



T.C.
KIRSEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



MINKOWSKI UZAYINDA HAREKETLİ EKSENLER VE AÇILARA SAHİP GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖNEL YÜZEYLER

Hatice ERBAŞ GÜDEN

DOKTORA TEZİ

KIRSEHİR
2026



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



MINKOWKSKI UZAYINDA HAREKETLİ EKSENLER VE AÇILARA SAHİP GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖNEL YÜZEYLER

HATICE ERBAŞ GÜDEN

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Levent KULA

KIRŞEHİR

2026

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 30/01/2026

Öğrenci

Hatice ERBAŞ GÜDEN

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	I
TEŞEKKÜR	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	VIII
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
2.1. Ön Bilgiler	3
2.2. Reel Kuaterniyonlar	11
2.2.1. Reel kuaterniyonların geometrisi	11
2.3. 3- Boyutlu Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Dönel Yüzeyle	16
2.3.1. 3-Boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş dönel yüzeyleri oluşturma yaklaşımı	16
2.4. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Dönel Yüzeylerin Özellikleri	30
2.4.1. 3-Boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş dönel yüzeyler için matris gösterimi	30
2.4.2. R matrisinin cebirsel özellikleri	32
2.5. $h = fg\bar{f}$ Yüzeyin Geometrik Özellikleri	37
3. MATERYAL VE METOT	49
3.1. Split Kuaterniyonlar ve Minkowski Uzayında Rasyonel Genelleştirilmiş Dönel Yüzeyler	49
3.1.1. Split kuaterniyon	49
3.1.2. Split kuaterniyon geometrisi	50
3.2. Minkowski 3-Uzayında Genelleştirilmiş Dönel Yüzeylerin Özellikleri	53
3.3. Split Kuaterniyonlarla Genelleştirilmiş Dönel Yüzeyler İçin Matris Gösterimi	53
3.4. Minkowski 3-Uzayında R Matrisinin Cebirsel Özellikleri	60
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	67

4.1. Minkowski 3- Uzayında Genelleştirilmiş Dönel Yüzeyler	67
4.2. Minkowski 3- Uzayında $h = f * g * \bar{f}$ Yüzeyin Geometrik Özellikleri . . .	81
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	95
6. KAYNAKLAR	97
ÖZGEÇMİŞ	102

TEŞEKKÜR

Lisans, lisanüstü ve doktora eğitimim boyunca beni destekleyen, her türlü yardım ve fedakarlığı sağlayan, ilgilerini esirgemeyen, bilgi birikimleri ve tecrübeleriyle çalışmama ışık tutan, bende büyük emeği ve desteği olan değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Levent KULA' ya büyük içtenlikle teşekkür ederim. Yüksek lisans ve doktora çalışmam süresinde her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Hasan ALTINBAŞ'a ve tez çalışmamın her aşamasında bilgilerini, yardımlarını ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen tez izleme kurulu üyeleri Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a ve Sayın Doç. Dr. Mahmut MAK'a en içten saygılarımı sunar ve teşekkürü bir borç bilirim.

Bugünlere gelmemde büyük emeği olan, hayatım boyunca beni yalnız bırakmayan, sevgi ve ilgiyle büyüten, sabrını ve fedakarlığını asla esirgemeyen kıymetli annem Hacer ERBAŞ'a ve babam Ali ERBAŞ'a, hayatımın her evresinde her yönüyle bana destek olan ve sevgilerini esirgemeyen kıymetli abim Gökhan ERBAŞ'a ve yengem Hande Sinem ERBAŞ'a, bu uzun yolda bana her zaman destek olan hayat arkadaşım Ömer GÜDEN'e teşekkür ederim.

Ocak, 2026

Hatice ERBAŞ GÜDEN

ÖZET

DOKTORA TEZİ

MINKOWSKI UZAYINDA HAREKETLİ EKSENLER VE AÇILARA SAHİP GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖNEL YÜZEYLER

Hatice ERBAŞ GÜDEN

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Levent KULA

Yıl: 2026 Sayfa: 102

Jüri: Prof. Dr. Levent KULA

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Doç. Dr. Mahmut MAK

Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER

Dr. Öğr. Üyesi Hasan ALTINBAŞ

Hareketli eksenler ve açılara sahip olan genelleştirilmiş dönele bir yüzey, bir eğrinin diğere bir eğri (doğrultman) ile ifade edilen vektör etrafında döndürülmesi ve doğrultmanın ürettiğı açılar yardımıyla bu iki rasyonel uzay eğrisinden üretilen bir rasyonel yüzeydir. Bu tez çalışmasında, ilk olarak Öklid uzayında rasyonel genelleştirilmiş dönele yüzeyler tanıtılacak ve özellikleri sunulacaktır. Daha sonra Minkowski 3-uzayında genelleştirilmiş dönele yüzeyler ifade edilecek ve bu yüzeylerin cebirsel ve geometrik özellikleri verilecektir. Ayrıca, hem Öklid uzayında hem de Minkowski uzayında keyfi eğriler içinde genelleştirilmiş dönele yüzeyler ifade edilecektir. Son olarak Mathematica 10 programı kullanılarak örnekler verilecektir. Yüzeyleri temsil etmek için reel (split) kuaterniyonlar ve bu kuaterniyonların çarpımı kullanılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyon, Split kuaterniyon, Dönele yüzeyler, Genelleştirilmiş dönele yüzey

ABSTRACT

DOCTORAL THESIS

**GENERALIZED SURFACES OF REVOLUTION WITH MOVING
AXES AND ANGLES IN MINKOWSKI SPACE**

Hatice ERBAŞ GÜDEN

**KIRŞEHİR AHI EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor: Prof. Dr. Levent KULA

Year: 2026 Pages: 102

Juries: Prof. Dr. Levent KULA

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Assoc. Prof. Dr. Mahmut MAK

Asst. Prof. Ümit TOKEŞER

Asst. Prof. Hasan ALTINBAŞ

A generalized surface of rotation with movable axes and angles is a rational surface generated from two rational space curves by rotating one curve around a vector expressed by another curve (directrix) and using the angles produced by the directrix. First in this thesis study, rational generalized surfaces of revolution in Euclidean space will be introduced, and their fundamental properties are presented. Then, generalized surfaces of rotation in Minkowski 3-space will be defined, and their algebraic and geometric properties will be examined. Furthermore, generalized rotating surfaces will be expressed for arbitrary curves in both Euclidean and Minkowski spaces. Finally, examples will be given using the Mathematica 10 program. Real (split) quaternions and their product will be used to represent the surfaces.

Keywords: Quaternion, Split quaternion, Surfaces of revolution, Generalized rotation surface

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 1.1. Bazı genelleştirilmiş dönel yüzeyler	1
Şekil 2.1. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı parabol olan S_1 genelleştirilmiş dönel yüzeyi	20
Şekil 2.2. Doğrultusu $y = -2$ düzleminde bir doğru ve doğrultmanı parabol olan S_2 genelleştirilmiş dönel yüzeyi	21
Şekil 2.3. Doğrultusu parabol ve doğrultmanı bir doğru olan S_3 genelleştirilmiş dönel yüzeyi	22
Şekil 2.4. Doğrultusu parabol ve doğrultmanı $y = -2$ düzleminde bir doğru olan S_4 genelleştirilmiş dönel yüzeyi	24
Şekil 2.5. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı silindirik helis olan S_5 genelleştirilmiş dönel yüzeyi	25
Şekil 2.6. Doğrultusu bir çember ve doğrultmanı y -eksenli silindirik helis olan S_6 genelleştirilmiş dönel yüzeyi	27
Şekil 2.7. Doğrultusu z -eksenli silindirik helis ve doğrultmanı y -eksenli silindirik helis olan S_7 genelleştirilmiş dönel yüzeyi	29
Şekil 2.8. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı çember olan S_8 genelleştirilmiş dönel yüzeyi	40
Şekil 2.9. Doğrultusu çember ve doğrultmanı çember olan S_9 genelleştirilmiş dönel yüzeyi	42
Şekil 2.10. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı küresel sextic eğrisi olan S_{10} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	44
Şekil 2.11. Doğrultusu y -eksenli silindirik helis ve doğrultmanı çember olan S_{11} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	46
Şekil 2.12. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı küresel helis olan S_{12} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	49
Şekil 4.1. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı yz spacelike düzleminde bir parabol olan S_{13} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	69
Şekil 4.2. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı yz spacelike düzleminde bir parabol olan S_{14} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	71
Şekil 4.3. Doğrultusu yz spacelike düzleminde bir parabol ve doğrultmanı bir doğru olan S_{15} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	72
Şekil 4.4. Doğrultusu yz spacelike düzleminde bir parabol ve doğrultmanı doğru olan S_{16} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	74

Şekil 4.5. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı spacelike asli normalli ve e_3 eksenli spacelike helis olan S_{17} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	75
Şekil 4.6. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı $-e_1 + e_3$ ekseli timelike eğri olan S_{18} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	76
Şekil 4.7. Doğrultusu $x^2 - y^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberi ve doğrultmanı $-e_1 + e_3$ eksenli timelike eğri olan S_{19} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	78
Şekil 4.8. Doğrultusu spacelike asli normalli ve e_3 eksenli spacelike helis ve doğrultmanı $-e_1 + e_3$ eksenli timelike eğri olan S_{20} genelleştirilmiş dönel yüzeyi ..	81
Şekil 4.9. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı Minkowski çemberi olan S_{21} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	86
Şekil 4.10. Doğrultusu $x^2 - y^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberi ve doğrultmanı $-x^2 + z^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberi olan S_{22} genelleştirilmiş dönel yüzeyi .	88
Şekil 4.11. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı $y^2 + z^2 = 1$ Öklid çemberi olan S_{23} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	90
Şekil 4.12. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı $x^2 - y^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberi olan S_{24} genelleştirilmiş dönel yüzeyi	92
Şekil 4.13. Doğrultusu $x^2 - y^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberi ve doğrultmanı $x^2 - z^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberi olan S_{25} genelleştirilmiş dönel yüzeyi . .	94

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
\mathbb{R}^n	: n -boyutlu Öklid uzayı
\mathbb{R}_1^3	: 3- boyutlu Minkowski uzayı
\langle, \rangle	: \mathbb{R}^n de iç çarpım
$\ , \ $: \mathbb{R}^n de norm
\wedge	: \mathbb{R}^n de vektörel çarpım
$\ , \ _*$: \mathbb{R}_1^3 norm
\times	: \mathbb{R}_1^3 vektörel çarpım
$g(,)$: \mathbb{R}_1^3 skalar çarpım
$*$: Split kuaterniyon çarpımı
G	: Lie Grubu
\mathbb{H}	: 4- boyutlu reel kuaterniyon uzayı
\mathbb{H}'	: 4- boyutlu split kuaterniyon uzayı
$O(3)$: 3×3 tipindeki ortogonal matrislerin grubu
$SO(3)$: Özel ortogonal matrislerin grubu
δ_{ij}	: Kronecker delta
$\mathbb{H}[u, v]$: İki değişkenli polinomların halkası

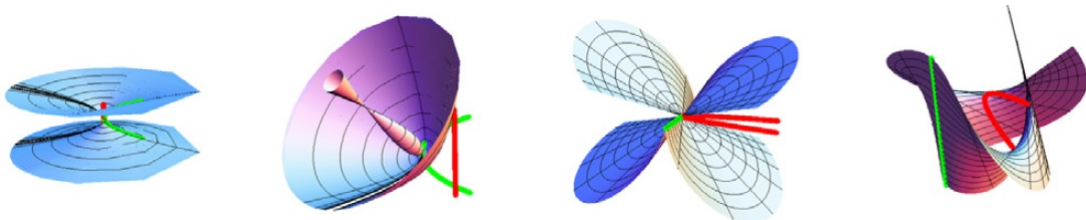
1. GİRİŞ

Yüzey teori, özellikle fizik ve mühendislikte uygulamaları çok fazla olan diferensiyel geometrinin önemli konularından biridir. Standart bir dönel yüzey, bir düzlemsel eğrinin aynı düzlemde yer alan doğru (eksen) etrafında döndürülmesiyle oluşan bir yüzeydir. Dönel yüzeyler, bilgisayar destekli geometrik tasarımda (CAGD), bilgisayar grafiklerinde yaygın olarak [31] ve otomotiv ile endüstriyel tasarım için 3D dijital yüzeyler oluşturmak için de kullanılır [4], çünkü bu yüzeyler insanların ürettiği yapılarda, doğada ve matematikte her yerde görülebilmektedir. Gerçekten de, silindir, koni, küre ve tor gibi pek çok tanıdık matematiksel şekil birer dönel yüzeydir. İnsan yapımı eserler, borular, tüpler, tekerlekler, lastikler, vazolar, kadehler, futbol topları, beyzbol sopaları, kapı kolları, ampuller bu tip yüzeylere birer örnektir.

Geometrik modellemede; kapalı veya parametrik formda sunulabilen dönel yüzeylerle ilgili birçok önemli problem incelenmiştir. Yüzeyin parametrik gösteriminden kapalı formunu bulma [33], iki yüzeyin arakesit eğrisinin bulunması [9], bir yüzeyden belirli bir öteleme mesafesinde ki paralel bir yüzeyi bulma [32], yüzeyin geometrisini değiştirmeden diğer bir parametrizasyonun seçilmesi bu problemlerden bazılarıdır [3]. Bir yüzeyin kapalı denkleminin veya rasyonel parametrizasyonunun bir dönel yüzey tanımlayıp tanımlamadığını belirleme ve cebirsel bir dönel yüzeyin dönme eksenini bulunması gibi problemler de birer araştırma konusudur [1], [2].

Dönel yüzeylerin oluşturulmasına yönelik standart yaklaşımda, dönme eksenini sabit bir doğrudur ve doğrultman aynı düzlemli bir eğridir. Dönme eksenini doğrultmanı yerine 1-parametrelili düzgün bir vektör alanı alınabilir ve bu vektör alanı, doğrultman adı verilen rasyonel bir eğri ile temsil edilebilir.

Orjinden doğrultman eğri üzerine çizilen vektörlerin ailesi, hareketli bir dönme eksenini oluşturur. Ayrıca, doğrultman eğrisinin teğet vektörlerinin bir ailesi, hareketli bir dönme eksenini için diğer bir seçimdir. Bu yaklaşımlarla üretilen yüzeylere genelleştirilmiş dönel yüzey adı verilir. Genelleştirilmiş dönel yüzeyler yardımıyla geometrik modelleme için çok zengin bir yüzey koleksiyonu elde edilebilir. Bu yöntemle oluşturulan bazı yüzeyler Şekil 1.1 de gösterilmektedir [12].



Şekil 1.1. Bazı genelleştirilmiş dönel yüzeyler

Hermann Minkowski tarafından 1907 yılında geliştirilen Minkowski uzayı, klasik Öklidyen uzaydan farklı olarak zaman ve uzayın tek bir uzay-zaman içinde birleştirildiği bir semi-Öklidyen geometri modelidir; bu yapı, Einstein'ın özel görelilik teorisinin matematiksel formülasyonu için en uygundur ve uzay-zaman aralığının tüm eylemler için referans çerçevesinden bağımsız olarak korunmasını sağlar. Minkowski uzayında vektörler ve eğriler, skalar çarpımlarına göre üç nedensel türe ayrılır: spacelike (uzaysal), timelike (zamansal) ve lightlike/null (ışık benzeri); bu sınıflandırma uzay-zaman aralığının doğasının bir sonucudur ve geometriye derin etkiler yapar. Bu bağlamda, Minkowski 3-uzayında dönel yüzeylerin karakteri, dönme ekseninin veya yüzeyin normal vektörünün nedensel doğasına (spacelike, timelike veya lightlike) bağlı olarak farklılık gösterir ve bu durum Öklidyen uzaydaki tek tür yüzeyden çok daha zengin bir sınıflandırma sağlar.

Bu tezde, ilk olarak split kuaterniyonları çarpma işlemi yardımıyla, Minkowski 3 uzayında standart dönel yüzeylerin bir genellemesi olan ve aynı düzlemde ifade edilen bir doğru ile bir eğri yardımıyla elde edilen özel dönel yüzeyler incelenecektir. Daha sonra, farklı düzlemlerde yatan özel eğriler kullanılarak geliştirilmiş dönel yüzeyler ifade edilerek geometrik ve cebirsel özellikleri incelenecektir. Ayrıca, Minkowski 3-uzayında bazı eğrilerin pseudo kürede ve pseudo hiperbolik uzayda yatma şartları araştırılacaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, çalışmamız ile ilgili olan temel kavramlar yer verilmiştir.

2.1. Ön Bilgiler

Bu kısımda, tezde geçen bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. \mathbb{R} reel sayılar cismini göstermek üzere,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

eşitliğiyle tanımlanan,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu, \mathbb{R}^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, \mathbb{R}^n uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir [30].

$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

fonksiyonu, \mathbb{R}^n uzayında bir normdur. Buna göre, \mathbb{R}^n uzayı bu metrik ile tanımlı normlu bir vektör uzayıdır.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, \mathbb{R}^n uzayında bir metriktir. Dolayısıyla, bu metrik ile \mathbb{R}^n bir metrik uzay olur. Bu uzaya Öklid uzayı denir [30].

Tanım 2.2. \mathbb{R}^3 de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \wedge \beta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanan \wedge iç işlemine \mathbb{R}^3 de vektörel çarpım denir [30].

Tanım 2.3. I , \mathbb{R} nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün bir α dönüşümüne, \mathbb{R}^n üzerinde bir eğri denir [30].

Tanım 2.4. $n \in \mathbb{N}$ ve $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$x(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad a_n \neq 0$$

biçimindeki t değişkenine bağlı fonksiyona, n . dereceden bir polinom denir [21].

Tanım 2.5. $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ eğrisi, $1 \leq i \leq n$ için $x_i(t)$ fonksiyonları birer polinom ise α eğrisine polinom eğrisi denir [21].

Tanım 2.6. $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ polinom eğrisi için

$$\max\{der(x_1(t)), der(x_2(t)), \dots, der(x_n(t))\}$$

değerine α polinom eğrisinin derecesi denir [21].

Tanım 2.7. $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ bir polinom eğrisi olsun.

$\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$ birinci türevine α eğrisinin hodografi denir [7].

Tanım 2.8. \mathbb{R}^n Öklid uzayında

$$\alpha(t) = \left(\frac{x_1(t)}{r(t)}, \frac{x_2(t)}{r(t)}, \dots, \frac{x_n(t)}{r(t)} \right)$$

ifadesine rasyonel eğri denir. Burada $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), r(t)$ birer polinomdur [22].

Tanım 2.9. 3-boyutlu \mathbb{R}^3 Öklid uzayında

$$S(u, v) = \left(\frac{S_1(u, v)}{S_4(u, v)}, \frac{S_2(u, v)}{S_4(u, v)}, \frac{S_3(u, v)}{S_4(u, v)} \right)$$

ifadesine m dereceli rasyonel bir yüzey denir. Burada $S_1(u, v), S_2(u, v), S_3(u, v), S_4(u, v)$ en çok m dereceli polinomlardır [6].

Tanım 2.10. 3-boyutlu \mathbb{R}^3 Öklid uzayında bir α eğrisi üzerinde eğrinin parametresine bağlı bir X doğrusunun hareketiyle elde edilen yüzeye regle yüzey denir ve parametrik denklemi

$$S(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$$

şeklinde verilir. Burada α eğrisi yüzeyin dayanak eğrisi ve X e doğrultmanı adı verilir [24].

Tanım 2.11.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

ve

$$ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

olmak üzere,

$$\mathbb{H} = \{q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

kümesi \mathbb{R} cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. \mathbb{H} uzayına 4-boyutlu reel kuaterniyon uzayı adı verilir. Ayrıca $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ ifadesi $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ biçiminde de gösterilir.

Bir q kuaterniyonu $q = S_q + V_q$ şeklinde de ifade edilir. Burada $S_q = a_0$ kuaterniyonun skalar kısmı ve $V_q = a_1i + a_2j + a_3k$ ise kuaterniyonun vektörel kısmıdır [14].

Tanım 2.12. $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ reel kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (V_q + V_p)$$

şeklinde tanımlıdır [14].

Tanım 2.13. Her $p, q \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu için reel kuaterniyon çarpımı

$$qp = S_qS_p - \langle V_q, V_p \rangle + S_qV_p + S_pV_q + V_q \wedge V_p$$

şeklinde ifade edilir ve

$$p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k, q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$$

kuaterniyonları

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i \\ &\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 - p_1q_3 + p_3q_1)j + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)k \end{aligned}$$

olarak tanımlanır [14].

Tanım 2.14. $q = S_q + V_q$ bir reel kuaterniyon olmak üzere, $\bar{q} = S_q - V_q$ ifadesine q nun eşleniği denir [14].

Tanım 2.15. $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ bir reel kuaterniyon olsun.

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ifadesine q nun normu denir [14].

Tanım 2.16. $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ sıfırdan farklı bir reel kuaterniyon olsun.

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$$

ifadesine q nun tersi denir [14].

Teorem 2.17. \langle, \rangle \mathbb{H} reel kuaterniyon uzayı üzerinde tanımlı iç çarpım olmak üzere, $\forall p, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

1. $\langle pq_1, pq_2 \rangle = \|p\|^2 \langle q_1, q_2 \rangle$,
2. $\langle q_1p, q_2p \rangle = \|p\|^2 \langle q_1, q_2 \rangle$,
3. $\langle pq_1, q_2 \rangle = \langle q_1, \bar{p}q_2 \rangle$,
4. $\langle pq_1, q_2 \rangle = \langle p, q_2\bar{q}_1 \rangle$

önergeleri doğrudur [16].

Tanım 2.18. Katsayıları reel kuaterniyonlar olan,

$$\mathbb{H}[u, v] = \left\{ q(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} q_{ij} u^i v^j \mid q_{ij} \in \mathbb{H} \right\}$$

kümesine iki değişkenli polinomlar halkası denir ve bu halkanın elemanlarına reel kuaterniyon polinomu denir.

Burada $q, e_i(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, 1 \leq i \leq 3$ dönüşümleri ile ilişkili olup,

$$e_i = \frac{h_i}{\|q\|^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad h_1 = qi\bar{q} \quad h_2 = qj\bar{q} \quad h_3 = qk\bar{q}$$

dir. Ayrıca $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ dir [18].

Tanım 2.19. V reel vektör uzayı üstünde tanımlı $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bilineer ise g bilineer form, eğer bu bilineer form simetrik ise g ye simetrik bilineer form denir [13].

Tanım 2.20. g, V üstünde bir simetrik bilineer form olsun.

1. $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ önermesi doğru ise g ye pozitif tanımlı,
2. $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ önermesi doğru ise g ye negatif tanımlı,
3. $\forall v \in V$ için $g(v, v) \geq 0$ önermesi doğru ise g ye yarı pozitif tanımlı,
4. $\forall v \in V$ için $g(v, v) \leq 0$ önermesi doğru ise g ye yarı negatif tanımlı,
5. $[\forall w \in V, g(v, w) = 0] \Rightarrow v = 0$ önermesi doğru ise g ye yoz olmayan (nondejenere)

denir [24].

Tanım 2.21. V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı g non-dejenere simetrik bilineer formuna V üzerinde bir skalar çarpım, V ye de skalar çarpım uzayı denir [24].

Tanım 2.22. V bir skalar çarpım uzayı olsun. $v \in V$ vektörünün normu

$$\|v\|_* = \sqrt{|g(v, v)|}$$

olarak tanımlanır. Normu, 1 birim olan vektöre birim vektör denir. Bu durumda, $g(v, v) = \pm 1$ dir. Elemanları ikişer ikişer birbirine dik birim vektörlerden oluşan bir kümeye ortonormaldir denir [24].

Teorem 2.23. $V \neq \{0\}$ olmak üzere, V skalar çarpımlı bir vektör uzayı ise V nin bir ortonormal bazı vardır [24].

Teorem 2.24. V skalar çarpım uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i), 1 \leq i \leq n$ olmak üzere $\forall v \in V$ vektörü,

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir [24].

Tanım 2.25. V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nun boyutuna g skalar çarpımının indeksi denir. g skalar çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır [24].

Teorem 2.26. V skalar çarpım uzayının bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazı için $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ deki negatif sayıların sayısı, V nin ν indeksine eşittir [24].

Tanım 2.27. $V = \mathbb{R}^n$ ve \mathbb{R}^n nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$g(x, y) = - \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{j=\nu+1}^n x_j y_j \quad 1 \leq \nu \leq n$$

biçiminde tanımlanan g fonksiyonu bir skalar çarpımdır. Bu skalar çarpım ile birlikte \mathbb{R}^n uzayına yarı-Öklidyen uzay denir ve \mathbb{R}_ν^n ile gösterilir. Eğer $n = 3$ ve $\nu = 1$ ise \mathbb{R}_1^3 e Minkowski 3-uzayı adı verilir [24].

Bu tezde;

$x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$ için

$$g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow g(x, y) = -x_0 y_0 - x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

skalar çarpımı ile tanımlı \mathbb{R}_2^4 yarı- Öklidyen uzayda ve

$$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

için

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow g(x, y) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

skalar çarpımı ile tanımlı \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında çalışılacaktır.

Tanım 2.28. $r > 0$ olmak üzere

$$S_1^4(r) = \{p \in \mathbb{R}_1^3 : g(p, p) = r^2\}$$

kuadriğine \mathbb{R}_1^3 de pseudo küre ve

$$H_0^2(r) = \{p \in \mathbb{R}_1^3 : \mathbf{g}(p, p) = -r^2\},$$

kuadriğine \mathbb{R}_1^3 de pseudo hiperbolik uzay adı verilir [24].

Tanım 2.29. Bir $v \in V$ vektörü için;

1. $\mathbf{g}(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne uzaysı (spacelike) vektör,
2. $\mathbf{g}(v, v) < 0$ ise v vektörüne zamansı (timelike) vektör,
3. $\mathbf{g}(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v vektörüne boşluğu (null) vektör,

denir [24].

Tanım 2.30. $\times : \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\mathbf{g}(u \times v, w) = \det(u, v, w)$ eşitliğini sağlayan

$$u \times v = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlı dönüşüme \mathbb{R}^3 de vektörel çarpım adı verilir [23].

Teorem 2.31. u, v ve w Minkowski 3-uzayında üç vektör olsun. Bu durumda

1. $(u \times v) \times w = -\mathbf{g}(u, v)w + \mathbf{g}(v, w)u$
2. $u \times (u \times w) = -\mathbf{g}(u, w)v + \mathbf{g}(u, v)w$
3. $\mathbf{g}(u \times v, u) = 0$ ve $\mathbf{g}(u \times v, v) = 0$
4. $\mathbf{g}(u \times v, u \times v) = -\mathbf{g}(u, u)\mathbf{g}(v, v) + \mathbf{g}(u, v)^2$

dir [35].

Tanım 2.32.

$$i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1$$

ve

$$ij = k, \quad jk = -i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = i, \quad ik = -j$$

olmak üzere

$$\mathbb{H}' = \{q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

kümesi \mathbb{R} cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. \mathbb{H}' uzayına 4-boyutlu split kuaterniyon uzayı adı verilir. Ayrıca $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ ifadesi $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ biçiminde de gösterilir. Bir q split kuaterniyonu $q = S_q + V_q$ şeklinde de ifade edilir. Burada $S_q = a_0$ split kuaterniyonun skalar kısmı ve $V_q = a_1i + a_2j + a_3k$ ise split kuaterniyonunun vektörel kısmıdır [15, 20].

Tanım 2.33. $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ split kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (V_q + V_p)$$

şeklinde tanımlıdır [15, 20].

Tanım 2.34. $q, p \in \mathbb{H}'$ split kuaterniyonları için split kuaterniyon çarpımı

$$q * p = S_q S_p + \mathbf{g}(V_q, V_p) + S_q V_p + S_p V_q + V_q \times V_p$$

şeklinde ifade edilir [15, 20].

Tanım 2.35. $q = S_q + V_q$ bir split kuaterniyon olmak üzere, $\bar{q} = S_q - V_q$ ifadesine split kuaterniyonun eşleniği denir [15, 20].

Tanım 2.36.

$$N_q = q * \bar{q} = \bar{q} * q = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$$

biçiminde tanımlanan reel sayıya q nun split kuaterniyon normu denir [15, 20].

Tanım 2.37. Bir $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ split kuaterniyon olsun. q split kuaterniyonunun \mathbb{R}_2^4 deki normu

$$\|q\|_* = \sqrt{|q * \bar{q}|} = \sqrt{|\bar{q} * q|} = \sqrt{|a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2|}$$

şeklinde tanımlanır [15, 20].

Tanım 2.38. Bir $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ split kuaterniyon olsun.

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|_*^2}, \quad \|q\|_* \neq 0$$

ifadesine q nun tersi adı verilir [15, 20].

Teorem 2.39.

$$G = \{q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}' \mid N_q = 1\}$$

cümlesi bir Lie grubudur [15, 24].

Teorem 2.40. G nin Lie cebiri \mathbb{H}' nün imajiner kısmına eşittir [15, 24].

2.2. Reel Kuaterniyonlar

Reel kuaterniyonlar, 3 boyutlu Öklid uzayında bir eksen etrafında dönmeleri temsil etmek ve hesaplamak için kullanılır. Bu nedenle, kuaterniyonların bilgisayar grafikleri, bilgisayarlı görü (computer vision), klasik mekanik ve robotik dahil olmak üzere hesaplamalı bilim ve mühendisliğin birçok çağdaş alanında uygulamaları vardır [10], [17].

2.2.1. Reel kuaterniyonların geometrisi

p ve q iki reel kuaterniyon olsun.

$$p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k, \quad q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} R_q : Q &\rightarrow Q \\ p &\rightarrow R_q(p) = pq \end{aligned}$$

lineer dönüşümüne $\{1, i, j, k\}$ bazına karşılık gelen matris,

$$\begin{aligned} R_q(1) &= q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \\ R_q(i) &= iq = -q_1 + q_0i - q_3j + q_2k \\ R_q(j) &= jq = -q_2 + q_3i + q_0j - q_1k \\ R_q(k) &= kq = -q_3 - q_2i + q_1j + q_0k \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned}
 R_q(p) &= pq = \mathbf{R}_q \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \\
 &= [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3] \mathbf{R}_q^T \\
 &= [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3] M_q
 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$M_q = \mathbf{R}_q^T$$

olup

$$M_q = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

dir.

$$pq = [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3] \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \\ p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1 \\ p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_0 + p_3q_0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
 M_q M_q^T &= \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} = \|q\|^2 I_4
 \end{aligned}$$

ifade edilir. $\|q\| = 1$ için $M_q \in SO(3)$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} L_p : Q &\rightarrow Q \\ q &\rightarrow \mathbf{L}_p(q) = pq \end{aligned}$$

dönüşümüne $\{1, i, j, k\}$ bazına karşılık gelen matris,

$$\begin{aligned} L_p(1) &= p1 = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \\ L_p(i) &= pi = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)i = -p_1 + p_0i + p_3j - p_2k \\ L_p(j) &= pj = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)j = -p_2 - p_3i + p_0j + p_1k \\ L_p(k) &= pk = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)k = -p_3 + p_2i - p_1j + p_0k \end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} L_p(q) = pq &= \mathbf{L}_p \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \\ &= [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3] \mathbf{L}_p^T \\ &= [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3] N_p \end{aligned}$$

dir. O halde

$$N_p = \mathbf{L}_p^T$$

dir.

$$N_p = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$N_p N_p^T = \|p\|^2 I_4$$

ifade edilir. $\|p\| = 1$ için $N_p \in SO(3)$ dir [12].

Teorem 2.41. $N_q = 1$ olmak üzere

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S$$

bir birim kuaterniyondur ve $x \rightarrow Rx\bar{R}$ adjoint dönüşümü \mathbb{R}^3 teki noktaları ve vektörleri orjinden geçen doğru etrafında \mathbb{R}^3 teki $\vec{S} = \left(\frac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}, \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}, \frac{q_3}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}\right)$ vektörü yönünde θ açısı kadar döndürür. Burada S , v_q yönünde birim vektördür [12].

İspat. $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ kuaterniyonu için $\|q\|^2 = 1$ olduğundan $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ dir. Dolayısıyla

$$q = q_0 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \frac{q_1i + q_2j + q_3k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

biçiminde ifade edilebilir. $q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ seçilirse

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}i + \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}j + \frac{q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}k \right)$$

olur ve S nin bileşenleri

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \\ s_2 &= \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \\ s_3 &= \frac{q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Adjoint dönüşümünden

$$Rx\bar{R} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right)(0, x)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right)$$

ifadesinde reel kuaterniyon çarpımı yardımıyla ilk iki terim çarpılırsa

$$-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle S, x \rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(S \wedge x)$$

elde edilir. Buradan

$$Rx\bar{R} = \left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle S, x \rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(S \wedge x) \right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S \right)$$

reel kuarterniyon çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} Rx\bar{R} &= -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle S, x \rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle x, S \rangle + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle S \wedge x, S \rangle \\ &\quad + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle S, x \rangle S + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)x + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(S \wedge x) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(x \wedge S) \\ &\quad - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\langle S, S \rangle x - \langle S, x \rangle S \right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle S, x \rangle S + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)x + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(S \wedge x) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(S \wedge x) \\ &\quad - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)x + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle S, x \rangle S \\ &= 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle S, x \rangle S + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(S \wedge x) + \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) x \end{aligned}$$

elde edilir. Burada yarım açı formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} Rx\bar{R} &= (1 - \cos\theta) \langle S, x \rangle S + \sin\theta(S \wedge x) + \cos\theta x \\ &= \cos\theta x + (1 - \cos\theta) \langle S, x \rangle S + \sin\theta(S \wedge x) \end{aligned}$$

bulunur. 3×3 tipinde adjoint dönüşümüne karşılık gelen özel ortogonal matris yardımıyla,

$$R = \begin{bmatrix} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1^2 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)[s_2^2 - s_3^2] & 2[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_3 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1s_2] & 2[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_2 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1s_3] \\ 2[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_3 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1s_2] & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1^2 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)[s_2^2 - s_3^2] & 2[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_2s_3] \\ 2[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_2 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1s_3] & 2[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_2s_3] & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1^2 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)[s_2^2 + s_3^2] \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} R &= \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} -s_3^2 - s_2^2 & s_1s_2 & s_1s_3 \\ s_1s_2 & -s_1^2 - s_3^2 & s_2s_3 \\ s_1s_3 & s_2s_3 & -s_2^2 - s_1^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1^2 & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1s_2 & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1s_3 \\ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1s_2 & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_2^2 & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_2s_3 \\ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_1s_3 & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_2s_3 & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)s_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^2 = \begin{bmatrix} -s_3^2 - s_2^2 & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ s_1 s_2 & -s_1^2 - s_3^2 & s_2 s_3 \\ s_1 s_3 & s_2 s_3 & -s_2^2 - s_1^2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\theta}{2})s_1^2 & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_1s_2 & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_1s_3 \\ \cos^2(\frac{\theta}{2})s_1s_2 & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_2^2 & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_2s_3 \\ \cos^2(\frac{\theta}{2})s_1s_3 & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_2s_3 & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_3^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\theta}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2})(s_2^2 + s_3^2) & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_1s_2 & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_1s_3 \\ \cos^2(\frac{\theta}{2})s_1s_2 & \cos^2(\frac{\theta}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2})(s_1^2 + s_3^2) & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_2s_3 \\ \cos^2(\frac{\theta}{2})s_1s_3 & \cos^2(\frac{\theta}{2})s_2s_3 & \cos^2(\frac{\theta}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2})(s_1^2 + s_2^2) \end{bmatrix} \\ &= \cos^2(\frac{\theta}{2}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \cos^2(\frac{\theta}{2})S^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$R = I_3 - \sin\theta S + 2\cos^2(\frac{\theta}{2})S^2$$

eşitliğini elde ederiz. S matrisi antisimetrik bir matristir.

$R = \cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})S$ birim kuaterniyonu ile ifade edilen adjoint dönüşümü θ açısı kadar $\vec{S} = (s_1, s_2, s_3)$ vektörü tarafından belirtilen eksen etrafında dönmektedir [12]. ■

2.3. 3- Boyutlu Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Dönel Yüzeyler

Bu bölümde, 3- boyutlu genelleştirilmiş dönel yüzeylerin elde edilmesi ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir.

2.3.1. 3-Boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş dönel yüzeyleri oluşturma yaklaşımı

Bu alt bölümde ilk olarak homojen koordinatlar kullanılarak bir doğru ve düzlemsel bir eğri ile ifade edilen klasik anlamdaki dönel yüzeylerin genelleştirilmesi ele alınacaktır.

$S_q = 0$ ise q reel kuaterniyonuna pure kuaterniyon adı verilir. Bir $V_q = v_1i + v_2j + v_3k$ pure kuaterniyonu \mathbb{R}^3 de orjinden (v_1, v_2, v_3) noktasına tanımlı vektör olarak düşünülebilir. Benzer şekilde, $S_q \neq 0$ için

$$q = S_q + V_q = S_q + v_1i + v_2j + v_3k$$

reel kuaterniyonu, \mathbb{R}^3 de $(\frac{v_1}{s_q}, \frac{v_2}{s_q}, \frac{v_3}{s_q})$ sıralı üçlüsü ile de eşlenebilir.

Dolayısıyla,

$$q = S_q + v_1i + v_2j + v_3k$$

reel kuaterniyonu, 3 boyutlu uzaydaki noktalar ve vektörler için (S_q, v_1, v_2, v_3) homojen gösterimi ile ifade edilebilir. Özel olarak $q = 1$ reel kuaterniyonu \mathbb{R}^3 teki orjini temsil eder ve

$$q = 1 + V_q$$

reel kuaterniyonu, V_q vektörünün ucunda bulunan afin uzaydaki noktayı temsil eder.

$$\begin{aligned} f &: (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \\ f(s, u) &= (f_0(s, u), f_1(s, u), f_2(s, u), f_3(s, u)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ve

$$\begin{aligned} g &: (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \\ g(t, v) &= (g_0(t, v), g_1(t, v), g_2(t, v), g_3(t, v)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

fonksiyonları ele alınsın. Burada $f_\ell \in \mathbb{R}[s, u]$ ve $g_\ell \in \mathbb{R}[t, v]$ homojen polinomlar,

$$\begin{aligned} \text{der}(f_\ell) &= m \\ \text{der}(g_\ell) &= n, \quad \ell = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \text{ebob}(f_0, f_1, f_2, f_3) &= 1 \\ \text{ebob}(g_0, g_1, g_2, g_3) &= 1 \end{aligned}$$

dir.

İlk olarak f ve g fonksiyonları reel kuaterniyonlarla temsil edilecek ve ardından reel kuaterniyon çarpımı yardımıyla rasyonel tensör çarpım yüzeyleri oluşturulacaktır. Tutarlılık için, her zaman f eğrisi director (doğrultu) ve g eğrisi de directrix (doğrultman) olarak adlandırılacaktır.

$$r(s) = \frac{f(s)}{\|f(s)\|}$$

bir birim kuaterniyondur ve Teorem 2.41. göre s nin her bir değeri için,

$$g(t) \rightarrow r(s)g(t)\bar{r}(s)$$

dönüşümü $g(t)$ yi $r(s)$ nin vektör kısmının doğrultusundaki doğru etrafında θ açısı kadar döndürür. Burada $\cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{f_0(s)}{\|f(s)\|}$, $r(s)$ nin skalar kısmıdır. Ayrıca $r(s)$ nin vektörel kısmı olan

$$\frac{(f_1(s), f_2(s), f_3(s))}{\|f(s)\|}$$

$(f_1(s), f_2(s), f_3(s))$ nin doğrultusuyla aynıdır. Bu nedenle

$$h(s; t) = r(s)g(t)\bar{r}(s)$$

eşitliği yardımıyla bir genelleştirilmiş döneel yüzey tanımlayabiliriz.

Homojen koordinatlarla çalıştığımız için her (s, u) reel parametresi için $\frac{f(s, u)}{\|f(s, u)\|}$ ifadesinin paydası ihmal edilebilecek bir skalar olduğu düşünülebilir. Böylece, rasyonel genelleştirilmiş döneel yüzey aşağıdaki formülle üretilebilir

$$\begin{aligned} h(s, u; t, v) &= (h_0(s, u; t, v), h_1(s, u; t, v), h_2(s, u; t, v), h_3(s, u; t, v)) \\ &= f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Burada

$$bider(h_\ell) = (2m, n)$$

$$der(s) = 1, der(u) = 0$$

ve

$$der(t) = 0, der(v) = 1$$

dir.

h_ℓ fonksiyonlarının $S = \mathbb{R}[s, u; t, v]$ halkası üzerinde iki polinom olduğuna dikkat edilmelidir. Bu çalışmada, yalnızca düzlem olmayan genelleştirilmiş döneel yüzeylerle ilgileneceğiz. (s, u) nun her bir değeri için $\frac{f(s, u)}{\|f(s, u)\|}$ birim kuaterniyonu bir dönme temsil eder ve her (s, u) reel parametresi için

$$h(s, u; t, v) = \frac{f(s, u)}{\|f(s, u)\|} g(t, v) \frac{\bar{f}(s, u)}{\|\bar{f}(s, u)\|} = \frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2}$$

homojen koordinatlarda Denklem (2.3) e eşdeğerdir. Ayrıca, g doğrultmanı bir düzlemsel eğri olmak üzere f doğrultusu, g doğrultmanı ile aynı düzlemde yatan ve orjinden geçen bir doğru ise, o zaman h yüzeyi f eksenli ve g doğrultmanlı klasik anlamda bir döneel yüzeydir. Bu nedenle, her rasyonel döneel yüzey

$$h(s, u; t, v) = f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)$$

biçimindeki bir yüzeyle temsil edilebilir.

$$h(s, u; t, v) = f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)$$

yapısı bu nedenle klasik döneel yüzeylerin inşasının bir genelleştirilmesidir. Ek olarak, dönme eksenlerinin f directorüne (doğrultusuna) teğet vektörler olmasını istiyorsak, o

zaman f yerine f nin hodografi konulabilir, yani f , f' ile değiştirilebilir.

Aşağıda, director (doğrultu) ve directrix (doğrultman) olmak üzere iki basit eğri ele alınarak elde edilen genelleştirilmiş döneel yüzey örnekleri mevcuttur. Bu örneklerdeki S_1, S_2, S_3 ve S_4 genelleştirilmiş döneel yüzeylerin tümü aynı düzlemde yatmayan bir doğru ve bir parabol tarafından oluşturulmuştur. Örnek 2.44. ve Örnek 2.45. teki genelleştirilmiş döneel yüzeyler Örnek 2.42. ve Örnek 2.43. deki genelleştirilmiş döneel yüzeyler director ve directrix eğrileri yer değiştirilerek elde edilmiştir. Aşağıdaki dört örnek [12] numaralı kaynaktan alınmıştır.

Örnek 2.42.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$f(s, u) = (u, 0, 0, s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu z -ekseni ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$g(t, v) = (t, v^2, 0, v)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $x = z^2$ parabolü olsun. Bu durumda

$$f(s, u)g(t, v) = ut - sv + (uv^2, 0, uv) + (0, 0, ts) + (0, v^2s, 0)$$

$$= (ut - sv, uv^2, v^2s, uv + ts)$$

ve (2.3) eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (ut - sv, uv^2, v^2s, uv + ts)(u, 0, 0, -s)$$

$$= (u^2t - usv - usv - ts^2) + (0, 0, -uts + s^2v)$$

$$+ (u^2v^2, -uv^2s, u^2v + uts) + (-v^2s^2, uv^2s, 0)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (u^2t + ts^2, u^2v^2 - v^2s^2, 2uv^2s, s^2v + u^2v)$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = u^2 + s^2$ dir.

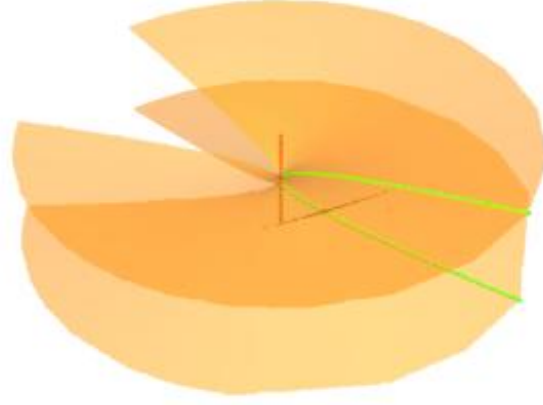
$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left(t, \frac{u^2v^2 - v^2s^2}{u^2 + s^2}, \frac{2uv^2s}{u^2 + s^2}, v\right)$$

elde edilir. $t = u = 1$ seçilirse

$$S_1(s, v) = \left(\frac{v^2 - v^2s^2}{1 + s^2}, \frac{2v^2s}{1 + s^2}, v\right)$$

bulunur. Burada elde edilen S_1 yüzeyi kum saati şeklindeki bir genelleştirilmiş dönel yüzeydir [12].

S_1 yüzeyi Şekil 2.1 de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı parabol olan S_1 genelleştirilmiş dönel yüzeyi

Örnek 2.43.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$f(s, u) = (u, s, -2, 12s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu $y = -2$ düzleminde bir doğru ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$g(t, v) = (t, v^2, 0, v)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $x = z^2$ parabolü olsun. Bu durumda

$$f(s, u)g(t, v) = (tu - 12sv - sv^2, st - 2v + uv^2, -2t - sv + 12sv^2, 12st + uv + 2v^2)$$

ve (2.3) eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (tu - 12sv - sv^2, st - 2v + uv^2, -2t - sv + 12sv^2, 12st + uv + 2v^2)$$

$$(u, -s, 2, -12s)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (t(4 + 145s^2 + u^2), v(-4u + s^2(24 - 143v) - 4v + u^2v),$$

$$2sv(-2(12 + v) + u(-1 + 12v)), v(-4 + u^2 + 4uv + s^2(143 + 24v)))$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = u^2 + s^2$ dir.

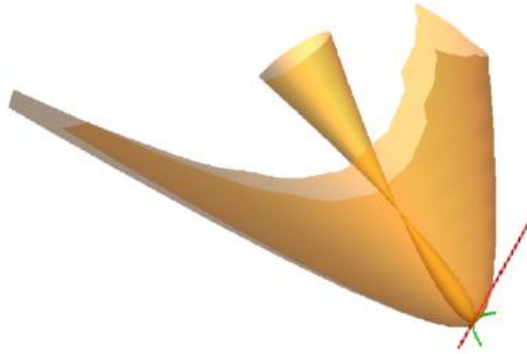
$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left(t, \frac{(v(s^2(24 - 143v) + u^2v - 4(u + v)))}{4 + 145s^2 + u^2}, \right. \\ \left. \frac{(2sv(-2(12 + v) + u(-1 + 12v)))}{4 + 145s^2 + u^2}, \right. \\ \left. \frac{(v(-4 + u^2 + 4uv + s^2(143 + 24v)))}{4 + 145s^2 + u^2} \right)$$

elde edilir. $t = u = 1$ seçilirse

$$S_2(s, v) = \left(\frac{(v(s^2(24 - 143v) + v - 4(1 + v)))}{4 + 145s^2 + 1}, \right. \\ \left. \frac{(2sv(-2(12 + v) + (-1 + 12v)))}{4 + 145s^2 + 1}, \frac{(v(-4 + 1 + 4v + s^2(143 + 24v)))}{4 + 145s^2 + 1} \right)$$

bulunur. Burada elde edilen S_2 yüzeyi çanak anten şeklindeki genelleştirilmiş dönel yüzeydir [12].

S_2 yüzeyi Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Doğrultusu $y = -2$ düzleminde bir doğru ve doğrultmanı parabol olan S_2 genelleştirilmiş dönel yüzeyi

Örnek 2.44.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \\ f(s, u) = (u, s^2, 0, s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu $x = z^2$ parabolü ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \\ g(t, v) = (t, 0, 0, v)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman z -ekseni olsun. Bu durumda

$$f(s, u)g(t, v) = (tu - sv, uv^2, -sv^2, st + uv)$$

ve (2.3) eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (tu - sv, uv^2, -sv^2, st + uv)(t, -v^2, 0, -v)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (uv^4 + t(tu - sv) + v(st + uv), tuv^2 + sv^3 - v^2(tu - sv), -stv^2 + uv^3 - v^2(st + uv), -sv^4 - v(tu - sv) + t(st + uv))$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = t^2 + v^2 + v^4$ dir.

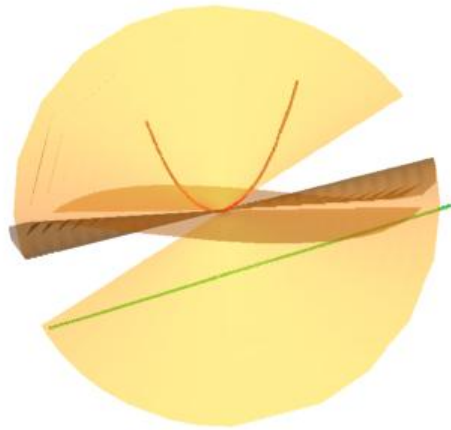
$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left(u, \frac{2sv^3}{t^2 + v^2 + v^4}, \frac{-2stv^2}{t^2 + v^2 + v^4}, \frac{s(t^2 + v^2 - v^4)}{t^2 + v^2 + v^4} \right)$$

elde edilir. $t = u = 1$ seçilirse

$$S_3(s, v) = s \left(\frac{2v^3}{1 + v^2 + v^4}, \frac{-2v^2}{1 + v^2 + v^4}, \frac{1 + v^2 - v^4}{1 + v^2 + v^4} \right)$$

bulunur. Burada elde edilen S_3 kelebek şeklindeki genelleştirilmiş döneel yüzey bir regle yüzeydir [12].

S_3 yüzeyi Şekil 2.3 de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Doğrultusu parabol ve doğrultmanı bir doğru olan S_3 genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 2.45.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$
$$f(s, u) = (u, s^2, 0, s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu $x = z^2$ parabolü ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$
$$g(t, v) = (t, v, -2, 12v)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $y = -2$ düzlemlerle bir doğru olsun. Bu durumda,

$$f(s, u)g(t, v) = (tu - 12sv - sv^2, st + 2v + uv^2, -2t + sv - 12sv^2, 12st + uv - 2v^2)$$

ve (2.3) eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (tu - 12sv - sv^2, st + 2v + uv^2, -2t + sv - 12sv^2, 12st + uv - 2v^2)$$
$$(t, -v^2, 0, -v)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (u(t^2 + v^2 + v^4), 4tv + s(t^2 + v^2(-1 + v(24 + v))),$$
$$2(-t^2 + st(1 - 12v)v + v^2 + v^4),$$
$$2(-2tv^2 + s(6t^2 + v^2(6 + v - 6v^2))))$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = t^2 + v^2 + v^4$ dir.

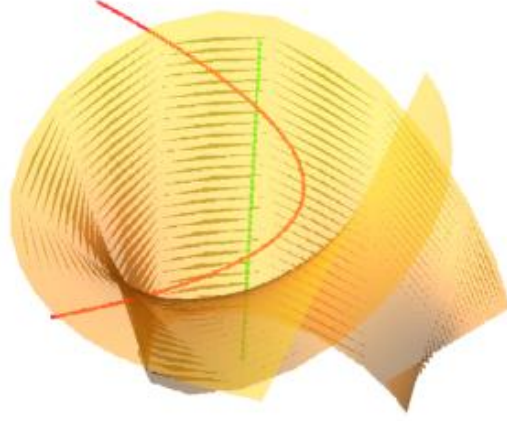
$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left(u, \frac{4tv + s(t^2 + v^2(-1 + v(24 + v)))}{t^2 + v^2 + v^4}, \right.$$
$$\frac{2(-t^2 + st(1 - 12v)v + v^2 + v^4)}{t^2 + v^2 + v^4},$$
$$\left. \frac{2(-2tv^2 + s(6t^2 + v^2(6 + v - 6v^2)))}{t^2 + v^2 + v^4} \right)$$

elde edilir. $t = u = 1$ seçilirse

$$S_4(s, v) = \left(\frac{4v}{v^2 + v^4 + 1}, \frac{2(v^2 + v^4 - 1)}{v^2 + v^4 + 1}, -\frac{4v^2}{v^2 + v^4 + 1} \right)$$
$$+ s \left(\frac{1 + v^2(-1 + v(24 + v))}{v^2 + v^4 + 1}, \frac{2v(1 - 12v)}{v^2 + v^4 + 1}, \frac{2(6 + v^2(6 + v - 6v^2))}{v^2 + v^4 + 1} \right)$$

bulunur. Burada elde edilen S_4 yüzeyi f0tr şapkanın geniş kenarına benzeyen bir genelleştirilmiş d0nel yüzey bir regle yüzeydir [12].

S_4 yüzeyi Şekil 2.4 de gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Doğrultusu parabol ve doğrultmanı $y = -2$ düzleminde bir doğru olan S_4 genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Aşağıdaki üç örnek doğru, çember ve silindirik helis ile üretilen genelleştirilmiş döneel yüzeylerdir.

Örnek 2.46.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$f(s, u) = (u, 0, 0, s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu z -ekseni ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$g(t, v) = (t, t^2 \cos \frac{v}{5}, \frac{3tv}{5}, t^2 \sin \frac{v}{5})$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman y -eksenli silindirik helis olsun. Bu durumda,

$$f(s, u)g(t, v) = \left(t(u - sts \sin \frac{v}{5}), -\frac{3}{5}stv + t^2 u \cos \frac{v}{5}, \frac{3tuv}{5} + st^2 \cos \frac{v}{5}, t(s + t \sin \frac{v}{5}) \right)$$

ve 2.3 eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(t(u - sts \sin \frac{v}{5}), -\frac{3}{5}stv + t^2 u \cos \frac{v}{5}, \frac{3tuv}{5} + st^2 \cos \frac{v}{5}, t(s + t \sin \frac{v}{5}) \right) (u, 0, 0, -s)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(t(s^2 + u^2), -\frac{1}{5}t(6suv + 5t(s - u)(s + u)\cos\frac{v}{5}), \frac{3}{5}t(-s^2 + u^2)v + 2st^2u\cos\frac{v}{5}, t^2(s^2 + u^2)\sin\frac{v}{5} \right)$$

olarak bulunur.

$\|f(s, u)\|^2 = s^2 + u^2$ dir. O halde

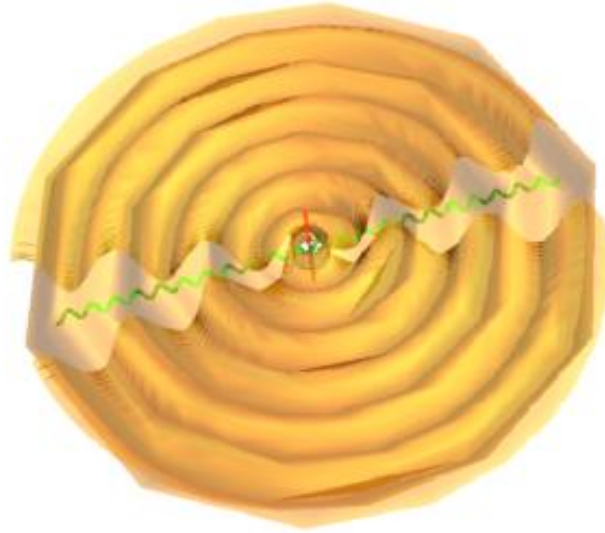
$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left(t, -\frac{t(6suv + 5t(s - u)(s + u)\cos\frac{v}{5})}{5(s^2 + u^2)}, \frac{\frac{3}{5}t(-s^2 + u^2)v + 2st^2u\cos\frac{v}{5}}{s^2 + u^2}, t^2\sin\frac{v}{5} \right)$$

elde edilir. $t = 4, u = 1$ seçilirse

$$S_5(u, v) = \left(-\frac{t(6suv + 5t(s - u)(s + u)\cos\frac{v}{5})}{5(s^2 + u^2)}, \frac{\frac{3}{5}t(-s^2 + u^2)v + 2st^2u\cos\frac{v}{5}}{s^2 + u^2}, t^2\sin\frac{v}{5} \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_5 yüzeyi Şekil 2.5 de gösterilmiştir.



Şekil 2.5. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı silindirik helis olan S_5 genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 2.47.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$f(s, u) = (2(s^2 + u^2), 3s^2 + u^2, 0, 2su)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu bir çember ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$g(t, v) = (t, t^2 \cos \frac{v}{5}, \frac{3tv}{5}, t^2 \sin \frac{v}{5})$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman y -eksenli silindirik helis olsun. Bu durumda,

$$f(s, u)g(t, v) = \left(t(-t(3s^2 + u^2)\cos \frac{v}{5} + 2(s^2 + u^2 - st\sin \frac{v}{5})), \right.$$

$$3s^2t + tu^2 - \frac{6}{5}stuv + 2t^2(s^2 + u^2)\cos \frac{v}{5},$$

$$\frac{1}{5}t(6(s^2 + u^2)v + 10stucos \frac{v}{5} - 5t(3s^2 + u^2)\sin \frac{v}{5}),$$

$$\left. 2stu + \frac{3}{5}t(3s^2 + u^2)v + 2t^2(s^2 + u^2)\sin \frac{v}{5} \right)$$

ve 2.3 eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(t(-t(3s^2 + u^2)\cos \frac{v}{5} + 2(s^2 + u^2 - st\sin \frac{v}{5})), \right.$$

$$3s^2t + tu^2 - \frac{6}{5}stuv + 2t^2(s^2 + u^2)\cos \frac{v}{5},$$

$$\frac{1}{5}t(6(s^2 + u^2)v + 10stucos \frac{v}{5} - 5t(3s^2 + u^2)\sin \frac{v}{5}),$$

$$2stu + \frac{3}{5}t(3s^2 + u^2)v$$

$$\left. + 2t^2(s^2 + u^2)\sin \frac{v}{5} \right) \left(2(s^2 + u^2), -3s^2 - u^2, 0, -2su \right)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(t(s^2 + u^2)(13s^2 + 5u^2), \right.$$

$$t^2(13s^4 + 10s^2u^2 + 5u^4)\cos \frac{v}{5} + \frac{4}{5}stu(-6(s^2 + u^2)v + 5t(3s^2 + u^2)\sin \frac{v}{5}),$$

$$-\frac{1}{5}t(s^2 + u^2)(15s^2v - 9u^2v - 40stucos \frac{v}{5} + 20t(3s^2 + u^2)\sin \frac{v}{5}),$$

$$\left. \frac{4}{5}t(3s^2 + u^2)(3(s^2 + u^2)v + 5stucos \frac{v}{5}) + t^2(-5s^4 + 6s^2u^2 + 3u^4)\sin \frac{v}{5} \right)$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = (s^2 + u^2)(13s^2 + 5u^2)$ dir. O halde

$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left(t, \right.$$

$$\frac{t^2(13s^4 + 10s^2u^2 + 5u^4)\cos \frac{v}{5} + \frac{4}{5}stu(-6(s^2 + u^2)v + 5t(3s^2 + u^2)\sin \frac{v}{5})}{(s^2 + u^2)(13s^2 + 5u^2)},$$

$$-\frac{((15s^2v - 9u^2v - 40stucos \frac{v}{5} + 20t(3s^2 + u^2)\sin \frac{v}{5}))}{5(13s^2 + 5u^2)},$$

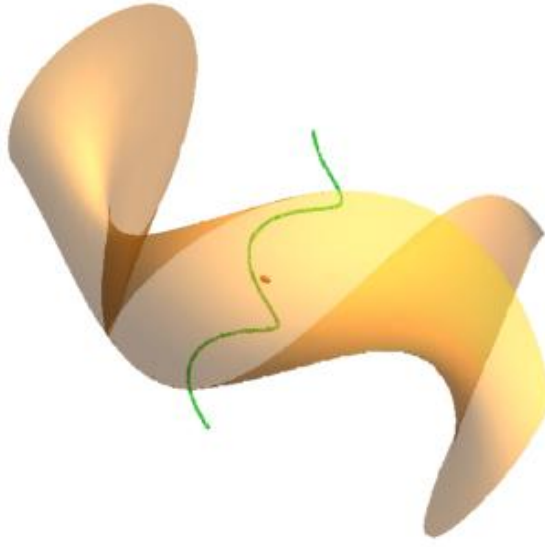
$$\left. \frac{(\frac{4}{5}t(3s^2 + u^2)(3(s^2 + u^2)v + 5stucos \frac{v}{5}) + t^2(-5s^4 + 6s^2u^2 + 3u^4)\sin \frac{v}{5})}{(s^2 + u^2)(13s^2 + 5u^2)} \right)$$

elde edilir. $t = 4, u = 1$ seçilirse

$$S_6(u, v) = \left(\frac{(16(-6s(1+s^2)v + 5(5+10s^2+13s^4)\cos\frac{v}{5} + 20(s+3s^3)\sin\frac{v}{5}))}{5(1+s^2)(5+13s^2)}, \right. \\ \left. \frac{(4(3(3-5s^2)v + 160s\cos\frac{v}{5} - 80(1+3s^2)\sin\frac{v}{5}))}{(25+65s^2)}, \right. \\ \left. \frac{(\frac{16}{5}(1+3s^2)(3(1+s^2)v + 20s\cos\frac{v}{5}) + 16(3+6s^2-5s^4)\sin\frac{v}{5})}{(1+s^2)(5+13s^2)} \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_6 yüzeyi Şekil 2.6 de gösterilmiştir.



Şekil 2.6. Doğrultusu bir çember ve doğrultmanı y -eksenli silindirik helis olan S_6 genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 2.48.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \\ f(s, u) = \left(u, u^2 \cos\frac{s}{5}, u^2 \sin\frac{s}{5}, \frac{4us}{5} \right)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu z -eksenli silindirik helis ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \\ g(t, v) = \left(t, t^2 \cos\frac{v}{5}, \frac{3tv}{5}, t^2 \sin\frac{v}{5} \right)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman y -eksenli silindirik helis olsun. Bu durumda,

$$f(s, u)g(t, v) = \left(-\frac{1}{5}tu(-5 + 5tucos\frac{s}{5}cos\frac{v}{5} + 3uvsin\frac{s}{5} + 4stsin\frac{v}{5}), \right. \\ \left. \frac{1}{25}tu(-12sv + 25ucos\frac{s}{5} + 25t(cos\frac{v}{5} + usin\frac{s}{5}sin\frac{v}{5})), \right. \\ \left. \frac{1}{5}tu(3v + 4stcos\frac{v}{5} + 5usin\frac{s}{5} - 5tucos\frac{s}{5}sin\frac{v}{5}), \right. \\ \left. \frac{1}{5}tu(4s + 3uvcos\frac{s}{5} - 5tucos\frac{v}{5}sin\frac{s}{5} + 5tsin\frac{v}{5}) \right)$$

ve 2.3 eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(-\frac{1}{5}tu(-5 + 5tucos\frac{s}{5}cos\frac{v}{5} + 3uvsin\frac{s}{5} + 4stsin\frac{v}{5}), \right. \\ \left. \frac{1}{25}tu(-12sv + 25ucos\frac{s}{5} + 25t(cos\frac{v}{5} + usin\frac{s}{5}sin\frac{v}{5})), \right. \\ \left. \frac{1}{5}tu(3v + 4stcos\frac{v}{5} + 5usin\frac{s}{5} - 5tucos\frac{s}{5}sin\frac{v}{5}), \right. \\ \left. \frac{1}{5}tu(4s + 3uvcos\frac{s}{5} - 5tucos\frac{v}{5}sin\frac{s}{5} + 5tsin\frac{v}{5}) \right) \left(u, -u^2cos\frac{s}{5}, -u^2sin\frac{s}{5}, -\frac{4us}{5} \right)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(\frac{1}{25}tu^2(16s^2 + 25(1 + u^2)), \right. \\ \left. \frac{1}{25}tu^2(-24sv + t(25 - 16s^2 + 25u^2cos\frac{2s}{5})cos\frac{v}{5} \right. \\ \left. + 5u(3uvsin\frac{2s}{5} + 2t(4scos\frac{s}{5} + 5sin\frac{s}{5})sin\frac{v}{5})), \right. \\ \left. \frac{1}{125}tu^2(75v - 48s^2v - 75u^2vcos\frac{2s}{5} + 25tcos\frac{v}{5}(8s + 5u^2sin\frac{2s}{5}) \right. \\ \left. + 50tu(-5cos\frac{s}{5} + 4ssin\frac{s}{5})sin\frac{v}{5}), \frac{1}{125}tu^2(10ucos\frac{s}{5}(3v + 4stcos\frac{v}{5}) \right. \\ \left. + 2u(12sv - 25tcos\frac{v}{5})sin\frac{s}{5} + t(25 + 16s^2 - 25u^2)sin\frac{v}{5}) \right)$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = u^2(1 + \frac{16s^2}{25} + u^2)$ dir. O halde

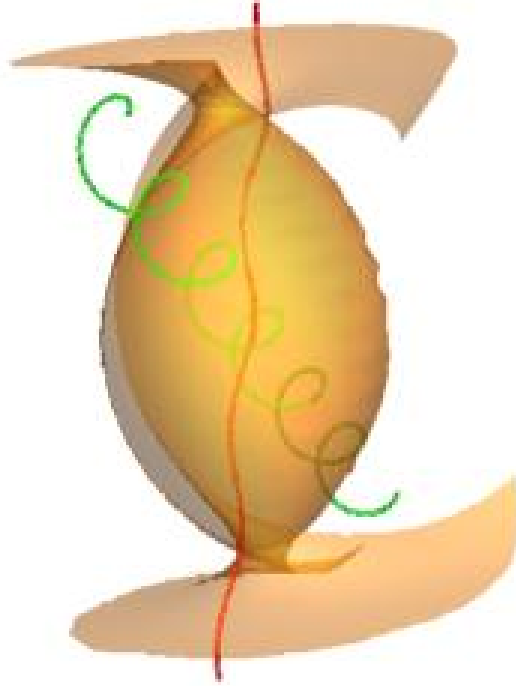
$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left(t, \frac{1}{(16s^2 + 25(1 + u^2))} t(-24sv + t(25 - 16s^2 + 25u^2cos\frac{2s}{5})cos\frac{v}{5} \right. \\ \left. + 5u(3uvsin\frac{2s}{5} + 2t(4scos\frac{s}{5} + 5sin\frac{s}{5})sin\frac{v}{5})), \right. \\ \left. \frac{(t(75v - 48s^2v - 75u^2vcos\frac{2s}{5} + 25tcos\frac{v}{5}(8s + 5u^2sin\frac{2s}{5})) + 50tu(-5cos\frac{v}{5} + 4ssin\frac{v}{5})sin\frac{v}{5})}{80s^2 + 125(1 + u^2)}, \right. \\ \left. \frac{t(10ucos\frac{v}{5}(3v + 4stcos\frac{v}{5}) + 2u(12sv - 25tcos\frac{v}{5})sin\frac{v}{5} + t(25 + 16s^2 - 25u^2)sin\frac{v}{5})}{(16s^2 + 25(1 + u^2))} \right)$$

elde edilir. $t = 4, u = 1$ seçilirse

$$S_7(u, v) = \left(\frac{1}{(16s^2 + 25(1 + u^2))} t(-24sv + t(25 - 16s^2 + 25u^2 \cos \frac{2s}{5}) \cos \frac{v}{5}) \right. \\ \left. + 5u(3uv \sin \frac{2s}{5} + 2t(4s \cos \frac{s}{5} + 5 \sin \frac{v}{5}) \sin \frac{v}{5}) \right), \\ \frac{(t(75v - 48s^2v - 75u^2v \cos \frac{2s}{5} + 25t \cos \frac{v}{5}(8s + 5u^2 \sin \frac{2s}{5})) + 50tu(-5 \cos \frac{v}{5} + 4s \sin \frac{v}{5}) \sin \frac{v}{5})}{80s^2 + 125(1 + u^2)}, \\ \left. \frac{t(10u \cos \frac{v}{5}(3v + 4st \cos \frac{v}{5}) + 2u(12sv - 25t \cos \frac{v}{5}) \sin \frac{v}{5} + t(25 + 16s^2 - 25u^2) \sin \frac{v}{5})}{(16s^2 + 25(1 + u^2))} \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_7 yüzeyi Şekil 2.7 de gösterilmiştir.



Şekil 2.7. Doğrultusu z -eksenli silindirik helis ve doğrultmanı y -eksenli silindirik helis olan S_7 genelleştirilmiş döneel yüzeyi

2.4. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Dönel Yüzeylerin Özellikleri

Bu bölümde, genelleştirilmiş bir dönel yüzey, reel kuaterniyon çarpımı tarafından üretilen rasyonel bir tensör çarpım yüzeyi olarak temsil edilebilecektir. Bu kavrayışı kullanarak, bir f doğrultusu boyunca bir g doğrultmanın döndürülmesiyle oluşturulan rasyonel genelleştirilmiş dönel yüzeylerinin bazı cebirsel ve geometrik özellikleri incelenecektir.

2.4.1. 3-Boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş dönel yüzeyler için matris gösterimi

Bu bölümde reel kuaterniyon çarpımı tarafından üretilen matris tanıtılacaktır.

Genelleştirilmiş dönel yüzeyleri temsil eden

$$f = (f_0, f_1, f_2, f_3)$$

reel kuaterniyonu için

$$M_f = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & -f_3 & f_2 \\ -f_2 & f_3 & f_0 & -f_1 \\ -f_3 & -f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$M_f M_{\bar{f}} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & -f_3 & f_2 \\ -f_2 & f_3 & f_0 & -f_1 \\ -f_3 & -f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & -f_1 & -f_2 & -f_3 \\ f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ f_2 & -f_3 & f_0 & f_1 \\ f_3 & f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix} = \|f\|^2 I_4$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$N_f = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ -f_2 & -f_3 & f_0 & f_1 \\ -f_3 & f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

matrisi için

$$N_f N_{\bar{f}} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ -f_2 & -f_3 & f_0 & f_1 \\ -f_3 & f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & -f_1 & -f_2 & -f_3 \\ f_1 & f_0 & -f_3 & f_2 \\ f_2 & f_3 & f_0 & -f_1 \\ f_3 & -f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix} = \|f\|^2 I_4$$

bulunur.

$R_q(p) = [p] M_q$ ve $L_p(q) = [q] N_p$ tanımından

$$\begin{aligned} fg\bar{f} &= f(g\bar{f}) \\ &= (g\bar{f})N_f \\ &= gM_{\bar{f}}N_f \\ &= g(M_{\bar{f}}N_f) = gR \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} fg\bar{f} &= (fg)\bar{f} \\ &= (fg)M_{\bar{f}} \\ &= gN_fM_{\bar{f}} \\ &= g(N_fM_{\bar{f}}) \\ &= gR \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$R = M_{\bar{f}}N_f = N_fM_{\bar{f}}$$

yazılır.

O halde, Denklem (2.3) ün matris gösterimi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$h = (h_0(s, u; t, v), h_1(s, u; t, v), h_2(s, u; t, v), h_3(s, u; t, v)) = fg\bar{f} = gR.$$

Burada

$$R = M_{\bar{f}}N_f = \begin{bmatrix} f_0 & -f_1 & -f_2 & -f_3 \\ f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ f_2 & -f_3 & f_0 & f_1 \\ f_3 & f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ -f_2 & -f_3 & f_0 & f_1 \\ -f_3 & f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

ya da

$$R = N_fM_{\bar{f}} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ -f_2 & -f_3 & f_0 & f_1 \\ -f_3 & f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & -f_1 & -f_2 & -f_3 \\ f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ f_2 & -f_3 & f_0 & f_1 \\ f_3 & f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$R = \begin{bmatrix} f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 & 2(f_0f_3 + f_1f_2) & 2(-f_0f_2 + f_1f_3) \\ 0 & 2(-f_0f_3 + f_1f_2) & f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 & 2(f_0f_1 + f_2f_3) \\ 0 & 2(f_0f_2 + f_1f_3) & 2(-f_0f_1 + f_2f_3) & f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

olarak elde edilir.

I_4 , 4×4 tipinde birim bir matris olmak üzere doğrudan bir hesaplama ile,

$$R = M_{\bar{f}}N_f$$

için

$$\begin{aligned} RR^T &= (M_{\bar{f}}N_f)(N_f^T M_{\bar{f}}^T) \\ &= M_{\bar{f}}\|f\|^2 M_{\bar{f}}^T \\ &= \|f\|^2 \|\bar{f}\|^2 I_4 \\ &= \|f\|^4 I_4 \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Buradan

$$R^T R = RR^T = (f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2 I_4 = \|f\|^4 I_4, \quad \det(R) = \|f\|^8 \quad (2.5)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \bar{f}gf &= \bar{f}(gf) \\ &= (gf)N_{\bar{f}} \\ &= gM_f N_{\bar{f}} \\ &= gR^T \end{aligned} \quad (2.6)$$

dir [12].

2.4.2. R matrisinin cebirsel özellikleri

Bu bölümde R matrisinin cebirsel özellikleri kısaca özetlenecektir.

Notasyonumuzu sabitlemek için

$$R = (R_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq 4$$

olsun.

Burada R_{ij} , R nin i inci satırında ve j inci sütununda bulunan bileşeni ifade etmektedir.

Lemma 2.49. 1. R matrisinin satır vektörlerini

$$A_i = (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3}, R_{i4}), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

sütun vektörlerini de

$$B_i = (R_{1i}, R_{2i}, R_{3i}, R_{4i}), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

ile gösterilsin. Bu durumda R matrisinin satır (sütun) vektörleri birbirlerine diktir.

2. R matrisinin satır vektörleri için

$$\langle A_i, A_i \rangle = R_{1j}^2 + R_{2j}^2 + R_{3j}^2 + R_{4j}^2 = \|f(s, u)\|^4, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

dir.

3. R matrisinin sütun vektörleri için

$$\langle B_i, B_i \rangle = R_{j1}^2 + R_{j2}^2 + R_{j3}^2 + R_{j4}^2 = \|f(s, u)\|^4, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

dir.

4. $(w, x, y, z) = gR$ olsun. Dolayısıyla

$$w^2 = \|f(s, u)\|^4 g_0^2(t, v),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \|f(s, u)\|^4 \left(\sum_{i=1}^3 g_i^2(t, v) \right)$$

dir.

5. R nin her 2×2 tipindeki minörü, $\|f(s, u)\|^2$ çarpanını içerir [12].

İspat.

1.

$$\begin{aligned} \langle A_3, A_4 \rangle &= \langle (0, 2(f_0 f_3 + f_1 f_2), f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2, 2(-f_0 f_1 + f_2 f_3)), \\ &\quad (0, 2(-f_0 f_2 + f_1 f_3), 2(f_0 f_1 + f_2 f_3), f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2) \rangle \\ &= 4(-f_0^2 f_2 f_3 + f_0 f_3^2 f_1 - f_0 f_1 f_2 + f_1^2 f_2 f_3) + 2(f_2^2 - f_3^2)(f_0 f_1) \\ &\quad + 2(f_0^2 - f_1^2) f_2 f_3 + 2(f_0^2 - f_1^2)(f_2 f_3) + 2(f_2^2 - f_3^2)(f_0 f_1) \\ &= 4(f_2^2 - f_1^2)(f_0 f_1) + 4(f_2^2 - f_3^2)(f_2 f_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}\langle A_3, A_4 \rangle &= 0 \\ &= \|A_3\| \cdot \|A_4\| \cdot \cos\theta \quad \theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\|A_3 \wedge A_4\| = \|A_3\| \cdot \|A_4\| \sin\theta = \|f\|^4 \|f\|^4 = \|f\|^8 \neq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\langle A_3, A_4 \rangle = 0$ dır.

Benzer şekilde diğer satır vektörleri için de

$$\langle A_i, A_k \rangle = 0, \quad 1 \leq i \neq k \leq 4$$

dir.

Dolayısıyla satır vektörleri birbirlerine diktir.

$$\begin{aligned}\langle B_3, B_4 \rangle &= \langle (0, 2(f_0f_3 + f_1f_2), f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2, 2(-f_0f_1 + f_2f_3)), \\ &\quad (0, 2(-f_0f_2 + f_1f_3), 2(f_0f_1 + f_2f_3), f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2) \rangle \\ &= 4(-f_0^2f_2f_3 + f_0f_3^2f_1 - f_0f_1f_2 + f_1^2f_2f_3) + 2(f_2^2 - f_3^2)(f_0f_1) \\ &\quad + 2(f_0^2 - f_1^2)f_2f_3 + 2(f_0^2 - f_1^2)(f_2f_3) + 2(f_2^2 - f_3^2)(f_0f_1) \\ &= 4(f_2^2 - f_1^2)(f_0f_1) + 4(f_2^2 - f_3^2)(f_2f_3)\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $\langle B_3, B_4 \rangle = 0$ dır.

Benzer şekilde diğer sütun vektörleri için de

$$\langle B_i, B_k \rangle = 0, \quad 1 \leq i \neq k \leq 4$$

dir.

Dolayısıyla sütun vektörleri birbirlerine diktir. Bu durumda

$$ebob(A_2, A_3, A_4) = ebob(B_2, B_3, B_4) = 1$$

dir.

2.

$$\begin{aligned}\langle A_2, A_2 \rangle &= (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 + 4(-f_0f_3 + f_1f_2)^2 + 4(f_0f_2 + f_1f_3)^2 \\ &= (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 + 4f_0^2f_3^2 + 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_2^2 + 4f_1^2f_3^2 \\ &= ((f_0^2 + f_1^2) - (f_2^2 + f_3^2))^2 + 4f_0^2f_3^2 + 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_2^2 + 4f_1^2f_3^2 \\ &= (f_0^2 + f_1^2)^2 - 2(f_0^2 + f_1^2)(f_2^2 + f_3^2) + (f_2^2 + f_3^2)^2 + 4f_0^2f_3^2 \\ &\quad + 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_2^2 + 4f_1^2f_3^2 \\ &= f_0^4 + f_1^4 + f_2^4 + f_3^4 + 2f_0^2f_1^2 + 2f_0^2f_2^2 + 2f_0^2f_3^2 + 2f_1^2f_2^2 \\ &\quad + 2f_1^2f_3^2 + 2f_2^2f_3^2 \\ &= (f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2 \\ &= \|f(s, u)\|^4\end{aligned}$$

bulunur.

3.

$$\begin{aligned}\langle B_2, B_2 \rangle &= (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 + 4(f_0f_3 + f_1f_2)^2 + 4(-f_0f_2 + f_1f_3)^2 \\ &= (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 + 4f_0^2f_3^2 + 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_2^2 + 4f_1^2f_3^2 \\ &= ((f_0^2 + f_1^2) - (f_2^2 + f_3^2))^2 + 4f_0^2f_3^2 + 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_2^2 + 4f_1^2f_3^2 \\ &= (f_0^2 + f_1^2)^2 - 2(f_0^2 + f_1^2)(f_2^2 + f_3^2) + (f_2^2 + f_3^2)^2 + 4f_0^2f_3^2 \\ &\quad + 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_2^2 + 4f_1^2f_3^2 \\ &= f_0^4 + f_1^4 + f_2^4 + f_3^4 + 2f_0^2f_1^2 + 2f_0^2f_2^2 + 2f_0^2f_3^2 + 2f_1^2f_2^2 \\ &\quad + 2f_1^2f_3^2 + 2f_2^2f_3^2 \\ &= (f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2 \\ &= \|f(s, u)\|^4\end{aligned}$$

bulunur.

4. $(w, x, y, z) = gR$ olsun.

$$f(s, u) = (f_0(s, u), f_1(s, u), f_2(s, u), f_3(s, u))$$

ve

$$g(t, v) = (g_0(t, v), g_1(t, v), g_2(t, v), g_3(t, v))$$

için

$$[g]R = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|f(s, u)\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ 0 & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ 0 & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} w &= g_0 \|f(s, u)\|^2 \Rightarrow w^2 = g_0^2 \|f(s, u)\|^4 \\ x &= g_1 R_{22} + g_2 R_{32} + g_3 R_{42} \\ y &= g_1 R_{23} + g_2 R_{33} + g_3 R_{43} \\ z &= g_1 R_{24} + g_2 R_{34} + g_3 R_{44} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} x^2 &= g_1^2 R_{22}^2 + g_2^2 R_{32}^2 + g_3^2 R_{42}^2 + 2g_1 g_2 R_{22} R_{32} + 2g_1 g_3 R_{22} R_{42} + 2g_2 g_3 R_{32} R_{42} \\ y^2 &= g_1^2 R_{23}^2 + g_2^2 R_{33}^2 + g_3^2 R_{43}^2 + 2g_1 g_2 R_{23} R_{33} + 2g_1 g_3 R_{23} R_{43} + 2g_2 g_3 R_{33} R_{43} \\ z^2 &= g_1^2 R_{24}^2 + g_2^2 R_{34}^2 + g_3^2 R_{44}^2 + 2g_1 g_2 R_{24} R_{34} + 2g_1 g_3 R_{24} R_{44} + 2g_2 g_3 R_{34} R_{44} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= g_1^2 (R_{22}^2 + R_{23}^2 + R_{24}^2) + g_2^2 (R_{32}^2 + R_{33}^2 + R_{34}^2) \\ &\quad + g_3^2 (R_{42}^2 + R_{43}^2 + R_{44}^2) \\ &\quad + 2g_1 g_2 (R_{22} R_{32} + R_{23} R_{33} + R_{24} R_{34}) \\ &\quad + 2g_1 g_3 (R_{22} R_{42} + R_{23} R_{43} + R_{24} R_{44}) \\ &\quad + 2g_2 g_3 (R_{32} R_{42} + R_{33} R_{43} + R_{34} R_{44}) \end{aligned}$$

veya Lemma 2.49. den

$$x^2 + y^2 + z^2 = \|f(s, u)\|^4 (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$x^2 + y^2 + z^2 = \|f(s, u)\|^4 \left(\sum_{i=1}^3 g_i^2(t, v) \right)$$

elde edilir.

5. R matrisinin aşağıdaki 2×2 tipinde minörünü ele alalım,

$$\det \begin{bmatrix} f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 & 0 \\ 0 & f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 \end{bmatrix} = (f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)(f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)$$

dir. Benzer şekilde, diğer 2×2 tipindeki minörlerin de $\|f(s, u)\|^2$ çarpanını içerdiği gösterilebilir.

■

2.5. $h = fg\bar{f}$ Yüzeyin Geometrik Özellikleri

Bu bölümde $h(s, u; t, v) = f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)$ yüzeylerinin geometrik bir özelliği incelenecektir. Aşağıda, g doğrultmanı bir küre üzerinde yattığında, h yüzeyi bir küre parçası olduğu gösterilecektir.

İlk olarak, afin uzayda $h(s, u; t, v)$ yüzeyi üzerindeki herhangi bir $h(s_0, u_0; t_0, v_0)$ noktasında, $h(s_0, u_0; t, v) = f(s_0, u_0)g(t, v)\bar{f}(s_0, u_0)$ eğrisi $f(s_0, u_0)$ eksenini boyunca dönen $g(t, v)$ doğrultusunun bir kopyasıdır ve $h(s, u; t_0, v_0) = f(s, u)g(t_0, v_0)\bar{f}(s, u)$ bir küresel eğridir. Yani $h(s, u; t_0, v_0) = f(s, u)g(t_0, v_0)\bar{f}(s, u)$ eğrisinin koordinat fonksiyonları küre denklemini sağlar.

$h(s, u; t_0, v_0)$ eğrisinin küresel bir eğri olması Lemma 2.49. in 4. maddesinden elde edilebilir. Yani $(w, x, y, z) = h(s, u; t_0, v_0)$ olmak üzere

$$w^2 = \|f(s, u)\|^4 g_0^2(t_0, v_0)$$

ve

$$\frac{\sum_{i=1}^3 g_i^2(t_0, v_0)}{g_0^2(t_0, v_0)} w^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Bu eşitlik yardımıyla

$$\|f(s, u)\|^4 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sum_{i=1}^3 g_i^2(t, v)}$$

ve Lemma 2.49. in 4. maddesinden

$$\begin{aligned} w^2 &= \|f(s, u)\|^4 g_0^2(t_0, v_0) \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sum_{i=1}^3 g_i^2(t, v)} g_0^2(t_0, v_0) \end{aligned}$$

ve

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 g_i^2(t_0, v_0)}{g_0^2(t_0, v_0)} w^2$$

dir.

Afin uzayda $w \neq 0$ olduğundan $g_0(t_0, v_0) \neq 0$ ve

$$\frac{\sum_{i=1}^3 g_i^2(t_0, v_0)}{g_0^2(t_0, v_0)}$$

bir sabittir.

Dolayısıyla $h(s, u; t_0, v_0) = f(s, u)g(t_0, v_0)\bar{f}(s, u)$ eğrisinin koordinatları kürenin denklemini sağlar. Yani $h(s, u; t_0, v_0)$ eğrisi küresel bir eğridir.

Ayrıca, aşağıdaki önerme g doğrultmanı bir küre üzerinde yattığında, h yüzeyinin bu kürenin bir parçası olduğunu göstermektedir [12].

Önerme 2.50. Eğer g doğrultmanı sıfır olmayan bir β sabiti için $g_0^2 - \beta(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, $h = fg\bar{f}$ yüzeyinin kapalı denklemi

$$w^2 - \beta(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

dır.

Özel olarak, g

$$g_0^2 - (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa, o zaman g birim küre üzerinde bir eğridir ve h yüzeyi bu birim kürenin bir parçasıdır [12].

İspat. $(w, x, y, z) = h = (h_0, h_1, h_2, h_3) = fg\bar{f} = gR$ olsun.

Lemma 2.49.'in 4. maddesinden,

$$\begin{aligned} w^2 &= \|f(s, u)\|^4 g_0^2(t, v) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \|f(s, u)\|^4 (\sum_{i=1}^3 g_i^2(t, v)) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $g = (g_0, g_1, g_2, g_3)$ doğrultmanı,

$$g_0^2 = \beta(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)$$

eşitliğini sağlar ve h yüzeyinin kapalı denklemi

$$w^2 - \beta(x^2 + y^2 + z^2) = \|f\|^4(g_0^2 - \beta(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)) = 0$$

dir. g doğrultmanı

$$g_0^2 - (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = 0$$

denklemini sağlar. Dolayısıyla g birim küre üzerinde bir eğridir ve $h = fg\bar{f}$ yüzeyi bu birim kürenin bir parçasıdır [12].

■

Örnek 2.51.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$f(s, u) = (u, s, 0, 3s)$$

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$g(t, v) = (t^2 + v^2, 0, t^2 - v^2, 2tv)$$

olsun.

Burada $u = u_0 \neq 0$ bir sabit olmak üzere f doğrultusu $(\frac{u_0}{u_0}, 0, \frac{3u_0}{u_0})$ doğrusunu ve $t = t_0 \neq 0$ bir sabit olmak üzere g doğrultmanı $(0, \frac{t_0^2 - v^2}{t_0^2 + v^2}, \frac{2t_0v}{t_0^2 + v^2})$ merkezi orijin olan birim çemberi ifade etmektedir. Dolayısıyla (2.3) eşitliği ile belirli S_8 genelleştirilmiş dönele yüzeyi g doğrultmanlı f doğrultulu bir küre yüzeyi parçası gösterir. Gerçekten

$$f(s, u)g(t, v) = (-6stv + u(t^2 + v^2), -3s(t^2 - v^2) + s(t^2 + v^2),$$

$$-2stv + u(t^2 - v^2), 2tuv + s(t^2 - v^2) + 3s(t^2 + v^2))$$

ve (2.3) eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (-6stv + u(t^2 + v^2), -3s(t^2 - v^2) + s(t^2 + v^2), -2stv + u(t^2 - v^2),$$

$$2tuv + s(t^2 - v^2) + 3s(t^2 + v^2))(u, -s, 0, -3s)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = (10s^2 + u^2)(t^2 + v^2), 6s(-t^2u + 2stv + uv^2),$$

$$-4stuv + u^2(t - v)(t + v) + 10s^2(-t^2 + v^2),$$

$$2(8s^2tv + tu^2v + su(t - v)(t + v))$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = 10s^2 + u^2$ dir. O halde

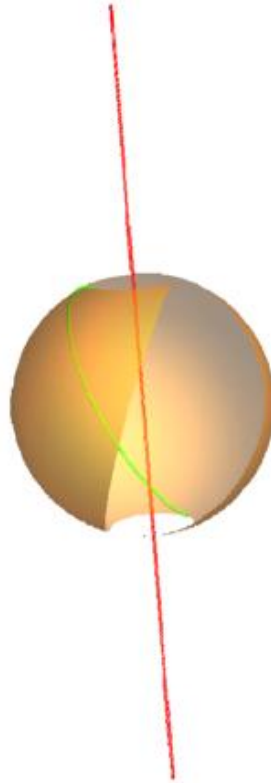
$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left(t^2 + v^2, \frac{6s(-t^2u + 2stv + uv^2)}{10s^2 + u^2}, \right. \\ \left. \frac{-4stuv + u^2(t - v)(t + v) + 10s^2(-t^2 + v^2)}{10s^2 + u^2}, \right. \\ \left. \frac{(2(8s^2tv + tu^2v + su(t - v)(t + v)))}{10s^2 + u^2} \right)$$

elde edilir. $t = u = 1$ seçilirse

$$S_8(u, v) = \left(1 + v^2, \frac{(6s(-1 + 2sv + v^2))}{1 + 10s^2}, \frac{(1 - 4sv - v^2 + 10s^2(-1 + v^2))}{1 + 10s^2}, \right. \\ \left. \frac{2(s + v + 8s^2v - sv^2)}{1 + 10s^2} \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_8 yüzeyi Şekil 2.8 de gösterilmiştir [12].



Şekil 2.8. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı çember olan S_8 genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 2.52.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$
$$f(s, u) = (2(s^2 + u^2), 3s^2 + u^2, 0, 2su)$$

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$
$$g(t, v) = (t^2 + v^2, 0, t^2 - v^2, 2tv)$$

olsun.

Burada $u = u_0 \neq 0$ bir sabit olmak üzere f doğrultusu $(\frac{3s^2+u_0^2}{2(s^2+u_0^2)}, 0, \frac{2su_0}{2(s^2+u_0^2)})$ merkezi $(1, 0)$ ve yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan çemberi g doğrultmanı Örnek 2.51. teki çemberi ifade etmektedir. Dolayısıyla (2.3) eşitliği ile belirli S_9 genelleştirilmiş döneel yüzeyi g çemberinin f çemberi etrafında döndürülmesiyle oluşan S_9 genelleştirilmiş döneel yüzeyi bir küre parçasıdır ve yüzeyi bir küresel (at) toynağı şeklindedir. Gerçekten

$$f(s, u)g(t, v) = \left(-4stuv + 2(s^2 + u^2)(t^2 + v^2), -2su(t^2 - v^2) + (3s^2 + u^2)(t^2 + v^2), \right. \\ \left. -2t(3s^2 + u^2)v + 2(s^2 + u^2)(t^2 - v^2), \right. \\ \left. 4t(s^2 + u^2)v + (3s^2 + u^2)(t^2 - v^2) + 2su(t^2 + v^2) \right)$$

ve (2.3) eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(-4stuv + 2(s^2 + u^2)(t^2 + v^2), \right. \\ \left. -2su(t^2 - v^2) + (3s^2 + u^2)(t^2 + v^2), \right. \\ \left. -2t(3s^2 + u^2)v + 2(s^2 + u^2)(t^2 - v^2), \right. \\ \left. 4t(s^2 + u^2)v + (3s^2 + u^2)(t^2 - v^2) + 2su(t^2 + v^2) \right) \\ (2(s^2 + u^2), -3s^2 - u^2, 0, -2su)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left((s^2 + u^2)(13s^2 + 5u^2)(t^2 + v^2), \right. \\ \left. 8su(u^2(-t^2 + tv + v^2) + s^2(-t^2 + 3tv + v^2)), \right. \\ \left. -((s^2 + u^2)(-u^2(t - 3v)(3t + v) + s^2(5t - v)(t + 5v))), \right. \\ \left. 2(u^4(2t - v)(t + 2v) + s^4(2t - 3v)(3t + 2v) \right. \\ \left. + 2s^2u^2(4t^2 + 3tv - 4v^2)) \right)$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = (s^2 + u^2)(13s^2 + 5u^2)$ dir. O halde

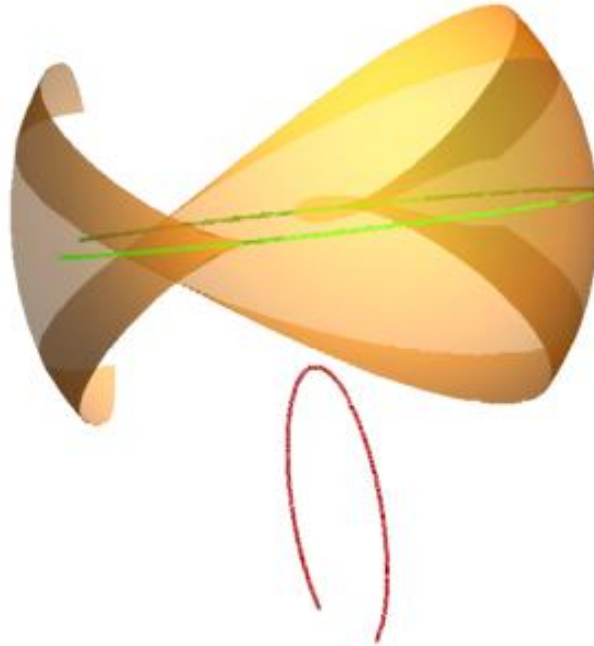
$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left(t^2 + v^2, \frac{(8su(u^2(-t^2 + tv + v^2) + s^2(-t^2 + 3tv + v^2)))}{(t^2 + v^2)(s^2 + u^2)(13s^2 + 5u^2)}, \right. \\ \left. \frac{(u^2(t - 3v)(3t + v) - s^2(5t - v)(t + 5v))}{(t^2 + v^2)(13s^2 + 5u^2)}, \right. \\ \left. \frac{(2(u^4(2t - v)(t + 2v) + s^4(2t - 3v)(3t + 2v) + 2s^2u^2(4t^2 + 3tv - 4v^2)))}{(t^2 + v^2)(s^2 + u^2)(13s^2 + 5u^2)} \right)$$

elde edilir. $t = u = 1$ seçilirse

$$S_9(u, v) = \left(1 + v^2, \frac{-(8s(1 + (-1 + v)v + s^2(1 + (-3 + v)v)))}{(1 + s^2)(5 + 13s^2)}, \right. \\ \left. \frac{3 + v(-8 + 3v) - s^2(5 + v(24 + 5v))}{5 + 13s^2}, \right. \\ \left. \frac{2(2 + v(3 + 2v) + s^2(8 + 6v + 8v^2) + s^4(6 + v(-5 + 6v)))}{(1 + s^2)(5 + 13s^2)} \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_9 yüzeyi Şekil 2.9 de gösterilmiştir [12].



Şekil 2.9. Doğrultusu çember ve doğrultmanı çember olan S_9 genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 2.53.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$f(s, u) = (s, u, 0, 0)$$

ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$g(t, v) = ((v^2 + t^2)(v^4 + t^4), (v^2 - t^2)(v^2 + t^2)^2, 4t^3v^3, -2v^2t^2(v^2 - t^2))$$

olsun.

Burada $u = u_0 \neq 0$ bir sabit olmak üzere f doğrultusu Örnek 2.51. teki doğruyu ve $t = t_0 \neq 0$ bir sabit olmak üzere g doğrultmanı $\left(\frac{(v^2 - t_0^2)(v^2 + t_0^2)}{v^4 + t_0^4}, \frac{4t_0^3v^3}{(v^2 + t_0^2)(v^4 + t_0^4)}, -\frac{2v^2t_0^2(v^2 - t_0^2)}{(v^2 + t_0^2)(v^4 + t_0^4)} \right)$ küresel sextic eğrisini belirtmektedir. Bu küresel sextic eğrinin f nin belirttiği doğru etrafında döndürülmesiyle oluşan S_{10} genelleştirilmiş döneel yüzeyi bir küre yüzeyi parçasıdır. Gerçekten

$$f(s, u)g(t, v) = \left((t^2 + v^2)(t^4(s + u) + (s - u)v^4), -((t^2 + v^2)(t^4(s - u) - (s + u)v^4)), \right.$$

$$\left. 2t^2v^2(-t^2u + 2stv + uv^2), 2t^2v^2(2tuv + s(t - v)(t + v)) \right)$$

ve (2.3) eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left((t^2 + v^2)(t^4(s + u) + (s - u)v^4), \right.$$

$$\left. -((t^2 + v^2)(t^4(s - u) - (s + u)v^4)), \right.$$

$$2t^2v^2(-t^2u + 2stv + uv^2),$$

$$\left. 2t^2v^2(2tuv + s(t - v)(t + v)) \right) (s, -u, 0, 0)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left((s^2 + u^2)(t^2 + v^2)(t^4 + v^4), \right.$$

$$\left. -((s^2 + u^2)(t^2 + v^2)(t^4 - v^4)), \right.$$

$$4t^2v^2(-tu + sv)(st + uv),$$

$$\left. 2t^2v^2(u(-t + v) + s(t + v))(s(t - v) + u(t + v)) \right)$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = s^2 + u^2$ dir. O halde

$$\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} = \left((t^2 + v^2)(t^4 + v^4), -((t^2 + v^2)(t^4 - v^4)), \right.$$

$$\left. \frac{(4t^2v^2(-tu + sv)(st + uv))}{s^2 + u^2}, \right.$$

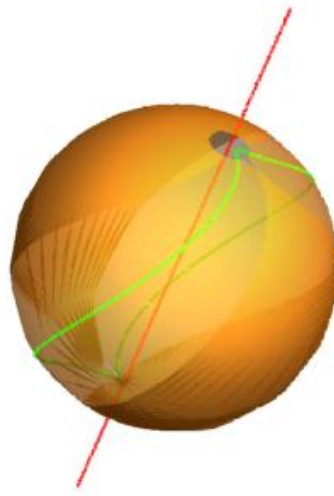
$$\left. \frac{(2t^2v^2(u(-t + v) + s(t + v))(s(t - v) + u(t + v)))}{s^2 + u^2} \right)$$

elde edilir. $t = u = 1$ seçilirse

$$S_{10}(u, v) = \left(1 - \frac{2t^4}{t^4 + v^4}, \frac{4t^2v^2(-tu + sv)(st + uv)}{(s^2 + u^2)(t^2 + v^2)(t^4 + v^4)}, \frac{2t^2v^2(u(-t + v) + s(t + v))(s(t - v) + u(t + v))}{(s^2 + u^2)(t^2 + v^2)(t^4 + v^4)} \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_{10} yüzeyi Şekil 2.10 de gösterilmiştir [12].



Şekil 2.10. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı küresel sextic eğrisi olan S_{10} genelleştirilmiş döneş yüzeyi

Bu yüzeylerin her birinin g doğrultmanı Önerme 2.50. göre

$$g_0^2 - g_1^2 - g_2^2 - g_3^2 = 0$$

eşitliğini sağladığından, S_8 , S_9 ve S_{10} yüzeyleri aynı

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

kapalı gösterimine sahiptir.

Aşağıdaki iki örnek doğru, çember, silindirik helis ve küresel helis ile üretilen genelleştirilmiş küresel dönele yüzeylerdir.

Örnek 2.54.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$f(s, u) = \left(u, u^2 \cos \frac{s}{5}, \frac{3us}{5}, u^2 \sin \frac{s}{5} \right)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu y -eksenli silindirik helis ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$g(t, v) = (t^2 + v^2, 0, t^2 - v^2, 2tv)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman çember olsun. Bu durumda,

$$f(s, u)g(t, v) = \left(\frac{1}{5}u((5 - 3s)t^2 + (5 + 3s)v^2 - 10tuv \sin \frac{s}{5}), \right.$$

$$\frac{1}{5}u(6stv + 5u(t^2 + v^2) \cos[s/5] + 5u(-t^2 + v^2) \sin \frac{s}{5}),$$

$$\frac{1}{5}u((5 + 3s)t^2 + (-5 + 3s)v^2 - 10tuv \cos \frac{s}{5}),$$

$$\left. u(2tv + u(t - v)(t + v) \cos \frac{s}{5} + u(t^2 + v^2) \sin \frac{s}{5}) \right)$$

ve 2.3 eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(\frac{1}{5}u((5 - 3s)t^2 + (5 + 3s)v^2 - 10tuv \sin \frac{s}{5}), \right.$$

$$\frac{1}{5}u(6stv + 5u(t^2 + v^2) \cos \frac{s}{5} + 5u(-t^2 + v^2) \sin \frac{s}{5}),$$

$$\frac{1}{5}u((5 + 3s)t^2 + (-5 + 3s)v^2 - 10tuv \cos \frac{s}{5}),$$

$$u(2tv + u(t - v)(t + v) \cos \frac{s}{5}$$

$$\left. + u(t^2 + v^2) \sin \frac{s}{5}) \right) \left(u, -u^2 \cos \frac{s}{5}, -\frac{3us}{5}, -u^2 \sin \frac{s}{5} \right)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(\frac{1}{25}u^2(9s^2 + 25(1 + u^2))(t^2 + v^2), \right.$$

$$\frac{2}{5}u^2(6stv + 3su(t - v)(t + v) \cos \frac{s}{5} + 5u(-t^2 + v^2 + 2tuv \cos \frac{s}{5}) \sin \frac{s}{5}),$$

$$\frac{1}{25}u^2((25 + 9s^2 - 25u^2)(t - v)(t + v) + 20tuv(-5 \cos \frac{s}{5} + 3s \sin \frac{s}{5})),$$

$$\frac{2}{25}u^2((25 - 9s^2)tv + 5u(5(t - v)(t + v) \cos \frac{s}{5} - 5tuv \cos \frac{2s}{5}$$

$$\left. + 3s(t - v)(t + v) \sin \frac{s}{5})) \right)$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = u^2(1 + \frac{9s^2}{25} + u^2)$ dir. O halde

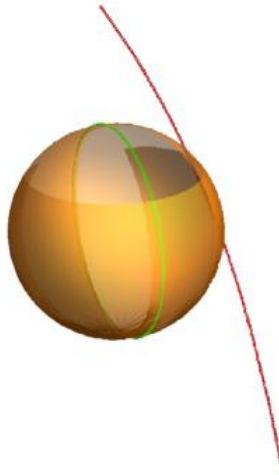
$$\begin{aligned} \frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} &= \left(\frac{\frac{1}{25}u^2(9s^2 + 25(1 + u^2))(t^2 + v^2)}{\frac{1}{25}u^2(9s^2 + 25(1 + u^2))(t^2 + v^2)}, \right. \\ &\frac{\frac{2}{5}u^2(6stv + 3su(t - v)(t + v)\cos\frac{s}{5} + 5u(-t^2 + v^2 + 2tuv\cos\frac{s}{5})\sin\frac{s}{5})}{\frac{1}{25}u^2(9s^2 + 25(1 + u^2))(t^2 + v^2)}, \\ &\frac{\frac{1}{25}u^2((25 + 9s^2 - 25u^2)(t - v)(t + v) + 20tuv(-5\cos\frac{s}{5} + 3s\sin\frac{s}{5}))}{\frac{1}{25}u^2(9s^2 + 25(1 + u^2))(t^2 + v^2)}, \\ &\frac{1}{\frac{1}{25}u^2(9s^2 + 25(1 + u^2))(t^2 + v^2)} \frac{2}{25}u^2((25 - 9s^2)tv \\ &\left. + 5u(5(t - v)(t + v)\cos\frac{s}{5} - 5tuv\cos\frac{2s}{5} + 3s(t - v)(t + v)\sin\frac{s}{5})) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $t = 4, u = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} S_{11}(u, v) &= \left(\frac{(10(24sv - 3s(-4 + v)(4 + v)\cos\frac{s}{5} + 5(-16 + v^2 + 8v\cos\frac{s}{5})\sin\frac{s}{5}))}{((50 + 9s^2)(16 + v^2))}, \right. \\ &\frac{-9s^2(-4 + v)(4 + v) + 80v(-5\cos\frac{s}{5} + 3s\sin\frac{s}{5})}{(50 + 9s^2)(16 + v^2)}, \\ &\left. \frac{50(-16 + v^2)\cos\frac{s}{5} + 8v(-25 + 9s^2 + 25\cos\frac{2s}{5}) + 30s(-16 + v^2)\sin\frac{s}{5}}{(50 + 9s^2)(16 + v^2)} \right) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

S_{11} yüzeyi Şekil 2.11 de gösterilmiştir.



Şekil 2.11. Doğrultusu y -eksenli silindirik helis ve doğrultmanı çember olan S_{11} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 2.55.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$f(s, u) = \left(u, s, 0, 3s \right)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu bir doğru ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

$$g(t, v) = \left(t, t \cos v \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} + \frac{t^2 \sin v \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}}, t \sin v \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} - \frac{t^2 \cos v \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}}, \frac{at \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}} \right)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman küresel helis olsun. Bu durumda,

$$f(s, u)g(t, v) = \left(t \left(u - s \cos v \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} - \frac{s(3a+t \sin v \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}})}{\sqrt{a^2+t^2}} \right), \right.$$

$$t \left(s + u \cos v \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} - 3s \cos v \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \sin v + \frac{t(3s \cos v + u \sin v) \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}} \right),$$

$$\frac{t \left(\sqrt{a^2+t^2} u \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \sin v - s(a - 3t \sin v \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}) + \cos v \left(3s \sqrt{a^2+t^2} \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} - t \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \right) \right)}{\sqrt{a^2+t^2}},$$

$$\left. t \left(3s + s \cos v \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \sin v + \frac{(au - st \cos v) \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}} \right) \right)$$

ve 2.3 eşitliğinden

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(t \left(u - s \cos v \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} - \frac{s(3a+t \sin v \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}})}{\sqrt{a^2+t^2}} \right), \right.$$

$$t \left(s + u \cos v \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} - 3s \cos v \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \sin v + \frac{t(3s \cos v + u \sin v) \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}} \right),$$

$$\frac{t \left(\sqrt{a^2+t^2} u \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \sin v - s(a - 3t \sin v \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}) + \cos v \left(3s \sqrt{a^2+t^2} \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} - t \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \right) \right)}{\sqrt{a^2+t^2}},$$

$$\left. t \left(3s + s \cos v \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \sin v + \frac{(au - st \cos v) \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}} \right) \right) \left(u, -s, 0, -3s \right)$$

veya

$$f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u) = \left(t(10s^2 + u^2), \right.$$

$$t \left(\frac{-6st\sqrt{a^2+t^2} u \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \sin v + (6as^2 + t(-8s^2 + u^2) \sin v \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}})}{\sqrt{a^2+t^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{\cos v \left(6s\sqrt{a^2+t^2} u \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} + 6st \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \right)}{\sqrt{a^2+t^2}} \right),$$

$$t \left(\frac{(\sqrt{a^2+t^2}(-10s^2 + u^2) \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \sin v - 2su(a - 3t \sin v) \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}})}{\sqrt{a^2+t^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{\cos v \left(6s\sqrt{a^2+t^2} u \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} + t(10s^2 - u^2) \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \right)}{\sqrt{a^2+t^2}} \right),$$

$$t \left(6s^2 \cos v \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} + 2s u \cos \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} \sin v + \frac{a(8s^2 + u^2) \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}} + \frac{2st(-u \cos v + 3s \sin v) \sin \frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}} \right)$$

olarak bulunur. $\|f(s, u)\|^2 = 10s^2 + u^2$ dir. O halde

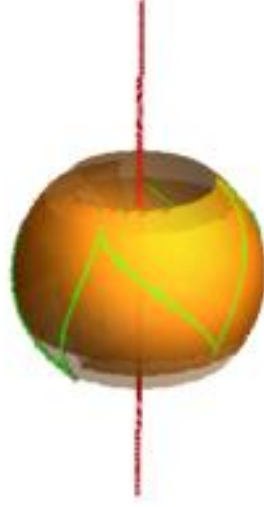
$$\begin{aligned}
\frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|^2} &= \frac{1}{t(10s^2 + u^2)} \left(t(10s^2 + u^2), \right. \\
&t \left(\frac{-6st\sqrt{a^2 + t^2}ucos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}sinv + (6as^2 + t(-8s^2 + u^2)sinvsin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right. \\
&+ \left. \frac{cosv(6s\sqrt{a^2 + t^2}ucos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} + 6stusin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}})}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right), \\
&t \left(\frac{\sqrt{a^2 + t^2}(-10s^2 + u^2)cos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}sinv - 2su(a - 3tsinv)sin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right. \\
&+ \left. \frac{cosv(6s\sqrt{a^2 + t^2}ucos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} + t(10s^2 - u^2)sin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}})}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right), \\
&t \left(6s^2cosvcos\frac{tv}{\sqrt{a^2 + t^2}} + 2sucos\frac{tv}{\sqrt{a^2 + t^2}}sinv + \frac{a(8s^2 + u^2)sin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right. \\
&+ \left. \frac{2st(-ucosv + 3ssinv)sin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right) \Big)
\end{aligned}$$

elde edilir. $t = 4, a = 3, u = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned}
S_{12}(u, v) &= \left(\frac{-6st\sqrt{a^2 + t^2}ucos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}sinv + (6as^2 + t(-8s^2 + u^2)sinvsin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2 + t^2}(10s^2 + u^2)} \right. \\
&+ \left. \frac{cosv(6s\sqrt{a^2 + t^2}ucos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} + 6stusin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}})}{\sqrt{a^2 + t^2}(10s^2 + u^2)} \right), \\
&\frac{\sqrt{a^2 + t^2}(-10s^2 + u^2)cos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}sinv - 2su(a - 3tsinv)sin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2 + t^2}(10s^2 + u^2)} \\
&+ \frac{cosv(6s\sqrt{a^2 + t^2}ucos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} + t(10s^2 - u^2)sin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}})}{\sqrt{a^2 + t^2}(10s^2 + u^2)}, \\
&\frac{6s^2cosvcos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}} + 2sucos\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}sinv + \frac{a(8s^2 + u^2)sin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}}}{(10s^2 + u^2)} \\
&+ \frac{\frac{2st(-ucosv + 3ssinv)sin\frac{tv}{\sqrt{a^2+t^2}}}{\sqrt{a^2+t^2}}}{(10s^2 + u^2)} \Big)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

S_{12} yüzeyi Şekil 2.12 de gösterilmiştir.



Şekil 2.12.Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı küresel helis olan S_{12} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Split Kuaterniyonlar ve Minkowski Uzayında Rasyonel Genelleştirilmiş Döneel Yüzeyler

Bu bölümde, split kuaterniyonlarla ilgili tanımlar verildi. Daha sonra, rasyonel genelleştirilmiş bir döneel yüzeyin, split kuaterniyon çarpımı ile üretilebilen bir rasyonel tensör çarpım yüzeyi olarak temsil edilebileceği gösterilecektir.

3.1.1. Split kuaterniyon

Split kuaterniyonların geometride pek çok uygulama alanı mevcuttur (Kula, 2003). Bunlardan en önemlisi, Öklid uzayında dönmelerin kuaterniyonlar ile ifade edildiği gibi, Minkowski uzayındaki dönmelerin birim timelike split kuaterniyonlar ile ifade edilebilmesidir (Özdemir ve Ergin, 2005; Özdemir ve Ergin, 2006; Özdemir, 2007). Bu ifade edilişi kullanarak Özdemir ve Ark. (2014) tarafından, Minkowski 3-uzayında dönme matrislerinin özdeğer ve özvektörleri split kuaterniyonlar yardımı ile incelenmiştir (Özdemir ve Ark., 2014). Kula ve Yaylı (2007) ise split kuaterniyonlar ile yarı Öklid uzayındaki dönme dönüşümlerini ifade etmiştir. Diğer taraftan, Ata ve Yaylı (2009) split kuaterniyonlar ile yarı Öklid projektif uzayları birlikte ele almıştır (Ata ve Yaylı, 2009) [34].

3.1.2. Split kuaterniyon geometrisi

$q = S_q + V_q$ split kuaterniyonunda $S_q = 0$ ise q kuaterniyonuna pure split kuaterniyon adı verilir. Bir $V_q = q_1i + q_2j + q_3k$ pure split kuaterniyonu \mathbb{R}_1^3 de orjinden (q_1, q_2, q_3) noktasına tanımlı vektör olarak düşünülebilir. Dolayısıyla,

$$q = S_q + q_1i + q_2j + q_3k$$

split kuaterniyonu, Minkowski 3-uzayındaki noktalar ve vektörler için (S_q, q_1, q_2, q_3) homojen gösterimi ile ifade edilebilir.

Teorem 3.1.

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in G$$

ve

$$\mathbf{g}(V_q, V_q) = -q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 > 0$$

olmak üzere

$$R = \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)S$$

R bir birim split kuaterniyondur ve $x \rightarrow R * x * \bar{R}$ adjoint dönüşümü \mathbb{R}_1^3 deki noktaları ve vektörleri orjinden geçen doğru etrafında $\vec{S} = (s_1, s_2, s_3)$ vektörü yönünde θ açısı kadar döndürür. Burada S, V_q yönündeki birim vektördür.

İspat. $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ split kuaterniyonu için $\|q\|_* = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \frac{q_1i + q_2j + q_3k}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \\ &= \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)S \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada

$$\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) = q_0, \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

ve S nin bileşenleri

$$s_1 = \frac{q_1}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

$$s_2 = \frac{q_2}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

$$s_3 = \frac{q_3}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

dir. $R * x * \bar{R}$ adjoint dönüşümünden

$$R * x * \bar{R} = \left(\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)S \right) (0, x) \left(\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)S \right)$$

ve split kuaterniyon çarpımı yardımıyla

$$\begin{aligned} R * x * \bar{R} &= x + \sinh\theta(S \times x) + (-1 + \cosh\theta)(S \times (S \times x)) \\ &= x + \sinh\theta(S \times x) + (-1 + \cosh\theta)(-g(S, x)S + g(S, S)x) \\ &= (\cosh\theta)x + \sinh\theta(S \times x) + (1 - \cosh\theta)g(S, x)S \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada hiperbolik fonksiyonların

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= 1, \\ \cosh^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \cosh\theta, \\ \cosh^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1 + \cosh\theta}{2}, \sinh^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{-1 + \cosh\theta}{2}, \\ \sinh 2\theta &= 2\sinh\theta \cosh\theta \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılmıştır.

3×3 tipindeki adjoint dönüşümüne karşılık gelen yarı ortogonal matris yardımıyla,

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sinh\theta \begin{bmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} + (-1 + \cosh\theta) \begin{bmatrix} s_2^2 + s_3^2 & -s_1 s_2 & -s_1 s_3 \\ s_1 s_2 & -s_1^2 + s_3^2 & -s_2 s_3 \\ s_1 s_3 & -s_2 s_3 & -s_1^2 + s_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \varepsilon + \sinh\theta S + (-1 + \cosh\theta)S^2 \\ &= \varepsilon + \sinh\theta S + 2\sinh^2\left(\frac{\theta}{2}\right)S^2 \\ &= \varepsilon + \sinh\theta S + 2\left(\sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right)^2 \end{aligned}$$

dir. S matrisi Minkowski 3-uzayında antisimetrik bir matristir. Burada S antisimetrik matrisine Minkowski 3-uzayında karşılık gelen $\vec{S} = (s_1, s_2, s_3)$ vektörüne, split vektör adı vereceğiz. $R = \cosh(\frac{\theta}{2}) + \sinh(\frac{\theta}{2})S$ pure birim split kuaterniyonu ile ifade edilen adjoint dönüşümünü θ açısı kadar S vektörü tarafından belirtilen eksen etrafında dönme ifade eder. ■

Teorem 3.2.

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in G$$

ve

$$\mathbf{g}(V_q, V_q) = -q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 < 0$$

olmak üzere

$$R = \cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})S$$

R bir birim split kuaterniyondur ve $x \rightarrow R * x * \bar{R}$ adjoint dönüşümü \mathbb{R}_1^3 deki noktaları ve vektörleri orjinden geçen doğru etrafında S vektörü yönünde θ açısı kadar döndürür. Burada S, V_q yönündeki birim vektördür.

İspat. $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ split kuaterniyonu için $\|q\|_* = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \frac{q_1i + q_2j + q_3k}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}} \\ &= \cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})S \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada

$$\cos(\frac{\theta}{2}) = q_0, \sin(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}$$

ve S nin bileşenleri

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}} \\ s_2 &= \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}} \\ s_3 &= \frac{q_3}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}} \end{aligned}$$

dir. $R * x * \bar{R}$ adjoint dönüşümünden

$$R * x * \bar{R} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S \right) (0, x) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S \right)$$

ve split kuaterniyon çarpımı yardımıyla

$$\begin{aligned} R * x * \bar{R} &= x + \sin\theta(S \times x) + (1 - \cos\theta)(S \times (S \times x)) \\ &= x + \sin\theta(S \times x) + (1 - \cos\theta)(-g(S, x)S + g(S, S)x) \\ &= (\cos\theta)x + \sin\theta(S \times x) - (1 - \cos\theta)g(S, x)S \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan 3×3 tipindeki adjoint dönüşümüne karşılık gelen yarı ortogonal matris yardımıyla,

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} + (1 - \cos\theta) \begin{bmatrix} s_2^2 + s_3^2 & -s_1 s_2 & -s_1 s_3 \\ s_1 s_2 & -s_1^2 + s_3^2 & -s_2 s_3 \\ s_1 s_3 & -s_2 s_3 & -s_1^2 + s_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \varepsilon + \sin\theta S + (1 - \cos\theta)S^2 \\ &= \varepsilon + \sin\theta S + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)S^2 \\ &= \varepsilon + \sin\theta S + 2\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right)^2 \end{aligned}$$

dir. S matrisi Minkowski 3-uzayında antisimetrik bir matristir. Burada S antisimetrik matrisine Minkowski 3-uzayında karşılık gelen split vektör $\vec{S} = (s_1, s_2, s_3)$ dir. $R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S$ birim split kuaterniyonu ile ifade edilen adjoint dönüşümü θ açısı kadar S vektörü tarafından belirtilen eksen etrafında dönme belirtir. ■

3.2. Minkowski 3-Uzayında Genelleştirilmiş Dönel Yüzeylerin Özellikleri

Bu bölümde, genelleştirilmiş bir dönel yüzey, split kuaterniyon çarpımı tarafından üretilen rasyonel bir tensör çarpım yüzeyi olarak temsil edilebilecektir. Bu kavrayışı kullanarak, bir f doğrultusu boyunca bir g doğrultmanının döndürülmesiyle oluşturulan rasyonel genelleştirilmiş dönel yüzeylerinin cebirsel ve geometrik özellikleri incelenecektir.

3.3. Split Kuaterniyonlarla Genelleştirilmiş Dönel Yüzeyler İçin Matris Gösterimi

Bu bölümde split kuaterniyonlarla genelleştirilmiş dönel yüzeylerin split kuaterniyon çarpımı tarafından üretilen matris tanımlanacak.

p ve q iki split kuaterniyon olsun.

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k, \quad p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$$

O halde

$$R_q : \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}'$$

$$p \rightarrow R_q(p) = p * q$$

lineer dönüşümüne $\{1, i, j, k\}$ bazına karşılık gelen matris,

$$R_q(1) = q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$$

$$R_q(i) = i * q = i * (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = -q_1 + q_0i - q_3j + q_2k$$

$$R_q(j) = j * q = j * (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = q_2 - q_3i + q_0j - q_1k$$

$$R_q(k) = k * q = k * (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = q_3 + q_2i + q_1j + q_0k$$

eşitliklerinden

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. O halde,

$$R_q(p) = p * q = \mathbf{R}_q \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$= [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3] \mathbf{R}_q^T$$

$$= [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3] \mathcal{M}_q$$

dir. Burada

$$\mathcal{M}_q = \mathbf{R}_q^T$$

olup

$$\mathcal{M}_q = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten

$$\mathcal{M}_q \varepsilon = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & -q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{M}_q^T \varepsilon = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & -q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & -q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_q \varepsilon \mathcal{M}_q^T \varepsilon &= \begin{bmatrix} -q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & -q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & -q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & -q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \\ &= N_q \end{aligned}$$

bulunur. $N_q = 1$ için $\mathcal{M}_q \in SO(3, 1)$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} L_q : \mathbb{H}' &\rightarrow \mathbb{H}' \\ p &\rightarrow L_q(p) = p * q \end{aligned}$$

lineer dönüşümüne $\{1, i, j, k\}$ bazına karşılık gelen matris,

$$L_p(1) = p * 1 = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$$

$$L_p(i) = p * i = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) * i = -p_1 + p_0i + p_3j - p_2k$$

$$L_p(j) = p * j = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) * j = p_2 + p_3i + p_0j + p_1k$$

$$L_p(k) = p * k = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) * k = p_3 - p_2i - p_1j + p_0k$$

ve

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} L_p(q) = p * q &= \mathbf{L}_p \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \\ &= [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3] \mathbf{L}_p^T \\ &= [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3] \mathcal{N}_p \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\mathcal{N}_p = \mathbf{L}_p^T$$

dir.

$$\mathcal{N}_p = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & -p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Gerçekten

$$\mathcal{N}_p \varepsilon = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & -p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & -p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{N}_p^T \varepsilon = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & -p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & -p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p \varepsilon \mathcal{N}_p^T \varepsilon &= \begin{bmatrix} -p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & -p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & -p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & -p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \end{bmatrix} \\ &= N_p \end{aligned}$$

bulunur. $N_p = 1$ ise $\mathcal{N}_p \in SO(3, 1)$ dir.

Genelleştirilmiş dönele yüzeyleri temsil eden

$$f = (f_0, f_1, f_2, f_3)$$

split kuaterniyonu için

$$\mathcal{M}_f = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & -f_3 & f_2 \\ f_2 & -f_3 & f_0 & -f_1 \\ f_3 & f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$\mathcal{M}_f \varepsilon \mathcal{M}_f^T \varepsilon = \begin{bmatrix} -f_0 & -f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & -f_0 & -f_3 & f_2 \\ -f_2 & f_3 & f_0 & -f_1 \\ -f_3 & -f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & -f_0 & -f_3 & f_2 \\ -f_2 & f_3 & f_0 & f_1 \\ -f_3 & -f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix} = N_f$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\mathcal{N}_f = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ f_2 & f_3 & f_0 & f_1 \\ f_3 & -f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

matrisi için

$$\mathcal{N}_f \in \mathcal{N}_{\bar{f}} \varepsilon = \begin{bmatrix} -f_0 & -f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & -f_0 & f_3 & -f_2 \\ -f_2 & -f_3 & f_0 & f_1 \\ -f_3 & f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & -f_0 & f_3 & -f_2 \\ -f_2 & -f_3 & f_0 & -f_1 \\ -f_3 & f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix} = N_f$$

bulunur.

$R_q(p) = [p] \mathcal{M}_q$ ve $L_p(q) = [q] \mathcal{N}_p$ tanımlarından aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} f * g * \bar{f} &= f * (g * \bar{f}) \\ &= (g * \bar{f}) \mathcal{N}_f \\ &= g \mathcal{M}_{\bar{f}} \mathcal{N}_f \\ &= g (\mathcal{M}_{\bar{f}} \mathcal{N}_f) = gR \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} f * g * \bar{f} &= (f * g) \bar{f} \\ &= (f * g) \mathcal{M}_{\bar{f}} \\ &= g \mathcal{N}_f \mathcal{M}_{\bar{f}} \\ &= g (\mathcal{N}_f \mathcal{M}_{\bar{f}}) \\ &= gR \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$R = \mathcal{M}_{\bar{f}} \mathcal{N}_f = \mathcal{N}_f \mathcal{M}_{\bar{f}}$$

yazılır.

O halde, Denklem (4.3) ün matris gösterimi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$h = (h_0(s, u; t, v), h_1(s, u; t, v), h_2(s, u; t, v), h_3(s, u; t, v)) = f * g * \bar{f} = gR.$$

Burada

$$R = \mathcal{M}_{\bar{f}} \mathcal{N}_f = \begin{bmatrix} -f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & -f_0 & -f_3 & f_2 \\ -f_2 & f_3 & f_0 & f_1 \\ -f_3 & -f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ f_2 & f_3 & f_0 & f_1 \\ f_3 & -f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

ya da

$$R = \mathcal{N}_f \mathcal{M}_{\bar{f}} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & f_0 & f_3 & -f_2 \\ f_2 & f_3 & f_0 & f_1 \\ f_3 & -f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ -f_1 & -f_0 & -f_3 & f_2 \\ -f_2 & f_3 & f_0 & f_1 \\ -f_3 & -f_2 & -f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$R = \begin{bmatrix} f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 & 2(f_0f_3 - f_1f_2) & -2(f_0f_2 + f_1f_3) \\ 0 & 2(f_0f_3 + f_1f_2) & f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 & -2(f_0f_1 + f_2f_3) \\ 0 & 2(-f_0f_2 + f_1f_3) & 2(f_0f_1 - f_2f_3) & f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

olarak elde edilir.

Ayrıca

$$R\varepsilon = \begin{bmatrix} f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 & 2(f_0f_3 - f_1f_2) & -2(f_0f_2 + f_1f_3) \\ 0 & 2(f_0f_3 + f_1f_2) & f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 & -2(f_0f_1 + f_2f_3) \\ 0 & 2(-f_0f_2 + f_1f_3) & 2(f_0f_1 - f_2f_3) & f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 & 2(f_0f_3 - f_1f_2) & -2(f_0f_2 + f_1f_3) \\ 0 & -2(f_1f_2 + f_0f_3) & f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 & -2(f_0f_1 + f_2f_3) \\ 0 & 2(f_0f_2 - f_1f_3) & 2(f_0f_1 - f_2f_3) & f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$R^T\varepsilon = \begin{bmatrix} f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 & 2(f_1f_2 + f_0f_3) & -2(f_0f_2 - f_1f_3) \\ 0 & -2(f_0f_3 + f_1f_2) & f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 & -2(f_0f_1 + f_2f_3) \\ 0 & 2(f_0f_2 - f_1f_3) & 2(f_0f_1 - f_2f_3) & f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 & 2(f_1f_2 + f_0f_3) & -2(f_0f_2 - f_1f_3) \\ 0 & -2(f_0f_3 - f_1f_2) & f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 & 2(f_0f_1 - f_2f_3) \\ 0 & 2(f_0f_2 + f_1f_3) & -2(f_0f_1 + f_2f_3) & f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 \end{bmatrix}$$

eşitliklerinden

$$R\varepsilon R^T \varepsilon = \begin{bmatrix} (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 \end{bmatrix} \\ = N_f^2$$

benzer şekilde

$$R^T \varepsilon R \varepsilon = \begin{bmatrix} (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 \end{bmatrix} \\ = N_f^2$$

ve $\det R = N_f^4$ dir.

$N_f = 1$ ise $R \in SO(3, 1)$ dir. Daha doğrudan bir hesaplama ile $R = \mathcal{M}_{\bar{f}} \mathcal{N}_f$ için

$$\begin{aligned} R\varepsilon R^T \varepsilon &= (\mathcal{M}_{\bar{f}} \mathcal{N}_f) \varepsilon (\mathcal{N}_{\bar{f}} \mathcal{N}_f)^T \varepsilon \\ &= \mathcal{M}_{\bar{f}} \mathcal{N}_f \varepsilon \mathcal{N}_{\bar{f}}^T \mathcal{M}_{\bar{f}}^T \varepsilon \\ &= \mathcal{N}_f (\mathcal{M}_{\bar{f}} \varepsilon) \mathcal{M}_{\bar{f}}^T \varepsilon \\ &= \mathcal{N}_f (\mathcal{M}_{\bar{f}} \varepsilon \mathcal{M}_{\bar{f}}^T \varepsilon) \\ &= N_f N_f \\ &= N_f^2 \end{aligned}$$

olduğu görülebilir.

3.4. Minkowski 3-Uzayında R Matrisinin Cebirsel Özellikleri

Bu bölümde R matrisinin cebirsel özellikleri kısaca özetlenecektir.

Notasyonumuzu sabitlemek için

$$R = (R_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq 4$$

olsun.

Burada R_{ij} , R nin i inci satırında ve j inci sütununda bulunan bileşendir.

Lemma 3.3. 1. R matrisinin satır vektörlerini

$$A_i = (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3}, R_{i4}), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

sütun vektörlerini de

$$B_i = (R_{1i}, R_{2i}, R_{3i}, R_{4i}), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

ile gösterilsin. R matrisinin satır (sütun) vektörleri birbirlerine diktir.

2. R matrisinin satır vektörleri için

$$\mathbf{g}(A_i, A_i) = -R_{1i}^2 - R_{2i}^2 + R_{3i}^2 + R_{4i}^2 = -N_f^2 \quad i = 1, 2$$

$$\mathbf{g}(A_i, A_i) = -R_{1i}^2 - R_{2i}^2 + R_{3i}^2 + R_{4i}^2 = N_f^2, \quad i = 3, 4$$

dir.

3. R matrisinin sütun vektörleri için

$$\mathbf{g}(B_i, B_i) = -R_{i1}^2 - R_{i2}^2 + R_{i3}^2 + R_{i4}^2 = -N_f^2 \quad i = 1, 2$$

$$\mathbf{g}(B_i, B_i) = -R_{i1}^2 - R_{i2}^2 + R_{i3}^2 + R_{i4}^2 = N_f^2 \quad i = 3, 4$$

dir.

4. $(w, x, y, z) = gR$ olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} -w^2 - x^2 + y^2 + z^2 &= N_f^2(-g_0^2 - g_1^2 + g_2^2 + g_3^2), \\ w^2 &= N_f^2 g_0^2 \end{aligned}$$

dir.

5. R nin herhangi 2×2 tipindeki minörü, N_f çarpanını içerir.

İspat.

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(A_3, A_4) &= -4(f_1f_2 - f_0f_3)(f_0f_2 + f_1f_3) - 2(f_0f_1 + f_2f_3)(f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2) \\ &\quad + 2(f_0f_1 - f_2f_3)(f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde diğer satır vektörleri için de

$$\mathbf{g}(A_i, A_k) = 0, \quad 1 \leq i \neq k \leq 4$$

dir.

Dolayısıyla satır vektörleri birbirlerine diktir.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(B_2, B_3) &= 2(f_0f_3 + f_1f_2)(f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \\ &\quad + 2(f_1f_2 - f_0f_3)(f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2) \\ &\quad - 4(f_0f_2 + f_1f_3)(f_0f_1 + f_2f_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde diğer sütun vektörleri için de

$$\mathbf{g}(B_i, B_k) = 0, \quad 1 \leq i \neq k \leq 4$$

dir.

Dolayısıyla sütun vektörleri birbirlerine diktir. Bu durumda

$$ebob(A_2, A_3, A_4) = ebob(B_2, B_3, B_4) = 1$$

dir.

2.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(A_2, A_2) &= -(f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2 + 4(f_0f_3 + f_1f_2)^2 + 4(f_0f_2 - f_1f_3)^2 \\ &= -((f_0^2 + f_1^2)^2 - 2f_0^2f_2^2 - 2f_1^2f_2^2 - 2f_0^2f_3^2 - 2f_1^2f_3^2 + (f_2^2 + f_3^2)^2) \\ &= -((f_0^2 + f_1^2)^2 - 2(f_0^2 + f_1^2)(f_2^2 + f_3^2) + (f_2^2 + f_3^2)^2) \\ &= -((f_0^2 + f_1^2) - (f_2^2 + f_3^2))^2 \\ &= -(f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 \\ &= -N_f^2 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $g(A_2, A_2)$ negatif olduğundan A_2 timelike vektördür. Benzer şekilde A_1 vektörü de timelike bir vektördür.

$$\begin{aligned}
g(A_3, A_3) &= -4(f_0f_3 - f_1f_2)^2 + (f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2)^2 + 4(f_0f_1 - f_2f_3)^2 \\
&= -4(f_0^2f_3^2 - 2f_0f_1f_2f_3 + f_1^2f_2^2) + (f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2)^2 \\
&\quad + 4(f_0^2f_1^2 - 2f_0f_1f_2f_3 + f_2^2f_3^2) \\
&= -4f_0^2f_3^2 - 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_1^2 + 4f_2^2f_3^2 + ((f_0^2 - f_1^2) + (f_3^2 - f_2^2))^2 \\
&= -4f_0^2f_3^2 - 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_1^2 + 4f_2^2f_3^2 + (f_0^2 - f_1^2)^2 + 2f_0^2f_3^2 \\
&\quad - 2f_0^2f_2^2 - 2f_1^2f_3^2 + 2f_1^2f_2^2 + (f_3^2 - f_2^2)^2 \\
&= f_0^4 - 2f_0^2f_1^2 + f_1^4 - 2f_0^2f_3^2 - 2f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_1^2 + 4f_2^2f_3^2 - 2f_0^2f_2^2 \\
&\quad - 2f_1^2f_3^2 + f_3^4 - 2f_2^2f_3^2 + f_2^4 \\
&= f_0^4 + f_1^4 + f_2^4 + f_3^4 + 2f_0^2f_1^2 - 2f_0^2f_3^2 - 2f_1^2f_2^2 + 2f_2^2f_3^2 \\
&\quad - 2f_0^2f_2^2 - 2f_1^2f_3^2 \\
&= (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 \\
&= N_f^2
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $g(A_3, A_3)$ pozitif olduğundan A_3 spacelike vektördür. Benzer şekilde A_4 vektörü de spacelike bir vektördür.

3.

$$\begin{aligned}
g(B_2, B_2) &= -(f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2 + 4(f_1f_2 - f_0f_3)^2 + 4(f_0f_2 + f_1f_3)^2 \\
&= -((f_0^2 + f_1^2)^2 - 2f_0^2f_2^2 - 2f_1^2f_2^2 - 2f_0^2f_3^2 - 2f_1^2f_3^2 + (f_2^2 + f_3^2)^2) \\
&= -((f_0^2 + f_1^2)^2 - 2(f_0^2 + f_1^2)(f_2^2 + f_3^2) + (f_2^2 + f_3^2)^2) \\
&= -((f_0^2 + f_1^2) - (f_2^2 + f_3^2))^2 \\
&= -(f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 \\
&= -N_f^2
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $g(B_2, B_2)$ negatif olduğundan B_2 timelike vektördür. Benzer şekilde B_1 vektörü de timelike bir vektördür.

$$\begin{aligned}
g(B_3, B_3) &= -4(f_0f_3 + f_1f_2)^2 + (f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2)^2 + 4(f_0f_1 + f_2f_3)^2 \\
&= -4(f_0^2f_3^2 + 2f_0f_1f_2f_3 + f_1^2f_2^2) + (f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2)^2 \\
&\quad + 4(f_0^2f_1^2 + 2f_0f_1f_2f_3 + f_2^2f_3^2) \\
&= -4f_0^2f_3^2 - 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_1^2 + 4f_2^2f_3^2 + ((f_0^2 - f_1^2) + (f_3^2 - f_2^2))^2 \\
&= -4f_0^2f_3^2 - 4f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_1^2 + 4f_2^2f_3^2 \\
&\quad + ((f_0^2 - f_1^2)^2 + 2(f_0^2 - f_1^2)(f_3^2 - f_2^2) + (f_3^2 - f_2^2)^2) \\
&= f_0^4 - 2f_0^2f_1^2 + f_1^4 - 2f_0^2f_3^2 - 2f_1^2f_2^2 + 4f_0^2f_1^2 + 4f_2^2f_3^2 - 2f_0^2f_2^2 \\
&\quad - 2f_1^2f_3^2 + f_3^4 - 2f_2^2f_3^2 + f_2^4 \\
&= f_0^4 + f_1^4 + f_2^4 + f_3^4 + 2f_0^2f_1^2 - 2f_0^2f_3^2 - 2f_1^2f_2^2 + 2f_2^2f_3^2 \\
&\quad - 2f_0^2f_2^2 - 2f_1^2f_3^2 \\
&= (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)^2 \\
&= N_f^2
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $g(B_3, B_3)$ pozitif olduğundan B_3 spacelike vektördür. Benzer şekilde B_4 vektörü de spacelike bir vektördür.

4. $(w, x, y, z) = gR$ olsun.

$$\begin{aligned}
f(s, u) &= (f_0(s, u), f_1(s, u), f_2(s, u), f_3(s, u)) \\
g(t, v) &= (g_0(t, v), g_1(t, v), g_2(t, v), g_3(t, v))
\end{aligned}$$

için

$$[g]R = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ 0 & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ 0 & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

ise

$$\begin{aligned}w &= g_0 N_f \Rightarrow -w^2 = -g_0^2 N_f^2 \\x &= g_1 R_{22} + g_2 R_{32} + g_3 R_{42} \\y &= g_1 R_{23} + g_2 R_{33} + g_3 R_{43} \\z &= g_1 R_{24} + g_2 R_{34} + g_3 R_{44}\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}-x^2 &= -g_1^2 R_{22}^2 - g_2^2 R_{32}^2 - g_3^2 R_{42}^2 - 2g_1 g_2 R_{22} R_{32} - 2g_1 g_3 R_{22} R_{42} - 2g_2 g_3 R_{32} R_{42} \\y^2 &= g_1^2 R_{23}^2 + g_2^2 R_{33}^2 + g_3^2 R_{43}^2 + 2g_1 g_2 R_{23} R_{33} + 2g_1 g_3 R_{23} R_{43} + 2g_2 g_3 R_{33} R_{43} \\z^2 &= g_1^2 R_{24}^2 + g_2^2 R_{34}^2 + g_3^2 R_{44}^2 + 2g_1 g_2 R_{24} R_{34} + 2g_1 g_3 R_{24} R_{44} + 2g_2 g_3 R_{34} R_{44}\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}-x^2 + y^2 + z^2 &= g_1^2(-R_{22}^2 + R_{32}^2 + R_{42}^2) + g_2^2(-R_{23}^2 + R_{33}^2 + R_{43}^2) \\&\quad + g_3^2(-R_{24}^2 + R_{34}^2 + R_{44}^2) + 2g_1 g_2(-R_{22} R_{32} + R_{23} R_{33} + R_{24} R_{34}) \\&\quad + 2g_1 g_3(-R_{22} R_{42} + R_{23} R_{43} + R_{24} R_{44}) \\&\quad + 2g_2 g_3(-R_{32} R_{42} + R_{33} R_{43} + R_{34} R_{44})\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 3.3. den

$$\begin{aligned}-x^2 + y^2 + z^2 &= g_1^2(-R_{22}^2 + R_{32}^2 + R_{42}^2) + g_2^2(-R_{23}^2 + R_{33}^2 + R_{43}^2) \\&\quad + g_3^2(-R_{24}^2 + R_{34}^2 + R_{44}^2) \\&= N_f^2(-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)\end{aligned}$$

dir. O halde

$$-w^2 - x^2 + y^2 + z^2 = N_f^2(-g_0^2 - g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)$$

elde edilir.

5. R matrisinin aşağıdaki 2×2 tipinde aşağıda verilen minörünü ele alalım,

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 & 2(f_0f_1 - f_2f_3) \\ -2(f_0f_1 + f_2f_3) & f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 \end{bmatrix} &= \\
&= (f_0^2 - f_1^2 - f_2^2 + f_3^2)(f_0^2 - f_1^2 + f_2^2 - f_3^2) + 4(f_0f_1 + f_2f_3)(f_0f_1 - f_2f_3) \\
&= f_0^4 + f_1^4 - f_2^4 - f_3^4 + 2f_0^2f_1^2 - 2f_2^2f_3^2 \\
&= (f_0^4 + 2f_0^2f_1^2 + f_1^4) - (f_2^4 + 2f_2^2f_3^2 + f_3^4) \\
&= (f_0^2 + f_1^2)^2 - (f_2^2 + f_3^2)^2 \\
&= (f_0^2 + f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)(f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \\
&= N_f(f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, diğer 2×2 tipindeki minörlerinde N_f çarpanını içerdiği gösterilebilir.

■

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Minkowski 3- Uzayında Genelleştirilmiş Dönel Yüzeyle

Bu bölümde, bir doğru ve düzlemsel bir eğri kullanılarak ifade edilen klasik anlamdaki dönel yüzeyleri, split kuaterniyonları kullanarak genelleştireceğiz.

Aşağıdaki f ve g dönüşümlerini ele alalım:

$$\begin{aligned} f &: (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4 \\ f(s, u) &= (f_0(s, u), f_1(s, u), f_2(s, u), f_3(s, u)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} g &: (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4 \\ g(t, v) &= (g_0(t, v), g_1(t, v), g_2(t, v), g_3(t, v)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Burada $f_\ell \in \mathbb{R}[s, u]$ ve $g_\ell \in \mathbb{R}[t, v]$ homojen polinomlar ve

$$\begin{aligned} \text{der}(f_\ell) &= m \\ \text{der}(g_\ell) &= n, \quad \ell = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

dir. Bu tez çalışması boyunca f null olmayan vektör olarak ele alınacaktır. İlk olarak f ve g split kuaterniyonlarla temsil edilecek ve ardından split kuaterniyon çarpımı yardımıyla rasyonel tensör çarpım yüzeyleri oluşturulacaktır. Tutarlılık için, her zaman f eğrisi doğrultu ve g eğrisi de doğrultman olarak adlandırılacaktır.

$$r(s) = \frac{f(s)}{\|f(s)\|_*}$$

bir birim split kuaterniyondur ve Teorem 3.1. ya göre s nin her bir değeri için,

$$g(t) \rightarrow r(s) * g(t) * \bar{r}(s)$$

dönüşümü $g(t)$ yi $r(s)$ nin vektör kısmının doğrultusundaki doğru etrafında θ açısı kadar döndürür. Burada $\cosh(\frac{\theta}{2}) = \frac{f_0(s)}{\|f(s)\|_*}$, $r(s)$ nin skalar kısmıdır. Ayrıca $r(s)$ nin vektörel kısmı olan

$$\frac{(f_1(s), f_2(s), f_3(s))}{\|f(s)\|_*}$$

$(f_1(s), f_2(s), f_3(s))$ nin doğrultusuyla aynıdır. Bu nedenle

$$h(s; t) = r(s) * g(t) * \bar{r}(s)$$

eşitliği yardımıyla bir dönel yüzey tanımlayabiliriz.

Homojen koordinatlarla çalıştığımız için her (s, u) reel parametresi için $\frac{f(s, u)}{\|f(s, u)\|_*}$ ifadesinin paydasının ihmal edilebilecek bir skalar olduğu düşünülebilir. Böylece,

rasyonel genelleştirilmiş dönele yüzey aşağıdaki formülle üretilebilir

$$\begin{aligned} h(s, u; t, v) &= (h_0(s, u; t, v), h_1(s, u; t, v), h_2(s, u; t, v), h_3(s, u; t, v)) \\ &= f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Bu çalışmada, yalnızca düzlem olmayan genelleştirilmiş dönele yüzeylerle ilgileneceğiz. (s, u) nun her bir değeri için $\frac{f(s, u)}{\|f(s, u)\|_*}$ birim split kuaterniyonu bir dönme temsil eder ve her (s, u) parametresi için

$$h(s, u; t, v) = \frac{f(s, u)}{\|f(s, u)\|_*} g(t, v) \frac{\bar{f}(s, u)}{\|\bar{f}(s, u)\|_*} = \frac{f(s, u)g(t, v)\bar{f}(s, u)}{\|f(s, u)\|_*^2}$$

homogen koordinatlarda Denklem (4.3) a eşdeğerdir. Ayrıca, g doğrultmanı bir düzlemsel eğri olmak üzere f doğrultusu, g doğrultmanı ile aynı düzlemde yatan ve orjinden geçen bir doğru ise, o zaman h yüzeyi f eksenli ve g doğrultmanlı klasik anlamda bir dönele yüzeydir. Bu nedenle, her rasyonel dönele yüzey

$$h(s, u; t, v) = f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)$$

biçimindeki bir yüzeyle temsil edilebilir.

$$h(s, u; t, v) = f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)$$

yapısı bu nedenle klasik dönele yüzeylerin inşasının bir genelleştirilmesidir. Ek olarak, dönme eksenlerinin f doğrultusuna teğet vektörler olmasını istiyorsak, o zaman f yerine f nin hodografi konulabilir, yani f, f' ile değiştirilebilir.

Örnek 4.1.

$$\begin{aligned} f &: (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4 \\ f(s, u) &= (u, 0, s, 0) \end{aligned}$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu bir doğru ve

$$\begin{aligned} g &: (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4 \\ g(t, v) &= (t, 0, v^2, v) \end{aligned}$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman yz spacelike düzleminde bir parabol olsun. Bu durumda,

$$f(s, u) * g(t, v) = (tu + sv^2, -sv, st + uv^2, uv)$$

ve 4.3 eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = (tu + sv^2, -sv, st + uv^2, uv) (u, 0, -s, 0)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = (t(-s^2 + u^2), -2suv, (-s^2 + u^2)v^2, (s^2 + u^2)v)$$

olarak bulunur. $N_f = s^2 + u^2$ dir. O halde

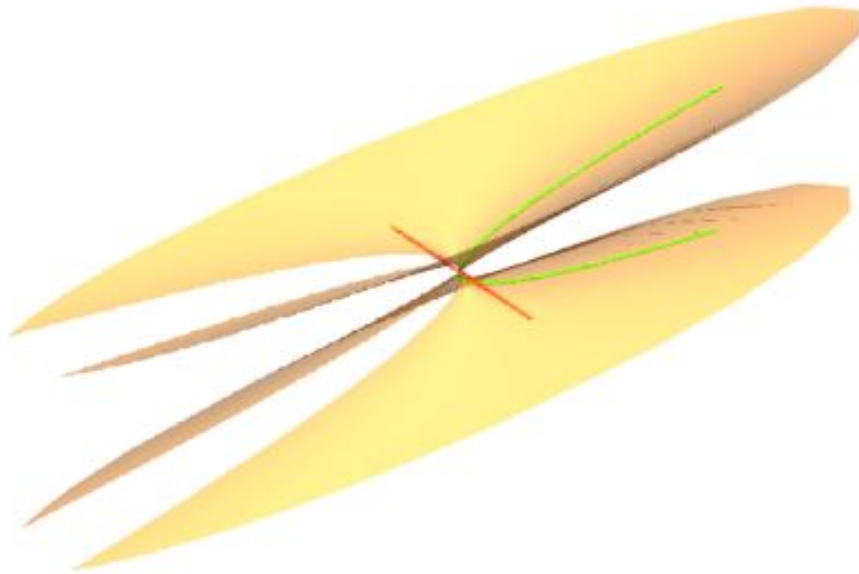
$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(t, -\frac{2s^2t}{s^2 + u^2}, -\frac{2suv}{s^2 + u^2}, \frac{(-s^2 + u^2)v^2}{s^2 + u^2}, v \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{13}(u, v) = \left(-\frac{2suv}{s^2 + u^2}, \frac{(-s^2 + u^2)v^2}{s^2 + u^2}, v \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_{13} yüzeyi Şekil 4.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı yz spacelike düzleminde bir parabol olan S_{13} genelleştirilmiş döne1 yüzeyi

Örnek 4.2.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$
$$f(s, u) = (u, s, -2, 12s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu bir doğru ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$
$$g(t, v) = (t, 0, v^2, v)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman yz spacelike düzleminde bir parabol olsun. Bu durumda,

$$f(s, u) * g(t, v) = \left(tu + 2(6s - v)v, 2v + s(t + 12v^2), \right. \\ \left. -2t + v(-s + uv), uv + s(12t + v^2) \right)$$

ve 4.3 eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(tu + 2(6s - v)v, 2v + s(t + 12v^2), \right. \\ \left. -2t + v(-s + uv), uv + s(12t + v^2) \right) (u, -s, 2, -12s)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(t(-4 - 143s^2 + u^2), 4v(u + s(-6s + v + 6uv)), \right. \\ \left. v(-2s(-24 + u) + (-4 + 143s^2 + u^2)v), \right. \\ \left. v(4 - 145s^2 + u^2 + 2s(24 + u)v) \right)$$

olarak bulunur. $N_f = -4 - 143s^2 + u^2$ dir. O halde

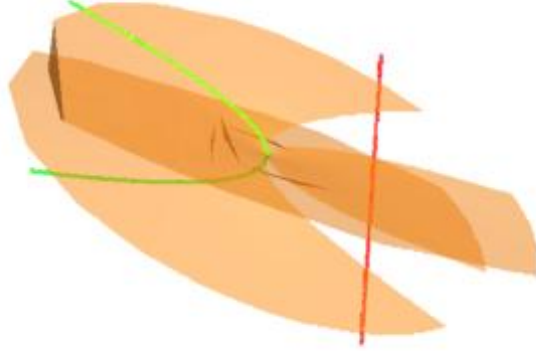
$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(t, \frac{4v(u + s(-6s + v + 6uv))}{-4 - 143s^2 + u^2}, \right. \\ \frac{v(-2s(-24 + u) + (-4 + 143s^2 + u^2)v)}{-4 - 143s^2 + u^2}, \\ \left. \frac{v(4 - 145s^2 + u^2 + 2s(24 + u)v)}{-4 - 143s^2 + u^2} \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{14}(u, v) = \left(\frac{4v(u + s(-6s + v + 6uv))}{-4 - 143s^2 + u^2}, \right. \\ \frac{v(-2s(-24 + u) + (-4 + 143s^2 + u^2)v)}{-4 - 143s^2 + u^2}, \\ \left. \frac{v(4 - 145s^2 + u^2 + 2s(24 + u)v)}{-4 - 143s^2 + u^2} \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_{14} yüzeyi Şekil 4.2 de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı yz spacelike düzleminde bir parabol olan S_{14} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 4.3.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$
$$f(s, u) = (u, 0, s^2, s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu yz spacelike düzleminde bir parabol ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$
$$g(t, v) = (t, 0, v, 0)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman bir doğru olsun. Bu durumda,

$$f(s, u) * g(t, v) = (tu + s^2v, sv, s^2t + uv, st)$$

ve 4.3 eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = (tu + s^2v, sv, s^2t + uv, st) (u, 0, -s^2, -s)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(-t(s^2 + s^4 - u^2), 2suv, (s^2 - s^4 + u^2)v, -2s^3v \right)$$

olarak bulunur. $N_f = -s^2 - s^4 + u^2$ dir. O halde

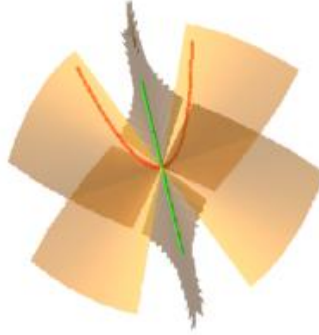
$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(t, -\frac{2suv}{s^2 + s^4 - u^2}, \frac{(-s^2 + s^4 - u^2)v}{s^2 + s^4 - u^2}, \frac{2s^3v}{s^2 + s^4 - u^2} \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{15}(u, v) = \left(-\frac{2sv}{-1 + s^2 + s^4}, \frac{(-1 - s^2 + s^4)v}{-1 + s^2 + s^4}, \frac{2s^3v}{-1 + s^2 + s^4} \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_{15} yüzeyi Şekil 4.3 de gösterilmiştir.



Şekil 4.3. Doğrultusu yz spacelike düzleminde bir parabol ve doğrultmanı bir doğru olan S_{15} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 4.4.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$f(s, u) = (u, 0, s^2, s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu yz spacelike düzleminde bir parabol ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$g(t, v) = (t, v, -2, 12v)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman bir doğru olsun. Bu durumda,

$$f(s, u) * g(t, v) = (tu - 2s(s - 6v), -2s - 12s^2v + uv, -2u + s(st + v), st - s^2v + 12uv)$$

ve 4.3 eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = (tu - 2s(s - 6v), -2s - 12s^2v + uv, -2u + s(st + v), st - s^2v + 12uv) (u, 0, -s^2, -s)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(-t(s^2 + s^4 - u^2), -4su + (s^4 + s^2(1 - 24u) + u^2)v, \right.$$

$$2(-s^2 + s^4 - u^2 - 12s^3v + suv),$$

$$\left. 2(2s^3 + 6s^4v + 6u^2v - s^2(6 + u)v) \right)$$

olarak bulunur. $N_f = s^2 + s^4 - u^2$ dir. O halde

$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(t, \frac{4su - (s^4 + s^2(1 - 24u) + u^2)v}{s^2 + s^4 - u^2}, \right.$$

$$\frac{2(s^2 - s^4 + u^2 + 12s^3v - suv)}{s^2 + s^4 - u^2},$$

$$\left. - \frac{2(2s^3 + 6s^4v + 6u^2v - s^2(6 + u)v)}{s^2 + s^4 - u^2} \right)$$

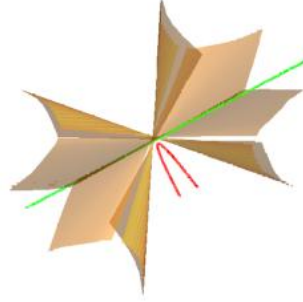
elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{16}(u, v) = \left(\frac{4s - (1 - 23s^2 + s^4)v}{-1 + s^2 + s^4}, \frac{2 - 2s(v + s(-1 + s^2 - 12sv))}{-1 + s^2 + s^4}, \right.$$

$$\left. - \frac{2(2s^3 + (6 - 7s^2 + 6s^4)v)}{-1 + s^2 + s^4} \right)$$

biçiminde elde edilir.

S_{16} yüzeyi Şekil 4.4 de gösterilmiştir.



Şekil 4.4. Doğrultusu yz spacelike düzleminde bir parabol ve doğrultmanı doğru olan S_{16} genelleştirilmiş döneş yüzeyi

Örnek 4.5.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$f(s, u) = (u, 0, 0, s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu bir doğru ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$g(t, v) = \left(t, \frac{11tv}{36}, \frac{11t}{6} \sin \frac{v}{6}, \frac{5\sqrt{11}t \cos \frac{v}{6}}{6}\right)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman spacelike aslı normalli ve e_3 eksenli spacelike helis olsun. Bu durumda

$$f(s, u) * g(t, v) = \left(tu + \frac{5}{6}\sqrt{11}st \cos \frac{v}{6}, \frac{11}{36}t(uv + 6ss \sin \frac{v}{6}), \frac{11}{36}t(sv + 6us \sin \frac{v}{6}),\right.$$

$$\left. st + \frac{5}{6}\sqrt{11}t \cos \frac{v}{6}\right)$$

(4.3) eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(tu + \frac{5}{6}\sqrt{11}st \cos \frac{v}{6}, \frac{11}{36}t(uv + 6ss \sin \frac{v}{6}), \frac{11}{36}t(sv + 6us \sin \frac{v}{6}),\right.$$

$$\left. st + \frac{5}{6}\sqrt{11}t \cos \frac{v}{6}\right) (u, 0, 0, -s)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(t(-s^2 + u^2), \frac{11}{36}t((s^2 + u^2)v + 12sus \sin \frac{v}{6}),\right.$$

$$\left. \frac{11}{18}t(suv + 3(s^2 + u^2) \sin \frac{v}{6}), \frac{5}{6}\sqrt{11}t(-s^2 + u^2) \cos \frac{v}{6}\right)$$

olarak bulunur. $N_f = -s^2 + u^2$ dir. O halde

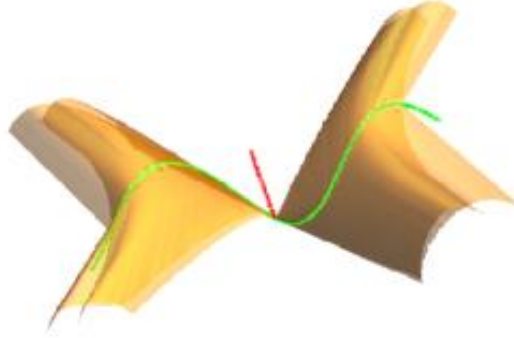
$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(\frac{t(-s^2 + u^2)}{-s^2 + u^2}, \frac{\frac{11}{36}t((s^2 + u^2)v + 12susin\frac{v}{6})}{-s^2 + u^2}, \right. \\ \left. \frac{\frac{11}{18}t(suv + 3(s^2 + u^2)sin\frac{v}{6})}{-s^2 + u^2}, \frac{\frac{5}{6}\sqrt{11}t(-s^2 + u^2)cos\frac{v}{6}}{-s^2 + u^2} \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{17}(u, v) = \left(-\frac{11(v + s^2v + 12ssin\frac{v}{6})}{36(-1 + s^2)}, -\frac{11(sv + 3(1 + s^2)sin\frac{v}{6})}{18(-1 + s^2)}, \frac{5}{6}\sqrt{11}cos\frac{v}{6} \right)$$

elde edilir.

$S_{17}(u, v)$ yüzeyi Şekil 4.5 de gösterilmiştir.



Şekil 4.5. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı spacelike asli normalli ve e_3 eksenli spacelike helis olan S_{17} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 4.6.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4 \\ f(s, u) = (u, 0, 0, s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğru bir doğru ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4 \\ g(t, v) = (t, \frac{1}{6}tv^3 + tv, \frac{1}{2}tv^2, -tv)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $-e_1 + e_3$ eksenli timelike eğri olsun. Bu durumda

$$f(s, u) * g(t, v) = \left(t(u - sv), \frac{1}{6}tv(3sv + u(6 + v^2)), \frac{1}{6}tv(3uv + s(6 + v^2)), t(s - uv) \right)$$

(4.3) eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(t(u - sv), \frac{1}{6}tv(3sv + u(6 + v^2)), \right. \\ \left. \frac{1}{6}tv(3uv + s(6 + v^2)), t(s - uv) \right) (u, 0, 0, -s)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(t(-s^2 + u^2), \frac{1}{6}tv(6suv + s^2(6 + v^2) + u^2(6 + v^2)), \right. \\ \left. \frac{1}{6}tv(3s^2v + 3u^2v + 2su(6 + v^2)), t(s - u)(s + u)v \right)$$

olarak bulunur. $N_f = -s^2 + u^2$ dir. O halde

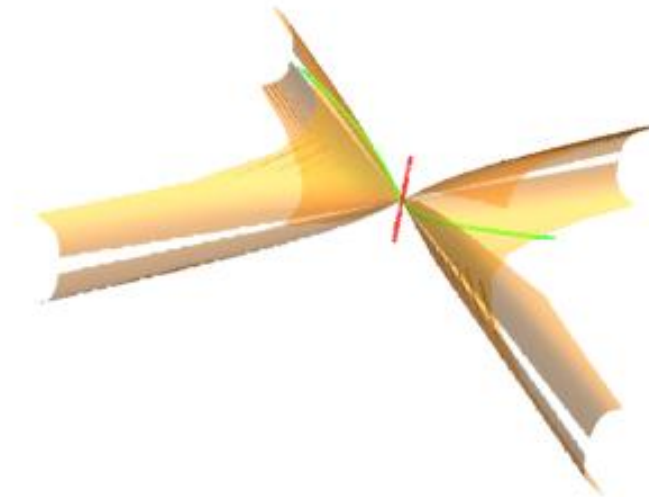
$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(\frac{t(-s^2 + u^2)}{-s^2 + u^2}, \frac{\frac{1}{6}tv(6suv + s^2(6 + v^2) + u^2(6 + v^2))}{-s^2 + u^2}, \right. \\ \left. \frac{\frac{1}{6}tv(3s^2v + 3u^2v + 2su(6 + v^2))}{-s^2 + u^2}, \frac{t(s - u)(s + u)v}{-s^2 + u^2} \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{18}(u, v) = \left(-\frac{v(6 + 6sv + v^2 + s^2(6 + v^2))}{6(-1 + s^2)}, -\frac{v(3v + 3s^2v + 2s(6 + v^2))}{6(-1 + s^2)}, -v \right)$$

elde edilir.

$S_{18}(u, v)$ yüzeyi Şekil 4.6 de gösterilmiştir.



Şekil 4.6. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı $-e_1 + e_3$ ekseli timelike eğri olan S_{18} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 4.7.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$
$$f(s, u) = (s^2 - u^2, s^2 + u^2, 2su, 0)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu $x^2 - y^2 = 1$ denklemlili Minkowski çemberi ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$
$$g(t, v) = (t, \frac{1}{6}tv^3 + tv, \frac{1}{2}tv^2, -tv)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $-e_1 + e_3$ eksenli timelike eğri olsun. Bu durumda

$$f(s, u) * g(t, v) = \left(t(s - u)(s + u) + stuv^2 - \frac{1}{6}t(s^2 + u^2)v(6 + v^2), \right. \\ \left. t(s^2 + u^2) + 2stuv + \frac{1}{6}t(s - u)(s + u)v(6 + v^2), \right. \\ \left. \frac{1}{2}t(-u(-2 + v) + sv)(uv + s(2 + v)), \right. \\ \left. \frac{1}{6}tv(3s^2(-2 + v) + 3u^2(2 + v) - 2su(6 + v^2)) \right)$$

(4.3) eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(t(s - u)(s + u) + stuv^2 - \frac{1}{6}t(s^2 + u^2)v(6 + v^2), \right. \\ \left. t(s^2 + u^2) + 2stuv + \frac{1}{6}t(s - u)(s + u)v(6 + v^2), \right. \\ \left. \frac{1}{2}t(-u(-2 + v) + sv)(uv + s(2 + v)), \right. \\ \left. \frac{1}{6}tv(3s^2(-2 + v) + 3u^2(2 + v) \right. \\ \left. - 2su(6 + v^2)) \right) (s^2 - u^2, -s^2 - u^2, -2su, 0)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(2t(s^2 - u^2)^2, \right. \\ \left. \frac{1}{3}tv(-6s^3u(-2 + v) - 6su^3(2 + v) + s^4(6 + v^2) \right. \\ \left. + 2s^2u^2(6 + v^2) + u^4(6 + v^2)), \right. \\ \left. \frac{2}{3}tv(3s^4 - 3u^4 - 6s^2u^2v + s^3u(6 + v^2) + su^3(6 + v^2)), \right. \\ \left. \frac{1}{3}t(s - u)(s + u)v(3s^2v + 3u^2v - 2su(6 + v^2)) \right)$$

olarak bulunur. $N_f = 2(s^2 - u^2)^2$ dir. O halde

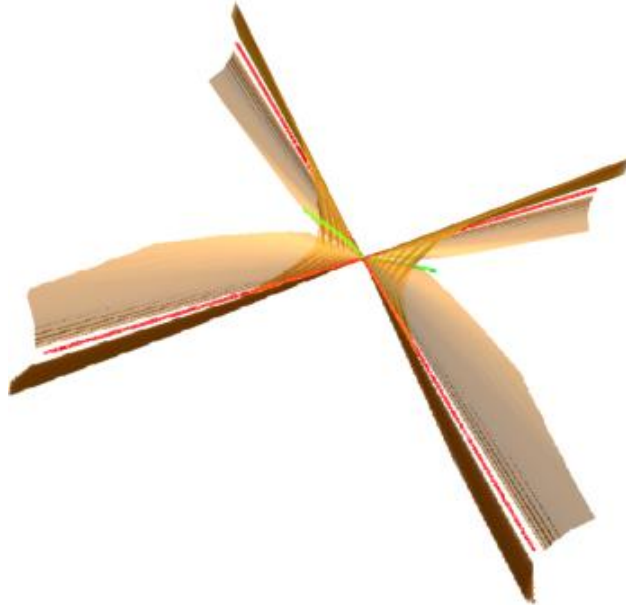
$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(\frac{2t(s^2 - u^2)^2}{2(s^2 - u^2)^2}, \right. \\ \left. \frac{\frac{1}{3}tv(-6s^3u(-2 + v) - 6su^3(2 + v) + s^4(6 + v^2))}{2(s^2 - u^2)^2} \right. \\ \left. + \frac{2s^2u^2(6 + v^2) + u^4(6 + v^2)}{2(s^2 - u^2)^2}, \right. \\ \left. \frac{\frac{2}{3}tv(3s^4 - 3u^4 - 6s^2u^2v + s^3u(6 + v^2) + su^3(6 + v^2))}{2(s^2 - u^2)^2}, \right. \\ \left. \frac{\frac{1}{3}t(s - u)(s + u)v(3s^2v + 3u^2v - 2su(6 + v^2))}{2(s^2 - u^2)^2} \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{19}(u, v) = \left(\frac{v(6 + 6s(-2 + s(2 + s(2 + s)))) - 6s(1 + s^2)v + (1 + s^2)^2v^2}{6(-1 + s^2)^2}, \right. \\ \left. \frac{v(-3 + s(6 + 3s^3 - 6sv + v^2 + s^2(6 + v^2)))}{3(-1 + s^2)^2}, \frac{v(3v + 3s^2v - 2s(6 + v^2))}{6(-1 + s^2)} \right)$$

elde edilir.

$S_{19}(u, v)$ yüzeyi Şekil 4.7 de gösterilmiştir.



Şekil 4.7. Doğrultusu $x^2 - y^2 = 1$ denklemlili Minkowski çemberi ve doğrultmanı $-e_1 + e_3$ eksenli timelike eğri olan S_{19} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 4.8.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$f(s, u) = \left(u, \frac{11us}{36}, \frac{11u}{6} \sin \frac{s}{6}, \frac{5\sqrt{11}}{6} u \cos \frac{s}{6} \right)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu spacelike asli normalli ve e_3 eksenli spacelike helis ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$g(t, v) = \left(t, \frac{1}{6}tv^3 + tv, \frac{1}{2}tv^2, -tv \right)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $-e_1 + e_3$ eksenli timelike eğri olsun. Bu durumda

$$f(s, u) * g(t, v) = \left(\begin{aligned} &\frac{1}{216}tu(216 - 11sv(6 + v^2) - 180\sqrt{11}v \cos \frac{s}{6} + 198v^2 \sin \frac{s}{6}), \\ &\frac{1}{36}tu(11s + 6v(6 + v^2) + 15\sqrt{11}v^2 \cos \frac{s}{6} + 66v \sin \frac{s}{6}), \\ &\frac{1}{36}tu(v(11s + 18v) + 5\sqrt{11}v(6 + v^2) \cos \frac{s}{6} + 66 \sin \frac{s}{6}), \\ &\frac{1}{72}tu(60\sqrt{11} \cos \frac{s}{6} + v(-72 + 11sv - 22(6 + v^2) \sin \frac{s}{6})) \end{aligned} \right)$$

(4.3) eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(\begin{aligned} &\frac{1}{216}tu(216 - 11sv(6 + v^2) - 180\sqrt{11}v \cos \frac{s}{6} + 198v^2 \sin \frac{s}{6}), \\ &\frac{1}{36}tu(11s + 6v(6 + v^2) + 15\sqrt{11}v^2 \cos \frac{s}{6} + 66v \sin \frac{s}{6}), \\ &\frac{1}{36}tu(v(11s + 18v) + 5\sqrt{11}v(6 + v^2) \cos \frac{s}{6} + 66 \sin \frac{s}{6}), \\ &\frac{1}{72}tu(60\sqrt{11} \cos \frac{s}{6} + v(-72 + 11sv - 22(6 + v^2) \sin \frac{s}{6})) \end{aligned} \right)$$

$$\left(u, -\frac{11us}{36}, -\frac{11u}{6} \sin \frac{s}{6}, -\frac{5\sqrt{11}}{6} u \cos \frac{s}{6} \right)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(\begin{aligned} &-\frac{tu^2(5832 - 121s^2 + 2772 \cos \frac{s}{3})}{1296}, \\ &\frac{tu^2v(360\sqrt{11}(11s + 18v) \cos \frac{s}{6} + (6 + v^2)(8424 + 121s^2 + 2772 \cos \frac{s}{3}))}{7776} \\ &+ \frac{396(72 - 11sv) \sin \frac{s}{6}}{7776}, \\ &\frac{tu^2(4068v + 11s(144 - 11sv) + 720\sqrt{11}(6 + v^2) \cos \frac{s}{6})}{2592} \\ &+ \frac{7128v \cos \frac{s}{3} + 484s(6 + v^2) \sin \frac{s}{6} + 3960\sqrt{11} \sin \frac{s}{3}}{2592}, \\ &\frac{tu^2v(1476 + 121s^2 + 396sv + 110\sqrt{11}s(6 + v^2) \cos \frac{s}{6} + 7128 \cos \frac{s}{3})}{1296} \\ &- \frac{792(6 + v^2) \sin \frac{s}{6} - 990\sqrt{11}v \sin \frac{s}{3}}{1296} \end{aligned} \right)$$

olarak bulunur. $N_f = -\frac{u^2(5832-121s^2+2772\cos\frac{s}{3})}{1296}$ dir. O halde

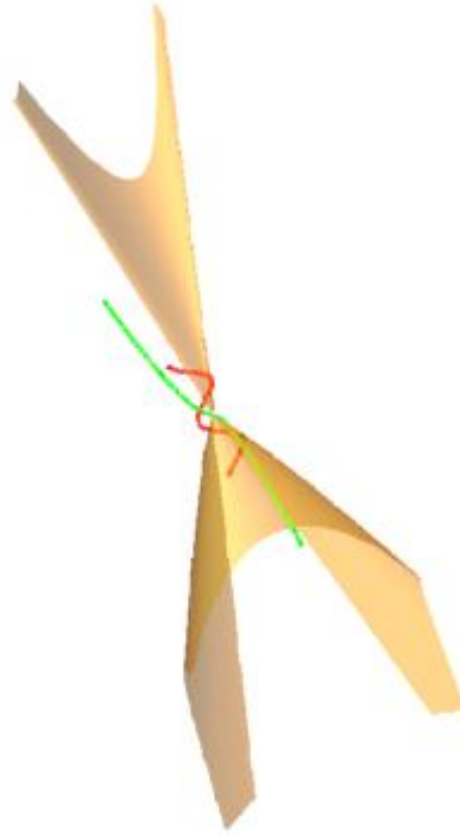
$$\begin{aligned} \frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} &= \frac{1}{-\frac{u^2(5832-121s^2+2772\cos\frac{s}{3})}{1296}} \left(-\frac{tu^2(5832-121s^2+2772\cos\frac{s}{3})}{1296}, \right. \\ &\quad \frac{tu^2v(360\sqrt{11}(11s+18v)\cos\frac{s}{6} + (6+v^2)(8424+121s^2+2772\cos\frac{s}{3}))}{7776} \\ &\quad + \frac{396(72-11sv)\sin\frac{s}{6}}{7776}, \\ &\quad \frac{tu^2(4068v+11s(144-11sv) + 720\sqrt{11}(6+v^2)\cos\frac{s}{6})}{2592} \\ &\quad + \frac{7128v\cos\frac{s}{3} + 484s(6+v^2)\sin\frac{s}{6} + 3960\sqrt{11}\sin\frac{s}{3}}{2592}, \\ &\quad \frac{tu^2v(1476+121s^2+396sv+110\sqrt{11}s(6+v^2)\cos\frac{s}{6})}{1296} \\ &\quad \left. + \frac{7128\cos\frac{s}{3} - 792(6+v^2)\sin\frac{s}{6} - 990\sqrt{11}v\sin\frac{s}{3}}{1296} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} S_{20}(u, v) &= \left(-\frac{v(360\sqrt{11}(11s+18v)\cos\frac{s}{6} + (6+v^2)(8424+121s^2+2772\cos\frac{s}{3}))}{6(5832-121s^2+2772\cos\frac{s}{3})} \right. \\ &\quad + \frac{396(72-11sv)\sin\frac{s}{6}}{6(5832-121s^2+2772\cos\frac{s}{3})}, \\ &\quad \frac{v(4068v+11s(144-11sv) + 720\sqrt{11}(6+v^2)\cos\frac{s}{6} + 7128v\cos\frac{s}{3})}{-11664+242s^2-5544\cos\frac{s}{3}} \\ &\quad + \frac{484s(6+v^2)\sin\frac{s}{6} + 3960\sqrt{11}\sin\frac{s}{3}}{-11664+242s^2-5544\cos\frac{s}{3}}, \\ &\quad \frac{v(1476+121s^2+396sv+110\sqrt{11}s(6+v^2)\cos\frac{s}{6} + 7128\cos\frac{s}{3})}{-5832+121s^2-2772\cos\frac{s}{3}} \\ &\quad \left. - \frac{792(6+v^2)\sin\frac{s}{6} - 990\sqrt{11}v\sin\frac{s}{3}}{-5832+121s^2-2772\cos\frac{s}{3}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$S_{20}(u, v)$ yüzeyi Şekil 4.8 de gösterilmiştir.



Şekil 4.8. Doğrultusu spacelike asli normalli ve e_3 eksenli spacelike helis ve doğrultmanı $-e_1 + e_3$ eksenli timelike eğri olan S_{20} genelleştirilmiş dönel yüzeyi

4.2. Minkowski 3- Uzayında $h = f * g * \bar{f}$ Yüzeyin Geometrik Özellikleri

Bu bölümde $h(s, u; t, v) = f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)$ yüzeylerinin geometrik özellikleri incelenecektir. Ayrıca, g doğrultmanı bir küre (pseudo küre, pseudo hiperbolik uzay) üzerinde yattığında, h yüzeyinin bir kürenin (pseudo küre, pseudo hiperbolik uzayın) parçası olduğu gösterilecektir.

İlk olarak, afin uzayda $h(s, u; t, v)$ yüzeyi üzerindeki herhangi bir $h(s_0, u_0; t_0, v_0)$ noktasında, $h(s_0, u_0; t, v) = f(s_0, u_0) * g(t, v) * \bar{f}(s_0, u_0)$ eğrisi $f(s_0, u_0)$ eksenini boyunca dönen $g(t, v)$ doğrultusunun bir kopyasıdır ve $h(s, u; t_0, v_0) = f(s, u) * g(t_0, v_0) * \bar{f}(s, u)$ bir küresel eğridir. Yani $h(s, u; t_0, v_0) = f(s, u) * g(t_0, v_0) * \bar{f}(s, u)$ eğrisinin koordinat fonksiyonları küre denklemini sağlar.

$h(s, u; t_0, v_0)$ eğrisinin küresel bir eğri olması Lemma 3.3. ün 4. maddesinden

türetilir, yani $(w, x, y, z) = h(s, u; t_0, v_0)$ olduğundan

$$w^2 = N_f^2 g_0^2(t_0, v_0)$$

$$\frac{-g_1^2(t_0, v_0) + g_2^2(t_0, v_0) + g_3^2(t_0, v_0)}{g_0^2(t_0, v_0)} w^2 = -x^2 + y^2 + z^2$$

dir. Buradan

$$-x^2 + y^2 + z^2 = N_f^2(-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)$$

ve

$$\frac{w^2}{g_0^2(t_0, v_0)} = N_f^2$$

elde edilir ve yerine yazılırsa

$$-x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \frac{(-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)}{g_0^2(t_0, v_0)}$$

dir. Dolayısıyla

$$-w^2 - x^2 + y^2 + z^2 = N_f^2(-g_0^2 - g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)$$

dir.

Afin uzayda $w \neq 0$ olduğundan $g_0(t_0, v_0) \neq 0$ ve

$$\frac{-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}{g_0^2(t_0, v_0)}$$

bir sabittir.

Yani $h(s, u; t_0, v_0) = f(s, u) * g(t_0, v_0) * \bar{f}(s, u)$ eğrisinin koordinatları kürenin denklemini sağlar. Dolayısıyla $h(s, u; t_0, v_0)$ eğrisi küresel bir eğridir.

1. $-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 > 0$ ise $h(s, u; t_0, v_0)$ eğrisi $S_1^2(1)$ pseudo küresinde yatar.
2. $-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 < 0$ ise $h(s, u; t_0, v_0)$ eğrisi $H_0^2(1)$ pseudo hiperbolik uzayında yatar.

Ayrıca, aşağıdaki önerme g doğrultmanı bir küre üzerinde yattığında, h yüzeyinin bu kürenin bir parçası olduğunu göstermektedir.

Önerme 4.9. Eğer g doğrultmanı sıfır olmayan bir β sabiti için

$$-g_0^2 + \beta(-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = 0 \quad (4.4)$$

koşulunu sağlıyorsa, $h = f * g * \bar{f}$ yüzeyinin kapalı denklemi

$$-w^2 + \beta(-x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

dır.

1. Eğer $g(V_q, V_q) > 0$ için g

$$-g_0^2 + (-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa g nin belirttiği eğri, $S_1^2(1)$ pseudo küre üzerinde bir eğridir ve h yüzeyi bu birim pseudo kürenin bir parçasıdır. Burada g nulldur.

2. Eğer $g(V_q, V_q) < 0$ için g

$$-g_0^2 - (-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa g nin belirttiği eğri, $H_0^2(1)$ pseudo hiperbolik uzayı üzerinde bir eğridir ve h yüzeyi bu pseudo hiperbolik uzayının bir parçasıdır.

İspat. $(w, x, y, z) = h = (h_0, h_1, h_2, h_3) = f * g * \bar{f} = gR$ olsun. Lemma 3.3. in 4. maddesinden,

$$\begin{aligned} w &= g_0(t, v)N_f \\ -w^2 &= -g_0^2(t, v)N_f^2 \\ -x^2 + y^2 + z^2 &= N_f^2(-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) \end{aligned}$$

dir.

O halde $g = (g_0, g_1, g_2, g_3)$ doğrultmanı $g_0^2 = \beta(-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)$ yi sağlıyorsa h yüzeyinin kapalı denklemi

$$-w^2 + \beta(-x^2 + y^2 + z^2) = N_f^2(-g_0^2 + \beta(-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)) = 0$$

olur.

1. (4.4) eşitliğinde $\beta = 1$ seçilirse

$$-g_0^2 + (-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = 0 \quad (4.5)$$

dır. Yani g , \mathbb{R}_2^4 de null dır.

(4.5) eşitliğinden

$$-\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 + \left(\frac{g_2}{g_0}\right)^2 + \left(\frac{g_3}{g_0}\right)^2 = 1$$

elde edilir. O halde g nin belirttiği eğri $S_1^2(1)$ pseudo küre üzerinde yatar ve $h = f * g * \bar{f}$ yüzeyi bu pseudo kürenin bir parçasıdır.

2. (4.4) eşitliğinde $\beta = -1$ seçilirse

$$-g_0^2 - (-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = 0 \quad (4.6)$$

dir.

(4.6) eşitliğinden

$$-\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 + \left(\frac{g_2}{g_0}\right)^2 + \left(\frac{g_3}{g_0}\right)^2 = -1$$

elde edilir. O halde g nin belirttiği eğri $H_0^2(1)$ pseudo hiperbolik uzayında yatar ve $h = f * g * \bar{f}$ yüzeyi bu hiperbolik uzayın bir parçasıdır.

■

Örnek 4.10.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4 \\ f(s, u) = (u, s, 0, 3s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu bir doğru ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4 \\ g(t, v) = (t^2 - v^2, 2tv, 0, t^2 + v^2)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $-x^2 + z^2 = 1$ denklemlili Minkowski çemberi olsun.

Bu durumda

$$\mathbf{g}(V_g, V_g) = -g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = -4t^2v^2 + (t^2 + v^2)^2 \\ = -4t^2v^2 + t^4 + 2t^2v^2 + v^4 \\ = (t^2 - v^2)^2$$

dir. Dolayısıyla $\mathbf{g}(V_g, V_g) = (t^2 - v^2)^2$ olduğundan V_g spacelike bir vektördür.

Ayrıca

$$-g_0^2 - g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 0$$

dir. Bu durumda

$$f(s, u) * g(t, v) = (t^2(3s + u) - 2stv + (3s - u)v^2, 2tuv + s(t - v)(t + v), \\ - s(t^2 - 6tv + v^2), 3s(t - v)(t + v) + u(t^2 + v^2))$$

ve (4.3) eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = t^2(3s + u) - 2stv + (3s - u)v^2, 2tuv + s(t - v)(t + v), \\ - s(t^2 - 6tv + v^2), 3s(t - v)(t + v) \\ + u(t^2 + v^2)(u, -s, 0, -3s)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v), -2s^2(t - 3v)(3t - v) + 2tu^2v, \\ - 2su(t^2 - 6tv + v^2), u^2(t^2 + v^2) - 2s^2(5t^2 - 6tv + 5v^2) \right)$$

olarak bulunur. $N_f = -u^2 + 8s^2$ dir. O halde

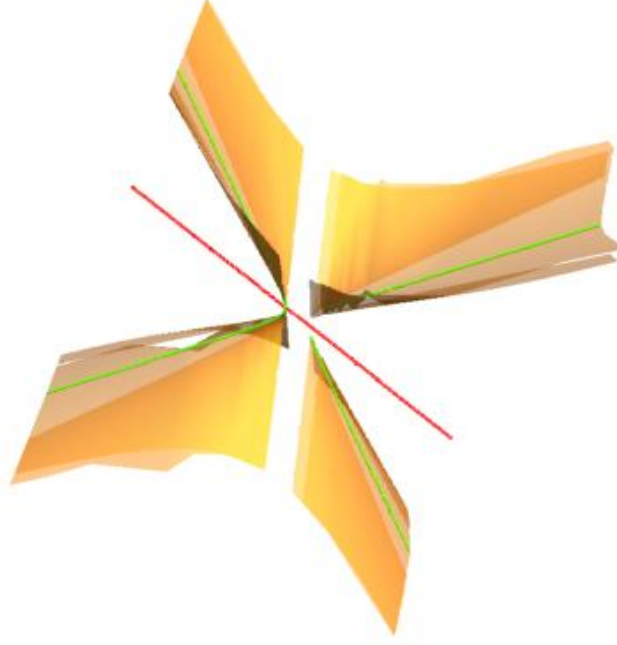
$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(\frac{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)}{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)}, \frac{-2s^2(t - 3v)(3t - v) + 2tu^2v}{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)}, \right. \\ \left. \frac{-2su(t^2 - 6tv + v^2)}{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)}, \frac{u^2(t^2 + v^2) - 2s^2(5t^2 - 6tv + 5v^2)}{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)} \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{21}(u, v) = \left(\frac{2v - 2s^2(-3 + v)(-1 + 3v)}{(-1 + 8s^2)(-1 + v^2)}, -\frac{2s(1 + (-6 + v)v)}{(-1 + 8s^2)(-1 + v^2)}, \right. \\ \left. \frac{1 + v^2 - 2s^2(5 + v(-6 + 5v))}{(-1 + 8s^2)(-1 + v^2)} \right)$$

biçiminde elde edilir.

$S_{21}(u, v)$ yüzeyi pseudo küre yüzeyinin bir parçasıdır ve Şekil 4.9 de gösterilmiştir.



Şekil 4.9.Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı Minkowski çemberi olan S_{21} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 4.11.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$f(s, u) = (s^2 - u^2, s^2 + u^2, 2su, 0)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu $x^2 - y^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberi ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$g(t, v) = (t^2 - v^2, 2tv, 0, t^2 + v^2)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $-x^2 + z^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(V_g, V_g) &= -g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = -4t^2v^2 + (t^2 + v^2)^2 \\ &= -4t^2v^2 + t^4 + 2t^2v^2 + v^4 \\ &= (t^2 - v^2)^2 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\mathbf{g}(V_g, V_g) = (t^2 - v^2)^2$ olduğundan V_g spacelike bir vektördür.

Ayrıca

$$-g_0^2 - g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 0$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(s, u) * g(t, v) &= -2t(s^2 + u^2)v + (s - u)(s + u)(t - v)(t + v), \\ & t^2(s - u)^2 + 2t(s - u)(s + u)v - (s + u)^2v^2, \\ & - t^2(s - u)^2 - (s + u)^2v^2, \\ & - 4stuv + (s - u)(s + u)(t^2 + v^2) \end{aligned}$$

ve (4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) &= (-2t(s^2 + u^2)v + (s - u)(s + u)(t - v)(t + v), \\ & t^2(s - u)^2 + 2t(s - u)(s + u)v - (s + u)^2v^2, \\ & - t^2(s - u)^2 - (s + u)^2v^2, \\ & - 4stuv + (s - u)(s + u)(t^2 + v^2))(s^2 - u^2, -s^2 - u^2, -2su, 0) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) &= 2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v), \\ & 4(st^2u(-s + u)(s + u) + t(s^2 + u^2)^2v + su(-s + u)(s + u)v^2), \\ & - 2(s^2 + u^2)(-4stuv + s^2(t^2 + v^2) - u^2(t^2 + v^2)), \\ & 8stu(-s^2 + u^2)v \end{aligned}$$

olarak bulunur. $N_f = 2(s^2 - u^2)^2$ dir. O halde

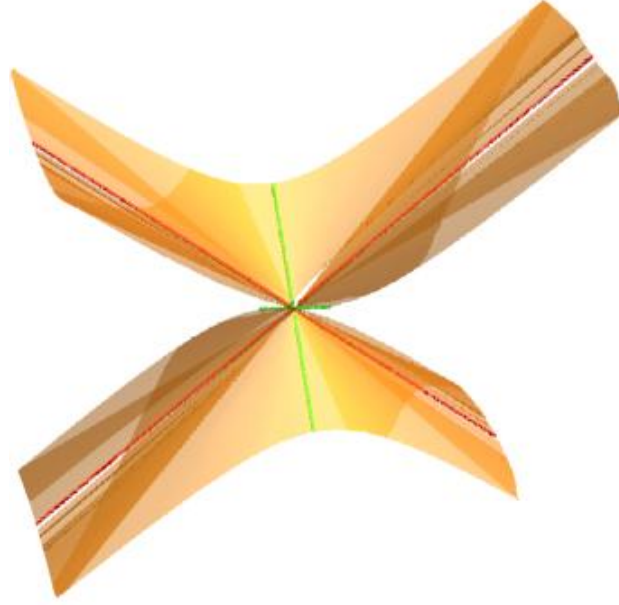
$$\begin{aligned} \frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} &= \left(\frac{2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v)}{(2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v))}, \right. \\ & \frac{4(st^2u(-s + u)(s + u) + t(s^2 + u^2)^2v + su(-s + u)(s + u)v^2)}{2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v)}, \\ & \frac{-2(s^2 + u^2)(-4stuv + s^2(t^2 + v^2) - u^2(t^2 + v^2))}{2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v)}, \\ & \left. \frac{8stu(-s^2 + u^2)v}{2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} S_{22}(u, v) &= \left(- \frac{2(v + s(1 + 2sv + s^3v + v^2 - s^2(1 + v^2)))}{(-1 + s^2)^2(-1 + v^2)}, \right. \\ & \left. \frac{-1 + s^4 - 4s(1 + s^2)v + (-1 + s^4)v^2}{(-1 + s^2)^2(-1 + v^2)}, \frac{4sv}{(-1 + s^2)(-1 + v^2)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$S_{22}(u, v)$ yüzeyi pseudo küre yüzeyinin bir parçasıdır ve Şekil 4.10 de gösterilmiştir.



Şekil 4.10. Doğrultusu $x^2 - y^2 = 1$ denklemlili Minkowski çemberi ve doğrultmanı $-x^2 + z^2 = 1$ denklemlili Minkowski çemberi olan S_{22} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 4.12.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$f(s, u) = (u, s, 0, 3s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu bir doğru ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$g(t, v) = (t^2 + v^2, 0, t^2 - v^2, 2tv)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $y^2 + z^2 = 1$ Öklid çemberi olsun. Bu durumda

$$\mathbf{g}(V_g, V_g) = -g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = (t^2 - v^2)^2 + 4t^2v^2$$

$$= (t^2 + v^2)^2$$

dir. Dolayısıyla $\mathbf{g}(V_g, V_g) = (t^2 + v^2)^2$ olduğundan V_g spacelike bir vektördür.

Ayrıca

$$-g_0^2 - g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 0$$

dir. Bu durumda

$$f(s, u) * g(t, v) = \left(6stv + u(t^2 + v^2), s(4t^2 - 2v^2), t^2u - 2stv - uv^2, \right. \\ \left. 2(tuv + s(2t^2 + v^2)) \right)$$

ve (4.3) eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(6stv + u(t^2 + v^2), s(4t^2 - 2v^2), t^2u - 2stv - uv^2, \right. \\ \left. 2(tuv + s(2t^2 + v^2)) \right) (u, -s, 0, -3s)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(-(8s^2 - u^2)(t^2 + v^2), -6s(-t^2u + 2stv + uv^2), \right. \\ -4stuv + 8s^2(t - v)(t + v) + u^2(t - v)(t + v), \\ \left. -20s^2tv + 2tu^2v + 2su(t - v)(t + v) \right)$$

olarak bulunur. $N_f = -8s^2 + u^2$ dir. O halde

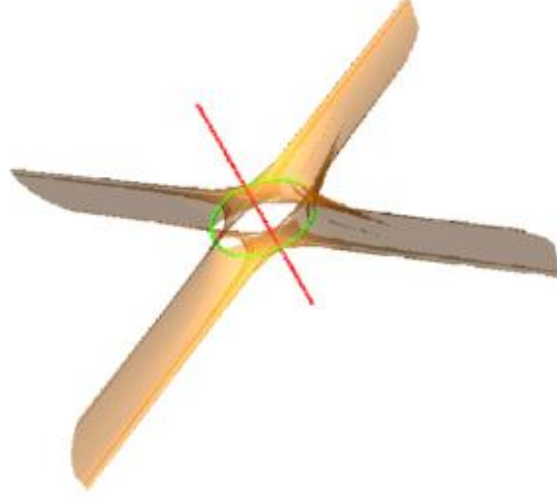
$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(\frac{-(8s^2 - u^2)(t^2 + v^2)}{-(8s^2 - u^2)(t^2 + v^2)}, \frac{-6s(-t^2u + 2stv + uv^2)}{-(8s^2 - u^2)(t^2 + v^2)}, \right. \\ \frac{-4stuv + 8s^2(t - v)(t + v) + u^2(t - v)(t + v)}{-(8s^2 - u^2)(t^2 + v^2)}, \\ \left. \frac{-20s^2tv + 2tu^2v + 2su(t - v)(t + v)}{-(8s^2 - u^2)(t^2 + v^2)} \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{23}(u, v) = \left(\frac{6s(-1 + 2sv + v^2)}{(-1 + 8s^2)(1 + v^2)}, \frac{-1 + 4sv + v^2 + 8s^2(-1 + v^2)}{(-1 + 8s^2)(1 + v^2)}, \frac{-2v + 2s(-1 + 10sv + v^2)}{(-1 + 8s^2)(1 + v^2)} \right)$$

elde edilir.

$S_{23}(u, v)$ yüzeyi pseudo küre yüzeyinin bir parçasıdır ve Şekil 4.11 de gösterilmiştir.



Şekil 4.11. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı $y^2 + z^2 = 1$ Öklid çemberi olan S_{23} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 4.13.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$f(s, u) = (u, s, 0, 3s)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu bir doğru ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$g(t, v) = (t^2 - v^2, t^2 + v^2, 2tv, 0)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $x^2 - y^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(V_g, V_g) &= -g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = -4t^2v^2 + (t^2 + v^2)^2 \\ &= -4t^2v^2 + t^4 + 2t^2v^2 + v^4 \\ &= -(t^2 - v^2)^2 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\mathbf{g}(V_g, V_g) = -(t^2 - v^2)^2$ olduğundan V_g timelike bir vektördür.

Ayrıca

$$-g_0^2 + g_1^2 - g_2^2 - g_3^2 = 0$$

dir. Bu durumda

$$f(s, u) * g(t, v) = t^2(-s + u) - (s + u)v^2, t^2(s + u) + 6stv + (-s + u)v^2, \\ 2tuv + 3s(t^2 + v^2), s(3t^2 + 2tv - 3v^2)$$

(4.3) eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(t^2(-s + u) - (s + u)v^2, t^2(s + u) + 6stv + (-s + u)v^2, \right. \\ \left. 2tuv + 3s(t^2 + v^2), s(3t^2 + 2tv - 3v^2) \right) (u, -s, 0, -3s)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = -(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v), 12stuv + 10s^2(t^2 + v^2) \\ + u^2(t^2 + v^2), 2(8s^2tv + tu^2v + 3su(t^2 + v^2)), \\ 2s(2tuv + 3s(t^2 + v^2))$$

olarak bulunur. $N_f = -8s^2 + u^2$ dir. O halde

$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(\frac{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)}{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)}, \right. \\ \frac{12stuv + 10s^2(t^2 + v^2) + u^2(t^2 + v^2)}{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)}, \\ \left. \frac{2(8s^2tv + tu^2v + 3su(t^2 + v^2))}{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)}, \frac{2s(2tuv + 3s(t^2 + v^2))}{-(8s^2 - u^2)(t - v)(t + v)} \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{24}(u, v) = \left(\frac{1 + 12sv + v^2 + 10s^2(1 + v^2)}{(-1 + 8s^2)(-1 + v^2)}, \right. \\ \left. \frac{2(v + s(3 + 8sv + 3v^2))}{(-1 + 8s^2)(-1 + v^2)}, \frac{2s(2v + 3s(1 + v^2))}{(-1 + 8s^2)(-1 + v^2)} \right)$$

elde edilir.

$S_{24}(u, v)$ yüzeyi pseudo hiperbolik yüzeyinin bir parçasıdır ve Şekil 4.12 da gösterilmiştir.



Şekil 4.12. Doğrultusu bir doğru ve doğrultmanı $x^2 - y^2 = 1$ denklemlili Minkowski çemberi olan S_{24} genelleştirilmiş döneel yüzeyi

Örnek 4.14.

$$f : (s, u) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$f(s, u) = (s^2 - u^2, s^2 + u^2, 2su, 0)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultu $x^2 - y^2 = 1$ denklemlili Minkowski çemberi ve

$$g : (t, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (w, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^4$$

$$g(t, v) = (t^2 - v^2, t^2 + v^2, 0, 2tv)$$

fonksiyonunun belirttiği doğrultman $x^2 - z^2 = 1$ denklemlili Minkowski çemberi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(V_g, V_g) &= -g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = -(t^2 + v^2)^2 + 4t^2v^2 \\ &= -t^4 - 2t^2v^2 - v^4 + 4t^2v^2 \\ &= -(t^2 - v^2)^2 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\mathbf{g}(V_g, V_g) = -(t^2 - v^2)^2$ olduğundan V_g timelike bir vektördür. Ayrıca

$$-g_0^2 + g_1^2 - g_2^2 - g_3^2 = 0$$

dır. Bu durumda

$$f(s, u) * g(t, v) = \left(-2(t^2u^2 + s^2v^2), 2s^2t^2 - 4stuv - 2u^2v^2, \right. \\ \left. -2t(s^2 + u^2)v + 2su(t - v)(t + v), 2t(s - u)(s + u)v - 2su(t^2 + v^2) \right)$$

(4.3) eşitliğinden

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(-2(t^2u^2 + s^2v^2), 2s^2t^2 - 4stuv - 2u^2v^2, \right. \\ \left. -2t(s^2 + u^2)v + 2su(t - v)(t + v), \right. \\ \left. 2t(s - u)(s + u)v - 2su(t^2 + v^2) \right) (s^2 - u^2, -s^2 - u^2, -2su, 0)$$

veya

$$f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u) = \left(2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v), \right. \\ \left. 2t^2(s^2 + u^2)^2 - 8st(s - u)u(s + u)v + 2(s^2 + u^2)^2v^2, \right. \\ \left. -4(s^2 + u^2)(s^2tv - tu^2v - su(t^2 + v^2)), \right. \\ \left. -4s(s - u)u(s + u)(t^2 + v^2) \right)$$

olarak bulunur. $N_f = 2(s^2 - u^2)^2$ dir. O halde

$$\frac{f(s, u) * g(t, v) * \bar{f}(s, u)}{N_f} = \left(\frac{2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v)}{2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v)}, \right. \\ \frac{2t^2(s^2 + u^2)^2 - 8st(s - u)u(s + u)v + 2(s^2 + u^2)^2v^2}{2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v)}, \\ \frac{-4(s^2 + u^2)(s^2tv - tu^2v - su(t^2 + v^2))}{2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v)}, \\ \left. \frac{-4s(s - u)u(s + u)(t^2 + v^2)}{2(s - u)^2(s + u)^2(t - v)(t + v)} \right)$$

elde edilir. $t = 1, u = 1$ seçilirse

$$S_{25}(u, v) = \left(\frac{(1 + s^2)^2 - 4s(-1 + s^2)v + (1 + s^2)^2v^2}{(-1 + s^2)^2(1 - v^2)}, \right. \\ \left. \frac{2(1 + s^2)(-v + s(-1 + (s - v)v))}{(-1 + s^2)^2(-1 + v^2)}, \frac{2s(1 + v^2)}{-1 + s^2(-1 + v^2)} \right)$$

elde edilir.

$S_{25}(u, v)$ yüzeyi pseudo hiperbolik yüzeyinin bir parçasıdır ve Şekil 4.13 de gösterilmiştir.



Şekil 4.13.Doğrultusu $x^2 - y^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberı ve doğrultmanı $x^2 - z^2 = 1$ denklemlı Minkowski çemberı olan S_{25} genelleştirılmış dönel yüzeyı

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, diferensiyel geometrinin önemli konularından biri olan dönel yüzeyler, Minkowski 3-uzayı çerçevesinde ele alınmış ve klasik Öklidyen yaklaşımların ötesine geçilerek yeni bir bakış açısı sunulmuştur. Öncelikle, split kuaterniyonların çarpma işlemi kullanılarak Minkowski 3-uzayında standart dönel yüzeylerin bir genellemesi olan özel dönel yüzeyler tanımlanmış ve bu yüzeylerin geometrik özellikleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Bu yaklaşım, dönme ekseninin ve doğrultman eğrinin aynı düzlemde yer aldığı durumlar için etkili bir temsil sağlamıştır.

Çalışmanın devamında, farklı düzlemlerde yer alan özel eğriler yardımıyla genelleştirilmiş dönel yüzeyler elde edilmiş ve bu yüzeylerin cebirsel ve geometrik karakteristikleri ortaya konmuştur. Minkowski uzayının sahip olduğu semi-Öklidyen yapı nedeniyle, yüzeylerin ve dönme eksenlerinin nedensel karakterlerinin (spacelike, timelike ve lightlike) yüzey geometrisi üzerindeki etkileri açıkça gözlemlenmiş; bu durumun, Öklidyen uzayda karşılığı olmayan zengin bir yüzey sınıflandırmasına olanak tanıdığı görülmüştür.

Ayrıca, Minkowski 3-uzayında bazı eğrilerin pseudo küre ve pseudo hiperbolik uzay üzerinde yatma koşulları araştırılmış ve bu koşullar geometrik açıdan yorumlanmıştır. Elde edilen sonuçlar, genelleştirilmiş dönel yüzeylerin hem teorik diferensiyel geometri hem de geometrik modelleme açısından önemli bir potansiyele sahip olduğunu göstermektedir.

Sonuç olarak, bu çalışma Minkowski uzayında dönel ve genelleştirilmiş dönel yüzeylerin yapılarını daha iyi anlamaya katkı sağlamakta; elde edilen bulguların, ileride yapılacak çalışmalarda farklı nedensel tiplerdeki yüzeylerin sınıflandırılması, bilgisayar destekli geometrik tasarım ve relativistik geometri uygulamalarında kullanılabileceği düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

- [1] Alcázar, J. G., & Goldman, R. (2016). Detecting when an implicit equation or a rational parametrization defines a conical or cylindrical surface, or a surface of revolution. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 22(9), 2109–2122.
- [2] Alcázar, J. G., & Goldman, R. (2016). Finding the axis of revolution of an algebraic surface of revolution. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 22(9), 2082–2092.
- [3] Andradas, C., Recio, T., & Sendra, J. R. (2014). Reparametrizing swung surfaces over the reals. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 25(4), 239–253.
- [4] Andres, E., & Largeteau-Skapin, G. (2016). Digital surfaces of revolution made simple. In *International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI 2016)*, Springer, 243–254.
- [5] Ata, E., & Yaylı, Y. (2009). Split quaternions and semi-Euclidean projective. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(4), 1910–1915.
- [6] Farin, G. (1989). Rational curves and surfaces. In *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 215–238.
- [7] Farouki, R. T., & Sakkalis, T. (1990). Pythagorean hodographs. *IBM Journal of Research and Development*, 34(5), 736–752.
- [8] Farouki, R. T. (2008). *Pythagorean-hodograph curves*. Springer.
- [9] Fioravanti, M., Gonzalez-Vega, L., & Necula, I. (2006). On the intersection with revolution and canal surfaces. In *Algebraic Geometry and Geometric Modeling*, 167–183. Springer.
- [10] Fischer, I. (1998). *Dual-number method in kinematics, statics and dynamics*. CRC Press.
- [11] Goldman, R. (2010). Rethinking quaternions: Theory and computation. In B. A. Barsky (Ed.), *Synthesis lectures on computer graphics and animation* (No. 13). Morgan & Claypool.
- [12] Goldman, R. H. (2019). Surfaces of revolution with moving axes and angles. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 29(2), 163–181.

- [13] Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakóltesi Yayınları.
- [14] Hamilton, W. (1853). *Lectures on quaternions*. Hodges Smith and Co.
- [15] Inoguchi, J. (1998). Timelike surfaces of constant mean curvature in Minkowski 3-space. *Tokyo Journal of Mathematics*, 21(1), 141–152.
- [16] Jafari, M., & Yaylı, Y. (2015). Generalized quaternions and their algebraic properties. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 64(1), 15–27.
- [17] Jüttler, B. (1994). Visualization of moving objects using dual quaternion curves. *Computers and Graphics*, 18(3), 315–326.
- [18] Kozak, J., Krajnc, M., & Vitrih, V. (2016). A quaternion approach to polynomial PN surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 47, 172–188.
- [19] Kula, L. (2003). *Bölünmüş kuaterniyonların ve geometrik uygulamaları* (Doktora tezi). Ankara Üniversitesi, Ankara, 116s.
- [20] Kula, L., & Yaylı, Y. (2007). Split quaternions and rotations in semi-Euclidean space E_2^4 . *Journal of the Korean Mathematical Society*, 44(6), 1313–1327.
- [21] Larson, R. (2012). *Elementary linear algebra*. The Pennsylvania State University.
- [22] Lee, S. H. (2010). Rational curves are not unit speed in the general Euclidean space. *East Asian Mathematical Journal*, 26(1), 69–73.
- [23] López, R. (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electronic Journal of Geometry*, 7(1), 44–107.
- [24] O’Neil, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry*. Academic Press.
- [25] Özdemir, M. (2007). *Timelike kuaterniyonların bazı geometrik uygulamaları* (Doktora tezi). Akdeniz Üniversitesi, Antalya.
- [26] Özdemir, M., & Ergin, A. A. (2005). Some geometric applications of split quaternions. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 16, 108–115.
- [27] Özdemir, M., & Ergin, A. A. (2006). Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 56, 322–336.

- [28] Özdemir, M., Erdoğan, M., & Şimşek, H. (2014). On eigenvalues and eigenvectors of a Lorentzian rotation matrix by using split quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24, 179–192.
- [29] Pressley, A. (2010). *Elementary differential geometry (2nd ed.)*. Springer. 474s.
- [30] Sabuncuoğlu, A. (2006). *Diferensiyel geometri*. Nobel Yayın Dağıtım.
- [31] Salomon, D. (2006). *Curves and surfaces for computer graphics*. Springer.
- [32] Samra, S., San José, F. & Sendra, J. R. (2008). Offsetting revolution surfaces. *7th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG 2008)*, 179–188.
- [33] Shalaby, M., & Jüttler, B. (2008). Approximate implicitization of space curves and of surfaces of revolution. *Geometric Modelling, Numerical Simulation, and Optimization*, 215–227.
- [34] Tütüncü, S. (2019). *Split kuaterniyonlarda bazı fonksiyonlar üzerine* (Yüksek lisans tezi). Selçuk Üniversitesi, Konya, 7s.
- [35] Weinstein, T. (1995). *Lorentz surfaces*. Rutgers University.



20th International Geometry Symposium

Certificate of Participation

This is to Certify that

Hatice ERBAŞ GÜDEN

has presented a talk entitled

Surfaces of Revolution with Moving Axes and Angles in Minkowski 3-Space

during 20th International Geometry Symposium, held on July 18-20, 2024 at Van Yüzüncü Yıl University, Van, TÜRKİYE

Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ

Conference Chairman

Van Yüzüncü Yıl University

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı	Hatice ERBAŞ GÜDEN
Uyruğu	TC
Orcid Numarası	

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2015

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Mezuniyet Yılı	2019

Doktora	
Üniversite	
Enstitü	
Anabilim Dalı	
Mezuniyet Yılı	

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler Hatice Erbaş Güden, Levent Kula; Surfaces of revolution with moving axes and angles in Minkowski 3- space. 20th International Geometry Symposium, Van 2024.