T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BESSEL DÖNÜŞÜMÜNÜN DOĞURDUĞU PSEUDO-DİFERENSİYEL OPERATÖRLER VE ÖZELLİKLERİ

ALPER ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
Aralık - 2011

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BESSEL DÖNÜŞÜMÜNÜN DOĞURDUĞU PSEUDO-DİFERENSİYEL OPERATÖRLER VE ÖZELLİKLERİ

ALPER ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
YRD. DOÇ. DR. ALİ AKBULUT

KIRŞEHİR
Aralık - 2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr.Vagıf S.GULİYEV
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Prof.Dr.Ayhan ŞERBETÇİ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd.Doç.Dr.Ali AKBULUT
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç.Dr.Mustafa KURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Pseudo diferensiyel operatörü $p(x, D)$ ve Bessel diferensiyel operatörü $\Delta_{\alpha,\beta}$ harmonik analizin önemli konuları arasında yer almıştır. Son yıllarda önemli bir inceleme alanı olmuş ve G. Altenburg, J. J. Betankor, M. Belhadj, R. S. Pathak, S. Pathak, A. Prasad, S. Zaidman, A. H. Zemanian, D. T. Haimo, P. K. Pandey, Ryusuke Numata, Micheal Taylor, Vagif S. Guliyev gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde $\mathbb{R}^n$ deki Pseudo diferensiyel operatörlerinin gösterimi ve özellikleri; ikinci bölümde Bessel Diferensiyel denklemi, Bessel fonksiyonları ve özellikleri; son bölümde ise Pseudo diferensiyel operatörü $p(x, D)$ bir sembolün aracılığıyla tanımlanmış ve bu sembolün ters Hankel dönüşümü verilmiştir. Pseudo diferensiyel operatörü $p(x, D)$ nin Hankel dönüşümü ile ilişkili belirli Sobolev Tipi Uzayı ile sınırlandığı gösterilmiştir. Sembol sınıfları H_0^m ve H^m tanımlanmıştır. Ayrıca bu sınıflara ait semboller ile ilişkili Pseudo Diferensiyel operatörlerin Zemanian uzayını $H_{\alpha,\beta}$ nın kendi içine dönüştüren sürekli lineer dönüşüm olduğu gösterilmiştir. Pseudo Diferensiyel operatör $h_{\alpha,\beta,a}$ için integral gösterimi ifade edilmiştir. Pseudo Diferensiyel operatörlerin L^1 norm eşitsizliğini sağladığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pseudo diferensiyel operatör, Hankel dönüşümü, Hankel konvolüsyon, sembol sınıfı, integral gösterimi, Sobolev tipi uzay.

ABSTRACT

Pseudo differential type operators $p(x, D)$ and Bessel type differential operator $\Delta_{\alpha,\beta}$ have a great value in harmonic analysis. They are an important area of review in recent years; and have been studied by such mathematicians as G. Altenburg, J. J. Betankor, M. Belhadj, R. S. Pathak, S. Pathak, A. Prasad, S. Zaidman, A. H. Zemanian, D. T. Haimo, P. K. Pandey, Ryusuke Numata, Micheal Taylor, and Vagif S. Guliyev.

This thesis consists of three chapters. Definitions and properties of Pseudo differential operators on $\mathbb{R}^n$ presented in the first chapter. In the second chapter Bessel differential equation, Bessel function and its properties are given; in the last section Pseudo differential operator $p(x, D)$ in terms of a symbol is defined and inverse Hankel transform of this symbol is defined. It is shown that the Pseudo differential operator is bounded in certian Sobolev type space associated with Hankel transform. The symbol classes H_0^m and H^m are presented. It is shown that Pseudo differential type operator associated with symbols belonging to these classes are continuous linear mappings of the Zemanian space $H_{\alpha,\beta}$ into itself. Integral representation for Pseudo differential type operator $h_{\alpha,\beta,a}$ is given. It is shown that Pseudo differential type operators satisfy L^1 norm inequality.

Keywords: Pseudo differential operator, Hankel transform, Hankel convolution, symbol class, integral representation, Sobolev type space.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT'a, tezimin her aşamasında değerli yardımlarını esirgemeyen sayın Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'a içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$: n- boyutlu Öklid uzayı

$G^s_{\mu,p}$: Sobolev Tipi Uzayı

$C^\infty(I \times I)$: Kompleks değerli sonsuz türevlenebilen fonksiyonlar kümesi

$\Delta(x, y, z)$: x,y,z kenarlı üçgenin alanı

C_r : Pozitif reel sabitler

$p(x, D)$: Pseudo Diferensiyel Operatörü

$\Gamma(n)$: Gamma fonksiyonu

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Schwartz uzayı

$\widehat{f}$: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$\Delta_{\alpha,\beta}$: Bessel tipi operatör.

1 GİRİŞ

Bu bölümde Hankel dönüşümü ve bazı sembol sınıfları tanımlanmıştır. $\phi \in L^1(I)$, $I = (0, \infty)$ nun Hankel tipi dönüşümü aşağıda tanımlanmıştır.

$$(H_\mu \phi)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\mu} J_\mu(xy)\phi(y)y^{2\mu+1}dy, x \in I, \quad \mu > -1/2. \tag{1.1}$$

Burada $(x, y)^{-\mu} J_\mu(xy)$ bu dönüşümün çekirdeği ve J_μ birinci çeşit ve μ'üncü mertebeden Bessel fonksiyonudur.

$x^{-\mu} J_\mu(x)$ I üzerinde sınırlı olduğu için Hankel tipi dönüşümü $H_\mu(\phi)(x)$ I üzerinde sınırlıdır ve

$$\int_0^\infty x^{2\mu+1} |\phi(x)| \, dx < \infty \tag{1.2}$$

dır.

Dolayısıyla

$$(H_\mu \phi)(0) = \frac{1}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)} \int_0^\infty \phi(y)y^{2\mu+1}dy \tag{1.3}$$

olup (1.1) için ters Hankel dönüşümü formülü

$$\phi(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) H_\mu \phi(y)y^{2\mu+1}dy, x \in I \tag{1.4}$$

şeklindedir. (1.4) teki dönüşüme J. J. Betancor, I. Merrero [3], R. S. Pathak ve A. Prasad [10] çalışmalarında yer vermişlerdir. Altenburg [1] $I = (0, \infty)$ aralığında bütün sonsuz türevlenebilen ϕ fonksiyonlarını içeren H uzayında her $m, k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\gamma_{m,k}(\phi) = \sup_{x \in I} (1 + x^2)^m \left| (x^{-1} d/dx)^k \phi(x) \right| < \infty \tag{1.5}$$

olduğunu göstermiştir. Zaidman Schwartz'ın Fourier dönüşüm teorisini kullanarak Pseudo Diferensiyelin bir sınıfı üzerine çalışmıştır. Pathak ve Prasad tarafından sayısal değerli $a(x, y)$ sembolü ile ilişkili Pseudo diferensiyel operatörler incelenmiştir [9]. Ayrıca (1.1) deki Hankel dönüşümü ve Hankel konvolüsyon teorisinde geniş uygulamalar [3,8] de ele alınmıştır. Dolayısıyla dönüşümlere bağlı Pseudo Diferensiyel teorisini geliştirmek doğaldır. H_μ dönüşümüne bağlı Pseudo Diferensiyel araştırmasında $a(x, y)$ sembolünün belli büyüme şartlarını sağlayan türevlere sahip olduğu varsayılmıştır. Bu tip operatörün bir formülü aşağıdaki gibidir.

$$(H_{\mu,a} \phi)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) a(x, y) H_\mu \phi(y)y^{2\mu+1}dy, x \in I \tag{1.6}$$

Burada

$$(H_\mu\phi)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\mu} J_\mu(xy)\phi(y)y^{2\mu+1}dy, x \in I \tag{1.7}$$

[11] de $a(x,y)$ sembolü $I \times I$ daki kompleks değerli sonsuz türevlenebilen fonksiyon olarak tanımlanır ki aşağıdaki eşitsizlik bunu sağlar .

$$\left|(x^{-1}d/dx)^\alpha (y^{-1}d/dy)^\beta a(x,y)\right| \leq C^{\alpha+\beta+1}!\beta!(1+y)^{m-\beta}, \tag{1.8}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ ve m gerçel bir sabit sayıdır. Bütün bu tip semboller sınıfı $\mathcal{H}^m$ ile tanımlanır. [9] dan biliyoruz ki herhangi $\phi, \psi \in H$: için

$$(x^{-1}d/dx)^k(\phi,\psi) = \sum_{v=0}^{k} \tbinom{k}{v} (x^{-1}d/dx)^v \phi((x^{-1}d/dx)^{k-v})\psi \tag{1.9}$$

Hankel'in konvolüsyon teorisini Belhadj ve Betancor [2] da çalışmıştır. Bu çalışmada Bessel operatörü ile ilişkili olan Pseudo diferensiyel teorisini geliştirmek için (1.1) ile tanımlanan Hankel dönüşümü kullanılmıştır.

Hankel dönüşümü,

$$(h_{\alpha,\beta}\phi)(x) = \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy)\phi(y)dy \tag{1.10}$$

$H'_{\alpha,\beta}$ ya ait dağılımlara Zemanian [18] tarafından genişletilmiştir ve her $m, k \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $I = (0, \infty)$ üzerinde tanımlanan bütün kompleks değerli sonsuz türevlenebilen fonksiyonları içeren fonksiyon uzayı $H_{\alpha,\beta}$ nın dualidir.

$$\rho^{\alpha,\beta}_{m,k}(\phi) = \sup\left|x^m(x^{-1}D_x)^k(x^{2\beta-1}\phi(x))\right| < \infty \tag{1.11}$$

Zaidman [15], [17] deki Pseudo diferensiyel operatörler çalışmasında $\mathfrak{T}(R^n)$ deki, Schwartz dağılımının Fourier dönüşümünü kullanmıştır. Fakat Zemanian Hankel tipi dönüşüm teorisini son zamanlarda özel bir durum olarak Bessel tipi operatörler ile ilişkili Pseudo diferensiyel operatörlerinin teorisini genişletmek için kullanılmıştır. Bu çalışmanın amacı bu konuda yapılan incelemelerin bir araya getirilmesidir.

1.1 Temel Kavramlar

Tanım 1.1 (Öklid Uzayı) $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$ şeklinde tanımlanan uzaya Öklid Uzayı denir.

Tanım 1.2 (Gamma Fonksiyonu) $\Gamma(n)$ sembolü ile gösterilen ve

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Gamma Fonksiyonu denir.

Tanım 1.3 (Konvolüsyon) f ve K, $\mathbb{R}^n$ de tanımlı ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$h(x) = (f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x-y) dy$$

biçimindeki $h(x)$ fonksiyonuna f ve K nın Konvolüsyonu denir.

Tanım 1.4 (Schwartz Uzayı) Eğer f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de her mertebeden türevlenebilen ve tüm türevleri sonsuzda azalan ise yani, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ olmak üzere

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty$$

ise f fonksiyonuna Schwartz Uzayına aittir denir ve $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Burada

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

ve

$$D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} ... \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

dır.

Tanım 1.5 (Sobolev Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, ℓ negatif olmayan bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun.

$$W^{\ell,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq \ell, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya $W^{\ell,p}(\Omega)$ Sobolev Uzayı denir, burada $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ dir.

Tanım 1.6 (Fubini Teoremi) $R := [a, b] \times [c, d]$ iki boyutlu bir dikdörtgen ve $f : R \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in [a, b]$ için $f(x, \cdot)$ fonksiyonunun $[c, d]$ üzerinde, her $y \in [c, d]$

için $f(\cdot, y)$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde ve f fonksiyonunun R üzerinde integrallenebilir olduğu varsayalım ; Bu durumda,

$$\int\int_R f dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

eşitlikleri gerçeklenir.

2 PSEUDO DİFERENSİYEL OPERATÖRLERİN GÖSTERİMİ

$\mathbb{R}^n$ deki bir Pseudo Diferensiyel operatörün Fourier integral gösterimi

$$p(x,D)u = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{ix.\xi}d\xi \tag{2.1}$$

şeklindedir, burada $\widehat{u}(\xi)$ u'nun Fourier dönüşümüdür ve

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-iy\xi}dy \tag{2.2}$$

dir. (2.1) deki $p(x,\xi)$ fonksiyonu $p(x,D)$ nin sembolü olarak adlandırılır.

$p(x,\xi) = \Sigma p_\alpha(x)\xi^\alpha$ ifadesi ξ nin bir polinomu ise (2.1) deki $p(x,D) = \Sigma p_\alpha(x)D^\alpha$ diferensiyel operatörü olarak adlandırılır. Burada $D^\alpha = D_1^{\alpha_1},...,D_n^{\alpha_n}$, $D_j = (1/i)\partial/\partial x_j$ dir. Aşağıdaki Fourier inversiyon formülüne D_j uygulanırsa

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi)e^{-ix\xi}d\xi, \tag{2.3}$$

olmak üzere

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)e^{-ix\xi}d\xi \tag{2.4}$$

elde edilir. Bu gösterimin önemi diferensiyel operatörleri cebirsel operatöre dönüştürmesidir. Isı denklemleri buna bir örnektir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,\ u(x,0) = f(x) \tag{2.5}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -\left|\xi\right|^2 \widehat{u},\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi), \tag{2.6}$$

çözülerek

$$u(t,x) = e^{t\Delta}f(x) = (2\pi)_i^{-n/2} nte^{-t|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{2.7}$$

elde edilir. Pseudo diferensiyel operatörler için bir başka gösterim ise singüler integral gösterimidir.

$$p(x,D)u = \int K(x, x-y)u(y)dy, \tag{2.8}$$

burada

$$K(x,x-y) = (2\pi)^{-n} \int p(x,\xi)e^{i(x-y)\xi}d\xi \tag{2.9}$$

biçimindedir. Bunu aşağıdaki formül ile birlikte (2.7) ye uygulayabiliriz.

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2}e^{iz\xi}d\xi = (4\pi t)^{-n/2}e^{-|z|^2/4t}, \tag{2.10}$$

elde edilen formül

$$e^{t\Delta}f(x) = (4\pi t)^{-n/2}\int e^{-|x-y|^2/4t}f(y)dy \tag{2.11}$$

olur.

$$\Delta^{-1}f(x) = -(2\pi)^{-n/2}\int |\xi|^2\,\widehat{f}(\xi)e^{ix.\xi}d\xi \tag{2.12}$$

operatörü şöyle yazılabilir,

$$\Delta^{-1}f(x) = \int G(x-y)f(y)dy, \tag{2.13}$$

$$G(x-y) = C_n\,|x-y|^{-(n-2)},\ n \geq 3. \tag{2.14}$$

Bu formülü elde etmenin bir yolu ve $s = 1/t$ değişken değiştirmesi ile (2.11)'e uygulanışı

$$\Delta^{-1}f(x) = \int_0^\infty e^{t\Delta}f(x)dt, \tag{2.15}$$

Pseudo diferensiyel operatörler olarak bilinen operatör $p(x,\xi)$, $S^m_{\rho,\delta}$ gibi bir sembol sınıfına ait olmak şartıyla aşağıdaki gibi tanımlanır. $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta, \rho \leq 1$ iken

$$p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta} \Longleftrightarrow \left|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-p|\alpha|+\delta|\beta|} \tag{2.16}$$

Burada $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ dır.

$$p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta} \Longleftrightarrow p(x,D) \in OPS^m_{\rho,\delta}. \tag{2.17}$$

S^m (veya bazen S^m_{cl}) olarak belirttiğimiz önemli bir alt sınıf, $p(x,\xi) \in S^m_{1,0}$ sembollerinden oluşur. Örneğin

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j\geq 0} p_j(x,\xi), \tag{2.18}$$

burada $p_j(x,\xi) \in S^{m-j}_{1,0}$, $|\xi| \geq 1$ için ξ'nin derecesi de $m-j$ dir ve (2.18),

$$p(x,\xi) - \sum_0^k p_j(x,\xi) \in S^{m-k-1}_{1,0}$$

anlamına gelir (sonrasında $p(x,D) \in OPS^m$ denilebilir). (2.18) deki $p_0(x,\xi)$ terimi $p(x,D) \in OPS^m$ in temel sembolü olarak bilinir.

Genel olarak $p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$, $p(x,D)$ nin asıl sembolü $p(x,\xi)$ nin denklik sınıfıdır mod $S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}$. Bunun anlamlı olabilmesi için $\rho > \delta$ olmasına ihtiyaç vardır.

(2.12) deki $|\xi|^{-2}$ fonksiyonu $\xi = 0$ daki singülerlikten dolayı S^{-2} ye ait değildir. 0'ın bir komşuluğunda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ verildiğinde örneğin $\varphi(\xi) = 1$ için $E \in OPS^{-2}$ dir.

$$Ef(x) = -(2\pi)^{-n/2}\int \frac{1-\varphi(\xi)}{|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{2.19}$$

olması durumunda

$$\Delta Ef(x) = E\Delta f(x) = (I + R)f(x),$$

$$Rf(x) = -(2\pi)^{-n/2} \int \varphi(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{2.20}$$

ve böylece

$$R \in OPS^{-\infty} = \bigcap_{m>0} OPS^{-m}_{1,0} \tag{2.21}$$

elde edilir. Böyle bir operatör düzgün operatör olarak adlandırılır ve burada E, Δ için bir parametredir.

Pseudo diferensiyel operatörler teorisinde önemli bir nokta da eliptik operatör sınıfından başlayarak diferensiyel operatörlerin farklı sınıfları için parametreler oluşturmasıdır.

(2.8), (2.9) daki singüler integral sonucuna dönecek olursak

$$D^\beta_x D^\gamma_z z^\alpha K(x,z) = (2\pi)^{-n} \int p_{\alpha\beta}(x,\xi)\xi^\gamma e^{iz\xi}d\xi \tag{2.22}$$

buluruz, burada

$$p_{\alpha\beta}(x,\xi) = D^\beta_x D^\gamma_\xi p(x,\xi) \Rightarrow p_{\alpha\beta}(x,\xi)\xi^\gamma \in S^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|+|\gamma|}_{\rho\delta} \tag{2.23}$$

$\rho > 0$ şartıyla verilen β ve γ, $|\alpha|$ boyunca yeterince geniştir. $p_{\alpha\beta}(x,\xi)\xi^\gamma$, ξ içinde integrallenebilirdir. (2.23) ifadesi soldan sınırlı ve süreklidir. Sonuç olarak $p_(x,\xi) \in S^m_{\rho\delta}$ ve $\rho > 0$ olduğunda C^∞ da $p(x,D)$ nin Schwartz Kernel $K(x,x-y)$ $x = y$ köşegenin dışındadır ve $|x-y| \to \infty$ olarak hızla küçülür.

$p = 1$ ise daha fazlası söylenebilir. Bundan dolayı

$$p(x,\xi) \in S^m_{1,\delta} \Rightarrow \left|D^\beta_x D^\gamma_y K(x,x-y)\right| \leq C_{\beta\gamma}\,|x-y|^{-n-m-|\beta|-|\gamma|} \tag{2.24}$$

$$m + |\beta| + |\gamma| > -n \tag{2.25}$$

$\delta \in [0,1]$ için sağlanır.

Bu bölümü (2,1) Fourier integral sunumunda daha genel kısa bir açıklama ile sonlandıralım. Şöyle ki

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int\int a(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}u(y)dyd\xi. \tag{2.26}$$

Burada $x, y \in \xi$ nin herbiri $\mathbb{R}^n$ ye döner. Öyle ki

$$a(x,y,\xi) \in S^m_{\rho\delta_1\delta_2} \Leftrightarrow \left|D^{\beta_1}_x D^{\beta_2}_y D^\alpha_\xi a(x,y,\xi)\right| \leq C_{\alpha\beta_1\beta_2}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta_1|\beta_1|+\delta_2|\beta_2|} \tag{2.27}$$

(2.26) yönteminin bir operatörü (2.1) yöntemiyle yazılabilir.

$$p(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int a(x,y,\xi)e^{i(x-y).(\eta-\xi)}dyd\eta,$$

$$= e^{iD_\xi D_y}a(x,y,\xi)|_{y=x} \tag{2.28}$$

$a(x,y,\xi) \in S^m_{\rho,\delta_1,\delta_2}$ olduğunda sabit aşama metodunun bir türevi bunu göstermek için kullanabilir. Bu durumda

$$0 \leq \delta_2 < \rho \leq 1 \Rightarrow p(x,\xi) \in S^m_{\rho\delta}, \delta = \max(\delta_1,\delta_2), \text{ ve}$$

$$p(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\geq 0}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}D^\alpha_\xi D^\alpha_y a(x,y,\xi)|_{y=x}, \tag{2.29}$$

asimtotik formül toplam $|\alpha| < N$ fazla olduğundan $S^{m-N(\rho-\delta)}_{\rho\delta}$ elemanı ile $p(x,\xi)$ den farklılaşır. İspatları belirtilen kaynaklarda bulunabilir.

3 BESSEL FONKSİYONLARI VE BESSEL OPERATÖRÜ İLE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ PSEUDO-DİFERENSİYEL OPERATÖR

Bessel diferensiyel denklemi aşagıdaki gibi tanımlanır.

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dx}\left(z\frac{du}{dz}\right)+\left(1-\frac{v^2}{z^2}\right)u=\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+\left(1-\frac{v^2}{z^2}\right)u=0. \tag{3.1}$$

Tanım 3.1 Bessel fonksiyonları $J_v(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^v\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(v+n+1)}, (z\neq\mathbf{R}_-)$ olarak tanımlanır. Bessel fonksiyonları yardımı ile Neumann fonksiyonu

$$N_v(z)=Y_v(z)=\frac{1}{\sin v\pi}[\cos v\pi J_v(z)-J_{-v}(z)](v\neq \text{Tamsayı}, z\neq\mathbf{R}_-) \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}N_n(z)=Y_n(z)&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_v(z)}{\partial v}-(-1)^n\frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v}\right]\\&=\frac{2}{\pi}J_n(z)\left(\gamma+\log\frac{z}{2}\right)\\&-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left[\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m}\right]\\&-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}(n=0,1,2,...,z\neq\mathbf{R}_-)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\gamma=0,57721...$ Euler gammasıdır ve son terimde $n=0$ konulmuştur.

$$\text{Hankel (birinci çeşit) } H_v^{(1)}=J_v(z)+iN_v(z) \tag{3.3}$$

$$\text{Hankel (ikinci çeşit) } H_v^{(2)}=J_v(z)-iN_v(z) \tag{3.4}$$

J_v, N_v, $H_v^{(1,2)}$ fonksiyonları silindirik fonksiyonların birinci, ikinci ve üçüncüsü olarak da adlandırılır ve hepsi birlikte v'inci silindirik veya bessel fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 3.2 Bessel fonksiyonları için tamsayı parametreli gösterim ise

$$J_n(z)=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta e^{iz\cos\theta}d\theta \tag{3.5}$$

dır.

Şimdi Bessel eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

Teorem 3.3 J_n için rekürans bağıntısı aşağıdaki gibi sağlanır.

$$J_{n-1} + J_{n+1} = \frac{2n}{z} J_n \tag{3.6}$$

İspat.

$$\begin{aligned}
z(J_{n-1} + J_{n+1}) &= z\frac{i^{-n+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n-1)\theta e^{iz\cos\theta} d\theta + z\frac{i^{-n+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n+1)\theta e^{iz\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} iz(\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta) e^{iz\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2iz\sin n\theta \sin\theta e^{iz\cos\theta} d\theta \\
&= -2\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(e^{iz\cos\theta}) d\theta \\
&= -2\frac{i^{-n}}{2\pi}\left([\sin n\theta e^{iz\cos\theta}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} n\cos n\theta e^{iz\cos\theta} d\theta \right) \\
&= 2nJ_n.
\end{aligned}$$

Şimdi z ye bağlı türevlerini alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{dJ_N}{dz} &= \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} i\cos\theta \cos n\theta e^{iz\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{i}{2}(\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta) e^{iz\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\frac{i^{-n+1}}{2\pi}\frac{i^2}{i^2}\int_0^{2\pi} \cos(n+1)\theta e^{iz\cos\theta} d\theta + \frac{1}{2}\frac{i^{-n+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n-1)\theta e^{iz\cos\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{2}J_{n+1} + \frac{1}{2}J_{n-1} = -\frac{1}{2}(\frac{2n}{z}J_n - J_{n-1}) + \frac{1}{2}J_{n-1} = J_{n-1} - \frac{n}{z}J_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2J_n}{dz^2} &= \frac{dJ_{n-1}}{dz} - \frac{n}{z}\frac{dJ_n}{dz} + \frac{n}{z^2}J_n \\
&= \left(J_{n-2} - \frac{n-1}{z}J_{n-1} \right)\frac{n}{z}\left(J_{n-1}\frac{n}{z}J_n \right) + \frac{n}{z^2}J_n \\
&= \left(-J_n + \frac{2(n-1)}{z}J_{n-1} \right) - \frac{2n-1}{2}J_{n-1} + \frac{n^2+n}{z^2}J_n \\
&= -\frac{1}{z}J_{n-1} + \left(\frac{n^2+n}{z^2} - 1 \right)J_n \\
&= -\frac{1}{z}\left(\frac{dJ_n}{dz} + \frac{n}{z}J_n \right) + \left(\frac{n^2+n}{z^2} - 1 \right)J_n \\
&= -\frac{1}{z}\frac{dJ_n}{dz} + \left(\frac{n^2}{z^2} - 1 \right)J_n.
\end{aligned}$$

Böylece J_n Bessel eşitliğini sağlar.

Bessel fonksiyonu üretici fonksiyon yardımıyla türetilebilir.

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\theta} \tag{3.7}$$

θ yerine $-\theta$ getirilerek kolaylıkla genişletilebilir.

$$e^{\pm iz\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{\pm in\theta}. \tag{3.8}$$

Aynı zamanda $(\pm iz\cos\theta)$ ifadesini elde etmek için $\theta' = \theta \pm \pi/2$ dönüşümünü kullanabiliriz.

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin(\theta' \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos\theta' \sin\frac{\pi}{2} = \cos\theta', \\
e^{in\theta} &= e^{in(\theta' \pm \pi/2)} = e^{\pm in\pi/2}e^{in\theta'} = (\pm i)^n e^{in\theta'}
\end{aligned}$$

Bağıntıyı (3.7) ile ilişkilendirerek

$$e^{iz\sin\theta} = e^{\pm iz\cos\theta'} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)(\pm i)^n e^{in\theta'}. \tag{3.9}$$

elde ederiz.

Buna Jakobi-Anger genişlemesi denir. Böylece aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$e^{\pm iz\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{\pm in\theta}, e^{\pm iz\cos\theta'} = \sum_{-\infty}^{\infty}(\pm i)^n J_n(z)e^{in\theta}. \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{iz\cos\theta} d\theta. \tag{3.11}$$

integrali dikkate alınarak yukarıdaki ifade de yerine koyarsak şu sonucu alırız.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{iz\cos\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} i^t J_t(z)e^{it\theta} d\theta \\
&= \sum_{t=\infty}^{\infty} \frac{i^t}{2} J_t(z) \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(e^{i(n+t)\theta} + e^{i(-n+t)\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{i^n}{2}J_n(z) + \frac{i^{-n}}{2}J_{-n}(z) \\
&= \frac{i^n}{2}J_n(z)\big(1+(-1)^n i^{-2n}\big) = i^n J_n(z).
\end{aligned}$$

Burada $J_{-n}(z) = (-1)J_n$ dir.

Dolayısıyla

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{iz\cos\theta} d\theta$$

elde ederiz.

bulunan ifade hesaplandığında

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{-iz\cos\theta} d\theta = (-i)^n J_n(z) \tag{3.12}$$

ve böylece

$$J_n(z) = \frac{(\pm i)^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{\pm iz\cos\theta} d\theta \tag{3.13}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\theta e^{\pm iz\cos\theta} d\theta \tag{3.14}$$

dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\theta e^{\pm iz\cos\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \sum_{t=-\infty}^{\infty} (\pm i)^t J_t(z) e^{it\theta} d\theta \\
&= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{(\pm i)^t}{2i} J_t(z) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(e^{i(n+1)\theta} - e^{i(-n+1)\theta} \right) d\theta \\
&= -\frac{(\pm i)^n}{2i} J_n(z) + \frac{(\pm i)^{-n}}{2i} J_{-n}(z) \\
&= \frac{(\pm i)^n}{2i} J_n(z)(-1 + (\pm i)^{-2n}(-1)^n) = 0
\end{aligned}$$

hesaplanır.

Diğer kombinasyonlar

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{\pm iz\cos\theta} d\theta, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\theta e^{\pm iz\cos\theta} d\theta \tag{3.15}$$

gibidir.

Herbiri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{\pm iz\cos\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2i} \sum_{t=-\infty}^{\infty} (\pm i)^t J_t(z) e^{it\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2} J_{\pm n}(z) + \frac{1}{2} J_{\pm n} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) J_n(z) \\
&= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} J_t(z) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(e^{i(n\pm 1)\theta} + e^{i(-n\pm 1)\theta} \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} J_n(z) & \text{n = çift ise} \\ 0 & \text{n = tek ise} \\ & \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\theta e^{\pm iz\sin\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \sum_{t=-\infty}^{\infty} (\pm i)^t J_t(z) e^{it\theta} d\theta \\
&= -\frac{i}{2} J_{\pm n}(z) + \frac{i}{2} J_{\pm n}(z) = \pm \frac{i}{2}(1 - (-1)^n) J_n(z) \\
&= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} J_t(z) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(e^{i(n\pm 1)\theta} - e^{i(-n\pm 1)\theta} \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{n = çift ise} \\ \pm i J_n(z) & \text{n = tek ise} \\ \end{cases} \tag{3.17}$$

Bu sonuçları aşağıdaki yolla birleştirebiliriz.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}e^{\pm z\sin\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta + i\sin n\theta)e^{\pm z\sin\theta}d\theta$$

$$= \begin{cases} J_n(z) & \text{n = çift ise} \\ \pm J_n(z) & \text{n = tek ise} \\ \end{cases}$$

$$= (\pm 1)^n J_n(z) \tag{3.18}$$

ya da

$$J_n(z) = \frac{(\pm 1)^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}e^{\pm z\sin\theta}d\theta. \tag{3.19}$$

şeklinde yazabiliriz.

3.1 Bessel Operatörü İle İlişkilendirilmiş Pseudo-Diferensiyel Operatör

3.2 Hankel Konvolüsyon

Zemanian [18] den hatırlıyoruz ki aşağıdaki Hankel konvolüsyonunda eğer x, y, z kenarlı bir üçgen var ise $\Delta(x, y, z)$ ile x, y, z kenarlı üçgenin alanıgösterilir. $\mu > 0$ için

$$D(x,y,z) = 2^{3\mu-1/2}(\pi)^{-1/2}[\Gamma(\mu+1)]^2(\Gamma(\mu+1/2))^{-1}(xyz)^{-\mu}\Delta(x,y,z)^{2\mu-1} \qquad (3.20)$$

Δ varsa (3.20), yoksa sıfır alınır. $\Delta(x, y, z) \geq 0$ dır ve $\Delta(x, y, z)$, x, y, z de simetriktir ve

$$\int_0^\infty j(zt)D(x,y,z)d\mu(z) = j(xt)j(yt) \qquad (3.21)$$

dir, burada

$$d\mu(z) = [2^\mu\Gamma(\mu+1)]^{-1}z^{2\mu+1}dz \qquad (3.22)$$

ve

$$j(x) = 2^\mu\Gamma(\mu+1)x^{-\mu}J_\mu(x). \qquad (3.23)$$

[8] den biliyoruz ki

$$J_\mu(x\xi)J_\mu(x\lambda) = \frac{1}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\int_0^\infty (x\lambda\xi)^\mu z^{-\mu}J_\mu(zx)D(\xi,\lambda,z)d\mu(z) \qquad (3.24)$$

dir.

$I = (0, \infty)$, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p_\mu(I)$ uzayını

$$\|f\|_p = \left[\int_0^\infty |f(x)|^p \, d\mu(x)\right]^{1/p} < \infty \qquad (3.25)$$

olacak biçimde bütün ölçülebilir fonksiyonların uzayı olarak tanımlarız.

Tanım 3.4 $f \in L^1_\mu(I)$ olsun, $f(x, y)$ eşlenik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(x,y) = \int_0^\infty f(z)D(x,y,z)d\mu(z), 0 < x, y < \infty. \qquad (3.26)$$

f ve g $L^1_\mu(I)$'de iki fonksiyon olsun ve f ve g nin Hankel konvolüsyonu

$$(f\#g)(x) = \int_0^\infty f(x,y)g(y)d\mu(y), 0 < x < \infty. \qquad (3.27)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(f\#g)(x)$ olarak tanımlanan integralin tersi alınır ve

$$\|(f\#g)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \qquad (3.28)$$

ve hemen hemen heryerde $(f\#g) = (g\#f)$ dir.

3.3 Pseudo-Diferensiyel Operatör $P(x,D)$

Pseudo diferensiyel operatörü $P(x,D)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.5

$$(P(x,D)\phi)(x) = \int_0^\infty (x\xi)^{-\mu} J_\mu(x\xi) a(x,\xi) H_\mu \phi(\xi) \xi^{2\mu+1} d\xi, x \in I, \tag{3.29}$$

burada $\phi \in H(I)$, $I = (0,\infty)$, $\mu \geq -1/2$ ve $a(x,\xi)$ sembolünün Hankel tipi dönüşümü olarak tanımlandığını varsayıyoruz.

$$a(x,\xi) = \int_0^\infty (x\lambda)^{-\mu} J_\mu(x\lambda)(H_\mu \alpha)(\lambda,\xi)\lambda^{2\mu+1} d\lambda, x \in I \tag{3.30}$$

bütün $\lambda \in I$, $\xi \in I$ için

$$|(H_\mu)(\lambda,\xi)| \leq k(\lambda), \forall\lambda \in I, \xi \in I \tag{3.31}$$

gerçeklenir, burada $k(\lambda) \in L^1_\mu(I)$, $\mu \geq -1/2$ dir.

Şimdi $P(x,D)$ nin sınırlılığını ispatlayacağız. Bunun için aşağıdaki Sobolev tipi uzaya ihtiyacımız vardır.

Tanım 3.6 $s,\mu \in \mathbb{R}$ ve $1 \leq p < \infty$ için $G^s_{\mu,p}$ uzayı bütün $\phi \in H'(I)$ elemanların kümesine tanımlanır ki aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\|\phi\|_{G^s_{\mu,p}} = \left\|\eta^2 H_\mu \phi\right\|_p \tag{3.32}$$

$G^s_{\mu,p}$ ye genellikle Sobolev tipi uzay adını veririz.

Teorem 3.7 $\mu \geq -1/2$ olsun, bu durumda

$$\|P(x,D)\phi\|_{G^0_{\mu,1}} \leq \|k\|_1 \|\phi\|_{G^0_{\mu,1}}, \phi \in H(I) \tag{3.33}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat.

$$(P(x,D)\phi)(x) = \int_0^\infty (x\xi)^{-\mu} J_\mu(x\xi) a(x,\xi) H_\mu \phi(\xi) \xi^{2\mu+1} d\xi, x \in I \tag{3.34}$$

olduğunu biliyoruz, burada

$$a(x,\xi) = \int_0^\infty (x\lambda)^{-\mu} J_\mu(x\lambda)(H_\mu \alpha)(\lambda,\xi)\lambda^{2\mu+1} d\lambda, x \in I \tag{3.35}$$

biçimindedir. Böylece Fubinin teoremini kullanarak, integrasyon sırasını değiştirerek

$$\begin{aligned}
(P(x,D)\phi)(x) &= \int_0^\infty (x\xi)^{-\mu} J_\mu(x\xi) \\
&\times \int_0^\infty (x\lambda)^{-\mu} J_\mu(x\lambda)(H_\mu\alpha)(\lambda,\xi)\lambda^{2\mu+1} d\lambda \\
&\times H_\mu\phi(\xi)\xi^{2\mu+1} d\xi, x \in I \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty (x\xi)^{-\mu}(x\lambda)^{-\mu}(H_\mu\alpha)(\lambda,\xi)(\lambda\xi)^{2\mu+1} H_\mu\phi(\xi) \\
&\times \frac{1}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty (x\lambda\xi)^\mu z^{-\mu} J_\mu(zx) D(\xi,\lambda,z) d\mu(z) d\lambda d\xi \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty (x\xi)^{-\mu}(x\lambda)^{-\mu}(H_\mu\alpha)(\lambda,\xi)(\lambda,\xi)^{2\mu+1} H_\mu\phi(\xi) \\
&\times \frac{1}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty (x\lambda\xi)^\mu z^{-\mu} J_\mu(zx) D(\xi,\lambda,z) \\
&\times \frac{1}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} z^{2\mu+1} dz d\lambda d\xi \\
&= \frac{1}{(2^\mu\Gamma(\mu+1))^2} \int_0^\infty (xz)^{-\mu} J_\mu(zx) \\
&\times \left[\int_0^\infty \int_0^\infty (\lambda\xi)^{2\mu+1}(H_\mu\alpha) H_\mu\phi(\xi) D(\xi,\lambda,z) \right] \\
&\times z^{2\mu+1} dz d\lambda d\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Ters Hankel dönüşümünün bir uygulaması aşağıdaki sonucu verir.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (xz)^{-\mu} J_\mu(xz)(P(x,D)\phi)(x) x^{2\mu+1} dx &= \frac{1}{(2^\mu\Gamma(\mu+1))^2} \\
\times \int_0^\infty \int_0^\infty \xi^{2\mu+1} H_\mu\phi(\xi)\lambda^{2\mu+1}(H_\mu\alpha)(\lambda,\xi) D(\xi,\lambda,z) d\lambda d\xi. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Bir başka deyişle

$$H_\mu(P(x,D)\phi(x))(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty (H_\mu\alpha)(\lambda,\xi) D(\xi,\lambda,z)(H_\mu\phi)(\xi) d\mu(\lambda) d\mu(\xi) \qquad (3.37)$$

elde ederiz. (3.31) eşitsizliğini kullanarak

$$|H_\mu(P(x,D)\phi(x))(z)| \leq \int_0^\infty \int_0^\infty k(\lambda) D(\xi,\lambda,z)(H_\mu\phi)(\xi) d\mu(\lambda) d\mu(\xi) = (k\# H_\mu\phi)(z) \qquad (3.38)$$

elde ederiz. Böylece

$$\int_0^\infty |H_\mu(P(x,D)\phi(x))(z)|\, d\mu(z) \leq \int_0^\infty (k\# H_\mu\phi)(z) d\mu(z) \qquad (3.39)$$

bulunur. Şimdi (3.33) ve (3.28) tanımlarını uygulayarak

$$\|P(x,D)\phi\|_{G^0_{\mu,1}} \leq \|k\|_1 \|\phi\|_{G^0_{\mu,1}}, \phi \in H(I). \qquad (3.40)$$

3.4 Sembol Özellikleri

$a(x,\xi)$ nin ayrılabilir olması özel durumunu göz önüne alalım.

$$a(x,\xi) = a(x)c(\xi) \tag{3.41}$$

ki burada $H_\mu(a(x))(\lambda) \in L^1_\mu(I)$ ve $c(\xi)$ I da sınırlı ölçülebilir bir fonksiyondur. Bütün $\xi \in I$ için $|c(\xi)| \leq M$ dir. Aşağıdaki formül ve $[H_\mu \alpha(x)](\lambda) \in L^1_\mu(I)$ dan dolayı

$$a(x) = \int_0^\infty (x\lambda)^{-\mu} J_\mu(x\lambda)[(H_\mu a(x))](\lambda)\lambda^{2\mu+1} d\lambda, x \in I \tag{3.42}$$

böylece

$$\begin{aligned} a(x,\xi) &= \int_0^\infty (x\lambda)^{-\mu} J_\mu(x\lambda)(H_\mu a(x,\xi))(\lambda)\lambda^{2\mu+1} d\lambda, x \in I \\ &= \int_0^\infty (x\lambda)^{-\mu} J_\mu(x\lambda)(H_\mu a(x))(\lambda)c(\xi)\lambda^{2\mu+1} d\lambda \\ &= \int_0^\infty (x\lambda)^{-\mu} J_\mu(x\lambda)(H_\mu a(x))(\lambda)\lambda^{2\mu+1} d\lambda c(\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $c(\xi) \leq M$ ve $|(H_\mu a)(\lambda,\xi)| \leq MH_\mu(a(x))(\lambda) \in L^1_\mu(I)$ olduğundan $\xi \in I$ için $I \times I$ daki ölçülebilir fonksiyon olan $(H_\mu a(x,\xi))(\lambda) = H_\mu(a(x))(\lambda)c(\xi)$ dir.

Böylece

$$k(\lambda) = H_\mu(a(x))(\lambda) \tag{3.43}$$

ve teoremden

$$\|P(x,D)\phi\|_{G^0_{\mu,1}} \leq \|k\|_1 \|\phi\|_{G^0_{\mu,1}}, \phi \in H(I) \tag{3.44}$$

elde edilir.

3.5 Notasyonlar ve Terminoloji

Diferensiyel operatörler $P_{\alpha,\beta}, Q_{\alpha,\beta}$ ve $S_{\alpha,\beta}$

$$P_{\alpha,\beta} = P_{\alpha,\beta,x} = x^{2\alpha} D_x x^{2\beta-1} \tag{3.45}$$

$$Q_{\alpha,\beta,x} = x^{2\beta-1} D_x x^{2\alpha} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha,\beta} = \Delta_{\alpha,\beta,x} &= Q_{\alpha,\beta} P_{\alpha,\beta} = x^{2\beta-1} D_x x^{4\alpha} D_x x^{2\beta-1} \\ &= (2\beta-1)(4\alpha+2\beta-2)x^{4(\alpha+\beta-1)} \end{aligned}$$

$$+2(2\alpha+2\beta-1)x^{4\alpha+4\beta-3}D_x + x^{2(2\alpha+2\beta-1)}D_x^2 \tag{3.47}$$

tanımlayabiliriz ki $Dx = \frac{d}{dz}$ tir. [11,p.139], [3,p.948] i takip ederek herhangi bir $\phi \in H_{\alpha,\beta}$ için aşağıdaki bağıntıları kurabiliriz.

$$h_{\alpha,\beta,1}(-x\phi) = P_{\alpha,\beta}h_{\alpha,\beta}\phi \tag{3.48}$$

$$h_{\alpha,\beta,1}(P_{\alpha,\beta}\phi) = -yh_{\alpha,\beta}\phi \tag{3.49}$$

$$h_{\alpha,\beta,1}(\Delta_{\alpha,\beta}\phi) = -y^2 h_{\alpha,\beta}\phi \tag{3.50}$$

$$(x^{-1}D)^k(x^{2\beta-1}\theta_\phi) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(x^{-1}D)^i\theta(x^{-1}D)^{k-i}(x^{2\beta-1}\phi) \tag{3.51}$$

$$\Delta_{\alpha,\beta,x}\phi(x) = \sum_{j=0}^{r} b_j x^{2j+2\alpha}(x^{-1}D_x)^{r+j}(x^{2\beta-1}\phi(x)), \tag{3.52}$$

ki burada b_j sadece $\alpha-\beta$ ye bağlı sabitlerdir. Hankel tipi konvolüsyon dönüşümü için Haimo [4] den ötürü aşağıdaki Lemmaya da ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.8 $(a-b) \geq \frac{1}{2}$ ve x, y, z kenarlı üçgeni için $\Delta(x, y, z)$ üçgenin alanı olsun. Bu durumda

$$D(x,y,z) = \frac{2^{3(a-b)-1}(\Gamma(a-b+1))^2}{\sqrt{\pi}\Gamma(a-b+\frac{1}{2})}(xyz)^{-2(a-b)}[\Delta(x,y,z)]^{2(a-b)-1}. \tag{3.53}$$

Dikkat edilmelidir ki $\Delta(x, y, z) \geq 0$ ve x, y, z simetriktir. Böylece aşağıdaki temel formül elde edilir.

$$\int_0^\infty i(zt)D(x,y,z)d\mu(z) = i(xt)i(yt) \tag{3.54}$$

ki burada

$$d\mu(x) = \frac{x^{2(a-b)+1}}{2^{a-b}\Gamma(a-b+1)}dx \tag{3.55}$$

dir.

$$i(x) = 2^{a-b}\Gamma(a-b+1)x^{-(a-b)}J_{a-b}(x) \tag{3.56}$$

$f \in L^1(0,\infty)$ olsun. i ile ilişkili fonksiyon $f(x, y)$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$f(x,y) = \int_0^\infty f(z)D(x,y,z)d\mu(z) \; 0 < x < \infty. \tag{3.57}$$

Lemma 3.9 f ve g $L^1(0,\infty)$ ın fonksiyonları ve

$$f\#g(x) = \int_0^\infty f(x,y)g(y)d\mu(y) \; 0 < x < \infty \tag{3.58}$$

olsun, böylece yukarıda tanımlanan integral, hemen her x için yakınsaktır.

$0 < x < \infty$ ve

$$\|f\#g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}. \tag{3.59}$$

3.6 Pseudo-Diferensiyel Operatörü $h_{\alpha,\beta,a}$

Tanım 3.10 $a(x,y)$ $C^{\infty}(I \times I)$ uzayına ait kompleks değerli bir fonksiyon olsun, burada $I=(0,\infty)$ dur ve onun türevleri belli büyüklük şartlarını sağlar. $a(x,y)$ sembolü ile ilişkili pseudo diferensiyel tipi operatörü $h_{\alpha,\beta,a}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(h_{\alpha,\beta,a}u)(x)=\int_0^{\infty}(xy)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(xy)a(x,y)U_{\alpha,\beta}(y)dy \tag{3.60}$$

ki burada

$$U_{\alpha,\beta}(y)=(h_{\alpha,\beta,a}u)(y)=\int_0^{\infty}(xy)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(xy)u(x)dx;(a-b)\leq -\frac{1}{2}. \tag{3.61}$$

dir. $a(x,y)=b(y)$ durumunda açıkça sonucu elde ederiz.

$$(h_{\alpha,\beta,a}u)(x)=h_{\alpha,\beta}[b(y)U_{\alpha,\beta}(y)].$$

Eğer $a(x,y)$ xe bağlı olan değişken katsayılar ile $(-y^2)$ de bir güç serisi dağılımına sahip ise yani

$$a(x,y)=\sum_{k=0}^{N}a_k(x)(-y^2)^k. \tag{3.62}$$

ise bu durumda aşağıdaki gibi gösterebilir öyle ki

$$(h_{\alpha,\beta,a}u)(x)=\sum_{k=0}^{N}a_k(x)(\Delta_{\alpha,\beta})^k u(x) \tag{3.63}$$

(3.62) sembolü ile ilişkili Pseudo diferensiyel tipi operatörü $\Delta_{\alpha,\beta}$ yı içeren sonlu sıralı diferensiyel operatörü olur.

Tanım 3.11 $a(x,y):C^{\infty}(I\times I)\to\mathbb{C}$ nin H^m sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul her $q\in\mathbb{N}_0$, $i\in\mathbb{N}_0$, $p\in\mathbb{N}_0$ için

$$(1+x)^q\left|(x^{-1}D_x)^i(y^{-1}D_y)^p a(a,y)\right|\leq K_{p,i,m,q}(1+y)^{m-p} \tag{3.64}$$

olacak biçimde $K_{p,i,m,q}>0$ sayısının bulunmasıdır, burada $D_y=\frac{d}{dy}$ ve m sabit gerçek sayıdır. Eğer $a(x,y)$ $q=0$ ile (3.62) sağlanırsa bu durumda sembol sınıf ı H_0^m olarak gösterilecektir. Açık olarak $H^m\subset H_0^m$ dir. $a(x,y)=(1+x^2)^{-n}(1+y^2)^{m/2}>0$ olduğu kolaylıkla gösterebilir. $m\in\mathbb{R}$ H_0^m ın elemanıdır. Ama H^m ye ait değildir. Yine de $a(x,y)=e^{-x^2}(1+y^2)^{m/2}$ dir. $m\in\mathbb{R}$ H^m ye aittir.

Teorem 3.12 Sembol $a(x,y)\in H_0^m$ (yada H^m) olsun. Bu durumda $(\alpha-\beta)\leq -\frac{1}{2}$ için pseudo diferensiyel tipi operatörü $h_{\alpha,\beta,a}$ $H_{\alpha,\beta}$ nın kendi içine sürekli lineer dönüşümüdür.

İspat. $\phi(y) = (h_{\alpha,\beta,a}u)(y)$, $u \in H_{\alpha,\beta}(I)$ olsun. (3.48), (3.49) deki formülü ve Zemanianın [18,p.141] tekniğini kullanarak

$$(P_{\alpha,\beta,k-1}......P_{\alpha,\beta}\phi)(y) =$$

$$\sum_{r=0}^{k} C_r \int_0^\infty y^{r+\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} (y^{-1}D_y)^r a(x,y)(-x)^{k-r} u(x) J_{\alpha-\beta+k-r}(xy)dx,$$

elde ederiz ki burada C_r belli pozitif gerçel sayılardır. $a_r(x,y) = (y^{-1}D_y)^r a(x,y)$ oluşturur. Şimdi (3.51) formülünü ve tümevarımı kullanarak

$$(-y)^n (P_{\alpha,\beta,k-1}......P_{\alpha,\beta}\phi(y))$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} C_r \int_0^\infty y^{r+\frac{1}{2}} x^{\alpha-\beta+k+n-r+1} \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} (x^{-1}D_x)^i \\ &\times a_r(x,y)(x^{-1}D_x)^{n-i}(x^{2\beta-1}u(x)) J_{\alpha-\beta+k+n-r+1}(xy)dx \end{aligned}$$

elde ederiz. $\alpha - \beta + k - r = \lambda$ yi olmak üzere (3.45) formülünü kullanarak

$$(-1)^n y^n (y^{-1}D_y)(y^{2\beta-1}\phi(y)) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} C_r \int_0^\infty x^{2\lambda+n+1}.$$

$$\sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} (x^{-1}D_x)^i a_r(x,y)(x^{-1}D_x)^{n-i}(x^{2\beta-1}u(x)) J_{\lambda+n}(xy)(xy)^{-\lambda} dx$$

elde ederiz. $s,t \in \mathbb{N}_0$, $s \le m$ ve sırasıyla $n = t$ ve $n = t+s$ olduğunda yukardaki ifadeyi elde ederiz. $q = 0$ iken (3.64) yı $(\alpha-\beta) \le -\frac{1}{2}$ varsayımını kullanarak aşağıdaki ifadeyi buluruz. Sabit bir $K_{m,y,r}$ vardır öyle ki

$$(1+y^s)\left|y^t (y^{-1}D_y)^k y^{2\beta-1}\phi(y)\right|$$

$$\le \sum_{r=0}^{k} \int_0^\infty 2^m (1+y^m)(1+y)^{-p}.$$

$$\left[\begin{array}{c} (1+x)^{2\lambda+t+s+l} \sum_{i=0}^{t+s} K_{m,v,r} \tbinom{t+s}{i} (x^{-1}D_x)^{t+s-i}(x^{2\beta-1}\phi(x)) \\ +(1+x)^{2\lambda+t+l} \sum_{i=0}^{t} K_{m,v,r} \tbinom{t}{i} (x^{-1}D_x)^{t-i}(x^{2\beta-1}\phi(x)) \end{array}\right] dx$$

olur. Böylece

$$\left|y^t (y^{-1}D_y)^k y^{2\beta-1}\phi(x)\right| \le K \sum_{r=0}^{k} \int_0^\infty 2^m (1+y^m)(1+ys)^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{c} (1+x)^{2\lambda+t+s+l} \sum_{i=0}^{t+s} \tbinom{t+s}{i} (x^{-1}D_x)^{t+s-i}(x^{2\beta-1}\phi(x)) \\ +(1+x)^{2\lambda+t+l} \sum_{i=0}^{t} \tbinom{t}{i} (x^{-1}D_x)^{t-i}(x^{2\beta-1}\phi(x)) \end{array}\right] dx$$

dir. Şimdi $N > 2(\alpha-\beta+k)+t+s+3$ olacak biçimde pozitif olmayan integral N yi seçebiliriz. Bu durumda $y \geq 0, s \geq m$ için $(1+y^m)/(1+y^s) \leq 2$ kullanarak elde ederiz.

$$\left|y^t(y^{-1}D_y)^k y^{2\beta-1}\phi(x)\right| \leq K' \sum_0^k 2^{m+1} \int_0^\infty (1+x)^{N-2}.$$

$$\left[\sum_{i=0}^{t+s}\tbinom{t+s}{i}\left|(x^{-1}D_x)^{t+s+i}x^{2\beta-1}\phi(x)\right| + \sum_{i=0}^{t}\tbinom{t}{i}\left|(x^{-1}D_x)^{t-i}x^{2\beta-1}\phi(x)\right|\right]dx$$

$$\leq K'' \sum_{i=0}^{k}\left[\sum_{i=0}^{t+s}\tbinom{t+s}{i}\sum_{j=0}^{N}\tbinom{N}{i}\rho^{\alpha,\beta}_{j,t+s-i}(u) + \sum_{i=0}^{t}\tbinom{t}{i}\sum_{j=0}^{N}\tbinom{N}{i}P^{\alpha,\beta}_{j,t-i}(u)\right].$$

Böylece (1.11) yi kullanarak

$$\rho^{\alpha,\beta}_{t,k}(\phi) \leq K'' \sum_{r=0}^{k}\sum_{j=0}^{N}\tbinom{N}{i}\left[\sum_{i=0}^{t+s}\tbinom{t+s}{i}\rho_{j,t+s-i}(u) + \sum_{j=0}^{t}\tbinom{t}{i}\rho^{\alpha,\beta}_{j,t-i}(u)\right] \tag{3.65}$$

elde edilir, burada K'' pozitif bir sabittir. $h_{\alpha,\beta,a}$ nın sürekliliği (3.65) de verilmiştir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.7 $h_{\alpha,\beta,a}$ İçin İntegral Gösterimi

$$a_\eta(y) = \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(xy)(\Delta_{\alpha,\beta})^r[(x\eta)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(xt)a(x,\eta)]dx \tag{3.66}$$

(3.7) ile tanımlanan ve sembol $a(x,y)$ ile ilişkili olan $a_\eta(y)$ fonksiyonu araştırmamızda temel bir rol oynayacaktır. Aşağıdaki lemma ile $a_\eta(y)$ için bir tahmin verilmiştir.

Lemma 3.13 Sembol $a(x,y) \in H^m$ olsun. Bu durumda (3.65) ile tanımlanan $a_\eta(y)$ fonksiyonu $A_{\alpha,\beta,m,r,q}$ nun pozitif sabit olduğu eşitsizliği sağlar.

İspat. $r \in \mathbb{N}_0$ için (3.50) formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}(-y^2)^r a_\eta(y) &= \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(xy)(\Delta_{\alpha,\beta})^r[(x\eta)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(x\eta)a(x,\eta)]dx \\ &= \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(xy)\sum_{j=0}^{r} b_j x^{2j+2\alpha}(x^{-1}D_x)^{r+j}x^{2\beta-1} \\ &\times\ [(x\eta)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(x\eta)a(x,\eta)]dx\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.51) yi kullanarak

$$(-y^2)^r a_\eta(y) = \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy) \sum_{j=0}^{r} b_j x^{2j+2\alpha} \sum_{i=0}^{r+j} \binom{r+j}{i}$$
$$\times\, (x^{-1}D_x)^i a(x,\eta)(x^{-1}D_x)^{r+j-i}\big(x^{-(\alpha-\beta)}J_{\alpha-\beta}(x,\eta)\big)\eta^{\alpha+\beta}dx.$$

buluruz. Şimdi

$$(x^{-1}D_x)^m x^{-(\alpha-\beta)} J_{\alpha-\beta}(x\eta) = (-\eta)^m x^{-(\alpha-\beta)-m} J_{\alpha-\beta+m}(x\eta).$$

formülü kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$(-y^2)^r a_\eta(y) \leq \int_0^\infty \Bigg|(xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta} \sum_{j=0}^{r} b_j x^{2j+2\alpha}$$

$$\times \sum_{i=0}^{r+j} (x^{-1}D_x)^i a(x,\eta)\eta^{2r+2j-2i+2\alpha}(x\eta)^{-(\alpha-\beta)-r-j-i} J_{\alpha-\beta+r+j-i}(x\eta)\Bigg| dx$$

$$\leq y^{2\alpha} \int_0^\infty x^{2\alpha} \left|(xy)^{-(\alpha-\beta)} J_{\alpha-\beta}(x\eta)\right|$$

$$\times \left|\sum_{j=0}^{r} b_j x^{2j+2\alpha} \sum_{i=0}^{r+j} \binom{r+j}{i}((x^{-1}D_x)^i a(x,\eta)\eta^{2r+2j-2i+2\alpha})\right|$$

$$\times \left|(x\eta)^{-(\alpha-\beta)-r-j-i} J_{\alpha-\beta+r+j-i}(x\eta)\right| dx$$

$$\leq B_{\alpha,\beta} y^{2\alpha} \sum_{i=0}^{r} \sum_{i=0}^{r+j} \binom{r+j}{i} D'^{2r+2j-2i+2\alpha}(1+\eta)^m \int_0^\infty x^{2(\alpha-\beta)+1+2j}(1+x)^{-q} dx$$

$$\leq B_{\alpha,\beta} y^{2\alpha} \sum_{i=0}^{r} \sum_{i=0}^{r+j} \binom{r+j}{i} D'^{2r+2j-2i+2\alpha}(1+\eta)^m$$

$$\times B(2(\alpha-\beta)+2j+2, q-2(\alpha-\beta)-2j-2);$$

burada $q > 2(\alpha - \beta + j + 1)$ dir. Böylece her $r > 0$ için $|a_\eta(y)| \leq A_{\alpha,\beta,m,r,q}(1 + \eta)^{m+4r+2\alpha}(1 + y)^{2\alpha}(1 + y^{2r})^{-1}$ olacak biçimde sabit bir $A_{\alpha,\beta,m,r,q}$ vardır. Bu ispatı tamamlar.

Şimdi aşağıdaki teoremde pseudo diferensiyel tipi operatörü için integral gösterimini elde etmeye hazırız.

Teorem 3.14 Herhagi bir sembol $a(x, y) \in H^m$ için karşılık gelen operatör

$$h_{\alpha,\beta,a}(x) = \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy) \left[\int_0^\infty a_\eta(y) U_{\alpha,\beta}(\eta) \right] dy, u \in H_{\alpha,\beta}(I), \tag{3.67}$$

ile verilir, burada $U_{\alpha,\beta}(\eta) = (h_{\alpha,\beta,u}(\eta))$ ve içeriğindeki bütün integraller yakınsaktır.

İspat. Elimizde

$$a_\eta(y) = \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy)[(x\eta)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(x\eta)a(x, \eta)]dx$$

var ters formül ile

$$\int_0^\infty a_\eta(y)(xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy)dy = (x\eta)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(x\eta)a(x, \eta)$$

elde ederiz.

Böylece

$$\begin{aligned}
(h_{\alpha,\beta,u}(x)) &= \int_0^\infty (x\eta)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(x\eta)a(x, \eta)U_{\alpha,\beta}(\eta)dx \\
&= \int_0^\infty U_{\alpha,\beta}(\eta)d\eta \int_0^\infty a_\eta(y)(xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy)dy \\
&= \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy)dy \int_0^\infty U_{\alpha,\beta}(\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

$a_\eta(y)$ için (3.66) kullanarak integralin sırasında aşağıdaki değişiklikler yapılabilir ve son integralin ispatı yapılabilir. $U_{\alpha,\beta}(\eta) \in H_{\alpha,\beta}(I)$ olacak biçimde her $\ell > 0$ için $\left|U_{\alpha,\beta}(\eta) \leq C\eta^{2\alpha}(1 + \eta)^{-\ell}\right|$ dir.

Böylece

$$\begin{aligned}
|(h_{\alpha,\beta,u}(x))| &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty (xy)^{2\alpha} \left|(xy)^{-(\alpha-\beta)} J_{\alpha-\beta}(xy)\right| \\
&\times A_{\alpha,\beta,m,r,q}(1 + y)^{2\alpha}(1 + y^{2r})^{-1} \times (1 + \eta)^{m+4r+2\alpha} C\eta^{2\alpha}(1 + \eta)^{-\ell} d\eta dy \\
&\leq D'^{2\alpha}_{\alpha,\beta,m,r,q} \int_0^\infty (1 + y)^{2(\alpha-\beta)+1}(1 + y^{2r})^{-1}dy
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^\infty (1+\eta)^{2(\alpha-\beta)+m+4r-\ell+1} d\eta$$

dır. $(\alpha-\beta) \geq -1/2$ olduğunda ℓ ve r yeterince geniş seçilebildiği için integraller yakınsaktır. Bu da ispatı tamamlar.

3.8 L^1-Norm Eşitsizliği

Tanım 3.15 $G^s(\mathbb{R})$ uzayı $s \in \mathbb{R}$, bütün $u \in H_{\alpha,\beta}(I)$ elemanlarının kümesi olarak tanımlanır öyleki u ,

$$\|u\|_{G^s} = \left\|\eta^{s+2\beta-1} h_{\alpha,\beta}(u)\right\|_{L^1} < \infty \tag{3.68}$$

eşitsizliğini sağlar.

Lemma 3.16 $(\alpha-\beta) \geq -1/2$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için sabit bir $C_{m,r,q} > 0$ vardır öyleki

$$\left|A_\eta(y) \leq C_{m,r,q}(1+\eta)^m y^{2\alpha}(1+y^{2r})^{-1}\right|, \tag{3.69}$$

burada

$$A_\eta(y) = h_{\alpha,\beta}(x^{2\alpha}a(x,\eta)(y)). \tag{3.70}$$

İspat. Açık olarak

$$\begin{aligned}
(-y^2)^r A_\eta(y) &= \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy)(\Delta_{\alpha,\beta})^r [x^{2\alpha}a(x,\eta)]dx \\
&= \int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy) \sum_{j=0}^r b_j x^{2j+2\alpha}(x^{-1}D_x)^{r+j} a(x,\eta)dx.
\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
\left|(-y^2)^r A_\eta(y)\right| &\leq \int_0^\infty \left|(xy)^{\alpha+\beta} J_{\alpha-\beta}(xy)\right| \sum_{j=0}^r b_j x^{2j+2\alpha} \\
&\times D_{r+j,m,q}(1+\eta)^m(1+x)^{-q}dx \\
&\leq \int_0^\infty y^{2\alpha}x^{2\alpha}\left|(xy)^{-(\alpha-\beta)} J_{\alpha-\beta}(xy)\right| \sum_{j=0}^r |b_j|\, x^{2j+2\alpha} \\
&\times D_{r+j,m,q}(1+\eta)^m(1+x)^{-q}dx \\
&\leq \sum_{j=0}^r y^{2\alpha} B_{j,m,q}(1+\eta)^m \int_0^\infty (1+\eta)^{2(\alpha-\beta)+2j+1-q}dx.
\end{aligned}$$

$q > 2(\alpha-\beta+r+1)$ seçerek elde ederiz ki

$$|A_\eta(y)| \leq C_{r,m,q}(1+\eta)^m(1+y^{2r})^{-1}y^{2\alpha}$$

dir, burada $C_{r,m,q}$ pozitif bir sabittir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Şimdi asıl teoremimizi ispatlayalım.

Teorem 3.17 $(\alpha-\beta)\geq -1/2$ olsun. Bu durumda her $m\in\mathbb{N}_0$ ve $C>0$ için

$$\|h_{\alpha,\beta,a}(u)\|_{G^0}\leq C\sum_{\ell=0}^{m}\|(u)\|_{G^\ell}\,, u\in H_{\alpha,\beta}(I). \tag{3.71}$$

dir.

İspat. (3.67) teoreminden, (3.66) eşitliğinden (3.54) bağıntısından

$$\int_0^\infty (xy)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(xy)(h_{\alpha,\beta,a}u)(x)dx=\int_0^\infty a_\eta(y)U_{\alpha,\beta}(\eta)d\eta$$

dır. Böylece

$$\int_0^\infty y^{2\beta-1}(xy)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(h_{\alpha,\beta,a}u)(x)dx=$$
$$A\int_0^\infty \eta^{2\alpha}U_{\alpha,\beta}(\eta)d\eta\int_0^\infty z^{2\alpha}D(\eta,y,z)dz.$$
$$\int_0^\infty x^{2\alpha}a(x,\eta)(zx)^{\alpha+\beta}J_{\alpha-\beta}(zx)dx \tag{3.72}$$

olur, burada $A=\frac{1}{[2^{\alpha-\beta}\Gamma(\alpha-\beta+1)]^2}$ dır.

(3.69) den (3.72) e kadar yapılan tahminlerin uygulamaları şu sonucu verir. $\left|y^{2\beta-1}h_{\alpha,\beta}(h_{\alpha,\beta,a}u)(y)\right|$

$$C_{r,m,q}A\int_0^\infty(1+\eta)^m\eta^{2\alpha}U_{\alpha,\beta}(\eta)d\eta.\int_0^\infty z^{2(\alpha-\beta)+1}(1+z^{2r})^{-1}D(\eta,y,z)dz \tag{3.73}$$

$$D_{\alpha,\beta,m,r,q}\sum_{\ell=0}^{m}\tbinom{m}{\ell}\int_0^\infty\eta^{\ell+2\alpha}U_{\alpha,\beta}(\eta)d\eta.\int_0^\infty(1+z^{2r})^{-1}D(\eta,y,z)z^{2(\alpha-\beta)+1}2^{-(\alpha-\beta)}$$
$$\times(\Gamma(\alpha-\beta+1))^{-1}dz.$$

$f(z)=(1+z^{2r})^{-1}\in L^1(0,\infty)$; $r>0$ için oluşturalım ve $g(\eta)=2^{\alpha-\beta}\Gamma(\alpha-\beta+1)\eta^{\ell+2\beta-1}U_{\alpha,\beta}(\eta)\in L^1(0,\infty)$, için her $\ell=0,1,2,...,m$ bö ylece (3.56) ve (3.57) a göre aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$f(\eta,y)=\int_0^\infty f(\eta,y)D(\eta,y,z)z^{2(\alpha-\beta)+1}2^{-(\alpha-\beta)}(\Gamma(\alpha-\beta+1))^{-1}dz$$

ve

$$(f\#g)(y)=\int_0^\infty f(\eta,y)g(\eta)\eta^{2(\alpha-\beta)+1}2^{-(\alpha-\beta)}(\Gamma(\alpha-\beta+1))^{-1}d\eta$$

Şimdi (3.58); (3.62) uygulanarak

$$
\begin{aligned}
&\left\|y^{2\beta-1}h_{\alpha,\beta}(h_{\alpha,\beta,a}u(y))\right\|_{L^1}\\
\leq D_{\alpha,\beta,r,m,q}&\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\left\|\eta^{\ell+2\beta-1}U_{\alpha,\beta}(\eta)\right\|_{L^1}\cdot\left\|(1+z^{2r})^{-1}\right\|_{L^1}\\
&\leq C\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\left\|\eta^{\ell+2\beta-1}U_{\alpha,\beta}(\eta)\right\|_{L^1} \qquad (3.74)
\end{aligned}
$$

bulunur. Şimdi (3.57) eşitsizliğini (3.58) eşitsizliği takip eder ve böylece ispat tamamlanır.

3.9 Sonuçlar

Eğer (3.45) (3.46) ve (3.47) deki $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}$ ve $\beta = \frac{1}{4} - \frac{\mu}{2}$ alırsak sırayla aşağıdakileri elde ederiz.

$$P_\mu = P_{\mu,x} = x^{\mu+\frac{1}{2}}D_x x^{-\mu-\frac{1}{2}}$$

$$Q_\mu = Q_{\mu,x} = x^{-\mu-\frac{1}{2}}D_x x^{\mu+\frac{1}{2}}$$

ve

$$\Delta_\mu = \Delta_{\mu,x} = Q_\mu P_\mu = x^{-\mu-\frac{1}{2}}D_x x^{2\mu+1}x^{-\mu-\frac{1}{2}} = D_x^2 + \frac{(1-4\mu^2)}{x^2}$$

KAYNAKLAR

[1] Altenburg, G. *Bessel Transformation in Roümen von Grund funktionen uber dem interval* $\Omega = (0, \infty)$ *and derem Dual-raumen, Math Nachr.*, 108.**1982**, 197-208.

[2] Belhadj M. ; Betancor J. J. *Hankel transformation and Hankel convolution of tempered Beurling distributions, Rocky Mountain J. Math.,* 31(4).**2001**, 1171-1203.

[3] Betancor J. J. ; Merrero I. *Some properties of Hankel convolution operators, Canad. Math. Bull.*, 36(4).**1993**, 398-406.

[4] Haimo D. T. *Integral equations associated with Hankel convolutions, Trans. Amer. Math. Soc.*, 116. **1965**, 330-375.

[5] Koh E. L. ; Zemanian A. H. *The complex Hankel and I-transformations of Generalized functions, SIAM J. Appl. Math.*, 16 .**1968**, 945-957.

[6] Numata R. *Bessel functions, The Univercity of Maryland, September* 03. **2008**.

[7] Pathak R. S. ; Pandey P. K. *A class of Pseudo-Differential operators Associated with Bessel operators, J. Math. Anal., Appl.* 196. **1995**, 736-747.

[8] Pathak R. S. ; Pathak S. *Certain pseudo-differential operators associated with Bessel operator, Indian. J. pure.,appl. Math*, 31.**2000**,309-317.

[9] Pathak R. S. ; Prasad A. *Continuity of pseudo-differential operators associated with Bessel operator in some Gevrey spaces, appl. anal.*, 81(3).**2002**, 637-662.

[10] Prasad A. ; Singh V. K. *On Pseudo-Differential Operator Associated with Bessel Operator*, 2011.

[11] Rodino L. *Linear Partial Differential Operators in Gevrey spaces, World Scientific, Singapore*, 1993.

[12] Schwartz L. *Theorie des Distributions, Herman, Paris*, 1978.

[13] Taylor M. *Pseudodifferential Operators, September* 2008.

[14] Waphare B. B. *Pseudo-Differential Operator Associated with Bessel Operator-I*, 2010.

[15] Zaidman S. *On some simple estimates for Pseudo-differential operators, J. Math. Anal., Appl.*, 39 .**1972**, 202-207.

[16] Zaidman S. *Distributions and Pseudo-Differential operators, Logman, Essex, England*, 1991.

[17] Zaidman S. *Distributions and Pseudo-differential Operators, Longmann Esex, England*, 1991.

[18] Zemanian A. H. *Generalised Integral Transformations, Interscience, New York*, 1968.

ÖZGEÇMİŞ

22 Agustos 1979 Kırşehir ilinde doğdu. İlkokulu Aşıkpaşa, ortaokulu Sırrı Kardeş ortaokulunda, Mehmet Akif Ersoy Y.D.A lisesinde okudu. 2002 de Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2002 yılından bu yana M.E.B'na bağlı okullarda öğretmenlik yapmaya devam ediyor. Evli ve bir çocuk babasıdır.