T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

VANISHING ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN DAVRANIŞLARI

FARAH ALISSA MISLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR
2023

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

VANISHING ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN DAVRANIŞLARI

FARAH ALISSA MISLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
DOÇ. DR. FATİH DERİNGÖZ

KIRŞEHİR
2023

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 06/09/2023

Öğrenci
Farah Alissa MISLAR

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

TEŞEKKÜR

Tezi hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda yardımcı olan, değerli ve derin bilgileriyle bana ışık tutan, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyetiyle destekleyen ve bana emek veren saygı değer danışman hocam; Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez aşamasında karşılaştığım zorluklarda yardımlarını esirgemeyen, değerli arkadaşım Kendal DORAK'a teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca, destek ve anlayışı ile her an yanımda olan, Mustafa KARAKAŞ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak, yüksek lisans öğrenim hayatım boyunca, bugünlere ulaşmamda verdikleri emek ve sevgiyle bana destek olan sevgili aileme, özellikle anneme ve babama bolca şükranlarımı sunarım.

Eylül, 2023 Farah Alissa MİSLAR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VANISHING ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN DAVRANIŞLARI

Farah Alissa MISLAR

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: **Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ**
Yıl: 2023 Sayfa: 31
Jüri: **Doç. Dr. Emre TAŞ**
Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ
Dr. Öğr. Üyesi Nurullah YILMAZ

Bu çalışmada yeni bir tip vanishing Orlicz-Morrey uzayı tanıtılarak harmonik analizin klasik operatörlerinin ve komütatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılığı incelenmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölumünde, literatürde bu konu ile ilgili araştırmaları olan birçok matematikçi hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölumde, çalışmamız ile ilgili olan temel kavramlar, uzaylar ve operatörler hakkında genel bilgilere ve bazı temel tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Orlicz-Morrey uzaylarının tanımı verilmiş ve bu uzayların belirli kapalı altuzaylarını tanımlayan klasik ve yeni bazı vanishing koşulları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde tanıtılan yeni vanishing Orlicz-Morrey uzayları üzerinde maksimal, singüler ve potansiyel operatörlerin sınırlılık özellikleri incelenmiştir.

Bu tezin son bölümü olan beşinci bölümde, dördüncü bölümdeki inceleme bu klasik operatörlerin komütatörleri için yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Orlicz-Morrey Uzayları, maksimal fonksiyonlar, potansiyel opearatörler, singüler operatörler, komütatörler.

ABSTRACT

Master THESIS

ON THE BEHAVIOR OF SOME CLASSICAL OPERATORS IN VANISHING ORLICZ-MORREY SPACES.

Farah Alissa MISLAR

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor:	**Assoc. Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ**
	Year: 2023 Pages: 31
Juries:	**Assoc. Prof. Dr. Emre TAŞ**
	Assoc. Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ
	Assist. Prof. Dr. Nurullah YILMAZ

In this study, a new type of vanishing Orlicz-Morrey space has been introduced and the boundedness of classical operators of harmonic analysis and their commutators in these spaces have been investigated.

In the first part of this study, which consists of five parts, some basic information about many mathematicians who have researched on this subject matter in the literature is given and the purpose of this study is mentioned.

In the second part, general information and some basic definitions about the basic concepts, spaces and operators related to our work are given.

In the third chapter, the definition of Orlicz-Morrey spaces is given and some classical and new vanishing conditions that define certain closed subspaces of these spaces are introduced.

In the fourth chapter, the boundedness properties of maximal, singular and potential operators on the new vanishing Orlicz-Morrey spaces that were introduced in the third chapter are investigated.

In the fifth chapter, which is the last part of this thesis, the analysis in the fourth chapter is made for the commutators of these classical operators.

Key Words: Orlicz-Morrey Spaces, maximal functions, potential operators, singular operators, commutators.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler		**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$B(x,r)$	:	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$\|B\|$	:	B kümesinin Lebesgue ölçümü
χ_B	:	B kümesinin karakteristik fonksiyonu
$L^0(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir fonksiyonların sınıfı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	:	Lebesgue uzayı
$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ de $p-$lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$	:	Orlicz uzayı
$\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	:	Morrey Uzayı
$\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	:	Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
$\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	:	Orlicz-Morrey Uzayı
$V_0\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	:	Orijinde Vanishing Morrey Uzayı
$V_\infty\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	:	Sonsuzda Vanishing Morrey Uzayı
$V^{(*)}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	:	Truncated Vanishing Morrey Uzayı
$V_0\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	:	Klasik (orijinde) Vanishing Orlicz-Morrey Uzayı
$V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	:	Yeni (sonsuzda) Vanishing Orlicz-Morrey Uzayı
$V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	:	Yeni (Truncated) Vanishing Orlicz-Morrey Uzayı
BMO	:	Sınırlı Ortalama Salınıma Sahip Fonksiyonlar Sınıfı
M	:	Hardy-Littlewood maksimal operatör
M_α	:	Kesirli maksimal operatör
I_α	:	Kesirli integral operatör (Riesz potansiyeli)
T	:	Calderón-Zygmund operatörü
M_b	:	Maksimal Komütatör
$M_{b,\alpha}$	:	Kesirli Maksimal Komütatör
$[b,T]$	:	Calderón-Zygmund operatörünün komütatörü
$[b,I_\alpha]$	:	Riesz potansiyelinin komütatörü

1. GİRİŞ

Morrey uzayları $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik problemi ile bağlantılı olarak (Morrey, 1938) tarafından tanıtılmıştır. Eğer $\lambda > 0$ ise Morrey uzaylarının ayrılabilir olmadığı iyi bilinmektedir. Morrey uzayları için yaklaşım araçlarının eksikliği, vanishing uzaylar gibi uygun altuzayların tanımlanması ihtiyacını doğurmuştur. Vanishing Morrey uzaylarının tanımı, çeşitli vanishing koşullarını içerir. Her koşul $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayının kapalı bir altuzayını üretir. Bu koşulları (Almeida & Samko, 2017) çalışmasındaki notasyona bağlı kalarak (V_0), (V_∞) ve (V^*) ile göstereceğiz.

Eliptik denklemlerin regülerlik sonuçlarının incelenmesi esnasında (Vitanza, 1990), (Vitanza, 1993) tarafından tanıtılan $V_0\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayı, literatürde genellikle (klasik) vanishing Morrey uzayı olarak adlandırılmaktadır. $V_\infty\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ altuzayları yakın zamanda (Almeida & Samko, 2017) tarafından Morrey fonksiyonlarına düzgün fonksiyonlarla yaklaşım problemini araştırmak için tanıtıldı. Vanishing Morrey uzaylarında harmonik analizin klasik operatörleri ve komütatörlerinin sınırlılığı (Alabalik et al., 2020a), (Almeida, 2020), (Persson et al., 2012), (Ragusa, 2008), (Samko, 2013) çalışmalarında araştırılmıştır. Genelleştirilmiş Morrey uzaylarının vanishing altuzaylarında bu sınırlılık araştırmalarına örnek olarak ise (Alabalik et al., 2020b) ve (Samko, 2013) çalışmaları verilebilir.

Fonksiyon uzayları teorisindeki doğal bir adım, fonksiyonların regülerliğinin "Morrey tipli ölçümünün" yuvar üzerindeki Lebesgue normu yerine Orlicz normu ile yapıldığı

$$\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$$

Orlicz-Morrey uzaylarını incelemektir. Bu tipteki uzaylar ilk olarak (Nakai, 2004) tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra (Sawano et al., 2012) başka bir tip Orlicz-Morrey uzayını tanıtmıştır. (Deringoz et al., 2014) ise genelleştirilmiş Morrey uzayı ve Orlicz uzaylarını birleştiren ve Orlicz-Morrey uzayı olarak adlandırdıkları yeni bir tip Orlicz-Morrey uzayını tanıtmışlardır. Bu uzaylar literatürde sırası ile birinci tip, ikinci tip ve üçüncü tip Orlicz-Morrey uzayları olarak adlandırılmaktadır. Bu çalışmada üçüncü tip Orlicz-Morrey uzayları kullanılacaktır.

$\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının (V_0) vanishing koşulunun bazı klasik operatörler tarafından korunması için (Deringoz, Guliyev, & Samko, 2017; Deringoz et al., 2015; Guliyev et al., 2014, 2016) çalışmaları incelenebilir. Bu tezde, $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı için (V_∞) koşuluna odaklanılacaktır. Daha açık olursak, bu tezin amacı, yeni vanishing Orlicz-Morrey uzayları $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarını tanıtmak ve (V_∞) vanishing koşulunun maksimal, singüler ve potansiyel operatörler ile bunların komütatörlerinin davranışı altında korunduğunu göstermektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölumde, çalışmamız ile ilgili olan temel kavramlar, uzaylar ve operatörler hakkında genel bilgilere, bazı temel tanımlara ve ana sonuçlarımızın ispatında kullanılan araçlara yer verilmiştir.

2.1. Ön Bilgiler

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı; $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ iç çarpımı ve buna karşılık gelen $|x| = \big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\big)^{1/2}$ normu ile $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm $x = (x_1, \ldots, x_n)$ noktalarının kümesidir.

$\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue ölçüsü $dx = dx_1 \ldots dx_n$ ve $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue ölçüsü $|A|$ ile gösterilecektir.

Eğer $N \subset B$ ve $|B| = 0$ olacak şekildeki bir B Borel kümesi varsa $N \subset \mathbb{R}^n$ kümesine ihmal edilebilir küme denir. B Borel kümesi ve N ihmal edilebilir bir küme olmak üzere $A = B \cup N$ ise A kümesine (Lebesgue) ölçülebilirdir denir. A ölçülebilir bir küme ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilirse $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (Lebesgue) ölçülebilir olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların sınıfı $L^0(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. N ihmal edilebilir bir küme olmak üzere bir özellik eğer $A \setminus N$ kümesinde sağlanıyorsa bu özellik A kümesinde "hemen her yerde" sağlanıyordur denir. Bu deyim kısaca "h.h.y." ile gösterilir.

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$, merkezi x, yarıçap uzunluğu r olan açık yuvarı ve ${}^{c}B(x, r) = \mathbb{R}^n \setminus B(x, r)$ onun tümleyenini göstersin. $v_n = |B(0, 1)|$ olmak üzere

$$|B(x, r)| = v_n r^n = \frac{2\pi^{n/2} r^n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{1}{n}\omega_{n-1} r^n$$

biçimindedir. Burada $\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında yarıçap uzunluğu 1 olan $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ küresinin yüzey alanıdır.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı veya p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı üzerindeki norm

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

ile tanımlanır.

$p = \infty$ için $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı,

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfıdır.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ nin her bir kompakt K alt kümesi için $f\chi_{_K} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ şartını sağlayan tüm ölçülebilir f fonksiyonların uzayı $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Burada $\chi_{_K}$, K kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir. Özel olarak $p = 1$ yani $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ise f fonksiyonu lokal integrallenebilirdir denir.

C pozitif bir sabit olmak üzere bu çalışmada $A \lesssim B$ gösterimini $A \leq CB$ eşitsizliğinin yerine kullanacağız. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir.

2.2. Morrey Uzayları

Klasik Morrey uzayları, (Morrey, 1938) tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları araştırılırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenilirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının önemli uygulamaları Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride ortaya çıkmıştır.

Tanım 2.1. $1 \leq p < \infty,\ 0 \leq \lambda \leq n,\ f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) :\ ||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}}$ normu

$$||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde verilir.

$\lambda = 0$ için $\mathcal{M}^{p,0}(\mathbb{R}^n) \equiv L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda = n$ için $\mathcal{M}^{p,n}(\mathbb{R}^n) \equiv L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olur. Burada Θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir.

Lemma 2.2. $\lambda > 0$ için Morrey uzayları ayrılabilir değildir (Rosenthal & Triebel, 2015).

İspat. $0 < \lambda \leqslant n$ olsun. $\lambda = n$ ise, o zaman $\mathcal{M}^{p,n}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ olur ve bu uzayların ayrılabilir olmadığı iyi bilinmektedir. $\lambda < n$ olduğunu varsayalım. $\alpha_k \in \{0, 1\}$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$, $k \in \mathbb{N}$, $B(x_k\ 2^{-k})$ ayrık yuvarlar ve

$$f_\alpha = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 2^{k(n-\lambda)} \chi_{B(x_k, 2^{-k})} \right)^{\frac{1}{p}}$$

olsun.

$$\|f_\alpha\|_{\mathcal{M}^{p,\lambda}} \leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{r>0} r^{-\lambda}\int_{B(x,r)}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(n-\lambda)}\chi_{B(x_k,2^{-k})}(y)\Big)dy\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{r>0} r^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(n-\lambda)}|B(x_k,2^{-k})\cap B(x,r)|\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq v_n^{\frac{1}{p}}\sup_{r>0} r^{-\lambda}\left(\sum_{k=1,2^{-k}<r}^{\infty} 2^{-k\lambda} + r^n\sum_{k=1,2^{-k}\geq r}^{\infty} 2^{k(n-\lambda)}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq v_n^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{r>0} r^{-\lambda}\Big(2^{\lambda}(1-2^{-\lambda})^{-1}r^{\lambda} + r^n(1-2^{\lambda-n})^{-1}r^{-n+\lambda}\Big)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= v_n^{\frac{1}{p}}\Big(2^{\lambda}(1-2^{-\lambda})^{-1} + (1-2^{\lambda-n})^{-1}\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olduğundan $f_\alpha \in \mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. Ayrıca, eğer $\alpha \neq \beta$ ise bir $m \in \mathbb{N}$ için $\alpha_m \neq \beta_m$ olur ve

$$\|f_\alpha - f_\beta\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} \geq r^{-\lambda}\|f_\alpha - f_\beta\|_{L^p(B(x,r))}|_{x=x_m,r=2^{-m}}$$
$$= 2^{m\lambda}\left(|\alpha_m-\beta_m|^{2^{m(n-\lambda)}}v_n 2^{-mn}\right)^{\frac{1}{p}} = v_n^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Tüm dikkate alınan f_α fonksiyonlarının kümesi sayılamaz olduğundan $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ uzayının ayrılabilir olmadığı sonucu çıkar. ■

2.3. Young Fonksiyonları

Bu bölümde Orlicz uzaylarını tanımlamak için kullanılan Young fonksiyonlarının tanımı verilerek, temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.3. Eğer bir $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ fonksiyonu,

(1) Konvekstir: Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ için

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda\Phi(t_1) + (1-\lambda)\Phi(t_2).$$

(2) Soldan süreklidir,

(3) $\lim_{r\to 0^+}\Phi(r) = \Phi(0) = 0$,

(4) $\lim_{r\to\infty}\Phi(r) = \Phi(\infty) = \infty$

koşullarını sağlıyorsa Young fonksiyonu olarak adlandırılır (Nakai, 2008).

Uyarı 2.4. Tanım 2.3.'deki (1) ve (3) numaralı özelliklerden herhangi bir Young fonksiyonunun artan olduğu kolayca görülebilir (Nakai, 2008).

Tanım 2.5. $0 < r < \infty$ için $0 < \Phi(r) < \infty$ şartını sağlayan Young fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{Y}$ ile gösterilir (Nakai, 2008).

Uyarı 2.6. Eğer $\Phi \in \mathcal{Y}$ ise Φ fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığı tarafından kapsanan her kompakt alt aralıkta mutlak süreklidir ve $[0, \infty)$ aralığından $[0, \infty)$ aralığına birebir ve örtendir (Nakai, 2008).

Tanım 2.7. Φ bir Young fonksiyonu ve $0 \leq s \leq \infty$ olmak üzere, Φ fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi

$$\Phi^{-1}(s) = \inf\{r \geq 0 : \Phi(r) > s\}$$

ile tanımlanır. Burada $\inf \emptyset = \infty$ alınmaktadır (O'Neil, 1965).

Uyarı 2.8. Φ Young fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi olan Φ^{-1} fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir (O'Neil, 1965):

(1) Eğer $s < \infty$ ise $\Phi^{-1}(s) < \infty$ olur.

(2) $\Phi^{-1}(\infty) = \infty$.

(3) $\Phi(\Phi^{-1}(r)) \leq r \leq \Phi^{-1}(\Phi(r))$.

(4) $[0, \infty)$ üzerinde süreklidir.

(5) Eğer $0 < \Phi(r) < \infty$ ise $\Phi^{-1}(\Phi(r)) = r$ ve eğer $s \in [0, \Phi(\inf\{r > 0 : \Phi(r) = \infty\})]$ ise $\Phi(\Phi^{-1}(s)) = s$ olur.

(6) Eğer $\Phi \in \mathcal{Y}$ ise Φ^{-1}, Φ fonksiyonunun âdi tersidir.

Uyarı 2.9. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere Φ^{-1} fonksiyonunun artan ve konkav bir fonksiyon olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla

$$\begin{cases} \Phi^{-1}(t) \geq \Phi^{-1}(\alpha t) \geq \alpha\Phi^{-1}(t) \ , \ 0 < \alpha < 1 \\ \Phi^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(\alpha t) \leq \alpha\Phi^{-1}(t) \ , \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Deringoz et al., 2019).

Tanım 2.10. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, Φ fonksiyonunun tümleyeni

$$\widetilde{\Phi}(r) = \begin{cases} \sup\{rs - \Phi(s) : s \in [0, \ \infty)\} \ , \ r \in [0, \infty) \\ \qquad\qquad \infty \qquad\qquad\qquad\quad , \quad r = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır (Nakai, 2008).

Örnek 2.11. Aşağıda tümleyen Young fonksiyon çiftlerine bazı örnekler verilmiştir (Pick et al., 2012):

(i) $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}$, $\quad \widetilde{\Phi}(s) = \frac{t^{p'}}{p'}$, $\quad 1 < p < \infty$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

(ii) $\Phi(t) = t$, $\quad \widetilde{\Phi}(s) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq s \leq 1 \\ \infty , & s > 1 \end{cases}$

(iii) $\Phi(t) = e^t - t - 1$, $\quad \widetilde{\Phi}(s) = (1+s)\log(1+s) - s$

(iv) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 1 \\ t \log t & , t > 1 \end{cases}$, $\quad \widetilde{\Phi}(s) = \begin{cases} s & , s < 1 \\ e^{s-1} & , s \geq 1 \end{cases}$

Önerme 2.12. Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$$t \leq \Phi^{-1}(t)(\widetilde{\Phi})^{-1}(t) \leq 2t \tag{2.1}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (O'Neil, 1965).

Tanım 2.13. Φ bir Young fonksiyonu olsun.

(i) Eğer her $t \geq 0$ için

$$\Phi(2t) \leq c\Phi(t) \tag{2.2}$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir c sabiti varsa Φ, Δ_2 koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \Delta_2$ ile gösterilir.

(ii) Eğer $\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ ise Φ, Eğer her $t \geq 0$ ve bazı $C > 1$ için,

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2c}\Phi(ct) \tag{2.3}$$

∇_2 koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \nabla_2$ ile gösterilir (Rutickii et al., 1961).

Önerme 2.14. Φ bir Young fonksiyonu olsun. $\Phi \in \nabla_2$ olması için gerek ve yeter koşul $\Phi(kt) \geq 2k\Phi(t)$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $k > 1$ sabitinin olmasıdır (Rutickii et al., 1961).

Örnek 2.15. Aşağıda Δ_2 ve ∇_2 koşullarını sağlayan ve sağlamayan fonksiyonlara dair bazı örnekler verilmiştir (Nakai, 2008):

(i) $\Phi(r) = r$ fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar fakat ∇_2 koşulunu sağlamaz.

(ii) $1 < p < \infty$ olmak üzere $\Phi(r) = r^p$ her iki koşulu da sağlar.

(iii) $\Phi(r) = e^r - r - 1$ fonksiyonu ∇_2 koşulunu sağlar fakat Δ_2 koşulunu sağlamaz.

2.4. Orlicz Uzayları

Tanım 2.16. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere Orlicz uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L^{\Phi}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \exists \alpha > 0, \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha |f(x)|) dx < \infty \right\}.$$

$L^{\Phi}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı, tüm $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarları için $f\chi_B \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ olacak şekilde tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesi f olarak tanımlanır (Rao & Ren, 2002).

Önerme 2.17. $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L^{\Phi}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda}) dx \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.Bu norma Orlicz uzayının Luxemburg-Nakano normu adı verilir (Rao & Ren, 2002).

Örnek 2.18. Aşağıda bazı özel Young fonksiyonlarına karşılık gelen Orlicz uzaylarına dair örnekler verilmiştir (Pick et al., 2012):

(i) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Phi(t) = t^p$ ise $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 1 \\ \infty , & t > 1 \end{cases}$ ise $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n) = L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 1 \\ t \log t & , t > 1 \end{cases}$ ise $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n) = L \log L(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.19. Φ bir Young fonksiyonu ve B sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir küme olsun. χ_{B}, B kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermek üzere

$$\|\chi_B\|_{L^{\Phi}} = \frac{1}{\Phi^{-1}\big(|B|^{-1}\big)}$$

olur (Pick et al., 2012).

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ için,

$$||f||_{L^{\Phi}(\Omega)} := ||f\chi_{\Omega}||_{L^{\Phi}}$$

olarak tanımlanacaktır.

Önerme 2.20. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme ve f, g fonksiyonları Ω üzerinde ölçülebilir olsun. Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olmak üzere

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq 2 \|f\|_{L^{\Phi}(\Omega)} \|g\|_{L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır (Rao & Ren, 2002).

Lemma 2.21. Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bütün B yuvarları için

$$\|f\|_{L^1(B)} \leq 2|B|\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)\|f\|_{L^\Phi(B)}$$

eşitsizliği sağlanır (Deringoz et al., 2014).

Lemma 2.22. $\beta > 0$, Φ bir Young fonksiyonu, $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$ ve B bir yuvar olsun. Bu durumda ölçülebilir her f fonksiyonu için $\|\,|f|^\beta\|_{L^\Psi(B)} = \|f\|^\beta_{L^\Phi(B)}$ olur (Deringoz et al., 2019).

2.5. BMO (John-Nirenberg) Uzayı

BMO (Bounded Mean Oscillation) uzayı, 1961 yılında John ve Nirenberg (John & Nirenberg, 1961) tarafından ortaya konulmuştur. BMO uzayı L^∞ uzayı ile benzer özelliklere sahiptir ve sıklıkla L^∞ yerine kullanılır. Klasik singüler integral operatörler L^∞ uzayından L^∞ uzayına sınırlı olmamasına rağmen L^∞ uzayından BMO uzayına sınırlıdır.

Tanım 2.23. f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|f\|_* = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}|dy < \infty$$

ile verilen $\|\cdot\|_*$ yarı-normu ile tanımlı Banach uzayıdır. Burada

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy$$

olarak alınmaktdır.

$L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ içindeliği doğrudur. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| dy \\
&\qquad \leq \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy + \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \left|f_{B(x,r)}\right| dy \\
&\qquad = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy + |f_{B(x,r)}| \\
&\qquad \leq 2\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy \\
&\qquad \leq 2||f||_\infty
\end{aligned}$$

ve böylece

$$||f||_* \leq 2||f||_\infty$$

elde edilir. Buradan $||f||_* \leq 2||f||_\infty$ olup $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. Her sınırlı (ölçülebilir) fonksiyon BMO uzayındandır. Ancak sınırlı olmayan BMO fonksiyonları da vardır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olan fakat $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olmayan tipik bir örnek $\log|x|$ verilebilir (Lu et al., 2007).

2.6. Harmonik Analizin Klasik İntegral Operatörleri ve Onların Komütatörleri

Şimdi bu çalışmada göz önünde bulundurulacak operatörlerin tanımları verilecektir.

Tanım 2.24. f, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere M, Hardy-Littlewood maksimal operatörü

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlı operatördür.

Tanım 2.25. f, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 \leq \alpha < n$ olmak üzere M_α kesirli maksimal operatörü

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlı operatördür. Ayrıca $\alpha = 0$ için $M_0 \equiv M$ olur.

Tanım 2.26. f, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere I_α kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli)

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlı operatördür.

Uyarı 2.27. I_α ve M_α operatörleri arasında $0 < \alpha < n$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$M_\alpha(f)(x) \lesssim I_\alpha(|f|)(x) \qquad (2.4)$$

ilişkisi vardır (Lu et al., 2007).

Tanım 2.28. $K(x,y)$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\}$ üzerinde sürekli ve

$$\text{Her } x \neq y \text{ için } |K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n},$$

$$|K(x,y)-K(x,z)| \le C\frac{|y-z|^{\sigma}}{|x-y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma>0, \quad |x-y|>2|y-z|,$$

$$|K(x,y)-K(\xi,y)| \le C\frac{|x-\xi|^{\sigma}}{|x-y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma>0, \quad |x-y|>2|x-\xi|$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ kompakt desteğe sahip bir fonksiyon olmak üzere $L^2(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy, \qquad x \notin \operatorname{supp}(f)$$

eşitliğiyle tanımlı operatörler Calderón-Zygmund (C-Z) tipli singüler operatörler olarak adlandırılır.

Tanım 2.29. Lokal integrallenebilir bir b fonksiyonu ve T, I_α, M_α ve M operatörleri tarafından üretilen komütatör operatörleri sırasıyla

$$[b,T]f(x) := b(x)Tf(x) - T(bf)(x),$$

$$[b,I_\alpha]f(x) := b(x)I_\alpha f(x) - I_\alpha(bf)(x),$$

$$M_{b,\alpha}(f)(x) := \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B(x,t)} |b(x)-b(y)||f(y)|dy,$$

$$M_b(f)(x) := \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(x)-b(y)||f(y)|dy$$

biçiminde tanımlanır.

2.7. Bazı yardımcı eşitsizlikler

Bu kesimde ana sonuçların ispatında önemli bir rolü olan ve literatürde Guliyev-tipli lokal eşitsizlikler olarak adlandırılan bazı eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 2.30. $\Phi \in \nabla_2$ olsun. Bu durumda her $f \in L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $B(x,r)$ yuvarı için

$$\|Mf\|_{L^\Phi(B(x,r))} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{t>r} \Phi^{-1}(t^{-n})\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \tag{2.5}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Deringoz et al., 2014).

Lemma 2.31. $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Bu durumda her $f \in L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $B(x,r)$ yuvarı için

$$\|Tf\|_{L^\Phi(B(x,r))} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_r^\infty \|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\frac{dt}{t} \tag{2.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Deringoz et al., 2014).

Lemma 2.32. $0<\alpha<n$, Φ, Ψ Young fonksiyonları ve $\Phi\in\nabla_2$ olsun. Eğer Φ ve Ψ

$$r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-n})\lesssim\Psi^{-1}(r^{-n}) \tag{2.7}$$

ve

$$\int_r^{\infty}\Phi^{-1}(t^{-n})t^{\alpha}\frac{dt}{t}\lesssim\Psi^{-1}(r^{-n}) \tag{2.8}$$

koşullarını sağlıyorsa her $f\in L^{\Phi}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $B(x,r)$ yuvarı için

$$\|I_{\alpha}f\|_{L^{\Psi}(B(x,r))}\lesssim\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-n})}\int_r^{\infty}\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,t))}\Psi^{-1}(t^{-n})\frac{dt}{t} \tag{2.9}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Deringoz, 2021; Guliyev & Deringoz, 2014).

Lemma 2.33. $0<\alpha<n$, Φ, Ψ Young fonksiyonları ve $\Phi\in\nabla_2$ olsun. Eğer Φ ve Ψ (2.7) koşulunu sağlıyorsa her $f\in L^{\Phi}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $B(x,r)$ yuvarı için

$$\|M_{\alpha}f\|_{L^{\Psi}(B(x,r))}\lesssim\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-n})}\sup_{t>r}t^{\alpha}\Phi^{-1}(t^{-n})\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,t))} \tag{2.10}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Deringoz et al., 2021; Guliyev & Deringoz, 2015).

Lemma 2.34. $\Phi\in\Delta_2\cap\nabla_2$ ve $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f\in L^{\Phi}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $B(x,r)$ yuvarı için

$$\|M_b f\|_{L^{\Phi}(B(x,r))}\lesssim\frac{\|b\|_*}{\Phi^{-1}(r^{-n})}\sup_{t>r}\left(1+ln\frac{t}{r}\right)\Phi^{-1}(t^{-n})\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,t))} \tag{2.11}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Deringoz et al., 2015).

Lemma 2.35. $\Phi\in\Delta_2\cap\nabla_2$ ve $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f\in L^{\Phi}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $B(x,r)$ yuvarı için

$$\|[b,T]f\|_{L^{\Phi}(B(x,r))}\lesssim\frac{\|b\|_*}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)}\int_r^{\infty}\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,t))}\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\frac{dt}{t} \tag{2.12}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev et al., 2014).

Lemma 2.36. $0<\alpha<n$ ve $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca Φ bir Young fonksiyonu ve Ψ, her $t\in(0,\infty)$ için $\Psi^{-1}(t):=\Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ olarak tanımlansın ve $\Phi,\Psi\in\Delta_2\cap\nabla_2$ olsun. Bu durumda her $f\in L^{\Phi}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $B(x,r)$ yuvarı için

$$\|[b,I_{\alpha}]f\|_{L^{\Psi}(B(x,r))}\lesssim\frac{\|b\|_*}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)}\int_r^{\infty}\left(1+ln\frac{t}{r}\right)\Psi^{-1}(t^{-n})\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,t))}\frac{dt}{t} \tag{2.13}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev & Deringoz, 2014).

Lemma 2.37. $0 < \alpha < n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca Φ bir Young fonksiyonu ve Ψ, her $t \in (0, \infty)$ için $\Psi^{-1}(t) := \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ olarak tanımlansın ve $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Bu durumda her $f \in L^{\Phi}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $B(x, r)$ yuvarı için

$$\|M_{b,\alpha}f\|_{L^{\Psi}(B(x,r))} \lesssim \frac{\|b\|_*}{\Psi^{-1}(r^{-n})} \sup_{t>r} \left(1 + ln\frac{t}{r}\right) \Psi^{-1}(t^{-n})\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,t))} \tag{2.14}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev & Deringoz, 2015).

2.8. Orlicz-Morrey Uzayları

Bu bölümde $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ üçüncü tip Orlicz-Morrey uzaylarının tanımı hatırlatılacaktır.

Tanım 2.38. $\varphi(r)$, $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğimiz Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f; x, r) < \infty \tag{2.15}$$

şartını sağlayan $f \in L^{\Phi}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfıdır. Burada

$$\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f; x, r) := \frac{\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,r))}}{\varphi(r)}$$

olarak tanımlanmaktadır (Deringoz et al., 2014).

Bu tanıma göre eğer $\Phi(r) = r^p$, $1 \leq p < \infty$ seçilirse $\mathcal{M}^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı; $\varphi(r) \equiv 1$ seçilirse $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ Orlicz uzayı elde edilir.

Tanım 2.39. Eğer

$$\varphi(r) \leq C\varphi(s), \quad (\varphi(r) \geq C\varphi(s),) \qquad r \leq s$$

doğru olacak şekilde $C > 0$ sabiti varsa $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ fonksiyonuna neredeyse artandır (neredeyse azalandır) denir.

Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, $\mathcal{G}_{\Phi}$ ile $t \in (0, \infty) \mapsto \varphi(t)\Phi^{-1}(t^{-n})$ fonksiyonu neredeyse azalacak olacak şekildeki tüm neredeyse artan $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ fonksiyonlarının kümesi gösterilecektir (Deringoz et al., 2019).

Uyarı 2.40. Çalışmanın devamında φ fonksiyonlarının $\mathcal{G}_{\Phi}$ sınıfından olduğu varsayılacaktır. $\mathcal{G}_{\Phi}$ sınıfı ve $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayları hakkında daha detaylı bilgi için (Deringoz et al., 2019) çalışması 5. Bölüm incelenebilir.

2.9. Orlicz-Morrey Uzaylarında bazı klasik operatörler ve komütatörlerininin sınırlılıkları

Bu kesimde tezde elde edilen temel sonuçların ispatında büyük bir öneme sahip olan maksimal, singüler ve potansiyel operatörlerle bu operatörlerin komütatörlerinin Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgili elde edilmiş sonuçlar özetlenmiştir.

Teorem 2.41. $\Phi \in \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olsun. Bu durumda M operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır (Deringoz et al., 2014).

Teorem 2.42. $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olmak üzere

$$\int_r^\infty \varphi(t)\Phi^{-1}(t^{-n})\frac{dt}{t} \lesssim \varphi(r)\Phi^{-1}(r^{-n}) \tag{2.16}$$

koşulu sağlansın. Bu durumda T operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır (Deringoz et al., 2014).

Teorem 2.43. (Spanne tipli sonuç) Φ, Ψ Young fonksiyonları, $\Phi \in \nabla_2$, $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_\Psi$ olsun. Ayrıca (2.7), (2.8) ve

$$\int_r^\infty \Psi^{-1}(t^{-n})\varphi_1(t)\frac{dt}{t} \lesssim \varphi_2(r)\Psi^{-1}(r^{-n}) \tag{2.17}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda I_α operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Deringoz, 2021; Guliyev & Deringoz, 2014).

Teorem 2.44. (Spanne tipli sonuç) Φ, Ψ Young fonksiyonları, $\Phi \in \nabla_2$, $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_\Psi$ olsun. Ayrıca (2.7) ve

$$\sup_{r<t<\infty} \Psi^{-1}(t^{-n})\varphi_1(t) \lesssim \varphi_2(r)\Psi^{-1}(r^{-n}) \tag{2.18}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda M_α operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Deringoz et al., 2021; Guliyev & Deringoz, 2015).

Uyarı 2.45. (2.4) eşitsizliğinden dolayı I_α için elde edilmiş sınırlılık sonuçları M_α için de geçerlidir. Fakat M_α operatörünün Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığını daha zayıf şartlar altında incelemek mümkün olduğundan bu iki operatörü ayrı ayrı ele almaktayız. Daha açık bir ifadeyle, (2.18) koşulu (2.17) koşulundan daha zayıftır. Gerçekten (2.17) koşulu (2.18) koşulunu gerektirmektedir:

İlk olarak $\Psi^{-1}(0) = 0$ ve Ψ^{-1} konkav olduğundan $\Psi^{-1}(\tau)/\tau$ fonksiyonunun azalan olduğuna dikkat çekelim. Bu gerçekten

$$\Psi^{-1}(s^{-n}) \approx \Psi^{-1}(s^{-n})s^n \int_s^\infty \frac{dt}{t^{n+1}} \lesssim \int_s^\infty \Psi^{-1}(t^{-n})\frac{dt}{t}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlikten ve $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ olduğundan $s \in (r, \infty)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi_2(r)\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big) &\gtrsim \int_r^\infty \varphi_1(t)\Psi^{-1}\big(t^{-n}\big)\frac{dt}{t} \\
&\gtrsim \int_s^\infty \varphi_1(t)\Psi^{-1}\big(t^{-n}\big)\frac{dt}{t} \\
&\gtrsim \varphi_1(s)\int_s^\infty \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big)\frac{dt}{t} \\
&\approx \varphi_1(s)\Psi^{-1}\big(s^{-n}\big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\sup_{r<s<\infty} \Psi^{-1}(s^{-n})\varphi_1(s) \lesssim \varphi_2(r)\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)$$

olur.

Ayrıca kesirli maksimal operatörün sınırlılığında (2.8) koşuluna ihtiyaç duymadığımıza da dikkat çekmek istiyoruz.

Teorem 2.46. (Adams tipli sonuç) $\Phi \in \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olsun. Ayrıca $\beta \in (0,1)$ olmak üzere $\eta(t) \equiv \varphi(t)^\beta$ ve $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$ olarak tanımlansın. Eğer

$$r^\alpha \lesssim \varphi(r)^{\beta-1}\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)^{\beta-1} \tag{2.19}$$

ve

$$\int_r^\infty t^\alpha \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\varphi(t)\frac{dt}{t} \lesssim \varphi(r)^\beta \Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)^\beta \tag{2.20}$$

koşulları sağlanıyorsa I_α operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Deringoz et al., 2016).

Teorem 2.47. (Adams tipli sonuç) $\Phi \in \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olsun. Ayrıca $\beta \in (0,1)$ olmak üzere $\eta(t) \equiv \varphi(t)^\beta$ ve $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$ olarak tanımlansın. Eğer (2.19) koşulu sağlanıyorsa M_α operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Deringoz, Guliyev, & Hasanov, 2017).

Uyarı 2.48. Kesirli integral operatörün Morrey sınırlılığı ile ilgili dikkat çekici iki sonuç vardır. Bu iki sonuçtan ilki Spanne (Peetre, 1969), ikincisi ise (Adams, 1975) tarafından verilmiştir. Adams'ın sonucu Spanne'nin sonucundan daha güçlü olmasına rağmen Spanne tipli sonuçların uygulanabilirliği daha geniştir. Örneğin, Adams tipli sonuçlar (Hedberg, 1972) tipli noktasal eşitsizliklere dayandığı için bu sonuçlar lokal tipli Morrey uzayları için uygun değildir.

Uyarı 2.49. Bir kez daha vurgulamak istiyoruz ki kesirli maksimal operatör için elde edilen sonuç kesirli integral operetör için elde edilen sonuçtan daha zayıf koşullar altında elde edilmiştir. Daha açık söylersek Teorem 2.47. için (2.20) koşuluna ihtiyaç duyulmamaktadır.

Teorem 2.50. $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$

$$\sup_{t>r}\Big(1+ln\frac{t}{r}\Big)\varphi(t)\Phi^{-1}(t^{-n}) \lesssim \varphi(r)\Phi^{-1}(r^{-n}) \tag{2.21}$$

koşulunu sağlıyorsa M_b operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır (Deringoz et al., 2015).

Teorem 2.51. $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$

$$\int_r^\infty \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\varphi(t)\Phi^{-1}(t^{-n})\frac{dt}{t} \lesssim \varphi(r)\Phi^{-1}(r^{-n}) \tag{2.22}$$

koşulunu sağlıyorsa $[b,T]$ operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır (Guliyev et al., 2014).

Teorem 2.52. $0<\alpha<n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca Φ bir Young fonksiyonu ve Ψ, her $t \in (0,\infty)$ için $\Psi^{-1}(t) := \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ olarak tanımlansın ve $\Phi,\Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Eğer $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_\Psi$ fonksiyonları

$$\int_r^\infty \Big(1+ln\frac{t}{r}\Big)\Psi^{-1}(t^{-n})\varphi_1(t)\frac{dt}{t} \lesssim \varphi_2(r)\Psi^{-1}(r^{-n}), \tag{2.23}$$

koşulunu sağlıyorsa $[b,I_\alpha]$ operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Guliyev & Deringoz, 2014).

Teorem 2.53. $0<\alpha<n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca Φ bir Young fonksiyonu ve Ψ, her $t \in (0,\infty)$ için $\Psi^{-1}(t) := \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ olarak tanımlansın ve $\Phi,\Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Eğer $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_\Psi$ fonksiyonları

$$\sup_{t>r}\Big(1+ln\frac{t}{r}\Big)\varphi_1(t)\Psi^{-1}(t^{-n}) \lesssim \varphi_2(r)\Psi^{-1}(r^{-n}), \tag{2.24}$$

koşulunu sağlıyorsa $M_{b,\alpha}$ operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Guliyev & Deringoz, 2015).

3. MATERYAL VE METOT

Klasik vanishing Morrey uzaylarında harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılığı (Samko, 2013) tarafından verilmiştir. Bu sonuçların ispatında yuvar üzeri Lebesgue normu üzerinden elde edilen Guliyev-tipli lokal eşitsizlikler büyük bir öneme sahiptir. (Deringoz, 2015) doktora tezinde Orlicz-Morrey uzaylarını tanıtmış ve bu uzaylarda klasik operatörlerin davranışları araştırmaları esnasında bu Guliyev-tipli lokal eşitsizlikleri Orlicz uzaylarına genelleştirmiştir. Bu lokal eşitsizlikler ve (Samko, 2013) ispat yöntemi yardımıyla $V^0\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ vanishing Orlicz-Morrey uzaylarında klasik operatörlerinin sınırlılıkları (Deringoz, Guliyev, & Samko, 2017; Deringoz et al., 2015; Guliyev et al., 2014, 2016) tarafından araştırılmıştır.

$V_\infty\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ altuzayları yakın zamanda (Almeida & Samko, 2017) tarafından Morrey fonksiyonlarına düzgün fonksiyonlarla yaklaşım problemini araştırmak için tanıtıldı.

Bu tezde $V_\infty\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının Orlicz varyantları $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayları tanıtılmış ve harmonik analizin klasik operatörlerinin $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ yeni vanishing uzayındaki sınırlılıkları ise yukarıda bahsedilen yöntemler kullanılarak elde edilmiştir.

Hemen dikkat çekelim ki Riesz potansiyelinin Morrey uzaylarında sınırlılığı ile ilgili iki farklı tip sonuç mevcuttur. Bunlar Adams ve Spanne tipli sonuçlardır. Adams tipli sonuçlar (Hedberg, 1972) tipli noktasal eşitsizliklere dayandığı için bu sonuçlar için lokal eşitsizlikler uygun değildir. Dolayısıyla bu tezde edilen Adams tipli sonuçlar daha önce Orlicz-Morrey uzayları için (Deringoz et al., 2016) tarafından elde edilmiş Hedberg tipli noktasal eşitsizlikler yardımıyla ispatlanmıştır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde literatürde daha önce tanımlanmamış olan $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ vanishing Orlicz-Morrey uzaylarının tanımı verilecek ve yapısı incelenecek daha sonrasında ise $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında harmonik analizin klasik operatörlerinin ve komütatörlerinin davranışları ile ilgili elde edilmiş sonuçlar sunulacaktır.

4.1. Vanishing Orlicz-Morrey Uzayları

Şimdi sırasıyla $V^0\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ vanishing Orlicz-Morrey uzaylarının tanımı verilecektir. Bu uzayların hepsi (2.15) normuna göre Orlicz-Morrey uzaylarının altuzaylarıdır. Hemen dikkat çekelim ki (V_0) koşuluna karşılık gelen vanishing Orlicz-Morrey uzayları ve bu uzayda klasik operatörler ve komütatörlerinin sınırlılıkları (Deringoz, Guliyev, & Samko, 2017; Deringoz et al., 2015; Guliyev et al., 2014, 2016) tarafından araştırılmıştır. (V_∞) ve $V^{(*)}$ koşuluna karşılık gelen uzaylar ise literatürde henüz tanımlanmamış olduğundan, bu kesimde tanımlanacak bu uzaylara "yeni" vanishing Orlicz-Morrey uzayları adını vermeyi uygun gördük.

Tanım 4.1. (Klasik) vanishing Orlicz-Morrey uzayı $V^0\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f;x,r)=0 \qquad (V_0)$$

şartını sağlayan tüm $f\in\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarınının sınıfıdır (Deringoz et al., 2015).

Morrey uzaylarının yeni vanishing koşulları ile tanımlanan alt uzayları $V_\infty\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ yakın zamanda (Almeida & Samko, 2017) tarafından tanıtılmıştır. Şimdi bu tanımlar baz alınarak Almeida ve Samko uzaylarını da özel hali olarak içeren $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ "yeni" vanishing Orlicz-Morrey uzaylarının tanımları verilecek ve bu uzayların Orlicz-Morrey uzaylarının kapalı birer altuzayı oldukları ispatlanacaktır.

Tanım 4.2. Vanishing Orlicz-Morrey uzayı $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f;x,r)=0 \qquad (V_\infty)$$

şartını sağlayan tüm $f\in\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarınının sınıfıdır.

$V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı, $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$ fonksiyonları

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\varphi(r)}=0$$

koşulunu sağlıyorsa aşikar değildir. Çünkü bu durumda kompakt desteğe sahip sınırlı fonksiyonlar bu uzaya aittir.

Lemma 4.3. $V_\infty \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının kapalı bir altuzayıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\{f_k\} \subset V_\infty \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $f_k \to f$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f - f_{k_0}; x, r) \leq \|f - f_{k_0}\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} < \epsilon/2$$

olur. Diğer yandan $f_k \in V_\infty \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan öyle bir r_0 sayısı vardır ki her $r > r_0$ için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f_{k_0}; x, r) < \epsilon/2$$

olur. Böylece her $r > r_0$ için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f; x, r) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f_{k_0}; x, r) + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f - f_{k_0}; x, r) < \epsilon$$

olur ki bu da $\lim_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f; x, r) = 0$ yani $f \in V_\infty \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 4.4. Vanishing Orlicz-Morrey uzayı $V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{A}_{N,\Phi}(f) = \lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\chi_N\|_{L^\Phi(B(x,1))} = 0 \qquad (V^*)$$

şartını sağlayan tüm $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarınının sınıfıdır. Buarada $\chi_N := \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)}$, $N \in \mathbb{N}$ olarak tanımlanmaktadır.

Lemma 4.5. $V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının kapalı bir altuzayıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\{f_k\} \subset V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $f_k \to f$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki her $N \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{\varphi(1)} \mathcal{A}_{N,\Phi}(f - f_{k_0}) \leq \|f - f_{k_0}\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} < \frac{\epsilon}{2\varphi(1)}$$

olur. Diğer yandan $f_k \in V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan öyle bir N_0 sayısı vardır ki her $N > N_0$ için

$$\mathcal{A}_{N,\Phi}(f_{k_0}) < \epsilon/2$$

olur. Böylece her $N > N_0$ için

$$\mathcal{A}_{N,\Phi}(f) \leq \mathcal{A}_{N,\Phi}(f_{k_0}) + \mathcal{A}_{N,\Phi}(f - f_{k_0}) < \epsilon$$

olur ki bu da $\lim_{N\to\infty} \mathcal{A}_{N,\Phi}(f) = 0$ yani $f \in V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.2. Vanishing Orlicz-Morrey Uzaylarında Bazı Klasik Operatörler

Bu kesimde harmonik analizin klasik operatörlerinin $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki davranışları ile ilgili elde edilmiş sonuçlar sunulmuştur.

Teorem 4.6. $\Phi \in \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olsun. Bu durumda M operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. Orlicz-Morrey norm eşitsizlikleri Teorem 2.41. dolayısıyla bilindiğinden geriye $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının M operatörüne göre değişmez olduğunun yani

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f;x,r)=0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(Mf;x,r)=0$$

önermesinin doğruluğunun gösterilmesi kalmaktadır. Kabul edelim ki $f \in V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman uzayın tanımındam her $\epsilon > 0$ için bir $R = R(\epsilon) > 0$ sayısı vardır ki her $t \geq R$ için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(f;x,t)<\epsilon$$

olur. (2.5) eşitsizliği kullanılarak keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ ve her $r \geq R$ için

$$\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(Mf;x,r)\lesssim\frac{1}{\varphi(r)\Phi^{-1}(r^{-n})}\sup_{t>r}\Phi^{-1}(t^{-n})\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}\lesssim\epsilon$$

elde edilir. Bu ise

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(Mf;x,r)=0$$

demektir ve böylece $Mf \in V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olur. ■

Teorem 4.7. $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ fonksiyonu (2.16) koşulunu sağlasın. Bu durumda T operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.42. dolayısıyla T operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olduğundan sadece bu operatörün (V_∞) koşulunu koruduğunu göstermeliyiz. Bu ise bu sefer (2.6) eşitsizliği kullanılarak Teeorem 4.6.'in ispatındaki gibi yapılır. ■

Teorem 4.8. (Spanne tipli sonuç) Φ, Ψ Young fonksiyonları, $\Phi \in \nabla_2$, $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_\Psi$ olsun. Kabul edelim ki (2.7), (2.8) ve (2.17) koşulları sağlansın. Bu durumda I_α operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $V_\infty\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırldır.

İspat. Teorem 2.43. dolayısıyla I_α operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğundan sadece

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi_1}(f;x,r)=0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Psi,\varphi_2}(I_\alpha f;x,r)=0$$

önermesinin doğruluğunu göstermek yeterlidir. Bu ise bu sefer (2.9) eşitsizliği kullanılarak Teeorem 4.6.'in ispatındaki gibi yapılır. ■

Teorem 4.9. (Spanne tipli sonuç) Φ, Ψ Young fonksiyonları, $\Phi \in \nabla_2$, $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_\Psi$ olsun. Kabul edelim ki (2.7) ve (2.18) koşulları sağlansın. Bu durumda M_α operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $V_\infty\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırldır.

İspat. Teorem 2.44. dolayısıyla M_α operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğundan sadece

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi_1}(f;x,r)=0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{r\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_{\Psi,\varphi_2}(M_\alpha f;x,r)=0$$

önermesinin doğruluğunu göstermek yeterlidir. Bu ise bu sefer (2.10) eşitsizliği kullanılarak Teeorem 4.6.'in ispatındaki gibi yapılır. ■

Şimdi I_α ve M_α operatörleri için elde edilmiş Adams tipli sonuçlar ifade edilecektir. Bu teoremlerin ispatı için aşağıda verilen noktasal eşitsizliklere ihtiyaç vardır.

Lemma 4.10. Φ bir Young fonksiyonu, $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\beta \in (0,1)$ olsun. Eğer (2.19) ve (2.20) koşulları sağlanıyorsa her $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$I_\alpha f(x) \lesssim (Mf(x))^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}^{1-\beta} \tag{4.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Deringoz et al., 2016).

Lemma 4.11. Φ bir Young fonksiyonu, $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\beta \in (0,1)$ olsun. Eğer (2.19) koşulu sağlanıyorsa her $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M_\alpha f(x) \lesssim (Mf(x))^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}^{1-\beta}. \tag{4.2}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Deringoz, Guliyev, & Hasanov, 2017).

Teorem 4.12. (Adams tipli sonuç) $\Phi \in \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olsun. $\beta \in (0,1)$ olmak üzere $\eta(t) \equiv \varphi(t)^\beta$ ve $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$ olarak tanımlansın. Eğer (2.19) ve (2.20) koşulları sağlanıyorsa I_α operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $V_\infty\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.46. dolayısıyla Adams tipli Orlicz-Morrey sınırlılığı mevcuttur. Geriye vanishing özelliğinin korunduğunu göstermek kalmaktadır. Bunun için (4.1) noktasal eşitsizliğine ihtiyaç duymaktayız. Bu eşitsizlikten ve $\|(Mf)^\beta\|_{L^\Psi(B(x,r))} = \|(Mf)\|_{L^\Phi(B(x,r))}^\beta$ özelliğinden (Bkz. Lemma 2.22.) her $r>0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\mathfrak{A}_{\Psi,\eta}(I_\alpha f;x,r) \lesssim \big(\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}(Mf;x,r)\big)^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}^{1-\beta} \tag{4.3}$$

elde edilir. Teorem 4.6.'de $f \in V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ iken $Mf \in V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olduğu ispatlanmıştı. Sonuç olarak (4.3) eşitsizliği göz önünde bulundurularak $I_\alpha f \in V_\infty\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.13. (Adams tipli sonuç) $\Phi \in \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olsun. $\beta \in (0,1)$ olmak üzere $\eta(t) \equiv \varphi(t)^\beta$ ve $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$ olarak tanımlansın. Eğer (2.19) koşulu sağlanıyorsa M_α operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $V_\infty\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.47. dolayısıyla Adams tipli Orlicz-Morrey sınırlılığı mevcuttur. Geriye vanishing özelliğinin korunduğunu göstermek kalmaktadır. Bu ise bu sefer (4.2) noktasal eşitsizliği kullanılarak Teorem 4.12.'in ispatındaki gibi yapılabilir. ■

4.3. Vanishing Orlicz-Morrey Uzaylarında Bazı Klasik Operatörlerin Komütatörleri

Bu kesimde yeni vanishing Orlicz-Morrey uzaylarında bazı klasik operatörlerin komütatörlerinin sınırlılık özellikleri araştırılmıştır.

Teorem 4.14. $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ fonksiyonu (2.21) koşulunu sağlasın. Bu durumda M_b operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.50. dolayısıyla M_b operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olduğundan sadece bu operatörün (V_∞) koşulunu koruduğunu göstermeliyiz. Bu ise bu sefer (2.11) eşitsizliği kullanılarak Teeorem 4.6.'in ispatındaki gibi yapılır. ■

Teorem 4.15. $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ fonksiyonu (2.22) koşulunu sağlasın. Bu durumda $[b,T]$ operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.51. dolayısıyla $[b,T]$ operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olduğundan sadece bu operatörün (V_∞) koşulunu koruduğunu göstermeliyiz. Bu ise bu sefer (2.12) eşitsizliği kullanılarak Teeorem 4.6.'in ispatındaki gibi yapılır. ■

Teorem 4.16. $0 < \alpha < n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca Φ bir Young fonksiyonu ve Ψ, her $t \in (0,\infty)$ için $\Psi^{-1}(t) := \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ olarak tanımlansın ve $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Kabul edelim ki $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_\Psi$ fonksiyonları (2.23) koşulunu sağlasın. Bu durumda $[b, I_\alpha]$ operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $V_\infty\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.52. dolayısıyla $[b, I_\alpha]$ operatörünün $(\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1} \to \mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2})$ sınırlılığı mevcuttur. Bu yüzden geriye sadece

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Phi,\varphi_1}(f;x,r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Psi,\varphi_2}([b,I_\alpha]f;x,r) = 0$$

önermesinin doğruluğunun gösterilmesi kalmaktadır. Bu ise bu sefer (2.13) eşitsizliği kullanılarak Teeorem 4.6.'in ispatındaki gibi yapılır. ■

Teorem 4.17. $0 < \alpha < n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca Φ bir Young fonksiyonu ve Ψ, her $t \in (0, \infty)$ için $\Psi^{-1}(t) := \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ olarak tanımlansın ve $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Kabul edelim ki $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_\Psi$ fonksiyonları (2.24) koşulunu sağlasın. Bu durumda $M_{b,\alpha}$ operatörü $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $V_\infty\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.53. dolayısıyla $M_{b,\alpha}$ operatörünün ($\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1} \to \mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}$) sınırlılığı mevcuttur. Bu yüzden geriye sadece

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Phi,\varphi_1}(f;x,r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}_{\Psi,\varphi_2}(M_{b,\alpha}f;x,r) = 0$$

önermesinin doğruluğunun gösterilmesi kalmaktadır. Bu ise bu sefer (2.14) eşitsizliği kullanılarak Teeorem 4.6.'in ispatındaki gibi yapılır. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yakın zamanda Morrey uzaylarının yeni vanishing koşulları ile tanımlanan alt uzayları $V_\infty\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ (Almeida & Samko, 2017) tarafından tanıtılmıştır. Bu tanımlar baz alınarak Almeida ve Samko uzaylarını da özel hali olarak içeren $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ "yeni" vanishing Orlicz-Morrey uzaylarının tanımları verilmiş ve bu uzayların Orlicz-Morrey uzaylarının kapalı birer altuzayı oldukları gösterilmiştir. Sonrasında harmonik analizde önemli bir araştırma alanı olan "Klasik operatörlerin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki sınırlılıklarının araştırılması" problemi uyarınca harmonik analizin önemli klasik operatörlerinden olan maksimal, singüler ve potansiyel operatörler ile bu operatörlerin komütatörlerinin $V_\infty\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılıkları ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ne yazık ki $V^{(*)}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının tanımı verilmiş olmasına rağmen klasik operatörlerin bu uzaylardaki davranışları problemi açık bir problem olarak kalmıştır.

$V_\infty\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ altuzaylarının (Almeida & Samko, 2017) tarafından Morrey fonksiyonlarına düzgün fonksiyonlarla yaklaşım problemini araştırmak için tanıtıldığı gerçeğinden yola çıkarak bu tezde edilen sonuçların Orlicz-Morrey uzayı özelinde "Morrey-tipli uzaylarda yaklaşım teorisi" alanına da katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

Adams, D. R. (1975). A note on Riesz potentials. *Duke Mathematical Journal*, *42*, 765–778.

Alabalik, A., Almeida, A., & Samko, S. (2020a). On the invariance of certain vanishing subspaces of Morrey spaces with respect to some classical operators. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, *14*(3), 987–1000.

Alabalik, A., Almeida, A., & Samko, S. (2020b). Preservation of certain vanishing properties of generalized Morrey spaces by some classical operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *43*(16), 9375–9386.

Almeida, A. (2020). Maximal commutators and commutators of potential operators in new vanishing Morrey spaces. *Nonlinear Analysis*, *192*, 111–684.

Almeida, A., & Samko, S. (2017). Approximation in Morrey spaces. *Journal of Functional Analysis*, *272*(6), 2392–2411.

Deringoz, F. (2021). Spanne-Guliyev type characterization for fractional integral operator and its commutators in generalized Orlicz–Morrey spaces on spaces of homogeneous type. *Operator Theory and Harmonic Analysis: OTHA 2020, Part I–New General Trends and Advances of the Theory 10*, 143–159.

Deringoz, F., Dorak, K., & Guliyev, V. S. (2021). Characterization of the boundedness of fractional maximal operator and its commutators in Orlicz and generalized Orlicz–Morrey spaces on spaces of homogeneous type. *Analysis and Mathematical Physics*, *11*, 1–30.

Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Hasanov, S. G. (2016). Characterizations for the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, *2016*, 1–22.

Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Hasanov, S. G. (2017). A characterization for Adams-type boundedness of the fractional maximal operator on generalized Orlicz–Morrey spaces. *Integral Transforms and Special Functions*, *28*(4), 284–299.

Deringoz, F., Guliyev, V. S., Nakai, E., Sawano, Y., & Shi, M. (2019). Generalized fractional maximal and integral operators on Orlicz and generalized Orlicz–Morrey spaces of the third kind. *Positivity*, *23*(3), 727–757.

Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Samko, S. (2014). Boundedness of the maximal and singular operators on generalized Orlicz–Morrey spaces. In *Operator theory, operator algebras and applications* (pp. 139–158). Springer.

Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Samko, S. (2015). Boundedness of the maximal operator and its commutators on vanishing generalized Orlicz-Morrey spaces. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, *40*(2), 535–549.

Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Samko, S. (2017). Vanishing generalized Orlicz-Morrey spaces and fractional maximal operator. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, *90*(1), 125–147.

Guliyev, V. S., & Deringoz, F. (2014). On the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces. *Journal of Function Spaces*, *2014*.

Guliyev, V. S., & Deringoz, F. (2015). Boundedness of fractional maximal operator and its commutators on generalized Orlicz–Morrey spaces. *Complex Analysis and Operator Theory*, *9*, 1249–1267.

Guliyev, V. S., Deringoz, F., & Hasanov, J. J. (2014). Φ-admissible singular operators and their commutators on vanishing generalized Orlicz-Morrey spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, *2014*(1), 1–18.

Guliyev, V. S., Deringoz, F., & Hasanov, J. J. (2016). (Φ, Ψ)-admissible potential operators and their commutators on vanishing Orlicz-Morrey spaces. *Collectanea mathematica*, *67*(1), 133–153.

Hedberg, L. I. (1972). On certain convolution inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *36*(2), 505–510.

John, F., & Nirenberg, L. (1961). On functions of bounded mean oscillation. *Communications on pure and applied Mathematics*, *14*(3), 415–426.

Lu, S., Ding, Y., & Yan, D. (2007). *Singular integrals and related topics*. World Scientific.

Morrey, C. B. (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, *43*(1), 126–166.

Nakai, E. (2004). Generalized fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces. *Banach and Function Spaces (Kitakyushu, 2003)*, 323–333.

Nakai, E. (2008). Orlicz-Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function. *Studia Mathematica*, *3*(188), 193–221.

O'Neil, R. (1965). Fractional integration in Orlicz spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, *115*, 300–328.

Peetre, J. (1969). On the theory of Lp, λ spaces. *Journal of Functional Analysis*, *4*(1), 71–87.

Persson, L.-E., Ragusa, M. A., Samko, N., & Wall, P. (2012). Commutators of Hardy operators in vanishing Morrey spaces. *AIP Conference Proceedings*, *1493*(1), 859–866.

Pick, L., Kufner, A., John, O., & Fucik, S. (2012). *Function spaces, 1*. Walter de Gruyter.

Ragusa, M. A. (2008). Commutators of fractional integral operators on vanishing-Morrey spaces. *Journal of Global Optimization*, *40*, 361–368.

Rao, M. M., & Ren, Z. D. (2002). *Applications of Orlicz spaces* (Vol. 250). CRC Press.

Rosenthal, M., & Triebel, H. (2015). Morrey spaces, their duals and preduals. *Revista matemática complutense*, *28*, 1–30.

Rutickii, M. K.-Y. B., et al. (1961). Convex functions and Orlicz spaces. *Noordhoff, Groningen*.

Samko, N. (2013). Maximal, potential and singular operators in vanishing generalized Morrey spaces. *Journal of Global Optimization*, *57*(4), 1385–1399.

Sawano, Y., Sugano, S., & Tanaka, H. (2012). Orlicz–Morrey spaces and fractional operators. *Potential Analysis*, *36*(4), 517–556.

Vitanza, C. (1990). Functions with vanishing Morrey norm and elliptic partial differential equations. *Proceedings of methods of real analysis and partial differential equations, Capri*, 147–150.

Vitanza, C. (1993). Regularity results for a class of elliptic equations with coefficients in Morrey spaces. *Ricerche di Matematica*, *42*, 265–281.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Farah Alissa MISLAR
Uyruğu:	Malezya
ORCID Numarası:	0000-0003-0064-1644

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte:	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2020
Yüksek Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü:	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2023

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler

Uluslarası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler

1. Fatih Deringoz, Kendal Dorak, Farah Alissa Mislar, 2022, Some classical operators in a new vanishing generalized Orlicz-Morrey space, Transaction National Academic Science Azerbaijan Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 42 (4), 38-45
2. Fatih Deringoz, Kendal Dorak, Farah Alissa Mislar, 2023, Commutators of classical operators in a new vanishing Orlicz-Morrey space, Proceedings of The Institute Of Mathematics and Mechanics, Natl. Acad. Sci. Azer., 49 (1), 69-77

Uluslarası Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler

1. Farah Alissa Mislar, Kendal Dorak, Baku-2022, Maximal operator and its commutators on a new vanishing Orlicz-Morrey space, The 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, COIA'22.