uzayındaki birim hızlı α eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\| \quad (2.5)$$

fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [11].

Tanım 2.11 \mathbb{R}^3 uzayındaki birim hızlı α eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) \quad (2.6)$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) ve N vektör alanına, α eğrisinin birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir [11].

Tanım 2.12 \mathbb{R}^3 uzayındaki birim hızlı α eğrisi için

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) \quad (2.7)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) ve B vektör alanına, α eğrisinin ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı) denir [11].

Uyarı 2.13 \mathbb{R}^3 uzayındaki birim hızlı α eğrisinin $\kappa(s) = 0$ olacak biçimdeki $\alpha(s)$ noktalarında $N(s)$ vektörü tanımsızdır. Dolayısıyla böyle noktalarda $B(s)$ vektörü de tanımsız olur [11].

Tanım 2.14 $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir [11].

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir.

T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir [11].

Tanım 2.15 \mathbb{R}^3 uzayındaki birim hızlı α eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle \quad (2.8)$$

fonsiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [11].

Teorem 2.16 \mathbb{R}^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

dir.

İspat. (2.6) eşitliğinden $T' = \kappa N$ elde edilir.

$N' = aT + bN + cB$ olduğunu varsayalım. Bu eşitliğin her iki tarafı T ile iç çarpılarak $\langle N', T \rangle = a$ bulunur.

$$\begin{aligned} \langle N, T \rangle = 0 &\Rightarrow \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\langle N, \kappa N \rangle = -\kappa \end{aligned}$$

olduğundan $a = -\kappa$ olur.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpılarak $\langle N', N \rangle = b$ bulunur.

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle = 1 &\Rightarrow \langle N', N \rangle + \langle N, N' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2\langle N', N \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle N', N \rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $b = 0$ olur.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanını B ile iç çarpılarak $\langle N', B \rangle = c$ bulunur.

$$\begin{aligned}\langle N, B \rangle = 0 &\Rightarrow \langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = \tau\end{aligned}$$

olduğundan, $c = \tau$ bulunur. Öyleyse $N' = -\kappa T + \tau B$ dir.

Şimdi $B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını T ile iç çarpılarak $\langle B', T \rangle = d$ bulunur.

$$\begin{aligned}\langle B, T \rangle = 0 &\Rightarrow \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B', T \rangle = -\langle B, T' \rangle = \langle B, -\kappa N \rangle = 0\end{aligned}$$

olduğundan $d = 0$ olur.

$B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpılarak $\langle B', N \rangle = e$ bulunur.

$$\begin{aligned}\langle B, N \rangle = 0 &\Rightarrow \langle B', N \rangle + \langle B, N' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B', N \rangle = -\langle B, N' \rangle = \langle -B, -\kappa T + \tau B \rangle = -\tau\end{aligned}$$

olduğundan $e = -\tau$ olur.

$B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını B ile iç çarpılarak $\langle B', B \rangle = f$ bulunur.

$$\begin{aligned}\langle B, B \rangle = 1 &\Rightarrow \langle B', B \rangle + \langle B, B' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B', B \rangle = 0\end{aligned}$$

olduğundan $f = 0$ bulunur. Öyleyse $B' = -\tau N$ olur [11]. ■

Tanım 2.17 \mathbb{R}^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olsun.

$\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki dokunum düzlemi veya oskülatör düzlem denir.

$\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki doğrultma düzlemi veya rektifiyan düzlem denir.

$\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki dik düzlem veya normal düzlem denir [11].

Teorem 2.18 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olduğuna göre

$$\begin{aligned} N \wedge B &= T \\ B \wedge T &= N \end{aligned}$$

dir [11].

Tanım 2.19 Birim hızlı olmayan bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım.

$$\alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

birim hızlı olacak biçimde bir $h : J \rightarrow I$ fonksiyonu

$$f(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

eşitliğiyle tanımlı $f : I \rightarrow J$ fonksiyonunun tersidir. Eğer $\beta = \alpha \circ h$ denirse. $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğridir.

β eğrisinin Frenet vektör alanlarını T^1, N^1, B^1 ile gösterelim. $s \in J, h(s) = t$ olsun. $h = f^{-1}$ olduğundan $s = f(t)$ demektir. Buna göre

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(t)$$

olur. $f(t_0) = 0$ olduğu açıktır.

\mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı olmayan bir α eğrisinden elde edilen birim hızlı β eğrisinin Frenet vektör alanları T^1, N^1, B^1 ile gösterilsin.

$$\begin{aligned} T(t) &= T^1(f(t)) \\ N(t) &= N^1(f(t)) \\ B(t) &= B^1(f(t)) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanan T, N, B vektör alanlarına α eğrisinin Frenet vektör alanları denir.

β eğrisinin eğrilik ve burulması κ^1, τ^1 ile gösterilsin.

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \kappa^1(f(t)) \\ \tau(t) &= \tau^1(f(t))\end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanan κ, τ fonksiyonlarına sırasıyla $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin eğrilik ve burulması denir. Kısaca

$$\begin{aligned}T &= T^1 \circ f \\ N &= N^1 \circ f \\ B &= B^1 \circ f\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\kappa &= \kappa^1 \circ f \\ \tau &= \tau^1 \circ f\end{aligned}$$

dir [11].

$\|\alpha'\|$, I aralığından \mathbb{R} içine tanımlı bir fonksiyondur. Bu fonksiyon kısaca ν ile gösterilecektir. Daha açık olarak

$$\|\alpha'\| = \nu$$

eşitliği ile tanımlanır. $f' = \|\alpha'\|$ olduğundan $f' = \nu$ olur.

Teorem 2.20 α eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve burulması κ, τ olsun. $\|\alpha'\| = \nu$ olduğuna göre

$$\begin{aligned}T' &= \nu\kappa N \\ N' &= \nu(-\kappa T + \tau B) \\ B' &= -\nu\tau N\end{aligned}$$

dir [11].

Teorem 2.21 α eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olduğuna

göre

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ B &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \\ N &= B \wedge T \end{aligned}$$

dir. α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları κ ve τ olduğuna göre

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \\ \tau &= \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \end{aligned}$$

dir [11].

Tanım 2.22 Birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

vektör alanına α eğrisinin Darboux vektör alanı denir [2].

Tanım 2.23 $\kappa(s) \neq 0$ koşulu altında α

$$\tilde{D}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)(s)T(s) + B(s)$$

olarak tanımlanan vektör alanına α nın genelleştirilmiş Darboux vektör alanı denir [6].

Tanım 2.24 Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri adı verilir [7].

Tanım 2.25 M, \mathbb{R}^3 uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ bir eğri olmak üzere M yüzeyinin birim normal vektör alanı $Z \circ \alpha$ olsun. α'' vektör alanı, $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer bileşimi ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir geodezik eğri denir [11].

Tanım 2.26 M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerinin merkezlerinin geometrik yeri olan

$$\bar{\alpha} = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0) + \lambda B(s_0)$$

doğrusuna M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki eğrilik eksenidir. Eğrilik eksenindeki $C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0)$ noktasına M nin $m = \alpha(s_0)$ noktasındaki eğrilik merkezi denir [2].

Tanım 2.27 α eğrisi bütün noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye düzlemseldir denir [11].

Teorem 2.28 α eğrisi düzlemsel ise $\tau = 0$ dır ve eğrinin her bir noktasındaki dokunum (oskütör) düzlemi, eğrinin içinde bulunduğu E düzlemdir. Karşıt olarak $\tau = 0$ ise α eğrisi düzlemseldir.

İspat. Önce $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin düzlemsel olduğunu varsayalım. Buna göre her $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktalarının tümü, belirli bir E düzleminde bulunur. Bu düzlemin birim dik vektörü q olsun.

Eğer p düzlem üzerinde bir nokta ise her $t \in I$ için $\langle \alpha(t) - p, q \rangle = 0$ olur. Buradan

$$\langle \alpha'(t), q \rangle = 0, \quad \langle \alpha''(t), q \rangle = 0$$

bulunur. $\|\alpha'\| = \nu$ olmak üzere $\alpha' = \nu T$ ve $\alpha'' = \nu'T + \nu^2\kappa N$ olduğundan

$$\langle \nu T, q \rangle = 0, \quad \langle \nu'T + \nu^2\kappa N, q \rangle = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler, T ve N vektör alanlarının q vektörüne dik olduğunu gösterir. Demek ki her $t \in I$ için $T(t)$ ve $N(t)$ vektörleri, $\alpha(I)$ kümesini kapsayan düzlem içindedirler. $B(t)$ vektörü, $T(t)$ ve $N(t)$ vektörlerinin her ikisine de dik olduğundan her $t \in I$ için $B(t)$, q ya paralel olur. Öyleyse

$$B = q \quad \text{veya} \quad B = -q$$

dır. Buradan $B' = 0$ elde edilir. $B' = -\nu\tau N$ olduğundan $\tau = 0$ olmak zorundadır. Eğrinin içinde bulunduğu E düzlemi B vektörüne dik olduğundan, eğrinin her bir noktasındaki dokunum düzlemi, eğrinin içinde bulunduğu E düzlemdir.

Karşıt olarak α eğrisi için $\tau = 0$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde $B' = -\nu\tau N$ ve $B' = 0$ olur. Buna göre B vektör alanı α üstünde sabittir. $t_0 \in I$ alalım ve $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$F(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), B \rangle$$

eşitliğiyle tanımlayalım. $F(t_0) = 0$ olduğu hemen görülebilir. Ayrıca

$$F'(t) = \langle \alpha(t)', B \rangle = \langle \nu(t)T(t), B \rangle = 0$$

olduğundan F fonksiyonu sabittir ve I nın her bir t elemanı için $F(t) = 0$ dır. Böylece her $t \in I$ için $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), B \rangle = 0$ dir. Bu eşitlik $\alpha(I)$ kümesinin $\alpha(t_0)$ noktasından geçen ve B vektörüne dik olan düzlem içinde bulunduğunu, kısaca $\alpha(t_0)$ noktasındaki dokunum düzlemi içinde bulunduğunu gösterir [11]. ■

Tanım 2.29 $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ parametrik denklemiyle verilen α eğrisi regüler olsun. Bu eğrinin $\{\vec{t}, \vec{n}\}$ Frenet çatısı ve κ_p birinci eğriliği

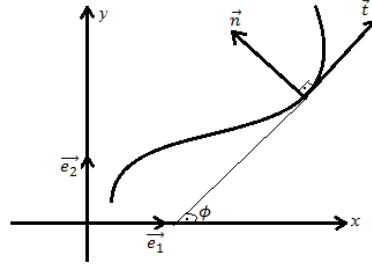
$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{(\alpha'_1, \alpha'_2)}{((\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \vec{n} &= \frac{(-\alpha'_2, \alpha'_1)}{((\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \kappa_p &= \frac{\alpha_1\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2'}{((\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

dir [2].

Teorem 2.30 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ birim hızlı eğrisi için

$$\kappa_p = \phi'$$

dir. Burada ϕ , x -ekseni ile \vec{t} arasındaki açıdır. Ayrıca $\{\vec{t}, \vec{n}\}$, γ eğrisinin Frenet çatısı ve κ_p , γ eğrisinin birinci eğriliğidir [2].



Şekil 2.4: Düzlemsel eğri.

İspat. Şekil (2.4) den

$$\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = \|\vec{n}\| \|\vec{e}_1\| \cos(\phi + \frac{\pi}{2})$$

dir. \vec{n} ve \vec{e}_1 birim vektörler olduklarından

$$\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = -\sin \phi$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle \vec{t}, \vec{e}_1 \rangle = \cos \phi \quad (2.9)$$

eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \vec{t}', \vec{e}_1 \rangle &= -\phi' \sin \phi \\ \kappa \langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle &= -\phi' \sin \phi \end{aligned} \quad (2.10)$$

bulunur. (2.9) ve (2.10) dan

$$\kappa = \phi'$$

olur. ■

Teorem 2.31 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ birim hızlı olmayan eğrisi için

$$\|\gamma'\| \kappa_p = \phi'$$

dir. Burada ϕ , x -ekseni ile \vec{t} arasındaki açıdır. Ayrıca $\{\vec{t}, \vec{n}\}$, γ eğrisinin Frenet çatısı ve κ_p , γ eğrisinin birinci eğriliğidir [2].

İspat. Şekil (2.4) den

$$\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = \|\vec{n}\| \|\vec{e}_1\| \cos(\phi + \frac{\pi}{2})$$

dir. \vec{n} ve \vec{e}_1 birim vektörler olduklarından

$$\langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle = -\sin \phi$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle \vec{t}, \vec{e}_1 \rangle = \cos \phi \quad (2.11)$$

eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\begin{aligned} \langle \vec{t}', \vec{e}_1 \rangle &= -\phi' \sin \phi \\ \|\gamma'\| \kappa \langle \vec{n}, \vec{e}_1 \rangle &= -\phi' \sin \phi \end{aligned} \quad (2.12)$$

bulunur. (2.11) ve (2.12) den

$$\|\gamma'\| \kappa = \phi'$$

olur. ■

Tanım 2.32 \mathbb{R}^3 de bir M yüzeyi içinde birim hızlı bir α eğrisi verilsin. Yüzeyin birim dik vektör alanı $Z \circ \alpha$ olsun. α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere

$$(Z \circ \alpha) \wedge T = Y$$

eşitliğiyle tanımlanan Y vektör alanını göz önüne alalım. Vektörel çarpımın özelliklerinden dolayı $\{T(s), (Z \circ \alpha)(s), Y(s)\}$ kümesi $T_{\alpha(s)}\mathbb{R}^3$ uzayının ortanormal bir tabanı (bazı) olur. Bu tabana, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısı denir.

\mathbb{R}^3 de bir M yüzeyi içinde birim hızlı bir α eğrisi verilsin.

$$\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), (Z \circ \alpha)(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli κ_n sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal eğriliği denir [11].

Tanım 2.33 M yüzeyi içinde birim hızlı bir eğri α olsun.

$$\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), Y(s) \rangle$$

sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir [11].

Tanım 2.34 $M \subset \mathbb{R}^3$ bir yüzey $(\alpha) \in M$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu taktirde

$$t_\tau(s) = \langle (Z \circ \alpha)'(s), Y(s) \rangle$$

sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik torsionu denir [11].

Tanım 2.35 M yüzeyi içinde birim hızlı bir eğri α olmak üzere $\kappa_n, \kappa_g, t_\tau$ fonksiyonlarına, α, M eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri denir [11].

Teorem 2.36 α, M içinde birim hızlı bir eğri olsun. (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri $\kappa_n, \kappa_g, t_\tau$ olduğuna göre

$$T' = \kappa_g Y + \kappa_n (Z \circ \alpha)$$

$$Y' = -\kappa_g T + t_\tau (Z \circ \alpha)$$

$$(Z \circ \alpha)' = -\kappa_n T + t_\tau Y$$

dir [11].

Teorem 2.37 Birinci kenarı $(Z \circ \alpha)(s)$, ikinci kenarı $B(s)$ olan yönlü açının ölçüsü θ olmak üzere

$$\kappa_n = \kappa \sin \theta$$

$$\kappa_g = \kappa \cos \theta$$

$$t_\tau = \tau - \theta'$$

dir [11].

Teorem 2.38 Bir M yüzeyi içinde birim hızlı olmayan α eğrisi verildiğinde (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri $\kappa_n, \kappa_g, t_\tau$ olduğuna göre

$$\begin{aligned}\kappa_n(s) &= \frac{1}{\nu^2} \langle \alpha''(s), (Z \circ \alpha)(s) \rangle \\ \kappa_g(s) &= \frac{1}{\nu^2} \langle \alpha''(s), Y(s) \rangle \\ t_\tau(s) &= -\frac{1}{\nu} \langle (Z \circ \alpha)'(s), Y(s) \rangle\end{aligned}$$

dir [11].

Teorem 2.39 Birim hızlı olmayan α eğrisi verildiğinde (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri $\kappa_n, \kappa_g, t_\tau$ olduğuna göre

$$\begin{aligned}T' &= \nu[\kappa_g Y + \kappa_n (Z \circ \alpha)] \\ Y' &= \nu[-\kappa_g T + t_\tau (Z \circ \alpha)] \\ (Z \circ \alpha)' &= \nu[-\kappa_n T + t_\tau Y]\end{aligned}$$

dir [11].

Tanım 2.40 $M, N \subset \mathbb{R}^3$ iki eğri olsun. M ve N sırasıyla $(I, \psi), (I, \xi)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $\psi(s)$ ve $\xi(s)$ noktalarında M ve N nin Serret-Frenet çatısı, sırasıyla,

$$\{T_1(s), N_1(s), B_1(s)\} \text{ ve } \{T_2(s), N_2(s), B_2(s)\}$$

olmak üzere,

$$\langle T_1, T_2 \rangle = 0$$

ise N ye M nin involütü, M ye de N nin evolütü denir [2].

Teorem 2.41 $M, N \subset \mathbb{R}^3$ iki eğri olsun. M ve N sırasıyla $(I, \psi), (I, \xi)$ koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer N, M nin involütü ise c sabit olmak üzere her $s \in I$ için

$$d(\psi(s), \xi(s)) = |c - s|$$

dir [2].

Teorem 2.42 $M, N \subset \mathbb{R}^3$ evolüt-involüt eğrileri, sırasıyla (I, ψ) , (I, ξ) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\psi(s) \in M$ ve $\xi(s) \in N$ noktalarında, M ve N nin Serret-Frenet çatıları

$$\{T_1(s), N_1(s), B_1(s)\} \text{ ve } \{T_2(s), N_2(s), B_2(s)\}$$

ve M nin eğrilik fonksiyonları κ_1, τ_1 , N nin eğrilik fonksiyonları κ_2, τ_2 ise

$$\kappa_2^2(s) = \frac{\kappa_1^2(s) + \tau_1^2(s)}{\kappa_1^2(s)(c - s)^2}$$

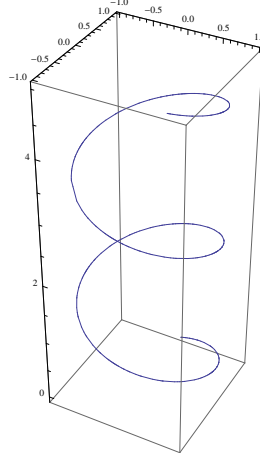
dir [2].

2.1. GENEL HELİS VE SLANT HELİS

Tanım 2.43 (Genel helis) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü ile verilen bir uzay eğrisinin teğeti sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu uzay eğrisi genel helis olarak adlandırılır [2].

Teorem 2.44 $\kappa > 0$ için γ genel helistir $\Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \text{sbt}$ tir [2].

Özel olarak κ ve τ değerleri sabit ise eğri bir silindirik helistir [6].

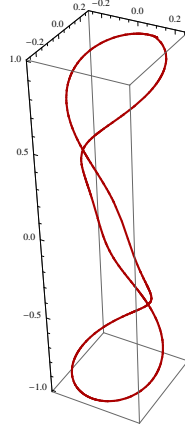


Şekil 2.5: Silindirik helis.

Tanım 2.45 (Slant Helis) $\tilde{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü ile verilen bir uzay eğrisinin asli normali sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu uzay eğrisi slant helis olarak adlandırılır [8].

Teorem 2.46 $\tilde{\gamma} : I \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi bir slant helis olması için gerek ve yeter şart $\kappa_g = \frac{1}{\|\tilde{\gamma}'\|} \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \text{sbt}$ olmasıdır.

$\kappa = 1$ özel durumu için slant helise "Salkowski eğrisi", $\tau = 1$ özel durumu için elde edilen slant helise "Anti-Salkowski eğrisi" adı verilir [12].



Şekil 2.6: Slant helis.



Şekil 2.7: Salkowski eğrisi.

2.1.1. Slant Helis İçin Eksen

$\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı olmayan slant helis olsun. θ bir sabit ve \vec{a} sabit vektör olmak üzere

$$\langle N, \vec{a} \rangle = \cos \theta \quad (2.13)$$

dır. (2.13) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle N', \vec{a} \rangle &= \langle \|\tilde{\gamma}'\|(-\kappa T + \tau B), \vec{a} \rangle = 0 \\ &= -\|\tilde{\gamma}'\|\kappa \langle T, \vec{a} \rangle + \tau \|\tilde{\gamma}'\| \langle B, \vec{a} \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle T, \vec{a} \rangle &= \frac{\tau}{\kappa} \langle B, \vec{a} \rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$



Şekil 2.8: Anti-Salkowski eğrisi.

olarak bulunur. Buradan $\langle B, \vec{a} \rangle = b$ seçilirse

$$\vec{a} = \frac{\tau}{\kappa} b T + \cos \theta N + b B$$

olarak bulunur. \vec{a} sabit vektörü slant helisin eksenini olup $\|\vec{a}\| = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left(\frac{\tau^2}{\kappa^2} b^2 + \cos^2 \theta + b^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \\ \Rightarrow & b^2 \left(\frac{\tau^2}{\kappa^2} + 1 \right) = \sin^2 \theta \\ \Rightarrow & b = \pm \frac{\sin \theta}{\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{\kappa \sin \theta}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

dir. O halde slant helisin eksenini

$$\vec{a} = \pm \frac{\tau \sin \theta}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} T + \sin \theta N + \pm \frac{\kappa \sin \theta}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} B \quad (2.15)$$

formundadır. (2.14) eşitliğinin her iki yanının türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
& - \kappa' \langle T, \vec{a} \rangle + \tau' \langle B, \vec{a} \rangle - \|\tilde{\gamma}'\|(\kappa^2 + \tau^2) \cos \theta = 0 \\
& - \kappa' \left(\pm \frac{\tau \sin \theta}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + \tau' \left(\pm \frac{\kappa \sin \theta}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \|\tilde{\gamma}'\|(\kappa^2 + \tau^2) \cos \theta = 0 \\
& \pm \frac{\sin \theta}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} (\kappa \tau' - \kappa' \tau) - \|\tilde{\gamma}'\|(\kappa^2 + \tau^2) \cos \theta = 0 \\
& \pm \frac{\sin \theta}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \kappa^2 = \|\tilde{\gamma}'\|(\kappa^2 + \tau^2) \cos \theta \\
& \pm \frac{1}{\|\tilde{\gamma}'\|} \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \pm \cot \theta
\end{aligned}$$

dir. $\frac{1}{\|\tilde{\gamma}'\|} \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \kappa_g$ olduğundan

$$\kappa_g = \pm \cot \theta$$

olarak bulunur. Burada κ_g $\tilde{\gamma}$ eğrisinin geodezik eğriliğidir.

Sonuç 2.47 $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı slant helis olsun. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin eksenini (2.15) formundadır ve $\tilde{\gamma}$ eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g = \pm \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \pm \cot \theta$$

dir.

2.1.2. Slant Helisler Arasındaki Bağını

Teorem 2.48 $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_\gamma, \tau_\gamma$ eğrilikleri ile verilen γ eğrisi bir slant helis olsun. Bu takdirde

$$\beta' = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \quad (2.16)$$

eşitliğiyle verilen $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ Frenet çatısı ve κ_β, τ_β eğriliklerine sahip β eğrisi slant helistir ve

$$\begin{aligned}
\|\gamma'\| \kappa_\gamma &= \kappa_\beta \\
\|\gamma'\| \tau_\gamma &= \tau_\beta
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. β eğrisinin eğriliği

$$\kappa_\beta = \frac{\|\beta' \wedge \beta''\|}{\|\beta'\|^3}$$

dir. (2.16) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \kappa_\beta &= \frac{\left\| \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \wedge \left(\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \right)' \right\|}{\left\| \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \right\|^3} \\ &= \left\| \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \wedge \left(\frac{\gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|^2} \right) \right\| \\ &= \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^2} \\ &= \|\gamma'\| \kappa_\gamma \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde β eğrisinin torsiyonu için

$$\begin{aligned} \tau_\beta &= \frac{\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2} \\ &= \frac{\left\langle \frac{1}{\|\gamma'\|^2} \gamma' \wedge \gamma'', \left(\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \right)'' \right\rangle}{\frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}{\|\gamma'\|^4}} \\ &= \frac{\frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma'\|^3}}{\frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}{\|\gamma'\|^4}} \\ &= \|\gamma'\| \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2} \\ &= \|\gamma'\| \tau_\gamma \end{aligned}$$

dır. O halde

$$\begin{aligned} \|\gamma'\| \kappa_\gamma &= \kappa_\beta \\ \|\gamma'\| \tau_\gamma &= \tau_\beta \end{aligned}$$

eşitlikleri gerçekleşir.

β birim hızlı eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_{g\beta} = \frac{\kappa_\beta^2}{(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau_\beta^2}{\kappa_\beta} \right)'$$

olmak üzere (2.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \kappa_{g\beta} &= \frac{\|\gamma'\|^2 \kappa_\gamma^2}{(\|\gamma'\|^2 \kappa_\gamma^2 + \|\gamma'\|^2 \tau_\gamma)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\|\gamma'\| \tau_\gamma}{\|\gamma'\| \kappa_\gamma} \right)' \\ &= \frac{\kappa_\gamma^2}{\|\gamma'\| (\kappa_\gamma^2 + \tau_\gamma)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} \right)' \\ &= \kappa_{g\gamma} = sbt \end{aligned}$$

olur. Yani β eğrisi de bir slant helistir. ■

Sonuç 2.49 γ eğrisi Salkowski (anti-Salkowski) eğrisi olsun. Salkowski (anti-Salkowski) eğrisi helis olduğundan (2.16) eşitliği ile verilen β eğrisi de bir slant helistir.

Teorem 2.50 Teorem 2.48 de verilen γ ve β eğrilerinin eksenleri aynıdır.

İspat. β eğrisinin eksenini

$$\vec{a}_\beta = \pm \frac{\tau_\beta \sin \theta}{(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2)^{\frac{1}{2}}} T + \sin \theta N + \pm \frac{\kappa_\beta \sin \theta}{(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2)^{\frac{1}{2}}} B$$

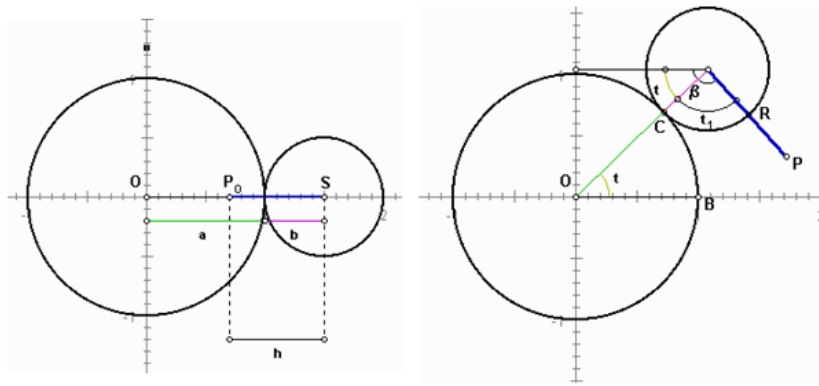
dir. (2.17) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vec{a}_\beta &= \pm \frac{\tau_\beta \sin \theta}{(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2)^{\frac{1}{2}}} T + \sin \theta N + \pm \frac{\kappa_\beta \sin \theta}{(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2)^{\frac{1}{2}}} B \\ &= \pm \frac{\|\gamma'\| \tau_\gamma \sin \theta}{\|\gamma'\| (\kappa_\gamma^2 + \tau_\gamma^2)^{\frac{1}{2}}} T + \sin \theta N + \pm \frac{\|\gamma'\| \kappa_\gamma \sin \theta}{\|\gamma'\| (\kappa_\gamma^2 + \tau_\gamma^2)^{\frac{1}{2}}} B \\ &= \pm \frac{\tau_\gamma \sin \theta}{(\kappa_\gamma^2 + \tau_\gamma^2)^{\frac{1}{2}}} T + \sin \theta N + \pm \frac{\kappa_\gamma \sin \theta}{(\kappa_\gamma^2 + \tau_\gamma^2)^{\frac{1}{2}}} B \\ &= \vec{a}_\gamma \end{aligned}$$

dir. Yani γ ve β eğrilerinin eksenleri aynıdır. ■

3 BAZI ÖZEL DÜZLEMSEL EĞRİLER

Tanım 3.1 (Epitrokoid) b yarıçaplı bir çember, a yarıçaplı sabit bir çembere dıştan teğet olsun. b yarıçaplı çember a yarıçaplı çembere teğet olarak kaymaksızın yuvarlanırsa, yuvarlanan çemberin merkezinden h uzaklığındaki sabit bir P noktasının bu yuvarlanma esnasında çizdiği eğriye epitrokoid denir.



Şekil 3.1: Epitrokoid eğrisi.

Şekil 3.1 deki gibi iki çemberin yarıçapı toplamı m ile gösterilsin. o halde

$$m = a + b$$

dir. a yarıçaplı çemberin denklemi, merkezi orjin olduğundan

$$x^2 + y^2 = a^2$$

dir. b yarıçaplı çemberin denklemi de

$$(x - m)^2 + y^2 = b^2$$

dir. $t = 0$ da P noktası, orjinden uzaklığı ile koordinat sisteminde temsil edilebilir

$$P_0 = (m - h, 0).$$

Burada h , P noktasının b yarıçaplı çemberin merkezine olan uzaklığıdır. b yarıçaplı çember, a yarıçaplı çember etrafında kaymaksızın

hareket ederken, P noktasının koordinatları

$$P = m[\cos t, \sin t] - h[\cos \beta, \sin \beta]$$

denklemlerle ifade edilebilir. Şimdi β açısını a yarıçaplı çemberin açısı cinsinden ifade edelim. b yarıçaplı çember a yarıçaplı çember etrafında dönerken, yay uzunluğu çemberinkine eşittir, yani

$$arcBC = arcRC$$

dır. Buradan

$$at = bt_1 \quad (3.1)$$

elde edilir. Şekil (3.1) den

$$\beta = t_1 + t \quad (3.2)$$

dir. t_1 için (3.1) denkleminin çözülmesiyle,

$$t_1 = at/b$$

elde edilir. Bu sonucun (3.2) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\beta = mt/b$$

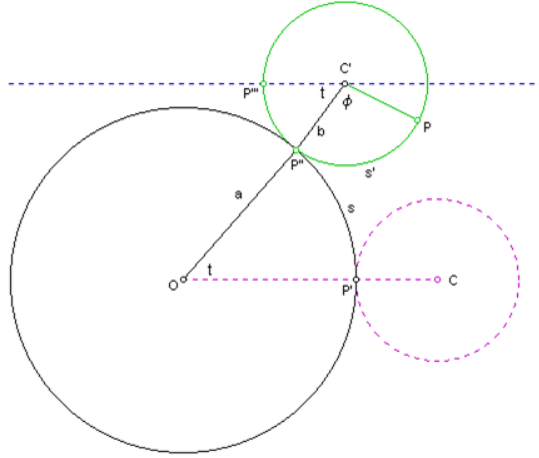
elde edilir. Sonuç olarak epitrokoid eğrisinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x &= (a + b) \cos t - h \cos \frac{a + b}{b} t \\ y &= (a + b) \sin t - h \sin \frac{a + b}{b} t \end{aligned}$$

formundadır. Epitrokoidin diğer bir parametrik gösterimi

$$\begin{aligned} x &= (a + b) \sin t - h \sin \frac{a + b}{b} t \\ y &= -(a + b) \cos t + h \cos \frac{a + b}{b} t \end{aligned}$$

dir.



Şekil 3.2: Episikloid eğrisi.

Tanım 3.2 (Episikloid) b yarıçaplı bir çember, a yarıçaplı sabit bir çembere dıştan teğet olsun. b yarıçaplı çember a yarıçaplı çembere teğet olarak kaymaksızın yuvarlanırsa, yuvarlanan çember üzerindeki sabit bir P noktasının bu yuvarlanma esnasında çizdiği eğriye episikloid denir. Epitrokoid eğrisinde $h = b$ alınırsa episikloid eğrisi elde edilir.

Episikloid eğrisinin parametrik denklemi

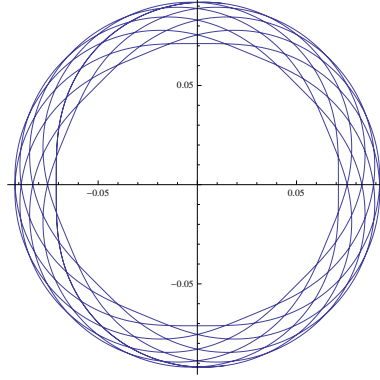
$$\begin{aligned} x &= (a + b) \cos t - b \cos \frac{a + b}{b} t \\ y &= (a + b) \sin t - b \sin \frac{a + b}{b} t \end{aligned} \quad (3.3)$$

dir.

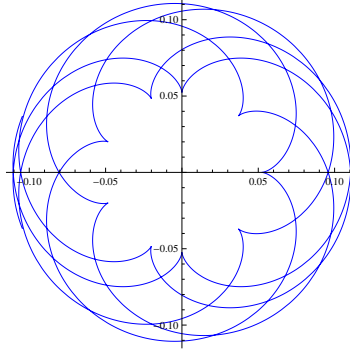
$a = \frac{16}{306}$, $b = \frac{9}{306}$, $h = \frac{9}{850}$ değerleri için epitrokoidin grafiği $[-16, 16]$ aralığında şekil 3.3 de verilmiştir.

$a = \frac{16}{306}$, $b = \frac{9}{306}$ değerleri için episikloidin grafiği $[-16, 16]$ aralığında şekil 3.4 de gösterilmiştir.

Tanım 3.3 Episikloid eğrisi için $\frac{a}{b} = 1$ seçilirse elde edilen eğri



Şekil 3.3: $[-16, 16]$ aralığında $a = \frac{16}{306}$, $b = \frac{9}{306}$ değerleri için elde edilen epitrokoid.



Şekil 3.4: $[-16, 16]$ aralığında $a = \frac{16}{306}$, $b = \frac{9}{306}$ değerleri için elde edilen episikloid.

kardioid eğrisidir ve

$$\begin{aligned} x &= 2b \cos t - b \cos 2t \\ y &= 2b \sin t - b \sin 2t \end{aligned} \quad (3.4)$$

parametrik denklemleriyle verilir.

Önerme 3.4 $\frac{a}{b} = 1$, $h = \frac{b}{2}$ değerleri için elde edilen epitrokoid eğrisi

$$\begin{aligned} x &= 2b \sin t - \frac{1}{2}b \sin 2t \\ y &= -2b \cos t + \frac{1}{2}b \cos 2t \end{aligned} \quad (3.5)$$

dir ve bu epitrokoid eğrisinin hız vektörü kardioid eğrisidir.

Tanım 3.5 Episikloid eğrisi için $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ seçilirse elde edilen eğri neproid eğrisidir ve

$$\begin{aligned}x &= 3b \cos t + b \cos 3t \\y &= 3b \sin t + b \sin 3t\end{aligned}\tag{3.6}$$

parametrik denklemleriyle verilir.

Önerme 3.6 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, $h = \frac{b}{3}$ değerleri için elde edilen epitrokoid eğrisi

$$\begin{aligned}x &= 3b \sin t + \frac{1}{3}b \sin 3t \\y &= -3b \cos t - \frac{1}{3}b \cos 3t\end{aligned}\tag{3.7}$$

dir ve bu epitrokoid eğrisinin hız vektörü neproid eğrisidir.

Tanım 3.7 Epitrokoid eğrisi için $a = b$ olma durumunda oluşan eğriye limaçon eğrisi denir.

4 DÜZLEMSEL EĞRİLER YARDIMIYLA UZAY EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONU

Teorem 4.1 $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ , τ eğrilikleri ile verilen uzay eğrisi olmak üzere

$$\gamma = \tilde{\gamma} - \langle \tilde{\gamma}, \vec{a} \rangle \vec{a} \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlı γ düzlemsel bir eğridir. Burada \vec{a} birim sabit vektördür. Ayrıca bu düzlemsel eğrinin Serret-Frenet çatısı ve birinci eğriliği

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}} (T - \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a}) \\ \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}} (-\langle N, \vec{a} \rangle B + \langle B, \vec{a} \rangle N) \\ \vec{b} &= \vec{a} \\ \kappa_p &= \frac{\kappa \sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2 - \langle N, \vec{a} \rangle^2}}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}} \end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.1) eşitliğinin her iki tarafının türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \gamma' &= \tilde{\gamma}' - \langle \tilde{\gamma}', \vec{a} \rangle \vec{a} \\ &= \nu T - \nu \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a} \\ \gamma'' &= \nu' T + \nu T' - \nu' \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a} - \nu^2 \kappa \langle N, \vec{a} \rangle \vec{a} \\ &= \nu' T + \nu^2 \kappa N - \nu' \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a} - \nu^2 \kappa \langle N, \vec{a} \rangle \vec{a} \end{aligned} \quad (4.2)$$

olarak elde edilir. Burada $\nu = \|\tilde{\gamma}'\|$ dir.

$$\begin{aligned} \|\gamma'\|^2 &= \langle \nu T - \nu \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a}, \nu T - \nu \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a} \rangle \\ &= \nu^2 - 2\nu^2 \langle T, \vec{a} \rangle^2 - \nu^2 \langle T, \vec{a} \rangle^2 \\ &= \nu^2 (1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2) \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde γ eğrisinin tanjant vektörü

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}} (T - \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a})$$

olur.

$$\begin{aligned}
\gamma' \wedge \gamma'' &= (\nu T - \nu \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a}) \wedge (\nu' T + \nu T' - \nu' \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a} - \nu^2 \kappa \langle N, \vec{a} \rangle \vec{a}) \\
&= \nu^3 \kappa B - \nu' \nu \langle T, \vec{a} \rangle (T \wedge \vec{a}) - \nu^3 \kappa \langle N, \vec{a} \rangle (T \wedge \vec{a}) \\
&\quad + \nu' \nu \langle T, \vec{a} \rangle (T \wedge \vec{a}) + \nu^3 \kappa \langle T, \vec{a} \rangle (N \wedge \vec{a}) \\
&= \nu^3 \kappa (B - \langle N, \vec{a} \rangle (T \wedge \vec{a}) + \langle T, \vec{a} \rangle (N \wedge \vec{a}))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2 &= \nu^6 \kappa^2 (1 - \langle N, \vec{a} \rangle \langle B, T \wedge \vec{a} \rangle - \langle T, \vec{a} \rangle \langle B, \vec{a} \wedge N \rangle - \langle N, \vec{a} \rangle \langle T \vec{a} \wedge, B \rangle \\
&\quad + \langle N, \vec{a} \rangle^2 \langle T \wedge \vec{a}, T \wedge \vec{a} \rangle + \langle N, \vec{a} \rangle \langle T, \vec{a} \rangle \langle T \wedge \vec{a}, \vec{a} \wedge N \rangle \\
&\quad - \langle T, \vec{a} \rangle \langle \vec{a} \wedge N, B \rangle + \langle T, \vec{a} \rangle \langle N, \vec{a} \rangle \langle \vec{a} \wedge N, T \wedge \vec{a} \rangle \\
&\quad + \langle T, \vec{a} \rangle^2 \langle \vec{a} \wedge N, \vec{a} \wedge N \rangle) \\
\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2 &= \nu^6 \kappa^2 (1 - 2 \langle N, \vec{a} \rangle \langle B, T \wedge \vec{a} \rangle - 2 \langle T, \vec{a} \rangle \langle B, \vec{a} \wedge N \rangle \\
&\quad + 2 \langle N, \vec{a} \rangle \langle T, \vec{a} \rangle \langle T \wedge \vec{a}, \vec{a} \wedge N \rangle \\
&\quad + \langle N, \vec{a} \rangle^2 \langle T \wedge \vec{a}, T \wedge \vec{a} \rangle + \langle T, \vec{a} \rangle^2 \langle \vec{a} \wedge N, \vec{a} \wedge N \rangle) \\
\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2 &= \nu^6 \kappa^2 (1 - 2 \langle \vec{a}, B \wedge T \rangle \langle N, \vec{a} \rangle - 2 \langle N \wedge B, \vec{a} \rangle \langle T, \vec{a} \rangle \\
&\quad + \langle N, \vec{a} \rangle \langle T, \vec{a} \rangle [\langle T, \vec{a} \rangle \langle \vec{a}, N \rangle - \langle T, N \rangle \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle] \\
&\quad + \langle T, \vec{a} \rangle \langle \vec{a}, N \rangle [\langle \vec{a}, T \rangle \langle N, \vec{a} \rangle - \langle N, T \rangle \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle]) \\
&\quad + \langle N, \vec{a} \rangle^2 [\langle T, T \rangle \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle T, \vec{a} \rangle \langle \vec{a}, T \rangle] \\
&\quad + \langle T, \vec{a} \rangle^2 [\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle N, N \rangle - \langle N, \vec{a} \rangle \langle \vec{a}, N \rangle]) \\
\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2 &= \nu^6 \kappa^2 (1 - 2 \langle N, \vec{a} \rangle^2 - 2 \langle T, \vec{a} \rangle^2 - \langle N, \vec{a} \rangle^2 - \langle T, \vec{a} \rangle^2) \\
\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2 &= \nu^6 \kappa^2 (1 - \langle N, \vec{a} \rangle^2 - \langle T, \vec{a} \rangle^2)
\end{aligned}$$

yani

$$\|\gamma' \wedge \gamma''\| = \nu^3 \kappa \sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2 - \langle N, \vec{a} \rangle^2}$$

olur ve buradan γ eğrisinin binormalı

$$\vec{b} = \frac{1}{1 - \langle N, \vec{a} \rangle^2 - \langle T, \vec{a} \rangle^2} (B - \langle N, \vec{a} \rangle (T \wedge \vec{a}) + \langle T, \vec{a} \rangle (N \wedge \vec{a}))$$

dir. (4.2) eşitliğinin her iki yanının bir kez daha türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\gamma''' &= \nu''T + \nu'\nu\kappa N + 2\nu'\nu\kappa N + \nu^2\kappa'N + \nu^3\kappa(-\kappa T + \tau B) \\
&\quad - \nu''\langle T, \vec{a} \rangle \vec{a} - \nu'\nu\kappa\langle N, \vec{a} \rangle \vec{a} - 2\nu'\nu\kappa\langle N, \vec{a} \rangle \vec{a} \\
&\quad - \nu^2\kappa'\langle N, \vec{a} \rangle \vec{a} - \nu^3\kappa\langle (-\kappa T + \tau B), \vec{a} \rangle \vec{a} \\
\gamma''' &= (\nu'' - \nu^3\kappa^2)T + (3\nu'\nu\kappa + \nu^2\kappa')N + \nu^2\kappa\tau B \\
&\quad - (\nu''\langle T, \vec{a} \rangle + 3\nu'\nu\kappa\langle N, \vec{a} \rangle + \nu^2\kappa'\langle N, \vec{a} \rangle - \nu^3\kappa^2\langle T, \vec{a} \rangle + \nu^3\kappa\tau\langle B, \vec{a} \rangle)\vec{a}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') &= \nu^3\kappa[\nu^3\kappa\tau - (\nu''\langle T, \vec{a} \rangle + 3\nu'\nu\kappa\langle N, \vec{a} \rangle + \nu^2\kappa'\langle N, \vec{a} \rangle) \\
&\quad - \kappa^2\nu^3\langle T, \vec{a} \rangle + \nu^3\kappa\tau\langle B, \vec{a} \rangle]\langle B, \vec{a} \rangle \\
&\quad - (3\nu'\nu\kappa + \nu^2\kappa')\langle N, \vec{a} \rangle\langle B, \vec{a} \rangle - \nu^3\kappa\tau\langle N, \vec{a} \rangle^2 \\
&\quad + (\nu'' - \nu^3\kappa^2)\langle T, \vec{a} \rangle\langle B, \vec{a} \rangle - \nu^3\kappa\nu\langle T, \vec{a} \rangle^2 \\
\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') &= \nu^3\kappa[\nu^3\kappa\tau - \nu''\langle T, \vec{a} \rangle\langle B, \vec{a} \rangle + 3\nu'\nu\kappa\langle N, \vec{a} \rangle\langle B, \vec{a} \rangle \\
&\quad + \nu^2\kappa'\langle N, \vec{a} \rangle\langle B, \vec{a} \rangle \\
&\quad - \kappa^2\nu^3\langle T, \vec{a} \rangle\langle B, \vec{a} \rangle + \nu^3\kappa\tau\langle B, \vec{a} \rangle^2] \\
&\quad - (3\nu'\nu\kappa + \nu^2\kappa')\langle N, \vec{a} \rangle\langle B, \vec{a} \rangle - \nu^3\kappa\tau\langle N, \vec{a} \rangle^2 \\
&\quad + (\nu'' - \nu^3\kappa^2)\langle T, \vec{a} \rangle\langle B, \vec{a} \rangle - \nu^3\kappa\nu\langle T, \vec{a} \rangle^2 \\
\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') &= \nu^3\kappa[\nu^3\kappa\tau - \nu^3\kappa\tau\langle T, \vec{a} \rangle^2 - \nu^3\kappa\tau\langle B, \vec{a} \rangle^2 - \nu^3\kappa\tau\langle B, \vec{a} \rangle^2] \\
&= \nu^6\kappa^2\tau[1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2 - \langle N, \vec{a} \rangle^2 - \langle B, \vec{a} \rangle^2] \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\vec{a} = \langle T, \vec{a} \rangle T + \langle N, \vec{a} \rangle N + \langle B, \vec{a} \rangle B$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
T \wedge \vec{a} &= \langle N, \vec{a} \rangle B - \langle B, \vec{a} \rangle N \\
N \wedge \vec{a} &= -\langle T, \vec{a} \rangle B + \langle B, \vec{a} \rangle T \\
B \wedge \vec{a} &= \langle T, \vec{a} \rangle N - \langle N, \vec{a} \rangle T
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\vec{b} = \frac{\langle B, \vec{a} \rangle \vec{a}}{\sqrt{1 - \langle N, \vec{a} \rangle^2 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}} = \vec{a}$$

ve

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{b} \wedge \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}} (\vec{a} \wedge T) \\ &= \vec{b} \wedge \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}} (-\langle N, \vec{a} \rangle B + \langle B, \vec{a} \rangle N)\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\kappa_p &= \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \\ \kappa_p &= \frac{\kappa \sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2 - \langle N, \vec{a} \rangle^2}}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tau_p &= \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2} \\ \tau_p &= 0\end{aligned}$$

dır, yani γ bir düzlemsel eğridir. Ayrıca Frenet vektörleri ve eğrilikleri

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}} (T - \langle T, \vec{a} \rangle \vec{a}) \\ \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}} (-\langle N, \vec{a} \rangle B + \langle B, \vec{a} \rangle N) \\ \vec{b} &= \vec{a} \\ \kappa_p &= \frac{\kappa \sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2 - \langle N, \vec{a} \rangle^2}}{\sqrt{1 - \langle T, \vec{a} \rangle^2}}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. ■

Sonuç 4.2 Teorem 4.1 de verilen $\tilde{\gamma}$ eğrisinin birim hızlı olması durumunda

$$\|\gamma'\| = \sqrt{1 - \langle \vec{a}, T \rangle^2} = \sqrt{1 - \|\vec{a}\|^2 \|T\|^2 \cos^2 \delta} = |\sin \delta| \leq 1$$

dir.

Sonuç 4.3 (4.1) eşitliğiyle verilen γ düzlemsel eğrisinin asli normali ile $\tilde{\gamma}$ uzay eğrisinin teğeti diktir. Yani

$$\langle \vec{n}, T \rangle = 0$$

dir.

4.1. GENEL HELİSLER İÇİN BİR KARAKTERİZASYON

Teorem 4.4 Bir düzlemsel $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için,

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + (\cot\theta \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du)\vec{a} + \vec{c} \quad (4.3)$$

bir uzay eğrisi gösterir. Burada θ bir sabit, \vec{a} ile \vec{c} sabit vektörler ve $\langle \gamma'(u), \vec{a} \rangle = 0$, $\|\vec{a}\| = 1$ dir. Bu biçimde tanımlanan $\tilde{\gamma}$ eğrisi bir genel helistir [6].

İspat. γ , $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ Frenet çatısı ve κ_p eğriliği ile verilen düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin bir genel helis olduğunu göstermek için $\tilde{\gamma}$ eğrisinin sırasıyla eğriliği ve torsiyonu bulunacaktır. (4.3) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(t) &= \gamma' + \cot\theta \|\gamma'\| \vec{a} \\ &= \|\gamma'\| \vec{t} + \cot\theta \|\gamma'\| \vec{a} \\ \tilde{\gamma}''(t) &= \|\gamma'\|' \vec{t} + \|\gamma'\| \vec{t}' + \cot\theta \|\gamma'\|' \vec{a} \\ &= \|\gamma'\|' \vec{t} + \|\gamma'\|^2 \kappa_p \vec{n} + \cot\theta \|\gamma'\|' \vec{a} \\ \tilde{\gamma}'''(t) &= \|\gamma'\|'' \vec{t} + \|\gamma'\|' \vec{t}' + 2\|\gamma'\| \|\gamma'\|' \kappa_p \vec{n} + \|\gamma'\|^2 \kappa_p' \vec{n} + \|\gamma'\|^2 \kappa_p \vec{n}' + \cot\theta \|\gamma'\|'' \vec{a} \\ &= (\|\gamma'\|'' - \|\gamma'\|^3 \kappa_p(t)^2) \vec{t} + (2\|\gamma'\| \|\gamma'\|' \kappa_p + \kappa_p' \|\gamma'\|^2) \vec{n} + \cot\theta \|\gamma'\|'' \vec{a} \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}'\| &= \sqrt{\langle (\|\gamma'\| \vec{t} + \cot\theta \|\gamma'\| \vec{a}), (\|\gamma'\| \vec{t} + \cot\theta \|\gamma'\| \vec{a}) \rangle} \\ &= \|\gamma'\| \sqrt{1 + \cot^2\theta} \\ &= \|\gamma'\| \frac{1}{\sin\theta} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sin\theta}{\|\gamma'\|} (\|\gamma'\| \vec{t} + \cot\theta \|\gamma'\| \vec{a}) \\ &= \sin\theta \vec{t} + \cos\theta \vec{a} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}'' &= (\|\gamma'\|\vec{t} + \cot \theta \|\gamma'\|\vec{a}) \wedge (\|\gamma'\|\vec{t} + \|\gamma'\|^2 \kappa_p \vec{n} + \cot \theta \|\gamma'\|\vec{a}) \\
&= \|\gamma'\|^3 \kappa_p \vec{a} - \cot \theta \|\gamma'\| \|\gamma'\|' \vec{n} + \cot \theta \|\gamma'\| \|\gamma'\|' \vec{n} - \cot \theta \|\gamma'\|^3 \kappa_p \vec{t} \\
&= \kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{a} - \cot \theta \kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{t}
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}''\| &= \sqrt{\langle (\kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{a} - \cot \theta \kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{t}), (\kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{a} - \cot \theta \kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{t}) \rangle} \\
&= \sqrt{\kappa_p^2 \|\gamma'\|^3 (1 + \cot^2 \theta)} \\
&= \frac{\kappa_p \|\gamma'\|^3}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\sin \theta}{\kappa_p \|\gamma'\|^3} (\kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{a} - \cot \theta \kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{t}) \\
&= -\cos \theta \vec{t} + \sin \theta \vec{a}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
N &= B \wedge T = (-\cos \theta \vec{t} + \sin \theta \vec{a}) \wedge (\sin \theta \vec{t} + \cos \theta \vec{a}) \\
&= \sin^2 \theta \vec{n} + \cos^2 \theta \vec{n} \\
&= \vec{n}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\|\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}''\|}{\|\tilde{\gamma}\|^3} \\
&= \frac{\kappa_p \|\gamma'\|^3}{\sin \theta} \\
&= \frac{\|\gamma'\|^3}{\sin^3 \theta} \\
&= \kappa_p \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}''' \rangle &= \langle (\kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{a} - \cot \theta \kappa_p \|\gamma'\|^3 \vec{t}), (\|\gamma'\|'' - \|\gamma'\|^3 \kappa_p^2) \vec{t} + (2\|\gamma'\| \|\gamma'\|' \kappa_p + \kappa_p' \|\gamma'\|^2) \vec{n} + \cot \theta \|\gamma'\|'' \vec{a} \rangle \\
&= \kappa_p \|\gamma'\|^3 \|\gamma'\|'' \cot \theta - \kappa_p \|\gamma'\|^3 \|\gamma'\|'' \cot \theta + \cot \theta \kappa_p^3 \|\gamma'\|^6 \\
&= \cot \theta \kappa_p^3 \|\gamma'\|^6
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \frac{\langle \tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}''' \rangle}{\|\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}''\|^2} \\ &= \frac{\cot \theta \kappa_p^3 \|\gamma'\|^6}{\frac{\kappa_p^2(t) \|\gamma'\|^6}{\sin^2 \theta}} \\ &= \kappa_p(t) \cot \theta \sin^2 \theta\end{aligned}$$

dır. Böylece

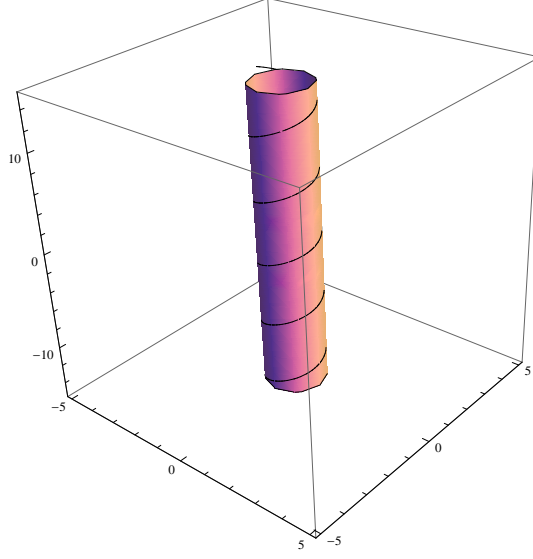
$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\kappa_p \sin^2 \theta}{\kappa_p \cot \theta \sin^2 \theta} = \tan \theta$$

elde edilir. $\tan \theta$ sabit olduğundan $\tilde{\gamma}$ bir genel helistir. ■

Örnek 4.5 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ parametrik denklemiyle verilen γ düzlemsel eğrisini ele alalım. (4.4) ifadesinden $\tilde{\gamma}$ eğrisinin denklemi $\cot \theta$ sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= (\cos t, \sin t, \cot \theta \int \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt) \\ &= (\cos t, \sin t, \cot \theta \int \sqrt{-\sin^2 t + \cos^2 t} dt) \\ &= (\cos t, \sin t, \cot \theta t)\end{aligned}$$

formundadır ve $\tilde{\gamma}$ eğrisi $x^2 + y^2 = 1$ denklemiyle verilen silindir üzerinde yatar.



Şekil 4.1: Çemberden elde edilen silindirik helis.

4.2. SLANT HELİSLER İÇİN BİR KARAKTERİZASYON

Teorem 4.6 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir düzlemsel eğri olsun. $-\frac{\|\gamma''\|\sqrt{1-\|\gamma'\|^2}}{\langle \gamma', \gamma'' \rangle} = \tan \theta$ olmak üzere

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - (\tan \theta \int_{t_0}^t \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{\|\gamma''\|} du) \vec{a} + \vec{c} \quad (4.4)$$

bir uzay eğrisi gösterir. Burada \vec{a} ile \vec{c} sabit vektörler ve $\langle \gamma'(u), \vec{a} \rangle = 0$, $\|\vec{a}\| = 1$ dir. (4.4) eşitliğiyle tanımlanan $\tilde{\gamma}$ uzay eğrisi bir slant helistir.

İspat. $\gamma(t)$, $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ Frenet çatısı ve κ_p eğriliği ile verilen düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin bir slant helis olduğunu göstermek için $\langle N, \vec{a} \rangle = \cos \theta$ olduğu gösterilecektir.

(4.4) eşitliğinde her iki tarafın türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}' &= \gamma' - \tan \theta \left(\frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{\|\gamma''\|} \right) \vec{a} \\
&= \|\gamma'\| \vec{t} - \tan \theta \left(\frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{\|\gamma''\|} \right) \vec{a} \\
\tilde{\gamma}'' &= \|\gamma'\|' \vec{t} + \|\gamma'\|^2 \kappa_p \vec{n} - \frac{\|\gamma'\| \|\gamma'\|'}{\sqrt{1 - \|\gamma'\|^2}} \vec{a}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

dır.

$$\tan \theta = - \frac{\|\gamma''\| \sqrt{1 - \|\gamma'\|^2}}{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}$$

eşitliğinden elde edilen

$$\sqrt{1 - \|\gamma'\|^2} = - \frac{\tan \theta \|\gamma'\| \|\gamma'\|'}{\|\gamma''\|}$$

ifadesi (4.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{\gamma}'' = \|\gamma'\|' \vec{t} + \|\gamma'\|^2 \kappa_p \vec{n} + \cot \theta \|\gamma''\| \vec{a}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\gamma}'\| &= \sqrt{\|\gamma'\|^2 + \tan^2 \theta \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle^2}{\|\gamma''\|^2}} \\
&= \sqrt{\|\gamma'\|^2 + \frac{\|\gamma''\|^2 (1 - \|\gamma'\|^2) \langle \gamma', \gamma'' \rangle^2}{\langle \gamma', \gamma'' \rangle^2 \|\gamma''\|}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ve

$$T = \|\gamma'\| \vec{t} + \sqrt{1 - \|\gamma'\|^2} \vec{a}$$

dır. Ayrıca

$$\|\tilde{\gamma}''\| = \sqrt{(\|\gamma'\|')^2 + \|\gamma'\|^4 \kappa_p^2 + \cot^2 \theta \|\gamma''\|^2}$$

dır. γ' ve γ'' arasındaki açı α olmak üzere $\|\gamma'\|' = \cos \alpha \|\gamma''\|$ ve $\kappa_p = \frac{\|\gamma''\| \sin \alpha}{\|\gamma'\|^2}$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}''\| &= \sqrt{\|\gamma''\|^2 \cos^2 \alpha + \|\gamma''\|^2 \sin^2 \alpha + \cot^2 \theta \|\gamma''\|^2} \\ &= \sqrt{\|\gamma''\|^2 (1 + \cot^2 \theta)} \\ &= \frac{\|\gamma''\|}{\sin \theta} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$N = \frac{\sin \theta}{\|\gamma''\|} (\|\gamma'\|' \vec{t} + \|\gamma'\|^2 \kappa_p \vec{n} + \cot \theta \|\gamma''\| \vec{a})$$

ve

$$\langle N, \vec{a} \rangle = \frac{\sin \theta}{\|\gamma''\|} \cot \theta \|\gamma''\| = \cos \theta$$

dir. O halde $\tilde{\gamma}$ uzay eğrisi bir slant helistir. ■

5 ÖZEL DÜZLEMSEL EĞRİLER YARDIMIYLA ELDE EDİLEN SLANT HELİSLER

5.1. EPİTROKOİD EĞRİSİNE KARŞILIK GELEN SLANT HELİS

Teorem 5.1 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi

$$\gamma(t) = \left((a+b) \sin t - h \sin \frac{a+b}{b}t, -(a+b) \cos t + h \cos \frac{a+b}{b}t, 0 \right) \quad (5.1)$$

parametrik denklemlerle verilen epitrokoid eğrisi olsun. γ , (4.4) eşitliğini sağlar $\Leftrightarrow h = \frac{b^2}{a+b}$ ve $a + 2b = 1$ dir.

İspat. γ epitrokoid eğrisi (4.4) eşitliğini sağlasın. Bu durumda

$$\tan \theta = -\frac{\|\gamma''\| \sqrt{1 - \|\gamma'\|^2}}{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}$$

değeri hesaplandığı zaman $\tan \theta$ değerinin sabit çıkması için $a + 2b = 1$ ve $h = \frac{b^2}{a+b}$ olmalıdır.

Tersine γ epitrokoid eğrisi için $a + 2b = 1$ ve $h = \frac{b^2}{a+b}$ alınırsa $\tan \theta$ sabit çıkar ve γ eğrisi (4.4) eşitliğini sağlar. ■

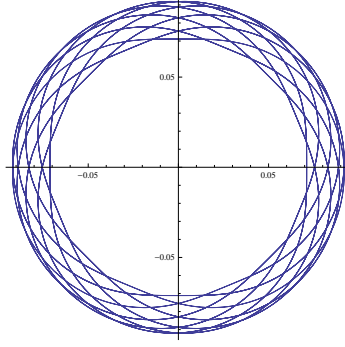
Teorem 5.2 Teorem 4.6 dan $\tilde{\gamma}$ eğrisi bir slant helistir.

γ epitrokoid eğrisi olmak üzere $a = \frac{16}{34}$ ve $b = \frac{9}{34}$ değerleri için eğrinin denklemi

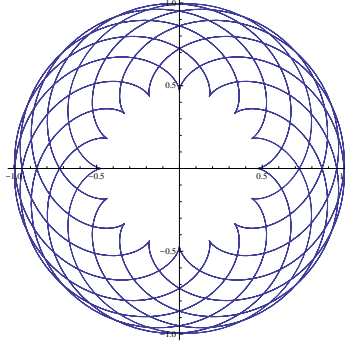
$$\gamma(t) = \left(\frac{25}{34} \sin t - \frac{81}{850} \sin \frac{25}{9}t, -\frac{25}{34} \cos t + \frac{81}{850} \cos \frac{25}{9}t, 0 \right)$$

dir ve grafiği şekil 5.1 de gösterilmiştir. Bu epitrokoid eğrisinin hız vektörü (epitrokoid eğrisinin hız vektörü episikloid eğrisini verir)

$$\gamma'(t) = \left(\frac{25}{34} \cos t - \frac{9}{34} \cos \frac{25}{9}t, \frac{25}{34} \sin t - \frac{9}{34} \sin \frac{25}{9}t, 0 \right)$$



Şekil 5.1: $a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen epitrokoid eğrisi.



Şekil 5.2: $a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen epitrokoid eğrisinin hız vektörü.

dir ve eğrinin hız vektörünün normu

$$\|\gamma'\| = \frac{1}{34} \sqrt{706 - 450 \cos \frac{16}{9}t}$$

olarak bulunur. Eğrinin ikinci türevi

$$\gamma''(t) = \left(-\frac{25}{34} \sin t + \frac{25}{34} \sin \frac{25}{9}t, \frac{25}{34} \cos t - \frac{25}{34} \cos \frac{25}{9}t, 0\right)$$

ve ikinci türevin normu

$$\|\gamma''\| = \frac{25}{17} \sin \frac{8}{9}t$$

dir. Ayrıca

$$\langle \gamma', \gamma'' \rangle = \frac{100}{289} \sin \frac{16}{9}t$$

olarak bulunur. O halde $\tan \theta$ değeri

$$\tan \theta = -\frac{15}{8}$$

dir ve

$$\int \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{\|\gamma''\|} dt = \frac{9}{17} \sin \frac{8}{9}t$$

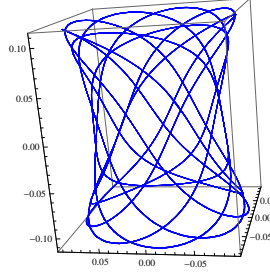
olarak bulunur. Böylece elde edilen slant helisin denklemi

$$\tilde{\gamma} = \left(\frac{25}{34} \sin t - \frac{81}{850} \sin \frac{25}{9}t, -\frac{25}{34} \cos t + \frac{81}{850} \cos \frac{25}{9}t, -\frac{135}{136} \sin \frac{8}{9}t \right)$$

dir ve

$$x^2 + y^2 - \frac{32(8 + 225z^2)}{50625} = 1$$

tek kanatlı hiperboloidi üzerinde yatmaktadır (şekil (5.3)). Slant

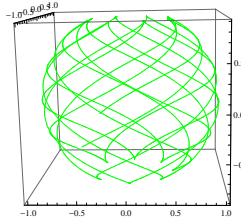


Şekil 5.3: $a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen slant helis.

helisin teğetler göstergesi

$$T(t) = \left(\frac{1}{34}(25 \cos t - 9 \cos \frac{25}{9}t), \frac{1}{34}(25 \sin t - 9 \sin \frac{25}{9}t), -\frac{15}{17} \cos \frac{8}{9}t \right)$$

dir ve grafiği şekil (5.4) de gösterilmiştir. Slant helisin binormaller

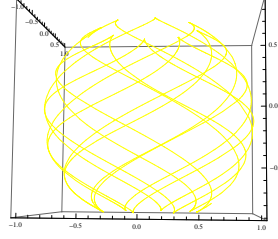


Şekil 5.4: $a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen slant helisin teğetler göstergesinin şekli.

göstergesi

$$B(t) = \left(\frac{25 \cos \frac{1}{9}t - 16 \cos \frac{17}{9}t - 9 \cos \frac{11}{3}t}{68 \sin \frac{8}{9}t}, \frac{25 \sin \frac{1}{9}t - 16 \sin \frac{17}{9}t - 9 \sin \frac{11}{3}t}{68 \sin \frac{8}{9}t}, \frac{15}{17} \sin \frac{8}{9}t \right)$$

dir ve grafiği şekil (5.5) de gösterilmiştir. Slant helisin asli normaller

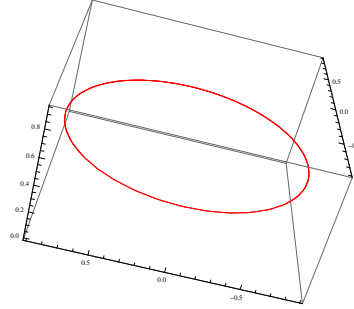


Şekil 5.5: $a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen slant helisin binormaller göstergesi.

göstergesinin denklemi

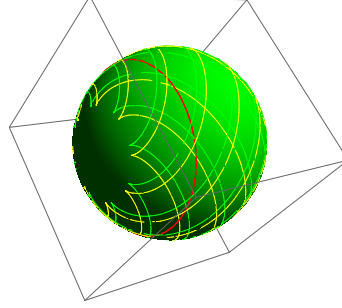
$$N(t) = \left(\frac{15}{17} \cos \frac{17}{9}t, \frac{15}{17} \sin \frac{17}{9}t, \frac{8}{17} \right)$$

dir ve grafiği şekil (5.6) de gösterilmiştir. Eğrinin küresel göstergeleri



Şekil 5.6: $a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen slant helisin asli normaller göstergesi.

küre üzerinde yatmaktadır.

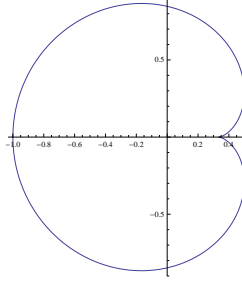


Şekil 5.7: $a = \frac{16}{34}$, $b = \frac{9}{34}$ değerleri için elde edilen slant helisin Küresel göstergelerinin küre üzerindeki görüntüsü.

5.2. HIZ VEKTÖRÜ KARDİOİD EĞRİSİ OLAN EPİTROKOID EĞRİSİNE KARŞILIK GELEN SLANT HELİS

Teorem 5.3 Hız vektörü kardioid eğrisi olan epitrokoiden elde edilen uzay eğrisi slant helistir.

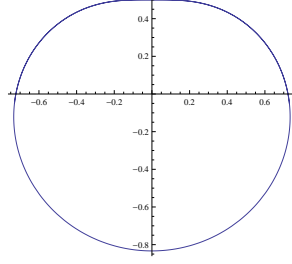
Epitrokoid eğrisinin genel denkleminde $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ değerleri için elde edilen özel düzlemsel eğri hız vektörü kardioid olan epitrokoid eğrisidir ve bu eğri şekil 5.8 de gösterilmiştir.



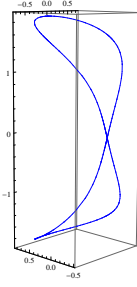
Şekil 5.8: Kardioid eğrisi.

Hız vektörü kardioid olan epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helis şekil 5.10 de gösterilmiştir. Ayrıca elde edilen slant helisin eğrilikleri

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \sqrt{2} \sin \frac{1}{2}t \\ \tau(t) &= \sqrt{2} \cos \frac{1}{2}t\end{aligned}$$



Şekil 5.9: Hız vektörü kardioid olan epitrokoid eğrisi.



Şekil 5.10: Hız vektörü kardioid olan epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helis.

dir.

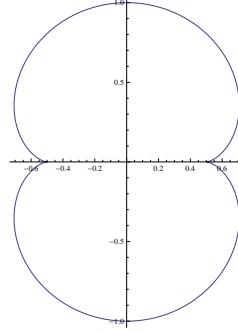
5.3. HIZ VEKTÖRÜ NEPROİD EĞRİSİ OLAN EPİTROKOİD EĞRİSİNE KARŞILIK GELEN SLANT HELİS

Teorem 5.4 Hız vektörü neproid eğrisi olan epitrokoiden elde edilen uzay eğrisi slant helistir.

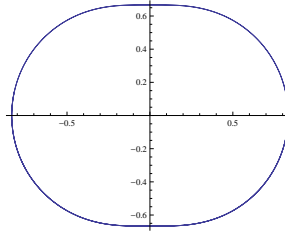
Epitrokoid eğrisinin genel denkleminde $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ değerleri için elde edilen özel düzlemsel eğri hız vektörü neproid olan epitrokoid eğrisidir ve bu eğri şekil 5.11 de gösterilmiştir. Hız vektörü neproid eğrisi olan epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helis şekil 5.13 de gösterilmiştir. Ayrıca elde edilen slant helisin eğrilikleri

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \sqrt{3} \sin t \\ \tau(t) &= \sqrt{3} \cos t\end{aligned}$$

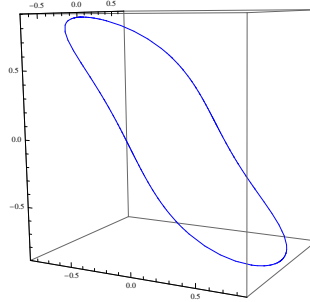
dir.



Şekil 5.11: Nephroid eğrisi.



Şekil 5.12: hız vektörü nephroid eğrisi olan epitrokoid.



Şekil 5.13: Hız vektörü nephroid eğrisi olan epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helis.

5.4. LİMAÇON EĞRİSİNE KARŞILIK GELEN SLANT HELİS

Teorem 5.5 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi

$$\gamma(t) = ((b + a \cos t) \cos t, (b + a \cos t) \sin t, 0)$$

parametrik denklemlerle verilen limaçon eğrisi olsun. $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ ise γ , (4.4) eşitliğini sağlar ve teorem 4.6 dan $\tilde{\gamma}$ eğrisi bir slant helistir.

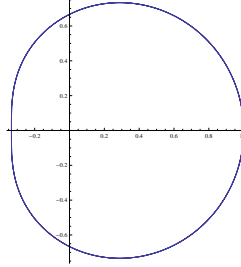
İspat. γ limaçon eğrisi

$$\gamma(t) = ((b + a \cos t) \cos t, (b + a \cos t) \sin t, 0)$$

parametrik denklemleriyle verilir. $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ değerleri için γ limaçon eğrisinin denklemi

$$\gamma(t) = \left(\left(\frac{2}{3} + \frac{\cos t}{3} \right) \cos t, \left(\frac{2}{3} + \frac{\cos t}{3} \right) \sin t, 0 \right)$$

dir. Ayrıca limaçon eğrisinin grafiği şekil (5.14) de gösterilmiştir. Eğrinin hız vektörünün normu



Şekil 5.14: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ değerleri için limaçon eğrisi.

$$\|\gamma'\| = \frac{1}{3} \sqrt{5 + 4 \cos t}$$

olarak bulunur. Ayrıca eğrinin ikinci türevi

$$\|\gamma''\| = \left(-\frac{2}{3}(\cos t + \cos 2t), -\frac{2}{3}(\sin t + \sin 2t), 0 \right)$$

ve ikinci türevinin normu

$$\|\gamma''\| = \frac{2}{3} \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos t}$$

dir. Buradan eğrinin birinci türevi ve ikinci türevi iç çarpılırsa

$$\langle \gamma', \gamma'' \rangle = -\frac{2 \sin t}{9}$$

olarak bulunur. $\tan \theta$ değeri

$$\tan \theta = 2\sqrt{2}$$

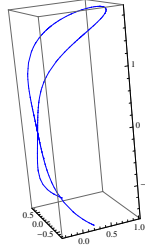
dir ve

$$\int \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{\|\gamma''\|} dt = \frac{2}{3} \cos \frac{t}{2}$$

elde edilir. O halde bu düzlemsel eğriden elde edilen slant helisin denklemi

$$\tilde{\gamma} = \left(\left(\frac{2}{3} + \frac{\cos t}{3} \right) \cos t, \left(\frac{2}{3} + \frac{\cos t}{3} \right) \sin t, \frac{4\sqrt{2}}{3} \cos \frac{t}{2} \right)$$

dır ve grafiği şekil 5.15 de gösterilmiştir. Slant helisin teğetler

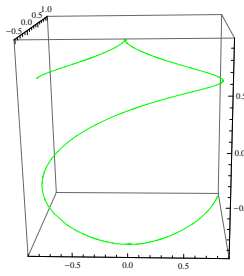


Şekil 5.15: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ değerleri için limaçon eğrisinden elde edilen slant helis.

göstergesi

$$T(t) = \left(-\frac{2}{3}(1 + \cos t) \sin t, \frac{1}{3}(2 \cos t + \cos 2t), -\frac{2}{3}\sqrt{2} \sin \frac{t}{2} \right)$$

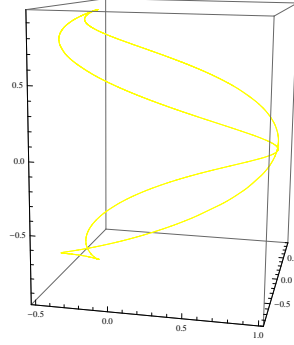
dir ve grafiği şekil (5.16) de gösterilmiştir. Slant helisin binormaller



Şekil 5.16: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ değerleri için limaçon eğrisinden elde edilen slant helisin teğetler göstergesi.

göstergesi

$$B(t) = \left(\frac{-2 \cos \frac{t}{2} - \cos \frac{3t}{2} + \cos \frac{5t}{2}}{6 \cos \frac{t}{2}}, -\frac{2 \sin \frac{t}{2} \sin^2 t}{3 \cos \frac{t}{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \frac{t}{2} \right)$$

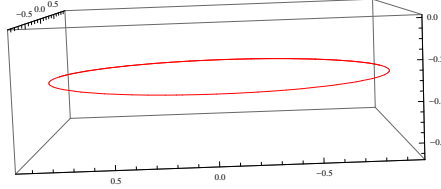


Şekil 5.17: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ değerleri için limaçon eğrisinden elde edilen slant helisin binormaller göstergesi.

dir ve grafiği şekil (5.17) de gösterilmiştir. Eğrinin asli normaller göstergesi

$$N(t) = \left(\frac{2}{3}(1 - 2 \cos t)\sqrt{1 + \cos t}, -\frac{2(\sin t + \sin 2t)}{3\sqrt{1 + \cos t}}, -\frac{1}{3} \right)$$

dir ve grafiği şekil (5.18) de gösterilmiştir.



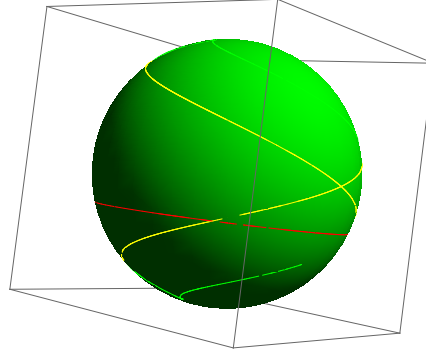
Şekil 5.18: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ değerleri için limaçon eğrisinden elde edilen slant helisin asli normaller göstergesi.

Ayrıca eğrinin eğriliği ve torsiyonu

$$\kappa(t) = \sqrt{1 + \cos t}$$

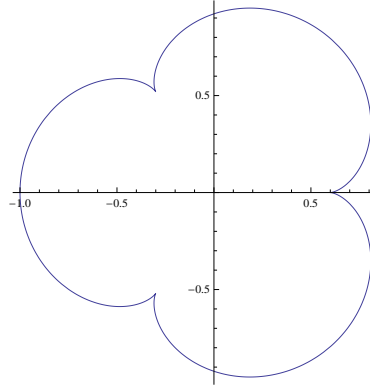
$$\tau(t) = \sqrt{2} \sin \frac{t}{2}$$

dir. ■



Şekil 5.19: Limaçon eğrisine karşılık gelen slant helisin küresel göstergelerinin küre üzerindeki görüntüsü.

Örnek 5.6 Epitrokoid eğrisinin genel denkleminde $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{1}{5}$ değerleri için elde edilen epitrokoid eğrisi şekil 5.20 de gösterilmiştir. $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{1}{5}$ değerleri için epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant

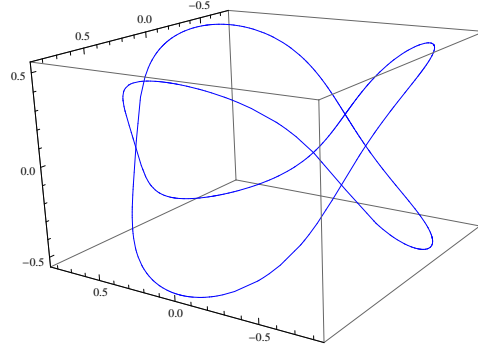


Şekil 5.20: $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{1}{5}$ değerleri için epitrokoid eğrisinin hız vektörü olan episikloid.

helis şekil 5.21 da gösterilmiştir. Ayrıca elde edilen slant helisin eğrilikleri

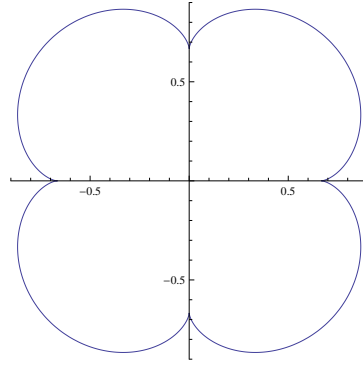
$$\begin{aligned}\kappa(t) &= 2 \sin \frac{3}{2}t \\ \tau(t) &= 2 \cos \frac{3}{2}t\end{aligned}$$

dir.



Şekil 5.21: $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{1}{5}$ değerleri için epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helis.

Örnek 5.7 Epitrokoid eğrisinin genel denkleminde $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{6}$ değerleri için elde edilen epitrokoid eğrisi şekil 5.22 de gösterilmiştir. $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{6}$ epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helis şekil 5.23

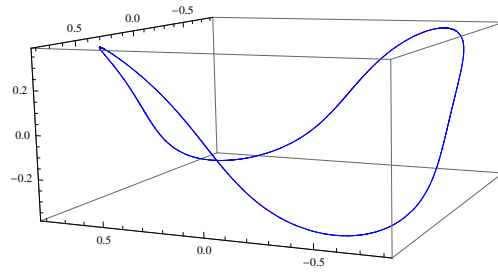


Şekil 5.22: $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{6}$ değerleri için epitrokoid eğrisinin hız vektörü olan episikloid.

de gösterilmiştir. Ayrıca elde edilen slant helisin eğrilikleri

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \sqrt{5} \sin 2t \\ \tau(t) &= \sqrt{5} \cos 2t\end{aligned}$$

dir.



Şekil 5.23: $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{6}$ değerleri için epitrokoid eğrisine karşılık gelen slant helisi.

KAYNAKLAR

- [1] Farouki, R.T., *Pythagorean-Hodograph Curves*. Algebra and Geometry Inseparable. Springer Berlin, 2008.
- [2] Hacısalihoğlu, H. H., *Diferensiyel Geometri*, Cilt I. Fen Fakültesi, Besevler-Ankara, 2000.
- [3] Hacısalihoğlu, H. H., *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi, Elazığ, 1980.
- [4] Hacısalihoğlu, H. H., *Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*, İnönü Üniversitesi, Malatya, 1980.
- [5] Izumiya, S. and Tkeuchi, N., *New special curves and developable surfaces*. Turkish J. Math 28 , 153-163, 2004.
- [6] Izumiya, S. and Tkeuchi, N., *Generic properties of helices and Bertrand curves*. Journal of Geometry 74 , 97-109, 2002.
- [7] Karger, A. and Novak, J., *Space Kinematics, Lie Groups*. Gordon and Breach Science Publishers. 1985.
- [8] Kula, L. and Yayli, Y., *On slant helix and its spherical indicatrix*. Applied Mathematics and Computation 169 , 600-607 2005.
- [9] Kula, L., Ekmekçi, N., Yayli, Y. and İlarslan, K., *Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space*. Turkish Journal of Mathematics. Turk. J. Math., 34, 261-274, 2010.
- [10] O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry 2nd edition*, Academic Press, London, 1983.
- [11] Sabuncuoğlu, A., *Diferensiyel Geometri*. Nobel Basımevi, Ankara. 2004.
- [12] Salkowski, E., *Zur Transformation von Raumkurven*. Mathematische Annalen 66-4 , 517-557, 1909.

[13] Spivak, M., *Calculus On Manifolds*, W.A. Benjamin. Inc. New York, 1965.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Yozgat'ta doğdu. İlköğrenimini Ahmet Yörüköğlü İlköğretim Okul'unda ve lise eğitimini de Boğazlıyan Anadolu Lise'sinde tamamladı. 2009 yılında Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü bitirdi ve aynı yıl Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Tezli Yüksek Lisans Programı'nı kazandı. Halen aynı üniversitede öğrenimini sürdürmektedir.