



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**HARMONİK ANALİZDE
TRIEBEL-LIZORKIN-LORENTZ UZAYLARI
VE İNTEGRAL OPERATÖRLERİ**

Sezgin GİRGINOL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR

2025



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



HARMONİK ANALİZDE TRIEBEL-LIZORKIN-LORENTZ UZAYLARI VE İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Sezgin GİRGINOL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

I.DANIŞMAN

Prof. Dr. Ali AKBULUT

II.DANIŞMAN

Dr. Süleyman ÇELİK

KIRŞEHİR

2025

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAYI

Bu Yüksek Lisans Tezi 16/07/2025 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Değerlendirilmiş ve Oy Birliği ile Kabul Edilmiştir.

Prof. Dr. Ali AKBULUT (I.Danışman)

Prof. Dr. Vagif S. GULIYEV (Jüri)

Prof. Dr. Ahmet EROĞLU (Jüri)

Bu Tez Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında hazırlanmış ve onaylanmıştır.

Tez No:

Prof. Dr. Ümit DEMİRAL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, tablo ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŐMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etięi Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduęum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettięimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

16/07/2025

Sezgin GİRĞİNOL

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	I
TEŞEKKÜR	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
2.1. Ön Bilgiler	3
2.2. Bazı Elemanter Eşitsizlikler	8
2.3. Lebesgue Uzayları	14
2.3.1. $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı	14
2.3.2. Zayıf Lebesgue Uzayı	20
2.3.3. (p, q) Tipli Operatör	21
2.4. Sobolev ve Besov Uzayı	23
2.4.1. Sobolev Uzayı	23
2.4.2. Sobolev-Slobodeckij Uzayları	26
2.4.3. Besov Uzayları	27
2.5. Lorentz ve Besov-Triebel-Lizorkin Uzayları	29
2.5.1. Lorentz Uzayları	29
2.5.2. Besov-Triebel-Lizorkin Uzayları	33
3. MATERYAL VE METOT	37
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	39
4.1. Harmonik Analizde Bazı İntegral Operatörleri	39
4.1.1. Maksimal Fonksiyonlar	40
4.1.2. Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü	40
4.1.3. Kesirli İntegral Operatörleri	46
4.1.4. Riesz Potansiyeli	48
4.1.5. Singüler İntegral Operatörleri	52

4.1.6. Calderón-Zygmund Singüler İntegral Operatörleri	55
4.1.7. Fourier Çarpanları ve Kaldırmalar	63
4.2. Triebel-Lizorkin-Lorentz Uzayları Tanımı ve Bazı Özellikleri	64
4.2.1. Triebel-Lizorkin-Lorentz Uzayları	64
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	77
KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	83

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunun her bir aŐamasında büyük emekleri olan her ihtiyaç duyduğumda değerli fikirleri ve düŐünceleriyle bana ıŐık tutan kıymetli danıŐmanım Prof. Dr. Ali AKBULUT'a, matematiğe olan sevgisi ve çalıŐma disipliniyle kendisini örnek aldığım sayın Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e, ikinci tez danıŐmanım sayın Dr. Süleyman ÇELİK'e, ayrıca sayın Hamit aĐlar ÇALIŐGAN'a ve her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen aileme teŐekkürlerimi bir borç bilirim .

Temmuz, 2025

Sezgin GİRGINOL

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HARMONİK ANALİZDE TRIEBEL-LIZORKIN-LORENTZ UZAYLARI VE İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Sezgin GİRGINOL

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

I.Danışman: Prof. Dr. Ali AKBULUT

II.Danışman: Dr. Süleyman ÇELİK

Yıl: 2025, Sayfa: 83

Jüri: Prof. Dr. Ali AKBULUT

Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

Prof. Dr. Ahmet EROĞLU

Bu yüksek lisans tezinde harmonik analizde Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayları ve integral operatörleri incelenecektir. İlk bölümde, araştırmanın önemi, kapsamı ve amacı ifade edilmiş, çalışmamızın bilime sağladığı katkılar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamız ile ilgili bazı temel tanımlara ve harmonik analizdeki bazı fonksiyon uzaylarının tanım ve özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, tez konusu ile ilgili materyal ve metotlar hakkında kısa bilgi verilmiştir. Dördüncü bölüm iki kesimden oluşmaktadır. İlk kesimde, harmonik analizde bazı integral operatörlerinin tanım ve özelliklerine, ikinci kesimde ise Triebel-Lizorkin-Lorentz uzaylarının tanımları ve kaldırma özellikleri, Fourier çarpanları ve ayrık karakterizasyonlar gibi bazı temel özelliklerini incelenmiştir. Ayrıca n boyutlu Öklid uzayında tanımlanan Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayları arasında bazı gömme teoremleri verilmiştir. Son bölümde ise tez konusunun araştırılmasındaki amaç ve hedefi hakkında kısaca bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sobolev uzayı, Besov uzayı, Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayı, Maksimal fonksiyon, Singular integral operatör, Riesz potansiyeli.

ABSTRACT

MASTER IS THESIS

TRIEBEL-LIZORKIN-LORENTZ SPACES AND INTEGRAL OPERATORS ON HARMONIC ANALYSIS

Sezgin GİRGINOL

KIRŞEHİR AHI EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

I.Supervisor: Prof. Dr. Ali AKBULUT

II.Supervisor: Dr. Süleyman ÇELİK

Year: 2025, Pages: 83

Juries: Prof. Dr. Ali AKBULUT

Prof. Dr. Vagif S. GULIYEV

Prof. Dr. Ahmet EROĞLU

In this master's thesis, Triebel-Lizorkin-Lorentz spaces and integral operators in harmonic analysis will be investigated. In the first chapter, the importance, scope and purpose of the research are expressed and information is given about the contributions of our study to science. In the second chapter, some basic definitions related to our study and the definitions and properties of some function spaces in harmonic analysis are given. In the third chapter, brief information is given about the materials and methods related to the thesis topic. The fourth chapter consists of two sections. In the first section, the definitions and properties of some integral operators in harmonic analysis are examined, and in the second section, the definitions of Triebel-Lizorkin-Lorentz spaces and some of their basic properties such as lifting properties, Fourier multipliers and discrete characterizations are examined. In addition, some embedding theorems between Triebel-Lizorkin-Lorentz spaces defined in n dimensional Euclidean space are given. In the last chapter, the aim and target of the research of the thesis topic are briefly mentioned.

Keywords: Sobolev space, Besov space, Triebel-Lizorkin-Lorentz space, Maksimal function, Singular integral operator, Riesz potential.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar Açıklama

(X, \mathcal{A}, μ)	: Ölçü Uzayı
$L_p(\mathbb{R}^n)$: Lebesgue Uzayı
$WL^p(\mathbb{R}^n)$: Zayıf Lebesgue Uzayı
$W^{k,p}(\mathbb{R})$: Sobolev Uzayı
H^k	: Hilbert Uzayı
$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$: Besov Uzayı
H_p^s	: Bessel Potansiyel Uzayı
W_p^s	: Sobolev-Slobodeckij Uzayı
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Schwartz Fonksiyon Uzayı
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: Tempered Dağılım Uzayı
$L_{p,r}(\Omega, X)$: Lorentz Uzayı
$B_{pq,r}^{s,\varphi}$: Besov-Lorentz Uzayı
$F_{p,q}^{s,r}$: Triebel-Lizorkin-Lorentz Uzayı
$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$: Triebel-Lizorkin Uzayı
$Mf(x)$: Maksimal fonksiyon
$I_\alpha(f)(x)$: Riesz Potensiyeli

1. GİRİŞ

Harmonik analizde fonksiyon uzaylarının modern teorisi S.L. Sobolev, A. Zygmund, A. Calderon, E.M. Stein, O.V. Besov, P.I. Lizorkin, H. Triebel, V.I. Burenkov, V.S. Guliyev gibi ünlü bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bu teori fonksiyonel ve reel analizin bir çok önemli konusuna ve diğer matematiksel disiplinler içinde kısmi diferensiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi bir çok alanda başarılı bir şekilde uygulanmıştır. İlk olarak F. Riesz [31] tarafından Bourbaki grubunda tanıtılmasına rağmen $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayları 1958 yılında Fransız matematikçi H. Lebesgue'in adıyla matematik dünyasına girmiştir. Banach uzayları ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını oluşturan $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayları, harmonik analizin problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, mühendislik, finans ve ayrıca diğer disiplinlerde bir çok uygulama alanları vardır.

Örneğin integral ve diferensiyel operatörlerin farklı norm eşitsizlikleri fonksiyon uzaylarının teorisinde ve onların uygulamalarında büyük öneme sahiptir. Ayrıca integral operatörlerinin $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında sınırlılığının incelenmesi bazı uygulama alanlarında önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle diferensiyellenebilir fonksiyonların klasik uzaylarının teorisi (Sobolev uzayları, Besov uzayları gibi vb uzaylar) bu eşitsizlikler üzerine esas olarak inşa edilirler. Bunun yanısıra son yıllarda integral ve diferensiyel operatörlerinin norm eşitsizlikleri ile ilgili bir çok zor problem çözülmüştür. Bu sonuçlar fonksiyonel analizin özellikle geniş olarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulamaları için temel araçlar olmuştur.

Harmonik analizin klasik operatörlerinin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki sınırlılığı yoğun bir şekilde birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. 1951 yılında G.G. Lorentz [24, 25] tarafından tanımlanmış olan $L(p, q)$ Lorentz uzayları harmonik analizin önemli konularından biridir. Lorentz uzayları harmonik analizdeki bazı iç problemlerin çözülmesinde, fizik alanında ve matematiksel kısmi türevlerin son yıllarda çözülmesinde önemli bir alan oluşturmaktadır. Ayrıca integral operatörlerinin Lorentz uzaylarında sınırlılığının incelenmesi bazı uygulama alanlarında önemli bir yer tutmaktadır.

Son yıllarda, $F_{p,q}^{s,r}$ Triebel-Lizorkin-Lorentz uzaylarının kısmi diferensiyel denklemlerde önemli bir yeri vardır. 2005 yılında Q. Yang, Z. Cheng ve L. Peng [52] tarafından, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p, q < \infty$ ve $1 \leq r \leq \infty$ olmak üzere $F_{p,q}^s$ uzayları ve $L_{p,r}$ Lorentz uzayları tanıtıldı. Dolaylı olarak $F_{p,q}^{s,r}$ uzayları, 1978 yılında H. Triebel [44] tarafından incelendiği görülmektedir. Q. Yang, Z. Cheng ve L. Peng [52] tarafından, $F_{p,q}^{s,r}$ uzaylarında dalgacık teorisi aracılığıyla, özellikle kısmi diferensiyel denklemlerin uygulamaları için ve

en önemlisi Triebel-Lizorkin uzaylarının bir reel interpolasyon ölçeği olduğu kanıtlanmıştır. 2011 yılında da Z. Xiang ve W. Yan [50] tarafından, Triebel-Lizorkin-Lorentz uzaylarını kısmi diferensiyel denklemler bağlamında ele aldılar ve yarı jeostrofik bir denklemin lokal iyi pozluluğunu belirlediler.

$F_{p,q}^{s,r}$ ölçeği birçok önemli fonksiyon uzayı içerir: $r = p$ olmak üzere, $q = 2$ için H_p^s Bessel potansiyel uzaylarını elde edildi. Bununla birlikte sırasıyla $s \notin \mathbb{Z}$ durumunda $q = p$ için ve $s \in \mathbb{Z}$ durumunda $q = 2$ için W_p^s Sobolev-Slobodeckij uzayları elde edildi. Özellikle, $s = 0$ olması durumunda, L_p Lebesgue uzaylarını ve Lorentz uzaylarını $L_{p,r} = F_{p,2}^{0,r}$ elde edildi.

Bu yüksek lisans tezinde, son yıllarda birçok matematiksel alanlarda önemi olan harmonik analizde bazı integral operatörleri, Triebel-Lizorkin-Lorentz uzaylarının tanımları ve kaldırma özellikleri, Fourier çarpanları ve ayrık karakterizasyonlar gibi bazı temel özelliklerini incelenmiştir. Ayrıca n boyutlu Öklid uzayında tanımlanan Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayları arasında bazı gömmeler verilmiştir.

Bu tez konusunu bir başlangıç kabul edilerek, "Harmonik Analizde Triebel-Lizorkin-Lorentz Uzayları ve İntegral Operatörleri" konusunda daha ileri düzeyde çalışmalar yapabilmek için bir temel oluşturulması hedeflenmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, tez konusunda geçen klasik analiz, fonksiyonel analiz, reel analiz ve topoloji ile ilgili bazı temel kavramlara ve harmonik analizdeki bazı fonksiyon uzayları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

2.1. Ön Bilgiler

Bu kısımda, tezde geçen bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. X , \mathbf{K} cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbf{K}$ için

$$(N_1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N_2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (Üçgen Eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir [4].

Tanım 2.2. (X, d) bir metrik uzay ve A , X in boş olmayan bir altkümesi olsun.

$$d(A) = \sup d(x, y) : x, y \in A$$

sayısına A kümesinin çapı denir. $d(A) < \infty$ ise A ya X de sınırlı bir küme denir. X içindeki x_n dizisinin terimlerinden oluşan küme X de sınırlı ise (x_n) dizisine X de sınırlı bir dizi denir [4].

Tanım 2.3. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni \forall x \in X$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ oluyorsa f dönüşümü x_0 noktasında süreklidir denir [4].

Teorem 2.4. X , \mathbf{K} cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı her norm dönüşümü X vektör uzayı üzerinde süreklidir [4].

Teorem 2.5. Bir \mathbf{K} cismi üzerinde tanımlı herhangi bir X normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir [4].

Tanım 2.6. (Denk Norm) X , \mathbf{K} cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in X$ için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk normlar denir [35].

Tanım 2.7. $A \subset X$ kümesinin bütün limit noktalarından oluşan A' kümesi ile A nın noktalarından oluşan kümeye A nın kapanışı adı verilir ve \bar{A} ile gösterilir. $\bar{A} = A$ ise A kümesine X uzayında kapalı bir küme adı verilir [4].

Tanım 2.8. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının $\bar{A} = X$ biçimindeki bir $A \subset X$ alt kümesine X içinde yoğun küme adı verilir [4].

Tanım 2.9. (Cauchy Dizisi) $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir dizi olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, bir Cauchy dizisidir denir [35].

Lemma 2.10. X , metrik uzayında bir Cauchy dizisi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve alt dizisinde $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ olsun. Eğer alt dizi X uzayında $x_{n_k} \rightarrow x$ ise $x_n \rightarrow x$ olur [21].

Tanım 2.11. (Banach Uzayı) Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına Banach Uzayı adı verilir [4].

Tanım 2.12. (Düzenli Sınırlılık) $(C(\Omega; K), \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayının, E alt kümesi verilmiş olsun. Eğer $\forall x \in E$ ve $\forall t \in \Omega$ için $|x(t)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa E kümesi düzenli sınırlıdır denir [4].

Tanım 2.13. (Dual Norm) X normlu uzayının X' dual normu, her bir $x' \in X'$ için

$$\|x', X'\| = \sup \{|x'(x)| : \|x; X\| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır [1].

\mathbb{C} tam olduğunda bu normun neden olduğu topoloji ile X' bir Banach uzayıdır (X Banach uzayı olsun ya da olmasın) ve X in normlu duali olarak adlandırılır.

Tanım 2.14. (Gömme) X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun.

$$D_T(I) = \mathfrak{R}(I) = X,$$

yani $\forall x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde Y de en az bir eleman olmak üzere

$$I : X \rightarrow Y$$

ile verilen operatöre birim operatörü denir. Bu operatör sürekli ise yani her $x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti var ise X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir. I operatörüne X uzayından Y uzayına bir gömme operatörü denir. Alternatif olarak bazen X uzayının Y uzayına bir sürekli (veya sınırlı) gömmesi mevcuttur denir.

$$\|I\|_{X \rightarrow Y} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

şeklinde gösterilen bu sayıya da I nin operatör normu denir. Eğer X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına bir sürekli gömme mevcut ise

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$X \hookrightarrow Y \text{ ve } Y \hookrightarrow X$$

aynı anda oluyorsa,

$$X \Leftrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir ve eğer bu gömme operatörü kompakt ise de

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir [28].

Tanım 2.15. (Cebir ve σ -Cebir) X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun.

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A}, E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, \dots, n, \{E_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{A}$

şartları sağlanıyor ise bu durumda \mathcal{A} sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir. Eğer (iii) şartı yerine

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \quad (2.1)$$

şartı alınırsa \mathcal{A} cebirine bir σ -cebir denir [32].

Teorem 2.16. $\emptyset \neq \mathcal{K} \in X$ olsun. \mathcal{K} sınıfını kapsayan σ -cebirlerinin bir en küçüğü vardır [32].

Tanım 2.17. (Borel Cebiri) Bir \mathcal{K} sınıfını kapsayan σ -cebirlerinin en küçüğüne \mathcal{K} nin ürettiği (veya doğurduğu) σ -cebiri denir ve $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. \mathbb{R}^n deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ -cebirine Borel cebiri denir ve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nin herbir elemanına Borel kümesi denir [32].

Tanım 2.18. (Ölçülebilir Fonksiyon) (X, \mathcal{A}) bir ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in R$ için

$$f^{-1}([\alpha, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir [32].

Tanım 2.19. (Ölçü) (X, \mathcal{A}) bir ölçülebilir uzay olsun. \mathcal{A} üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü fonksiyonu (veya ölçü) adı verilir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ oluyorsa μ ye sonlu ölçü adı verilir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip

sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsüne σ -sonlu denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye olasılık ölçüsü adı verilir [32].

Tanım 2.20. (Ölçü Uzayı) X , boştan farklı bir küme, $\mathcal{A} \subset P(X)$ de X in bir σ -cebiri ve $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ de \mathcal{A} üzerinde bir ölçü olsun. (X, \mathcal{A}) ikilisine bir ölçülebilir uzay ve (X, \mathcal{A}, μ) üçlüsüne de bir ölçü uzayı denir. \mathcal{A} daki herbir eleman da ölçülebilir küme olarak adlandırılır [32].

Tanım 2.21. (X, \mathcal{A}, μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme hemen her yerde doğrudur denir [32].

Tanım 2.22. (X, \mathcal{A}, μ) bir σ -sonlu ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$E := \{x \in A : V(x) \text{ doğru değildir}\}$$

ile gösterilen bir küme

$$E \subset \mathcal{A} \text{ ve } \mu(E) = 0$$

şartlarını sağlıyorsa $V(x)$, A üzerinde (veya hemen her $x \in A$ için) μ ile bağlantılı olarak hemen her yerde (veya h.h.y) doğrudur denir [28].

Teorem 2.23. (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) (X, \mathcal{A}, μ) bir ölçü uzayı, $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve f, f_1, f_2, \dots de X üzerinde \mathcal{A} -ölçülebilir $[-\infty, +\infty]$ değerli fonksiyonlar olsun. Eğer h.h. x için

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$
- (b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$

ise bu takdirde f ve f_n integrallenebilirdir ve

$$\lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{2.2}$$

dır [13].

Lemma 2.24. (Fatou Lemması) (X, \mathcal{A}, μ) bir ölçü uzayı ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

dır [13].

Tanım 2.25. (Yarı-Norm) Bir X vektör uzayında bir ön-norm veya yarı-norm, dejenerasyon olmaması dışında bir normun özelliklerine sahip bir p fonksiyonu gibi tanımlanır:

$p(x) = 0$ olması durumu $x \neq 0$ olmasını gerektirmez. $\dim X < \infty$ ise bu durumda $p(AB) \leq p(A)p(B)$ koşuluna bağlı olarak $L(x)$ üzerinde p sıfır olmayan bir ön-normu gerçekten ortaya çıkan bir norm olmasıdır (çünkü bu durumda $L(x)$ önemsiz olmayan iki taraflı iddialara sahip değildir). Ancak sonsuz boyutlu normlu uzaylar için bu böyle değildir. Eğer X, C üzerinde bir Banach cebiri ise bu durumda

$$|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} \quad (2.3)$$

spektral yarıçapın bir yarı-norm olması için gerek ve yeter koşul X de düzgün sürekli olmasıdır ve bu koşul, radikal değişmeli olduğundan bölüm cebirinin gerçekliğine eşdeğerdir.

Bir E vektör uzayında $\forall x, y \in E$ ve keyfi λ skalerleri için sonlu negatif olmayan bir p fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar:

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x), \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (2.4)$$

[20]. Eğer $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ise bu durumda yarı-norma norm denir, fakat $x \neq 0$ ise bu durumda yarı norm denir. Bir p yarı-normu bir vektör uzayında tanımlanmış ve f fonksiyonu $|f(x)| \leq p(x)$ koşulunu sağlayan bir alt uzayında lineer bir fonksiyon ise bu durumda f fonksiyonu her uzaya genişletilebilir, böylece Hanh-Banach teoremi ile aynı koşulu sağlar.

Matematiksel analizde, elemanları konveks kümeler olan bir 0-komşuluk temelinin bulunduğu ayrılabilir topolojik vektör uzaylarıyla (bkz. topolojik vektör uzayı) sıklıkla karşılaşılır. Bu tür uzayların yerel olarak dışbükey olduğu söylenir. Yerel konveks bir uzayda açık konveks 0-komşuluk $\{x : p(x) < 1\}$ biçimindedir, burada p sürekli bir yarı-normdur. Bununla birlikte, matematiksel analizde, üzerinde önemsiz olmayan yarı-normların bulunmadığı topolojik vektör uzayları (metriklenebilir topolojiye sahip uzayları dahil) ile de karşılaşılır. Bu tür uzayların en basit örnekleri $L_q(0, 1)$, $0 < q < 1$.

X boştan farklı bir küme olmak üzere X kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan küme $P(X)$ ile gösterilmiştir.

2.2. Bazı Elemanter Eşitsizlikler

Bu kısımda kullanılacak bazı elemanter eşitsizlikler verilmiştir.

Lemma 2.26. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $p \geq 1$ olsun.

$$|\alpha + \beta|^p \leq 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p)$$

dır [21].

İspat. Kabul edelim ki

$$|\alpha| \geq |\beta|$$

olsun.

$$z = \frac{\alpha}{\beta}$$

ve

$$|z| \geq 1$$

olmak üzere

$$\left| \frac{z+1}{2} \right|^p \leq \frac{|z|^p + 1}{2}$$

olduğunu ispatlayalım. Burada belirtelim ki,

$$\left| \frac{z+1}{2} \right| \leq \frac{|z|+1}{2}$$

dır.

$t = |z| \geq 1$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1+t}{2} \right)^p \leq \frac{1+t^p}{2}$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir.

Yani bu eşitsizlik bir değişkenli bir analiz problemidir.

$$f(t) = \frac{1+t^p}{2} - \left(\frac{1+t}{2} \right)^p$$

olarak alınırsa,

$$f'(t) = \frac{pt^{p-1}}{2} - \frac{p(1+t)^{p-1}}{2^p}$$

dır. Böylece $\forall t \geq 1$ için

$$f'(t) = \frac{pt^{p-1}}{2} - \frac{p(1+t)^{p-1}}{2^p} > 0$$

dır.

O halde, $\forall t \geq 1$ için $f(t)$ artan ve $f(1) = 0$ dır. Dolayısıyla $f(t) \geq f(1) = 0$ olup $t = |z| \geq 1$ olduğundan

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^p \leq \frac{1+t^p}{2}$$

elde edilir. ■

Lemma 2.27. $\lambda \in (0, 1)$ olsun. Bu durumda

$$x^\lambda \leq (1 - \lambda) + \lambda x$$

dir [21].

İspat. $f(x) = (1 - \lambda) + \lambda x - x^\lambda$ olsun.

Böylece;

$$f'(x) = \lambda - \lambda x^{\lambda-1} = 0 \iff \lambda(1 - x^{\lambda-1}) = 0$$

olup $x = 1$ noktası f fonksiyonunu bir kritik noktasıdır. O halde f fonksiyonu $x = 1$ noktasında minimum değerini alır. Yani

$$f(1) = 0 \leq (1 - \lambda) + \lambda x - x^\lambda$$

olduğundan

$$x^\lambda \leq (1 - \lambda) + \lambda x.$$

■

Lemma 2.28. $a, b \geq 0$ ve $\lambda \in (0, 1)$ olsun. $a = b$ alınırsa

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b$$

dir [21].

İspat. $a = 0$ veya $b = 0$ durumunda eşitsizlik doğrudur.

$a, b > 0$ olsun. Lemma 2.27. deki

$$x^\lambda \leq (1 - \lambda) + \lambda x; \quad \lambda \in (0, 1)$$

eşitsizliğinde $x = \frac{a}{b}$ seçilirse

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\lambda \leq (1 - \lambda) + \lambda \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow a^\lambda b^{-\lambda} \leq (1 - \lambda) + \lambda(ab^{-1})$$

$$\Rightarrow a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b$$

ispatlanmış olur. ■

Tanım 2.29. X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve

$$A : X \rightarrow Y$$

operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X 'in bir alt uzayı ve

$$\forall x, y \in D(A) \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in K$$

için $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ ise A operatörüne lineer operatör denir [4].

Tanım 2.30. X ve Y normlu uzayları ve $A : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakiler sağlandığında A operatörü $x_0 \in D(A)$ noktasında süreklidir denir.

(a) $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni \forall x \in D(A) \|x - x_0\| < \delta$ iken

$$\|A(x) - A(x_0)\| < \epsilon$$

dir.

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(A)$ dizisi için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(x_n) = A(x_0)$$

dir. Burada $A : X \rightarrow Y$ operatörünün $x_0 \in D(A)$ noktasında sürekli olması $x \rightarrow x_0$ iken $A(x) \rightarrow A(x_0)$ olması demektir [4].

Tanım 2.31. Her $1 < p < \infty$ için

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

bağıntısı ile q Lebesgue eşleniğini tanımlarız. Başka bir ifadeyle,

$$q = \frac{p}{p-1}$$

dır [21].

Teorem 2.32. (Young eşitsizliği) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a, b > 0$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (2.5)$$

eşitsizliği sağlanır [28].

Tanım 2.33. Bir $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ negatif olmayan α_j tamsayılarının sıralı n -lisine katlı -indis denir.

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ dir. Eğer α ve β iki katlı -indis ise $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ dir.

Benzer şekilde, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferensiyel operatördür. Özel olarak $D^{(0, \dots, 0)} f = f$ dir. Bir boyutlu durumda $D^\alpha, \frac{d}{dx}$ e indirgenir.

Örnek olarak \mathbb{R}^3 te $\alpha = (2, 0, 5)$ ise

$$D^\alpha = \frac{\partial^7}{\partial x_1^2 \partial x_3^5} = D_1^2 D_3^5$$

biçimindedir [1].

Teorem 2.34. (Plancherel Teoremi) $L^2(\mathbb{R}^n)$ den $L^2(\hat{\mathbb{R}}^n)$ e aşağıdaki özelliklere sahip tek bir \mathcal{F} operatörü vardır öyle ki;

(a) $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ için $\mathcal{F}f = \hat{f}$

(b) $\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ [53].

Teorem 2.35. (Calderón-Zygmund Ayırıştırma Teoremi) f, \mathbb{R}^n üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\lambda > 0$ sabiti için , ayırık ikili küplerden oluşan $\{Q_j\}$ dizisi ve g, b fonksiyonları mevcuttur. Öyle ki;

(i) $f(x) = g(x) + b(x)$;

(ii) hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $|g(x)| \leq 2^n \lambda$;

(iii) $1 < p < \infty$ ise $\|g\|_p^p \leq C \lambda^{p-1} \|f\|_1$;

(iv) hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j Q_j$ için $b(x) = 0$;

(v) $\int_{Q_j} b(x) dx = 0, j = 1, 2, \dots$

İspat. f fonksiyonu ve $\lambda > 0$ sabiti için \mathbb{R}^n üzerinde Calderon-Zygmund ayrışımı uygulandığında, ayırık ikili küplerden oluşan bir $\{Q_j\}$ dizisi elde ederiz öyle ki

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j Q_j \text{ için } f(x) \leq \lambda ;$$

$$\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1;$$

ve

$j = 1, 2, \dots$ ise

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \leq 2^n \lambda$$

Şimdi $g(x)$ ve $b(x)$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx & , \quad x \in Q_j, j = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

ve

$$b(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j Q_j \\ f(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx & , \quad x \in Q_j, j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Böylece $f(x) = g(x) + b(x)$ olur ve b nin tanımına göre , hem (iv) hem de (v) sağlanır. Öte yandan , g nin tanımı gereği (ii) sağlanır. Son olarak, eğer $F = \mathbb{R}^n \cup_j Q_j$ gösterilirse, o zaman

$$\begin{aligned}
\|g\|_p^p &= \sum_j \int_{Q_j} g(x)^{p-1} g(x) dx + \int_F g(x)^{p-1} g(x) dx \\
&\leq \sum_j (2^n \lambda)^{p-1} \int_{Q_j} g(x) dx + \lambda^{p-1} \int_F g(x) dx \\
&= (2^n \lambda)^{p-1} \sum_j \int_{Q_j} g(x) dx + \lambda^{p-1} \int_F f(x) dx \\
&\leq C \lambda^{p-1} \|f\|_1
\end{aligned}$$

dir ve Teorem 2.4.7 ispatı tamamlanır. ■

2.3. Lebesgue Uzayları

Fonksiyonel analizde, Banach uzayı'nın ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını Lebesgue uzayı ($L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı) oluşturur. $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayının, harmonik analizin önemli konularından biri olmakla beraber hem harmonik analizin iç problemlerinin çözülmesinde, hem de kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve diğer disiplinlerde uygulamaları vardır.

L_p uzayı, sonlu boyutlu vektör uzayı için p -normlu genelleşmesi kullanılarak tanımlanmış fonksiyon uzayıdır. Bourbaki grubuna göre, ilk olarak 1910 yılında Frigyes Riesz [31] tarafından çalışılmasına rağmen 1958 yılında Fransız matematikçi Henri Lebesgue'nin [23] adını alır ve Lebesgue uzayları olarak ifade edilir. L_p uzayı fonksiyonel analiz'de Banach uzayı'nın ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını oluşturur. Lebesgue uzayı'nın fizik, istatistik, finans, mühendislik gibi önemli uygulamalarında kullanılmaktadır.

2.3.1. $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı

Tanım 2.36. $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$, \mathbb{R}^n de vektörler olmak üzere

$$\mathbb{R}^n, n\text{-boyutlu Öklidyen uzayı } (x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j \text{ iç çarpımı ile donatılmış } \mathbb{R}^n,$$

n -boyutlu reel uzayıdır. Burada x vektörünün mutlak değeri $|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır.

\mathbb{R}^n üzerinde $dx = dx_1 \dots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsü ve \mathbb{R}^n uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f(x) dx = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

ile gösterilir.

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterelim.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx$$

integralinin hesabı için;

$$0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi \text{ olmak üzere}$$

$$x_1 = r \cos \theta_1$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

...

$$x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1}$$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \theta_j)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} f(r) J(r, \theta) dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \theta_j)^{n-1-j} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \omega_{n-1} \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr \end{aligned}$$

elde edilir, burada ω_{n-1} , birim kürenin yüzey alanıdır.

Genel olarak

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r \sin \theta_1, \dots, r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1}) r^{n-1} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r, \theta) r^{n-1} dr d\sigma\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. dx hacim elemanı $dx = r^{n-1} dr d\sigma$ biçiminde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür.

Ayrıca;

$$|Q(x, r)| = \int_{Q(x, r)} dy = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; |x-y| < r\}} dy = \int_{\{z \in \mathbb{R}^n; |z| < r\}} dz = |Q(0, r)|$$

ve

$$\begin{aligned}|Q(x, r)| &= \int_{Q(x, r)} dz = \int_0^r \int_{S^{n-1}} t^{n-1} dt d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^r t^{n-1} dt \\ &= |S^{n-1}| \frac{r^n}{n} = \omega_n r^n.\end{aligned}$$

dır [36].

Tanım 2.37. (X, \mathcal{A}, μ) bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı veya Ω bölgesinde p . kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_p} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

şeklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_{L_p}$ gösterimine f fonksiyonunun $L_p(\mathbb{R}^n)$ -normu denir.

Ω bölgesinde hemen her x için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna hemen hemen her yerde sınırlıdır denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin Ω bölgesindeki esas supremumu (esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf \{K : |f(x)| \leq K \quad \text{h.h. } x \in \Omega\}$$

şeklinde gösterilir. Ω bölgesindeki hemen hemen her yerde sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ şeklinde gösterilir. Buna göre bir f fonksiyonunun L^∞ -normu

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

olarak tanımlanır [28].

Lemma 2.38. (Young eşitsizliği) $1 < p, p' < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $\forall a, b > 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{2.6}$$

olur [28].

İspat. $a = 0$ veya $b = 0$ olması durumunda (2.6) ifadesi doğrudur.

Kabul edelim ki $a > 0$ ve $b > 0$ olsun. $f(x) = \exp x$ fonksiyonunun konveks olmasından

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln(ab)) \\ &= \exp(\ln a + \ln b) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)\right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp(\ln(a^p)) + \frac{1}{q} \exp(\ln(b^q)) \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

■

Lemma 2.39. (Hölder eşitsizliği) $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L^p, g \in L^q$ ise $fg \in L^1$ olur ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \quad (2.7)$$

eşitsizliği sağlanır [28].

İspat. f veya g fonksiyonlarından biri hemen hemen her yerde sıfır olması durumunda (2.7) eşitsizliğinin ispatı aşıkardır.

(2.6) eşitsizliğinde (Young eşitsizliği)

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}$$

seçilirse

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{(\|f\|_{L^p})^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{(\|g\|_{L^q})^q}, \quad \forall x \in \Omega \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olduğundan (2.8) eşitsizliğinin her iki tarafının integrali alınması ile (2.7) elde edilir. ■

Teorem 2.40. (Minkowski eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$ için eğer $f, g \in L^p$ ise $(f + g) \in L^p$ ve

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad (2.9)$$

dir [28].

İspat. $f + g = 0$ olması durumunda ispat aşıkardır. Kabul edelim ki $f + g \neq 0$ olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{L^p} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x) + g(x)|) |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)| + |g(x)|) |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right) \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})} dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \cdot \frac{\|f + g\|_{L^p}}{\|f + g\|_{L^p}} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})
\end{aligned}$$

olup (2.9) eşitsizliği elde edilir. ■

Hölder eşitsizliği ve Lebesgue integralinin özellikleri gözönünde bulundurulduğunda $1 \leq p < \infty$, L^p uzayının bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla birlikte f fonksiyonunun L^p uzayının $\|f\|_{L^p}$ normu altında;

1. $\|f\|_{L^p} \geq 0$
2. $\|f\|_{L^p} = 0$ ise h.h.h. $f(x) = 0$
3. $\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

özellikleri sağlandığından $1 \leq p < \infty$, L^p bir normlu uzaydır.

Tanım 2.41. f_n ve f fonksiyonları L^p uzayının elemanları olmak üzere; (f_n) dizisi f fonksiyonuna p . mertebeden yakınsaktır (L^p de yakınsaklık) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon$.

Burada

$$\|f_n - f\|_{L_p} := \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Buna göre,

(f_n) dizisinin f fonksiyonuna L_p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_p} = 0 \quad (2.10)$$

olmasıdır [34].

Teorem 2.42. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, uzayı

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolayısıyla Banach uzayıdır [28].

2.3.2. Zayıf Lebesgue Uzayı

Tanım 2.43. (Zayıf Lebesgue Uzayı) $1 \leq p < \infty$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\|f\|_{WL^p} := \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere zayıf Lebesgue uzayı $WL^p(\mathbb{R}^n)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$WL^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ölçülebilir} \ \& \ \|f\|_{WL^p} < \infty\}$$

[36].

Uyarı 2.44. $1 \leq p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow WL_p(\mathbb{R}^n)$. Ayrıca

$$\|f\|_{WL_p} \leq \|f\|_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanır [36].

Tanım 2.45. (Lokal İntegrallenebilirlik) f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her K kompakt kümesi üzerinde

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal(veya yerel) integrallenebilir adı verilir ve

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \int_K |f| d\mu < \infty, K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \left(\int_K |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [32].

Aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilsin.

Teorem 2.46. Her $f \in L_{p\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\|f \chi_{B(x,r)}\|_{L^p}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}} = |f(x)|, \text{ h.h. } x \in \mathbb{R}^n$$

eşitliği gerçekleşir [11].

2.3.3. (p, q) Tipli Operatör

Tanım 2.47. (p, q) tipli operatör T bir quasi-lineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer T operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise zayıf (p, q) tipindedir denir. Yani her bir $\lambda > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_{L_p} \right)^q$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü zayıf (p, q) tipindedir.

Eğer T operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise güçlü (p, q) tipindedir denir. Yani her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L_p}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü güçlü (p, q) tipindedir [28].

Uyarı 2.48. Her güçlü (p, q) tipli operatör aynı zamanda zayıf (p, q) tipli operatördür [28].

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 2.49. (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) T alt toplamsal operatör ve $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olsun. Ayrıca T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun ve p ile q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p, q) tipli operatördür [36].

Uyarı 2.50. $0 < p_0 < p < p_1 < \infty$ ve T operatörü, Teorem 2.49. de tanımlanan ve aynı zamanda her $f \in L^{p_0} + L^{p_1}$ için

$$|T(f)| \leq T(|f|)$$

şartını sağlayan bir operatör olsun. Burada A_0 ve A_1 sabit sayıdır.

(a) $p_0 = 1$ ve $p_1 = \infty$ ise bu durumda T operatörünün L_p uzayından L_p uzayına dönüşümün normundaki sabit

$$\frac{p}{p-1} A_0^{\frac{1}{p}} A_1^{1-\frac{1}{p}}.$$

(b) Genellikle, $p_0 < p < p_1 = \infty$ ise bu durumda T operatörünün L_p uzayından L_p uzayına dönüşümün normundaki sabit

$$p^{1+\frac{1}{p}} \left[\frac{B(p_0+1, p-p_0)}{p_0^{p_0} (p-p_0)^{p-p_0}} \right]^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{p_0}{p_1}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}}.$$

(c) $0 < p_0 < p_1 < \infty$ iken T operatörünün L_p uzayından L_p uzayına dönüşümün normundaki sabit

$$\min_{0 < \lambda < 1} p^{\frac{1}{p}} \left(\frac{B(p - p_0, p_0 + 1)}{(1 - \lambda)^{p_0}} + \frac{p_1 - p + 1}{\lambda p_1} \right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}}.$$

[11].

2.4. Sobolev ve Besov Uzayı

Bu bölümde Sobolev Uzayı, Sobolev-Slobodeckij Uzayları ve Besov Uzayları ile ilgili temel bazı bilgiler verilmiştir.

2.4.1. Sobolev Uzayı

Sobolev uzayları, bir fonksiyonun sürekliliğinin ve türevlenebilirliğinin belirli bir derecesini sağlar. Bu uzaylarda yer alan fonksiyonlar, belirli bir integrallenebilirlik ölçütüne göre sınıflandırılır.

Diferensiyellenebilir fonksiyonlar birçok alanda ve özellikle diferensiyel denklemler için önemlidir. Ancak XX. yüzyılda C^1 (veya C^2 , vb.) uzayının diferensiyel denklemlerin çözümlerini incelemek için tam olarak doğru uzay olmadığı gözlemlendi. Sobolev uzayları, kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin arandığı bu uzayların modern uzayıdır.

Sobolev uzayları, fonksiyonel analiz, harmonik analiz, sayısal analiz, optimizasyon, sinyal işleme, görüntü işleme ve benzeri birçok alanda yaygın olarak kullanılır. Bu alanlarda, bir fonksiyonun düzgünlüğü, türevlenebilirliği ve diğer özellikleri hakkında bilgi sağlarlar ve bu bilgiler, problemlerin analizi ve çözümü için kullanılır. Diferensiyel denklemin altında yatan modelin miktarları veya özellikleri genellikle integral normları cinsinden ifade edilir. Tipik bir örnek, L^2 -norm da bir sıcaklık veya hız dağılımının enerjisinin ölçülmesidir. Bu nedenle, Lebesgue uzay fonksiyonlarını ayırt etmek için bir araç geliştirmek önemlidir.

İntegrasyon formülüne göre, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nin açık bir altkümesi olsun. Her $u \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ve $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ kompakt destekli tüm sonsuz türevlenebilir fonksiyonlar için

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi D^\alpha u dx, \quad (2.11)$$

burada α , $|\alpha| = k$ sıralısının çoklu indeksidir ve aşağıdaki gösterim kullanılır:

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

(2.11) eşitliğinin sol tarafında u fonksiyonunun lokal integrallebilir olduğu kabul edilir ise dahi bu durumda da eşitlik gerçekleşir.

Tanım 2.51. (Zayıf Türev)

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx,$$

olacak şekilde v lokal integrallenebilir bir fonksiyon ise bu durumda v ye u nun zayıf α -ıncı kısmi türevi denir.

Eğer u nun α -ıncı zayıf bir kısmi türevi varsa bu durumda hemen hemen her yerde Lebesgue uzayının bir elemanı olarak tek bir şekilde tanımlanır. Diğer yandan, eğer $u \in C^k(\Omega)$ ise bu durumda klasik ve zayıf türev denktir denir. Dolayısıyla eğer v, u nun zayıf bir α -ıncı türevi ise bu durumda $D^\alpha u := v$ şeklinde ifade edilir.

Örneğin,

$$u(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

fonksiyonu sıfır da sürekli değildir ve $-1, 0$ veya 1 noktalarında türevlenemez. Yinede

$$v(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

fonksiyonu, $u(x)$ in zayıf türev olma tanımını karşılar, ayrıca bu örnek, ilerde tanımlanacak herhangi bir p için $W^{1,p}$ Sobolev uzayı özelliğindedir.

$1 \leq p \leq \infty$ aralığında bir boyutlu uzayda $W^{k,p}(\mathbb{R})$ Sobolev uzayları, sonlu L^p normuna sahip f fonksiyonu ve onun k . mertebeden zayıf türevlenebilir olacak şekilde $L^p(\mathbb{R})$ uzayında f fonksiyonlarının alt kümesi olarak tanımlanır. Yukarıda bahsedildiği

gibi, türevleri tam anlamıyla tanımlarken biraz daha dikkatli olunmalıdır. Tek boyutlu problemlerde $(k - 1)$ -inci türevi $f^{(k-1)}$ hemen hemen her yerde türevlenebilir ve hemen hemen her yerde türevinin Lebesgue integraline eşittir. Böylece Sobolev uzayların normu

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=0}^k \int |f^{(i)}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

$p = \infty$ için

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{i=0,\dots,k} \|f^{(i)}\|_\infty = \max_{i=0,\dots,k} (\text{ess sup}_t |f^{(i)}(t)|)$$

şeklinde tanımlanır.

Dolayısıyla $W^{k,p}$ uzayı $\|\cdot\|_{k,p}$ normu ile bir Banach uzayıdır.

$p = 2$ için

Sobolev uzayı bir Hilbert uzayı olup:

$$H^k = W^{k,2}.$$

H^k uzayı katsayıları doğal sayı olan ve yeterince hızlı azalan bir Fourier serileri cinsinden tanımlanabilir yani

$$H^k(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2 + n^4 + \dots + n^{2k}) |\hat{f}(n)|^2 < \infty \right\},$$

burada \hat{f} , f fonksiyonunun bir Fourier serisidir ve \mathbb{T} , 1-halkadır. Ayrıca normu

$$\|f\|_{k,2}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^2)^k |\hat{f}(n)|^2$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç olarak, $p = 2$ olması durumunda Sobolev uzayları, Fourier serileri ile bağlantıları ve bir Hilbert uzayı olması nedeniyle önemli bir uzay olduğu görülmektedir.

Sobolev uzayının n -boyutlu durumda tanımı aşağıdaki gibidir:

$k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$ olsun. $|\alpha| \leq k$ ve Ω, \mathbb{R} uzayının açık alt kümesi olmak üzere $\forall \alpha := \alpha_1, \dots, \alpha_n$ için $L^p(\Omega)$ da f fonksiyonunun çok değişkenli kısmi türevi

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ve

$$\|f^{(\alpha)}\|_{L^p} < \infty$$

olacak şekilde tüm f fonksiyonlarının kümesine $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı denir yani,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}.$$

$k \in \mathbb{N}$ sayısı $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayının mertebesidir.

$W^{k,p}(\Omega)$ uzayının normu için birkaç seçenek mevcut olup bunlardan en yaygın olanları aşağıdaki normlar ve bu normlar denktirler.

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty; \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty; \end{cases}$$

ve

$$\|u\|'_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, & 1 \leq p < \infty; \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Şimdi R.A. Adams [1] tarafından elde edilen teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 2.52. *i.* $W^{k,p}(\Omega)$ uzayı bu normlardan herhangi birine göre bir Banach uzayıdır.

ii. $p < \infty$, için $W^{k,p}(\Omega)$ ayrılabilir uzayıdır.

iii. $\|\cdot\|_{W^{k,2}(\Omega)}$ norm ile $W^{k,2}(\Omega)$ uzayı bir $H^k(\Omega)$ Hilbert uzayıdır.

2.4.2. Sobolev-Slobodeckij Uzayları

Kesirli sıralı Sobolev uzaylarını tanımlamaya yönelik başka bir yaklaşım, Hölder koşulunu L^p -kümesine genelleştirme fikrinden kaynaklanmaktadır.

Tanım 2.53. (Slobodeckij yarınorm (Hölder yarınorm)) $1 \leq p < \infty$, $\theta \in (0, 1)$ ve $f \in L^p(\Omega)$ için Slobodeckij yarınorm (Hölder yarınorm)'u

$$[f]_{\theta,p,\Omega} := \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{\theta p + n}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır [41]

Tanım 2.54. (Sobolev-Slobodeckij uzayı) $s > 0$ bir tamsayı olmasın ve $\theta = s - \lfloor s \rfloor \in (0, 1)$ kümesi olsun. $W^{s,p}(\Omega)$ Sobolev-Slobodeckij uzayı

$$W^{s,p}(\Omega) := \{f \in W^{\lfloor s \rfloor,p}(\Omega) : \sup_{|\alpha|=\lfloor s \rfloor} [D^{\alpha} f]_{\theta,p,\Omega} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır [41].

Teorem 2.55. Sobolev-Slobodeckij uzayı

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|f\|_{W^{\lfloor s \rfloor,p}(\Omega)} + \sup_{|\alpha|=\lfloor s \rfloor} [D^{\alpha} f]_{\theta,p,\Omega} < \infty$$

normuna göre bir Banach uzayıdır [10].

Şimdi Di Niezza, Giampiero, Enrico [10] tarafından elde edilen teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 2.56.

$$W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega), k \leq s \leq s' \leq k + 1$$

[10].

Ayrıca Sobolev-Slobodeckij uzayları, Sobolev fonksiyonlarının özelliklerinin incelenmesi için önemli olup Besov uzaylarının özel bir halidir [48].

2.4.3. Besov Uzayları

Besov uzayları, Lebesgue ve Sobolev uzayları gibi klasik fonksiyon uzaylarının bir genellemesi olup bu fonksiyon uzaylarının düzgünlüğü ve bozulması kavramı kullanılarak tanımlanırlar. $|x|$ sonsuza yaklaşırken ve türevleri belirli bir düzgünlük oranına sahip olduğundan, bir f fonksiyonu $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ Besov uzayına aittir. s, p ve q parametreleri sırasıyla fonksiyonun pürüzsüzlük, integrallenebilirlik ve bozulma derecesini belirler.

$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ uzayları, bir fonksiyonun farklı türevlerinin farklı ağırlık katsayılarıyla birleşiminden oluşan bir uzaydır. Bu uzayda yer alan fonksiyonların genellikle kısmi türevlerinin kareleri belirli bir integrallenebilirlik kriterini sağlar. Besov uzayları, aynı zamanda bazı farklılaştırılabilir fonksiyon sınıflarını da içerir.

Besov uzayları, birçok matematiksel analiz probleminde kullanılır. Özellikle harmonik analiz, fonksiyonel analiz ve sayısal analiz gibi alanlarda önemli bir yere sahiptirler. Belirli bir diferensiyel denklemi olan bir fonksiyonun analizi için kullanılabilir. Bu uzayda yer alan fonksiyonların integrallenebilirliği, kısmi türevlerinin kareleri ve ağırlık katsayılarına göre belirlenir. Bu nedenle Besov uzayları, kısmi türevli denklemler için de önemli bir araçtır.

Matematikte, Besov uzayı (adını Oleg Vladimirovich Besov'dan almıştır) $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ tam bir yarı-normlu uzaydır ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olduğunda bir Banach uzayıdır. Bu uzaylar, benzer şekilde tanımlanmış Triebel-Lizorkin uzaylarının yanı sıra, Sobolev uzayları gibi daha temel fonksiyon uzaylarını genelleştirmesine yardımcı olur ve fonksiyonların düzenlilik özelliklerini ölçmede etkilidir.

Tanım 2.57. (Besov Uzay) $\Delta_h f(x) = f(x-h) - f(x)$ olsun ve süreklilik modülü

$$\omega_p^2(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^2 f\|_p$$

şeklinde tanımlansın. n negatif olmayan bir tamsayı olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $s = n + \alpha$ şeklinde tanımlansın. $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ Besov uzayı,

$$f \in W^{n,p}(\mathbb{R}), \int_0^\infty \left| \frac{\omega_p^2(f^{(n)}(t))}{t^\alpha} \right|^q \frac{dt}{t} < \infty$$

olacak şekildeki tüm f fonksiyonlarını içeren uzaydır [7].

Tanım 2.58. (Besov uzayın normu)

$B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ Besov uzayın normu

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = (\|f\|_{W^{n,p}(\mathbb{R})}^q + \int_0^\infty \left| \frac{\omega_p^2(f^{(n)}(t))}{t^\alpha} \right|^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.59. *i.* $B_{2,2}^s(\mathbb{R})$ Besov uzayları, klasik $W^{k,p}(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{R}$) Sobolev uzayları ile örtüşürler [7].

ii. $p = q$ ve s bir tam sayı değil ise bu durumda $B_{p,p}^s(\mathbb{R}) = W^{s,p}(\mathbb{R})$, burada $W^{s,p}(\mathbb{R})$ Sobolev Slobodeckij uzayıdır [7].

2.5. Lorentz ve Besov-Triebel-Lizorkin Uzayları

Harmonik analizin klasik operatörlerinin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki sınırlılığı yoğun bir şekilde birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. George G. Lorentz [24,25] tarafından 1951 yılında tanımlanmış olan $L(p, q)$ Lorentz uzayları harmonik analizin önemli konularından biridir. Lorentz uzayları harmonik analizdeki bazı iç problemlerin çözülmesinde, fizik alanında ve matematiksel kısmi türevlerin son yıllarda çözülmesinde önemli bir alan oluşturmaktadır. Ayrıca integral operatörlerinin Lorentz uzaylarında sınırlılığının incelenmesi bazı uygulama alanlarında önemli bir yer tutmaktadır.

Bu bölümde kullanılan bazı tanım ve notasyonların bilgisi aşağıda verilmiştir.

Genel olarak, \mathbb{R}^n üzerinde Öklid normu $|\cdot|$ şeklinde ve \mathbb{N} sıfırı içermeyen doğal sayılar kümesi olmak üzere $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ tanımlanır. X vektör uzayında $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|'$ denk iki norm $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ şeklinde yazılır. Benzer olarak, $\|\cdot\| \leq C\|\cdot\|'$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabit sayısı varsa bu durumda $\|\cdot\| \sim < \|\cdot\|'$ ifadesi kullanılır. Genellikle C , genel bir pozitif sabiti belirtir. Özellikle sabit C', C'', \dots olarak ifade edilir.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ile Schwartz fonksiyonlarının uzayı tanımlanır ve böylece $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tempered dağılım uzayıdır. X -değerli Schwartz fonksiyonlarına karşılık gelen uzay (burada X bir Banach uzayıdır) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, X)$ ve

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, X) = \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), X),$$

yani, $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow X$ sürekli lineer operatörlerinin uzayıdır.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ Dağılımlar uzayıdır. $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ lineer bir operatörlerin sırasıyla Range uzayı $\mathcal{R}(T)$, Sıfır uzayı $\mathcal{N}(T)$ ile gösterilecektir. $spt(f)$ ile bir f fonksiyonun destek fonksiyonu ifade edilecektir.

2.5.1. Lorentz Uzayları

X bir Banach uzayı ve $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı için $\mathcal{M}(\Omega, X)$ uzayı, $f : \Omega \rightarrow X$ ölçülebilir (yani ayrıca ayrılabilir değerli) fonksiyonların uzayı olsun. $L_{p,r}(X) = L_{p,r}(\Omega, X) \subset \mathcal{M}(\Omega, X)$ Lorentz uzayı, $1 \leq p, r \leq \infty$ için $f \in \mathcal{M}(\Omega, X)$ fonksiyonunun

$$d_f(\alpha) = \mu(\{z \in \Omega : \|f(z)\| > \alpha\}), \alpha \geq 0$$

dağılım fonksiyonu (distribution function) ve

$$f^*(t) = \inf\{\alpha \geq 0 : d_f(\alpha) \leq t\}, t \geq 0$$

azalan yeniden düzenleme fonksiyonu(decreasing rearrangement) olmak üzere

$$\|f\|_{L_{p,r}(\Omega, X)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}}, & r < \infty \\ \sup_{t>0} t p f^*(t) & , r = \infty \end{cases}$$

sonlu Lorentz yarı normu ile tanımlanır.

$L_{p,r}(\Omega, X)$ uzayındaki iki fonksiyon, eğer bir sıfır kümesinde eşitse (μ 'a göre) eşit kabul edilir.

$1 < p_0, p_1, p < \infty, p_0 \neq p_1, 1 \leq r_0, r_1, r \leq \infty$ ve $0 < \theta < 1$ için $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ olacak şekilde

$$(L_{p_0, r_0}(X), L_{p_1, r_1}(X))_{\theta, r} = L_{p, r}(X)$$

elde edilir (Bkz. [44], Sonuç 1.18.6/4). Burada $(\cdot, \cdot)_{\theta, r}$ reel interpolasyon fonksiyonudur. $L_{p,p}(X) = L_p(X)$ Lorentz uzayları, $L_p(X)$ Lebesgue uzaylarının reel interpolasyon uzayları gibi tanımlanır. Burada belirtelim ki $p > 1$ durumunda $L_{p,r}(\Omega, X)$ uzayı normlu uzaydır ve normu $\|\cdot\|_{L_{p,r}(X)}$ şeklinde gösterilir.

$l_q^s(X)$ uzayı ($s \in \mathbb{R}$ ve $1 \leq q < \infty$ için), X bir Banach uzayında $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset X$ dizilerini içermek üzere

$$\|a\|_{l_q^s(X)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} [2^{-ks} \|a_k\|]^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

$X = \mathbb{C}$ durumunda $l_q^s(\mathbb{C})$ yerine l_q^s yazılabilir.

Gerçekte görülür ki, $k \in \mathbb{N}, 1 < p < \infty, 0 < s < k$ ve X bir kompleks Banach uzayı olmak üzere

$$W_p^k(\mathbb{R}^n, X) = \{u \in L_p(\mathbb{R}^n, X) : \partial^\alpha u \in L_p(\mathbb{R}^n, X) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k\}$$

Sobolev uzaylarının kompleks interpolasyonu sırasıyla

$$W_p^s(\mathbb{R}^n, X) = (L_p(\mathbb{R}^n, X), W_p^k(\mathbb{R}^n, X))_{\frac{s}{k}, p}$$

Sobolev-Slobodeckij uzayları ve

$$H_p^s(\mathbb{R}^n, X) = [L_p(\mathbb{R}^n, X), W_p^k(\mathbb{R}^n, X)]_{\frac{s}{k}},$$

Bessel-potansiyel uzaylarına sebep olur.

Aşağıda, kabul edelim ki X kümesi \mathcal{HT} sınıfından olsun (dolayısıyla \mathcal{HT} sınıfındaki uzaylar için olası bir tanım veriliyor). $s = m \in \mathbb{N}_0$ durumunda Bessel-potansiyel uzayları, Sobolev uzayları tarafından verilmektedir, böylece

$$H_p^m(\mathbb{R}^n, X) = W_p^m(\mathbb{R}^n, X).$$

$s \in \mathbb{R}$ ve $1 < p < \infty$ için

$$H_p^s(\mathbb{R}^n, X) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, X) : \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}u \in L_p(\mathbb{R}^n, X)\},$$

şeklinde ifade edilir, burada $\|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F} \cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^n, X)}$, $H_p^s(\mathbb{R}^n, X)$ da denk bir norm ve \mathcal{F} Fourier dönüşümünü tanımlar. Ayrıca, herhangi bir $\epsilon > 0$ için

$$H_p^s(\mathbb{R}^n, X) \subset W_p^{s-\epsilon}(\mathbb{R}^n, X) \subset H_p^{s-2\epsilon}(\mathbb{R}^n, X)$$

sürekli gömmeler elde edilir. T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, ve L. Weis [16] ve H. Amann [6] tarafından Bessel-potansiyel ve Sobolev-Slobodeckij uzayları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Genel olarak, eğer $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, X)$ herhangi bir normlu uzay (örneğin $\mathcal{F} = H_p^s$ veya $\mathcal{F} = W_p^s$) ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir bölge ise bu durumda Ω bölgesinde $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, X)$ fonksiyonlarının kısıtlamalarının $\mathcal{F}(\Omega, X)$ uzayı normu

$$\|u\|_{\mathcal{F}(\Omega, X)} = \inf\{\|v\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, X)} : v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, X), v|_{\Omega} = u\}$$

şeklinde tanımlanır.

Operatör değerli Fourier çarpanlarını ele almak için aşağıdaki konsept kullanılmaktadır. X, Y , kompleks Banach uzayı olsun. \mathcal{E}_P , bağımsız ve simetrik olarak dağılmış $\{\pm 1\}$ değerleri için bir $P = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ olasılık uzayında $(\epsilon_i)_{i \in I}$ rastgele

değişken aileleri kümesini gösterebilirsin. Her $N \in \mathbb{N}$, $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) \in \mathcal{E}_P$, $T_l \in T$ ve $x_i \in X$ ($1 \leq i \leq N$) için

$$\left\| \sum_{i=1}^N \epsilon_i T_i x_i \right\|_{L_p(\Omega, Y)} \leq C \left\| \sum_{i=1}^N \epsilon_i x_i \right\|_{L_p(\Omega, X)} \quad (2.12)$$

olacak şekilde $\mathcal{E}_P \neq \emptyset$, $p \in [1, \infty)$ ile bir $P = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ olasılık uzayı ve bir $C > 0$ sabiti mevcut ise $T \subset \mathcal{L}(X, Y)$ sürekli bir lineer operatörler ailesini \mathcal{R} -sınırlı olarak tanımlanır. Bu durumda, $\mathcal{R}_p(T) := \inf\{C > 0: (2.12) \text{ olmak üzere}\}$ \mathcal{R} -sınırlı veya \mathcal{R}_p -sınırlı olarak adlandırılır. Burada belirtelim ki \mathcal{R} -sınırlılığı $T \subset \mathcal{L}(X, Y)$ sınırlılığını gerektirir. Eğer bir $T \subset \mathcal{L}(X, Y)$ ailesi $p \in [1, \infty)$ için \mathcal{R}_p -sınırlı ise bu durumda herhangi bir $q \in (1, \infty)$ için \mathcal{R}_q -sınırlıdır.

Not edelim ki (2.12) eşitsizliği, P uzayı yerine $\mathcal{E}_Q \neq \emptyset$ ile bir Q rastgele bir olasılık uzayı seçilirse bu durumda farklı bir $C > 0$ sabiti için de geçerlidir. Ayrıca, Lebesgue baskın yakınsaklık teoremine göre X in yoğun bir altuzayında x_i için (2.12) eşitsizliği gerçekleşir.

Aşağıda ispatsız olarak verilen teorem, R.Denk, M. Hieber ve J. Prüss tarafından [9] (bkz. Lemma 3.5) \mathcal{R} -sınırlılığının bazı somut durumlardaki sınırlılığı için verilmiştir.

Teorem 2.60. (Kahane Büzülme İlkesi) $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ olmak üzere X bir Banach uzayı, $P = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir olasılık uzayı, $1 \leq p < \infty$, $N \in \mathbb{N}$ ve $j = 1, \dots, N$ için $|a_j| \leq |b_j|$ olacak şekilde $a_j, b_j \in \mathbb{K}$ olsun. Bu durumda her $x_1, \dots, x_N \in X$ ve $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N \in \mathcal{E}_P$ için burada $C_{\mathbb{R}} = 1$ ve $C_{\mathbb{C}} = 2$ olmak üzere

$$\left\| \sum_{i=1}^N a_i \epsilon_i x_i \right\|_{L_p(\Omega, X)} \leq C_{\mathbb{F}} \left\| \sum_{i=1}^N b_i \epsilon_i x_i \right\|_{L_p(\Omega, X)}$$

[9].

Mihklin teoreminin aşağıdaki operatör değerli versiyonu ispatsız olarak ifade edilecektir (bkz [51] veya ([29], Teorem 4.3.9, Teorem 4.4.4)).

Teorem 2.61. (Mihklin Teoremi) X, Y uzayları (α) özelliğine sahip \mathcal{HT} sınıfının kompleks bir Banach uzayları ve $1 < p < \infty$ olsun. $m_\lambda \in C^m(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathcal{L}(X, Y))$, $\lambda \in \Lambda$ ve her bir $\alpha \in \{0, 1\}^n$ için

$$\kappa_\alpha := \mathcal{R}_p\{\xi^\alpha \partial^\alpha m_\lambda(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \lambda \in \Lambda\} < \infty$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\mathcal{F}^{-1}m_\lambda\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, X) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, Y)$ operatörü, herbir $\lambda \in \Lambda$ için bir tek $T_\lambda \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n, X), L_p(\mathbb{R}^n, Y))$ sahip ve $\alpha \in \{0, 1\}^n$ için

$$\mathcal{R}_p\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \leq C_{p,n} \sum \kappa_\alpha =: C.$$

Mihklin teoreminden $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, X)$ ve $\lambda \in \Lambda$ için

$$\|\mathcal{F}^{-1}m_\lambda\mathcal{F}f\|_{L_p(Y)} \leq C\|f\|_{L_p(X)}.$$

Besov-Lorentz uzayı $B_{pq,r}^{s,\varphi}$ ve Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayı $F_{pq,r}^{s,\varphi}$ sırasıyla, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ içindeki tüm f fonksiyonlarından oluşur, öyle ki

$$\|f\|_{B_{pq,r}^{s,\varphi}}^\phi = \left\| \left\{ 2^{sj} \|\mathcal{F}^{-1}\phi_j\mathcal{F}f\|_{L_{p,q}} \right\} \right\|_{l_s} < \infty,$$

ve

$$\|f\|_{F_{pq,r}^{s,\varphi}}^\phi = \left\| \left\{ 2^{sj} \|\mathcal{F}^{-1}\phi_j\mathcal{F}f\|_{l_r} \right\} \right\|_{L_{p,q}} < \infty.$$

Açıkça, $B_{pq,r}^{s,1} = B_{pq,r}^s$ ve $F_{pq,r}^{s,1} = F_{pq,r}^s$ [46].

2.5.2. Besov-Triebel-Lizorkin Uzayları

Besov ve Triebel-Lizorkin uzayları, matematiksel analizde özellikle fonksiyon teorisi ve harmonik analiz alanlarında önemli bir yere sahip olan fonksiyon uzaylarıdır.

$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ Triebel-Lizorkin uzayları, belirli bir kısmi türevli normunun ve aynı zamanda L_p -normlarının birleşimi ile tanımlanan bir uzaydır. Bu uzayda yer alan fonksiyonların analiz edilebilirliği, L_p -normlarının ve farklı türev normlarının birleşiminden oluşan karmaşık bir ölçüt tarafından belirlenir.

Triebel-Lizorkin uzayları, klasik fonksiyon uzaylarını genelleştiren başka bir fonksiyon uzayı ailesidir. Fourier analizini kullanarak bir fonksiyonu frekans bileşenlerine ayıran Littlewood-Paley teorisine göre tanımlanırlar. Bir f fonksiyonu, eğer frekans bileşenleri belirli bir bozulma ve pürüzsüzlük oranına sahipse, Triebel-Lizorkin uzayına aittir. s, p ve q parametreleri sırasıyla fonksiyonun pürüzsüzlük, integrallenebilirlik ve bozulma derecesini belirler.

Besov ve Triebel-Lizorkin uzayları, çeşitli matematiksel analiz problemlerinde yaygın olarak kullanılır. Özellikle diferensiyel denklemler, kısmi türevli denklemler ve harmonik analiz problemleri gibi alanlarda fonksiyon uzayları olarak karşımıza çıkarlar.

Tanım 2.62. \mathcal{S} , hızla azalan fonksiyonların Schwartz sınıfı olsun. $f \in \mathcal{S}$ nin Fourier dönüşümü $F(f) = \hat{f}$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

şeklinde tanımlanır.

$\varphi \in \mathcal{S}$ için $Supp \hat{\varphi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$ ve $\hat{\varphi}(\xi) > 0$ ise bu durumda $\frac{1}{2} < |\xi| < 2$ olmak üzere

$\hat{\varphi}_j = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$ olsun. (diğer bir ifadeyle, $\varphi_j(x) = 2^{jn}\varphi(2^jx)$), φ 'nin önündeki normleştirme sabiti

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_j(\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

şeklinde tanımlanır.

$k \in \mathbb{Z}$ için $\mathcal{S}_k \in \mathcal{S}$ fonksiyonunu Fourier dönüşümü

$$\hat{\mathcal{S}}_k(\xi) = 1 - \sum_{j \geq k+1} \hat{\varphi}_j(\xi)$$

şeklinde tanımlanır.

Özellikle $\hat{\mathcal{S}}_{-1}(\xi) = \hat{\Phi}(\xi)$.

$|j - j'| \geq 2$ ise bu durumda $Supp \hat{\varphi}_j \cap Supp \hat{\varphi}_{j'} = \emptyset$ olmak üzere

$s \in \mathbb{R}$ ve $p, q \in [0, \infty]$ olsun. $f \in \mathcal{S}'$ için $\Delta_j f = \varphi_j * f$ olacak şekilde $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ homojen Besov normu

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = \begin{cases} [\sum_{-\infty}^{\infty} 2^{jqs} \|\varphi_j * f\|_{L^p}^q]^{\frac{1}{q}}, & q \in [1, \infty) \\ \sup_j [2^{js} \|\varphi_j * f\|_{L^p}], & q = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$\dot{B}_{p,q}^s$ Homojen Besov uzayı, $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ yarı normu ile verilen yarı normlu bir uzaydır.

$s > 0$ için $f \in \mathcal{S}'$ nin, $\|f\|_{B_{p,q}^s}$ homojen olmayan Besov uzay normu

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \|f\|_{L^p} + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$$

şeklinde tanımlanır.

Homojen olmayan Besov uzayı, $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s}$ normu ile tanımlanmış bir Banach uzaydır. $\|f\|_{F_{p,q}^s}$ Homojen Triebel-Lizorkin yarı normu,

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s} = \begin{cases} \|(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jq} |\Delta_j f(\cdot)|^q)^{\frac{1}{q}}\|_{L^p}, & q \in [1, \infty) \\ \|\sup_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} |\Delta_j f(\cdot)|)\|_{L^p}, & q = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$\dot{F}_{p,q}^s$ homojen Triebel-Lizorkin uzayı, $\|\cdot\|_{\dot{F}_{p,q}^s}$ yarı normu tarafından verilen yarı normlu bir uzaydır. $s > 0$ ve $(p, q) \in (1, \infty) \times [1, \infty]$ için $f \in \mathcal{S}'$ nin,

$\|f\|_{F_{p,q}^s}$ homojen olmayan Triebel-Lizorkin uzay normu

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \|f\|_{L^p} + \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s}$$

şeklinde tanımlanır.

Homojen olmayan Triebel-Lizorkin uzayları $\|\cdot\|_{F_{p,q}^s}$ normu ile tanımlanmış bir Banach uzayıdır.

3. MATERYAL VE METOT

Son yıllarda, $F_{p,q}^{s,r}$ Triebel-Lizorkin-Lorentz uzaylarının kısmi diferensiyel denklemlerde önemli bir yeri vardır. Yang, Cheng ve Peng [52] tarafından 2005 yılında, $s \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty$ ve $1 \leq r \leq \infty$ olmak üzere $F_{p,q}^s$ uzayları ve $L_{p,r}$ Lorentz uzayları tanımlandı. Dolaylı olarak $F_{p,q}^{s,r}$ uzayları, Triebel [44], Bölüm 2.4.2] tarafından 1978 yılında incelendiği görülmektedir. Yang, Cheng ve Peng [52] tarafından, $F_{p,q}^{s,r}$ uzaylarında dalgacık teorisi aracılığıyla, özellikle kısmi diferensiyel denklemlerin uygulamaları için ve en önemlisi Triebel-Lizorkin uzaylarının bir reel interpolasyon ölçeği olduğu kanıtlanmıştır. Xiang ve Yan [50] tarafından 2011 yılında da, Triebel-Lizorkin-Lorentz uzaylarını kısmi diferensiyel denklemler bağlamında ele aldılar ve yarı jeostrofik bir denklemin lokal iyi pozluluğunu belirlediler.

$F_{p,q}^{s,r}$ ölçeği birçok önemli fonksiyon uzayı içerir: $r = p$ olmak üzere, $q = 2$ için H_p^s Bessel potansiyel uzaylarını elde edildi. Bununla birlikte sırasıyla $s \notin \mathbb{Z}$ durumunda $q = p$ için ve $s \in \mathbb{Z}$ durumunda $q = 2$ için W_p^s Sobolev-Slobodeckij uzayları elde edildi. Özellikle, $s = 0$ olması durumunda, L_p Lebesgue uzaylarını ve Lorentz uzaylarını $L_{p,r} = F_{p,2}^{0,r}$ elde edildi.

Ayrıca Harmonik analizin klasik operatörlerinden olan maksimal fonksiyon, Riesz potansiyeli singüler integral operatörleri Fourier dönüşümü teorisinde, kısmi türevli denklemler teorisinde, olasılık teorisinde fonksiyonel analizde ve aynı zamanda özel olarak operatörlerin interpolasyonu teorisinde geniş uygulamalara sahiptir. Caldreon-Zygmund singüler integral operatörü ve singüler integral operatörü Hilbert ve Riesz dönüşümlerinin genelleştirilmesidir. Birincisi üst yarı düzlem üzerindeki eşlenik harmonik fonksiyonların sınır değerlerinin incelenmesinde ortaya çıkmıştır, diğeri ise ikinci dereceden eliptik denklemlerin çözümünün regülarlığına karşılık gelmektedir. Harmonik analizin bu klasik operatörleri çeşitli fonksiyon uzaylarındaki sınırlılıkları bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Örneğin 2010 yılında Lebesgue uzaylarının bir genelleştirilmesi olan Morrey uzaylarında Akbulut ve ekibi [2] incelemiştir. Bu yüksek lisans tezinde, son yıllarda birçok matematiksel alanlarda önemi olan harmonik analizdeki Triebel-Lizorkin-Lorentz uzaylarının özellikleri ve bu uzaylarda bazı integral operatörlerinin sınırlılıklarının incelenmesi amaçlanmaktadır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, harmonik analizde bazı integral operatörleri, Triebel-Lizorkin-Lorentz uzaylarının tanımları ve kaldırma özellikleri, Fourier çarpanları ve ayrık karakterizasyonlar gibi bazı temel özelliklerini incelenmiştir. Ayrıca n boyutlu Öklid uzayında tanımlanan Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayları arasında bazı gömmeler verilmiştir.

4.1. Harmonik Analizde Bazı İntegral Operatörleri

Harmonik analizde, integral operatörleri, sinyal ve sistemlerin analizinde önemli bir rol oynar. Genellikle frekans etkilerini incelemek ve belirli matematiksel işlemleri kolaylaştırmak için kullanılırlar. Bu operatörler, özellikle Laplace ve Fourier dönüşümleri ile ilgili olarak önemlidir. Temel integral operatörleri:

Laplace Dönüşümü:

Laplace dönüşümü, zamana bağlı gerçek bir sinyali, frekans etkisi ile ilişkilendirilen kompleks düzlemdeki bir fonksiyona dönüştürür. Laplace dönüşümü, zaman alanındaki diferensiyel denklemleri çözmeyi ve sistemlerin kararlılığı, sürekliliği ve tepki sürelerini incelemeyi kolaylaştırır. Laplace dönüşümü için integral operatörü şu şekildedir:

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts} dt$$

Burada, $\mathbf{F}(s)$, Laplace dönüşümü alınacak sinyalin (zaman alanında $f(t)$) Laplace uzayındaki gösterimi ve s kompleks frekans değişkenidir.

Fourier Dönüşümü:

Fourier dönüşümü, zamana bağlı bir sinyali, frekans etkisiyle ilişkilendirilen bir frekans spektrumuna dönüştürür. Bu, sinyaldeki farklı frekans bileşenlerini analiz etmek ve sistemlerin frekans tepkilerini incelemek için kullanılır.

Fourier dönüşümü için integral operatörü şu şekildedir:

$$\mathbf{F}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-tjw} dt$$

Burada $\mathbf{F}(w)$, Fourier dönüşümü alınacak sinyalin (zaman alanında $f(t)$) frekans spektrumu ve w frekans değişkenidir.

Bu integral operatörler, harmonik analizde sinyallerin frekans bileşenlerini belirlemek ve sistemlerin frekans tepkilerini incelemek için kullanılır. Ayrıca, harmonik analiz, elektrik mühendisliği, haberleşme mühendisliği, akustik, sinyal işleme ve birçok diğer alanda önemli uygulamalara sahiptir.

4.1.1. Maksimal Fonksiyonlar

Maksimal fonksiyon, özellikle Lebesgue ölçümüyle ilgili bir kavramdır ve genellikle ölçü teorisi ve reel analizde kullanılır. Maksimal fonksiyon, bir fonksiyonun her noktasındaki maksimum değeri veren bir ölçülebilir fonksiyondur. Matematiksel olarak, verilen bir ölçülebilir fonksiyon $f(x)$ için, maksimal fonksiyon $Mf(x)$ şu şekilde tanımlanır:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y)$$

Burada, $B(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı açık yuvar kümesi, $\mu(B(x,r))$, $B(x,r)$ kümesinin ölçüsüdür.

Maksimal fonksiyon, özellikle Lebesgue uzayında, yani ölçülebilir kümelerin üzerinde tanımlanan fonksiyonlarda önemli bir rol oynar. Bu fonksiyon, bir fonksiyonun "maksimum ölçü ağırlıklı ortalaması" olarak düşünülebilir ve bir fonksiyonun yerel "maksimum değerlerini" vurgulamaya yardımcı olabilir.

Maksimal fonksiyonlar, diğer matematiksel analiz teknikleri ile birlikte, özellikle Lebesgue integrali, Lebesgue alanı, ölçü teorisi ve gerçel analizde yaygın olarak kullanılır. Ayrıca, fonksiyonların konverjansını veya L_p uzaylarındaki özelliklerini incelemek için de önemli bir araçtır.

4.1.2. Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü

\mathbb{A} , \mathbb{R}^n uzayında Lebesgue ölçülebilir bir alt küme olmak üzere \mathbb{A} nın Lebesgue ölçüsü $|\mathbb{A}|$ şeklinde tanımlansın. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $B(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı açık yuvar kümesidir. $a > 0$ için $aB(x,\delta) = B(x,a\delta)$, aynı merkezli $a\delta$ yarıçaplı yuvardır. $\delta > 0$ ve $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. x merkezli δ yarıçaplı açık yuvar üzerinde $|f|$ in ortalaması

$$\text{Avg}_{B(x,\delta)} |f| = \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlanır. [11]

Tanım 4.1.

$$M(f)(x) = \sup_{\delta>0} \text{Avg}_{B(x,\delta)} |f| = \sup_{\delta>0} \frac{1}{\nu_n \delta^n} \int_{|y|<\delta} |f(x-y)| dy \quad (4.1)$$

ifadesine f fonksiyonunun merkezlenmiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu denir.

$$M(f) = M(|f|) \geq 0$$

olduğundan, maksimal fonksiyon pozitif bir operatördür.

$f \in M(f)$ olduğunda f fonksiyonunun özellikleri geçersizdir. $M(f) \geq |f|$ hemen hemen her yerde gerçekleşir. Ayrıca M fonksiyonu L^∞ uzayından L^∞ uzayına sınırlıdır, yani

$$\|M(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$$

[11].

Şimdi özel bir fonksiyonun Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu ile ilgili örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.2. \mathbb{R} uzayında f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında karakteristik bir fonksiyon olsun. $x \in (a, b)$ için $M(f) = 1$ olduğu aşikardır. $x \geq b$ için basit bir hesaplama ile, $\delta = x - a$ olduğunda f fonksiyonunun en büyük ortalaması $(x - \delta, x + \delta)$ aralığında elde edilir. Benzer şekilde, $x \leq a$ için $\delta = b - x$ olduğunda f fonksiyonunun en büyük ortalaması $(x - \delta, x + \delta)$ aralığında elde edilir. Bu durumda,

$$M(f)(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{2|x-b|} & , x \leq a, \\ 1 & , x \in (a, b), \\ \frac{b-a}{2|x-a|} & , x \geq b. \end{cases}$$

Burada dikkat edilirse, $M(f)$ fonksiyonu $x = a$ ve $x = b$ noktalarında f fonksiyonunun yarısı kadar artış yapar.

M operatörü,

$$(i) \forall f, g \in L_{loc}, M(f+g)(x) \leq Mf(x),$$

$$(ii) \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ ve } f \in L_{loc}, M(\alpha f)(x) = |\alpha| Mf(x)$$

şartlarını sağladığından altlineer bir operatördür.

Ayrıca $M, \forall f \in L_{loc}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n, Mf(x) \geq 0$ şartını sağladığından dolayı da pozitif bir operatördür. Fakat bazı $x_0 \in \mathbb{R}^n, M(f)(x_0) = 0$ olması durumunda ise hemen hemen her yerde $f = 0$ olur. Eğer f kompakt destekli ise bu durumda da $|x| \geq R, (\text{ve } |x| \leq R,)$

$$Mf(x) \geq \frac{|f|_{L_1}}{v_n} \frac{1}{(|x| + R)^n} \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir, burada v_n, \mathbb{R}^n uzayında birim yuvarın hacmidir. (4.2) eşitsizliğinden, $M(f), L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayının elemanı değilse bu durumda hemen hemen her yerde $f \neq 0$. Bu durum, maksimal fonksiyonun belirli bir davranışını yansıtan güçlü bir özelliğidir.

Aslında, $g \in L_{loc}^1$ ve $M(g) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen hemen her yerde $g = 0$ olur. Bunu göstermek için, (4.2) eşitsizliği kullanılarak $g_R(x) = g(x)\chi_{|x| \leq R}$ olmak üzere $R > 0$ yarıçaplı yuvarda hemen hemen her x için $g_R(x) = 0$ olur. Böylece, \mathbb{R}^n de hemen hemen her yerde $g = 0$ dır. Dolayısıyla, $f \in L_1$ ise bu durumda $M(f) \in WL_1$ olduğu görülür.

$M(f)$ nin ilgili benzer bir durumu, belirli bir noktayı içeren tüm açık yuvarlar üzerindeki f fonksiyonunun tüm ortalamalarının supremumu olarak tanımlanan, merkezlenmemiş bir $M(f)$ versiyonudur.

Tanım 4.3.

$$M(f)(x) = \sup_{\substack{\delta > 0 \\ |y-x| < \delta}} \text{Avg}_{B(x,\delta)} |f|$$

ifadesine x noktasını içeren $B(x, \delta)$ açık yuvarında $|f|$ in ortalamasının supremumuna merkezlenmemiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu denir [11].

$M(f) \leq M(f)$ aşıkâr olup M , M den daha geniş bir operatördür. Dolayısıyla, $M(f) \leq 2^n M(f)$ ve M nin sınırlılık özellikleri M nin sınırlılık özellikleri ile aynıdır.

Örnek 4.4. \mathbb{R} uzayında f fonksiyonu, $I = [a, b]$ aralığında karakteristik bir fonksiyon olsun. $x \in (a, b)$ için $M(f)(x) = 1$ olduğu aşıkardır. $x \geq b$ için basit bir hesaplama ile, $\delta = \frac{1}{2}(x - a)$ ve $y = \frac{1}{2}(x + a)$ olduğunda f fonksiyonunun en büyük ortalaması x noktasını içeren $(y - \delta, y + \delta)$ aralığında elde edilir. Benzer şekilde, $x \leq a$ için $\delta = \frac{1}{2}(b - x)$ ve $y = \frac{1}{2}(b + x)$ olduğunda f fonksiyonunun en büyük ortalaması $(y - \delta, y + \delta)$ aralığında elde edilir. Bu durumda,

$$M(f)(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{|x-b|} & , x \leq a, \\ 1 & , x \in (a, b), \\ \frac{b-a}{|x-a|} & , x \geq b. \end{cases}$$

Burada dikkat edilirse, $M(f)$ fonksiyonu $x = a$ noktasından $x = b$ noktasına bir sıçramaya sahip değildir ve $M(f), \left(1 + \frac{\text{dist}(x, I)}{|I|}\right)^{-1}$ fonksiyonu ile karşılaştırılabilir bir fonksiyondur [11].

Maksimal fonksiyonların bazı özelliklerini verebilmek için ispatsız olarak aşağıdaki lemma verilmiştir.

Lemma 4.5. $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ kümesi \mathbb{R}^n de açık yuvarların sonlu bir koleksiyonu olsun. Bu durumda

$$\sum_{r=1}^l |B_{j_r}| \geq 3^{-n} \left| \bigcup_{i=1}^k B_i \right| \quad (4.3)$$

olacak şekilde ikili ayırık yuvarlarının sonlu bir $\{B_{j_1}, \dots, B_{j_l}\}$ alt koleksiyonu vardır [11].

Şimdi sırasıyla M merkezlenmiş ve M merkezlenmemiş maksimal fonksiyonların sınırlılığı ile ilgili teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.6. Merkezlenmemiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına, burada sabit en fazla 3^n ve aynı zamanda $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayına, burada sabit en fazla $3^{\frac{n}{p}} p(p-1)^{-1}$ olmak üzere sınırlıdır. Benzer durum M merkezlenmiş maksimal operatörü için doğrudur [11].

Hatırlatalım ki operatörlerin L_1 uzayından WL_1 uzayına dönüşümleri zayıf (1,1) tiplidir.

İspat.

$M(f) \geq M(f)$ olduğundan

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |M(f)(x)| > \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |M(f)(x)| > \alpha\},$$

aşıkardır ve bundan dolayı

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |M(f)(x)| > \alpha\}| \leq 3^n \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha} \quad (4.4)$$

göstermek yeterlidir.

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |M(f)(x)| > \alpha\}$$

kümesi açıktır. Gerçekten, $x \in E_\alpha$ için x noktasını içeren öyle bir B_x açık yuvarı vardır ki, B_x yuvarında $|f|$ nin ortalaması α dan kesinlikle büyüktür ve böylece B_x yuvarı E_α elemanıdır. Bu da E_α kümesinin açık olduğunu ispatlar.

K , E_α nın kompakt bir altkümesi olsun. Herbir $x \in K$ için x noktasını içeren bir açık B_x yuvarı vardır, öyle ki

$$\int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha |B_x|. \quad (4.5)$$

Şimdi her x için $B_x \subset E_\alpha$ olduğu gösterilsin. Kompaktlıktan dolayı K nın $\{B_{x_1}, \dots, B_{x_k}\}$ olacak şekilde sonlu alt örtüsü vardır. Lemma 4.5. den dolayı $B_{x_{j_1}}, \dots, B_{x_{j_l}}$ ayrık yuvarlardan oluşan bir altkoleksiyon bulunur öyle ki (4.3) eşitsizliği elde edilir. (4.3) ve (4.5) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} |K| &\leq \left| \bigcup_{i=1}^k B_{x_i} \right| \leq 3^n \sum_{i=1}^l |B_{x_{j_i}}| \\ &\leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=1}^l \int_{B_{x_{j_i}}} |f(y)| dy \\ &\leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{E_\alpha} |f(y)| dy \end{aligned}$$

elde edilir, böylece her $B_{x_{j_i}}$ yuvarları ayrıktır ve aynı zamanda E_α kümesinin elemanlarıdır.

Tüm kompakt $K \subseteq E_\alpha$ üzerinden supremumu alınır ve Lebesgue ölçüsünün iç düzenliliğinden (4.4) eşitsizliği elde edilir. Yani M operatörü 3^n sabiti ile $L^1 \rightarrow WL_1$ dönüşümü gerçekleşir. M operatörü 1 sabiti ile $L^\infty \rightarrow L^\infty$ olduğu aşıkardır. M , iyi tanımlı ve $L^1 + L^\infty$ üzerinde hemen hemen her yerde sonlu olduğundan, $1 < p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında da sonludur. Teorem 2.49. (Marcinkiewicz interpolasyon Teoremi) den M , her $1 < p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Uyarı 2.50. nin uygulaması olarak $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında M operatörünün normu için

$$\|M\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq \frac{p}{p-1} 3^{\frac{n}{p}} \quad (4.6)$$

olduğu görülür. Burada dikkat edilirse sınırlılık için Teorem 2.49. nin direkt uygulamasından $2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} 3^{\frac{n}{p}}$ sabiti bulunur [11]. ■

Uyarı 4.7. Teorem 4.6. nın ispatından görülür ki M operatörünün $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki norm sınırlılığı boyutla üstel olarak artar. Bu sınırın, n boyutta $n \rightarrow \infty$ gibi üstel olarak artmayan daha iyi bir sınıra geliştirilip geliştirilemeyeceği merak edebilir ancak bu mümkün değildir (bkz. [11] Örnek 4.8.) .

Örnek 4.8. $R > 0$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{c'_n R^n}{(|x| + R)^n} &\leq M(\chi_{B(0,R)})(x) \\ &\leq \frac{c_n R^n}{(|x| + R)^n} \end{aligned} \quad (4.7)$$

olacak şekilde c_n ve c'_n boyutsal sabitleri vardır.

Bu fonksiyonlar \mathbb{R}^n üzerinde integrallenebilir olmadığından, M operatörünün $L^1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olmadığı ortaya çıkar. Şimdi $M(M(\chi_{B(0,R)}))(x)$ ifadesine bakalım. ilk önce

$$\frac{R^n}{(|x| + R)^n} \leq \chi_{B(0,R)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^n}{(R + 2^k R)^n} \chi_{B(0,2^{k+1}R) \setminus B(0,2^k R)}$$

şeklinde yazılsın. (4.7) eşitsizliğindeki ifadeden ve M operatörünün alt doğrusallığı kullanılarak,

$$\begin{aligned} M\left(\frac{R^n}{(|\cdot| + R)^n}\right)(x) &\leq M(\chi_{B(0,R)})(x) + \sum_0^{\infty} \frac{1}{(1 + 2^k)^n} M(\chi_{B(0,2^{k+1})})(x) \\ &\leq \frac{c_n R^n}{(|x| + R)^n} + \sum_0^{\infty} \frac{1}{(1 + 2^k)^n} \frac{c_n (2^{k+1} R)^n}{(|x| + 2^{k+1} R)^n} \\ &\leq \frac{C_n \log(e + |x|/R)}{(1 + |x|/R)^n} \end{aligned}$$

elde edilir, k sayısı üzerinden buradaki son ifade ayrı ayrı toplam alınırsa $2^{k+1} \leq |x|/R$ ve $2^{k+1} \geq |x|/R$ olduğu görülür. Burada dikkat edilmeli ki $p > 1$ olduğu için logaritma fonksiyonu özelliğinden L^p uzayında sınırlılığı etkilemediği görülür. [11].

Sonuç 4.9. $1 < p \leq \infty$ ise bu durumda $f \in L^p \iff Mf \in L^p$.

İspat. M operatörü (p, p) tipli olduğundan $p > 1$ ve $f \in L^p$ için $Mf \in L^p$ dir. Diğer yandan (2.10) ve (4.1) eşitsizliklerinden hemen hemen her x için

$$|f(x)| \leq Mf(x)$$

elde edilir. Böylece

$$\int |f(x)|^p dx \leq \int (Mf(x))^p dx,$$

ve $Mf \in L^p$ ise bu durumda $f \in L^p$. ■

1997 yılında J. Kinnunen [18], $p > 1$ ve $k \leq 1$ için f , $W^{1,p}(R^n)$ Sobolev Uzaylarında bir fonksiyon ise bu durumda Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonlarının birinci

mertebeden zayıf kısmi türevlerinin $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında olduğunu gösterdi. 2002 yılında H. Tanaka [14], $k = 1$ iken $p = 1$ durumunda Kinnunen'in sonucunun genişletebileceğini ispatladı.

$1 < p \leq \infty$ için $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarını $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Sobolev Uzayının içerdiğinde $D^\alpha f$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ birinci mertebeden zayıf kısmi türevleri $L^p(\mathbb{R}^n)$ ait olduğu bilinmektedir.

1998 yılında J. Kinnunen [18], $1 < p < \infty$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $Mf \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|(D^\alpha Mf)(x)| \leq (MD^\alpha f)(x). \quad (4.8)$$

Sonuç 4.9. ve (4.8) eşitsizliğinden

$$\|D^\alpha M\|_p \leq A_p \|D^\alpha f\|, \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

elde edilir.

$p = 1$ durumundan Kinnunen'in metodu (4.8) eşitsizliğinin ispatına uygun olmayabilir, çünkü M fonksiyonu L^p -sınırlılığına bağlıdır.

$p = k = 1$ durumunda $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda Mf , sınırlı bir fonksiyon ve dolayısıyla dağılımlar anlamında türevlenebilir.

H. Tanaka [14] tarafından $l_r(L_{pq})$ uzaylarında M maksimal operatörü ile ilgili sonuç aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 4.10. $1 \leq p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ ve $1 < r \leq \infty$ olsun.

(1) $1 < p < \infty$ ise bu durumda $l_r(L_{pq})$ uzayından $l_r(L_{pq})$ uzayına M maksimal operatörü sınırlıdır;

(2) M maksimal operatörü $l_q(L_{1q})$ uzayından $l_q(WL_{1q})$ uzayına sınırlıdır.

4.1.3. Kesirli İntegral Operatörleri

Bu kısımda, Riesz potansiyelin sınırlılığı ve genel formu (kesirli integral) incelenmiştir.

$0 < \alpha < n$ ise bu durumda $|x|^{-n+\alpha} \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Böylece dağılım anlayışı ile

$$\left(\widehat{\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}} \right) (\xi) = \gamma(\alpha)(2\pi)^\alpha |\xi|^{-\alpha}, \quad (4.10)$$

elde edilir, burada

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

Riesz potansiyeli

$$\begin{aligned} I_\alpha(f)(x) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{|x|^{n-\alpha}} * f \right) (x) \end{aligned} \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlı bir operatördür [40].

Şimdi Riesz potansiyeli ile kesirli dereceden Laplacian operatörü arasındaki bazı bağıntılar hakkında bilgi verilecektir.

Δ Laplacian operatörü olsun, yani,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Herhangi bir $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ için, Fourier dönüşümünden

$$\widehat{(-\Delta_\alpha)}(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi |\xi|^2) \widehat{\varphi}(\xi)$$

elde edilir.

Böylece, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ için, (4.10) ve (4.11) eşitliğinden

$$\widehat{(I_\alpha \varphi)}(\xi) = (2\pi |\xi|)^{-\alpha} \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{((- \Delta)^{-\alpha/2} \varphi)}(\xi)$$

elde edilir.

Dolayısıyla, dağılım anlayışı altında, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ için

$$f(x) = I_1 * \left(\sum_{j=1}^n R_j \partial_j f \right) (x) = \sum_{j=1}^n (I_1 * R_j \partial_j f)(x), \quad (4.12)$$

burada R_j Riesz dönüşümüdür.

R_j Riesz dönüşümü ($1 < p < \infty, j = 1, 2, \dots, n$) için L^p uzayında sınırlılığı ve Riesz potansiyelinin 1.dereceden (L^p, L^q) sınırlılığı ile, $\partial_j f \in L^p$, ($1 < p < n, j = 1, 2, \dots, n$) ve (4.12) eşitliğinden $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ olduğu sonucu elde edilir. Bu nedenle Riesz potansiyeli, Sobolev uzayı teorisi ve kesirli dereceden Laplacian operatörü ile yakından ilişkilidir.

4.1.4. Riesz Potansiyeli

Bu kısımda, I_α , $0 < \alpha < n$, Riesz potansiyelinin (L^p, L^q) -sınırlılığını gösterilecektir. İlk önce gösterilsin ki

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \quad (4.13)$$

gerek şartı altında

$$\| I_\alpha f \|_q \leq C \| f \|_p \quad (4.14)$$

dir.

Gerçekten de, $\delta > 0$ için genişleme dönüşümü

$$\tau_\delta(f)(x) = f(\delta x)$$

şeklindedir.

Bu durum da, $0 < \alpha < n$ için

$$\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha \tau_\delta = \delta^{-\alpha} I_\alpha \quad (4.15)$$

ve

$$\| \tau_\delta(f) \|_p = \delta^{-n/p} \| f \|_p, \quad \| \tau_{\delta^{-1}} I_\alpha(f) \|_q = \delta^{n/q} \| I_\alpha(f) \|_q. \quad (4.16)$$

Böylece, $\delta > 0$ için (4.14), (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \| I_\alpha f \|_q &= \delta^\alpha \| \tau_{\delta^{-1}} I_\alpha \tau_\delta(f) \|_q \\ &= \delta^{\alpha+n/q} \| I_\alpha \tau_\delta(f) \|_q \\ &\leq C \delta^{\alpha+n/q} \| \tau_\delta(f) \|_q \\ &= C \delta^{\alpha+n/q-n/p} \| f \|_p. \end{aligned} \quad (4.17)$$

(4.17) eşitsizliğinden dolayı her $\delta > 0$ için (4.13) şartının olması gerektiği sonucuna varılır.

Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi, $1 < \frac{n}{\alpha}$ için (4.13) şartının (4.14) eşitsizliğinin sağlamak için de yeterli bir koşul olduğunu göstermekte olup ilk önce aşağıdaki lemma verilsin.

Lemma 4.11. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ olsun. Bu durumda $x \in (\mathbb{R}^n)$ için

$$|I_\alpha f(x)| \leq C \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} [Mf(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}},$$

burada M , Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ve $C = C(\alpha, p, n)$ [40].

İspat. $x \in \mathbb{R}^n$ sabit ve bazı $r > 0$ için

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int_{|y| \leq r} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy + \int_{|y| > r} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-\alpha}} dy := J_1 + J_2.$$

J_1 için

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}r < |y| \leq 2^{-j}r} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{-j-1}r)^{n-\alpha}} \int_{2^{-j-1}r < |y| \leq 2^{-j}r} |f(x-y)| dy \\ &\leq C_r^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^{-j})^\alpha}{(2^{-j}r)^n} \int_{|y| \leq 2^{-j}r} |f(x-y)| dy \\ &\leq C_r^\alpha Mf(x). \end{aligned} \tag{4.18}$$

J_2 için $p = 1$ ise bu durumda

$$J_2 \leq r^{\alpha-n} \|f\|_1. \tag{4.19}$$

$1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ise bu durumda Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \left(\int_{|y| > r} |y|^{(\alpha-n)p'} dy \right)^{1/p'} \|f\|_p \\ &\leq Cr^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ iken (4.18)-(4.20) eşitsizliklerinden $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|I_\alpha f(x)| \leq C(r^\alpha Mf(x) + r^{\alpha - \frac{n}{p}} \|f\|_p)$$

elde edilir.

$r = \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right)^{\frac{n}{\alpha}}$ şeklinde seçilirse

$$\begin{aligned} r^\alpha Mf(x) &= r^{\alpha - \frac{n}{p}} \|f\|_p \\ &= \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} Mf(x)^{1 - \frac{\alpha p}{n}} \end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.12. (Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi) $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere,

(i) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \frac{n}{\alpha}$) ise bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C \|f\|_p;$$

(ii) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ için

$$|x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}},$$

burada $C = C(\alpha, n, p)$ [40].

İspat. (i) $(1 - \frac{\alpha p}{n})q = p$ olsun. Lemma 4.11. den ve $1 < p < \infty$ için M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün L^p -sınırlılığından,

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f\|_q &\leq C \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \|Mf\|_p^{\frac{1-\alpha p}{n}} \\ &\leq C \|f\|_p \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Lemma 4.11. den ve M operatörünün zayıf $(1, 1)$ -sınırlılığından,

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| &= \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \left(\frac{\lambda}{C \|f\|_1^\alpha} \right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \right\} \right| \\ &\leq C_1 \left(\frac{C \|f\|_1^\alpha}{\lambda} \right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \|f\|_1 \\ &\leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_1 \right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

I_α Riesz potansiyeli ile ilgili bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Uyarı 4.13. Teorem 4.12., (ii) sonucu

$$\|I_\alpha f\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq C \|f\|_1 \quad (4.21)$$

şeklinde geliştirilemez.

(4.21) eşitsizliğine karşı bir örnek verilsin.

$|y| \leq 1$ ise $f(y) = 1$ ve $|y| > 1$ ise $f(y) = 0$ olsun. Bu durumda

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{|y| \leq 1} \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

$|x| > 1$ ve $|y| \leq 1$ için

$$|x-y| \leq |x| + |y| \leq |x| + 1 < 2|x|,$$

ve böylece

$$|I_\alpha f(x)| \geq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}}, \quad x > 1,$$

olduğundan

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^{\frac{n}{n-\alpha}} dx \geq C \int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^n} = \infty$$

bulunur.

Uyarı 4.14. $p = \frac{n}{\alpha}$ olduğunda Teorem 4.12.nin (i) şıkkı geçerli değildir.

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha} (\log \frac{1}{|x|})^{-\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)}, & |x| > \frac{1}{2} \\ 0 & , |x| \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

burada ε yeterince küçüktür. Açıkcası, $f \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$. Fakat herhangi bir ε için

$$\frac{\alpha}{n}(1 + \varepsilon) \leq 1$$

sağlanır ise bu durumda

$$I_{\alpha}(f)(0) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} |x|^{-n} (\log \frac{1}{|x|})^{-\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)} dx = \infty$$

ve $I_{\alpha}(f)$ esas olarak orijine yakın bir yerde sınırlı değildir. Buradan $I_{\alpha}f(x) \notin L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

4.1.5. Singüler İntegral Operatörleri

Calderón-Zygmund integral operatörü, Hilbert ve Riesz dönüşümlerinin bir genelleştirilmesidir. Hilbert dönüşümü, eşlenik harmonik fonksiyonun üst yarı düzlemde sınır değer problemlerinin çalışılmasından elde edilmiştir. Riesz dönüşümü ise ikinci mertebeden eliptik denklemlerin çözümlerinin düzenliliğine karşılık gelmektedir .

$f \in L_p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$) olmak üzere \mathbb{R} üzerinde bir Cauchy integrali:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - z} dt,$$

burada $z = x + iy$, $y > 0$. $F(z)$ fonksiyonu \mathbb{R}_+^2 üzerinde analitik olduğu aşıkardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt \\ &:= \frac{1}{2} [(Py * f)(x) + i(Qy * f)(x)], \end{aligned}$$

burada

$$P_y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{t^2 + y^2}$$

Possion çekirdeği ve

$$Q_y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + y^2}$$

ise eşlenik Possion çekirdeği denir.

Ayrıca, $P_y * f$, f fonksiyonunun Poisson integrali olarak ve $Q_y * f$ de f fonksiyonunun eşlenik Poisson integrali olarak adlandırılır. Harmonik fonksiyonların sınır değerlerinin özelliklerinden, $y \rightarrow 0$ iken hemen hemen her $P_y * f \rightarrow f$ ve $y \rightarrow 0$ iken hemen hemen her $Q_y * f \rightarrow Hf$. Hf , f fonksiyonunun Hilbert dönüşümü denir ve

$$Hf(x) = p.v. \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t} dt \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanır.

$f \in L^2(\mathbb{R})$ ise bu durumda

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i \operatorname{sgn} \xi \widehat{f}(\xi) \quad (4.23)$$

olduğu ispatlanabilir.

$K(x) = p.v. \frac{1}{x}$ olsun, bu durumda $Hf = (K * f)$.

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ olduğunu kabul edilsin ve $\Delta u = f$ Poisson denklemi verilsin, burada

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

\mathbb{R}^n üzerinde Laplacian operatörüdür. Denklemin her iki tarafına da Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\widehat{f}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi)$$

elde edilir.

Bu da

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi)$$

denktir.

Böylece, $1 \leq j, k \leq n$ için

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right)}(\xi) = -4\pi^2 \xi_j \xi_k \hat{u}(\xi) = \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \hat{f}(\xi).$$

Eğer operatör

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.24)$$

şeklinde tanımlanırsa bu durumda

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right)}(\xi) = -\widehat{R_j R_k f}(\xi)$$

olduğu görülür.

(4.24) denklemiyle tanımlanan R_j operatörü Riesz dönüşümü olarak tanımlanır. Böylece Poisson denkleminin çözümünün düzenliliği problemi, Riesz dönüşümünün sınırlılığı problemine aktarılmıştır. (4.23) ile (4.24) denklemlerinin karşılaştırılmasıyla, Riesz dönüşümünün bir boyuttan n boyuta Hilbert dönüşümünün bir genelleştirilmesi olduğu görülmektedir. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) ise bu durumda f fonksiyonunun Riesz dönüşümü:

$$R_j f(x) = p.v. C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.25)$$

$K_j(x) = p.v. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ise bu durumda

$$R_j f = K_j * f.$$

Şimdi de singüler integral operatörünün başka bir geçmişi hakkında kısa bilgi verilecektir. Biliniyor ki $n \geq 3$ olduğunda Δ Laplacian operatörünün temel çözümü

$$\Gamma(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_{n-1}} \frac{1}{|x|^n - 2}.$$

Dolayısıyla, f fonksiyonu temel özelliklere sahip olduğundan, örneğin $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ için $\Gamma * f$, $\Delta_u = f$ Poisson denkleminin bir çözümüdür yani

$$u(x) = \Gamma * f(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} dy.$$

Biçimsel olarak, u fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevleri alınarak:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n} f(y) dy := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n} f(y) dy$$

elde edilir, burada $\Omega_j(y) = C_n(1-n|y|^{-2}y_j^2)$.

Ω_j aşağıdaki özellikleri sağlar:

(a) $\Omega_j(\lambda y) = \Omega_j(y), \quad \forall \lambda > 0;$

(b) $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega_j(y') d\sigma(y') = 0;$

(c) $\Omega_j \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$.

$$T_j f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n} f(y) dy$$

şeklinde alınırsa bu durumda $\Delta u = f$ denkleminin çözümünün L^p düzenliliği T_j operatörünün L^p sınırlılığına dönüştürür.

Ω fonksiyonu yukarıdaki (a), (b) ve (c) şartlarını sağlar ise bu durumda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$) için T_Ω integral operatörü

$$T_\Omega f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y) dy \quad (4.26)$$

şeklinde tanımlanır.

$\Omega(x) = \frac{x_j}{|x|}$ alınır ise bu durumda T_Ω operatörü, R_j ($j = 1, 2, \dots, n$) Riesz dönüşümü olur. $n = 1$ ve $\Omega(x) = \text{sgn} x$ alınır ise bu durumda T_Ω operatörü, H Hilbert dönüşümü olur.

4.1.6. Calderón-Zygmund Singüler İntegral Operatörleri

Tanım 4.15. $K(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ olsun ve aşağıdaki şartları sağlasın:

$$|K(x)| \leq B |x|^{-n}, \quad \forall x \neq 0; \quad (4.27)$$

$$\int_{r \leq |x| \leq R} K(x) dx = 0, \quad \forall 0 < r < R < \infty; \quad (4.28)$$

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B, \quad \forall y \neq 0. \quad (4.29)$$

Bu durumda K , Calderón-Zygmund çekirdeği olarak tanımlanır, burada B , x ve y den bağımsız sabittir. Ayrıca (4.29) şartına Homander şartı denir [40].

Teorem 4.16. K , Calderón-Zygmund çekirdeği, $\varepsilon > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) için

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y)K(y)dy$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $\|T_\varepsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$, burada A_p , ε ve f den bağımsızdır.

(ii) Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f$, L^p normu anlamındadır. Yani,

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy$$

olacak şekilde bir T vardır.

(iii) $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$ [40].

Uyarı 4.17. Teorem 4.16. (ii) şikkında tanımlanan T lineer operatörüne Calderón-Zygmund singüler integral operatörü olarak adlandırılır. Ayrıca T_ε , T operatörünün kesilmiş operatörü denir [40].

İspat. $\varepsilon > 0$ için, $K_\varepsilon(x) = K(x)\chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}}(x)$ olsun. Bu durumda $T_\varepsilon f(x) = K_\varepsilon * f(x)$ dir. İlk olarak T_ε , $(2, 2)$ tipli ve T_ε , $L^2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde düzgün sınırlı olduğu ispatlanacaktır. K_ε , (4.27) eşitsizliğini ve ε içinde (4.28) düzgünlüğü sağladığı aşikardır. Şimdi K_ε , (4.28) düzgünlüğünü sağladığı gösterilecektir. Aslında herhangi bir $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($y \neq 0$) ve $|x| \geq 2|y|$ için hem $x \in B(0; \varepsilon)$ ve hem de $x-y \in B(0; \varepsilon)$ ise bu durumda $K_\varepsilon(x) = K_\varepsilon(x-y) = 0$; hem $x \in (B(0, \varepsilon))^c$ ve hem de $x-y \in (B(0, \varepsilon))^c$ ise bu durumda $K_\varepsilon(x) = K(x)$, $K_\varepsilon(x-y) = K(x-y)$ dir. Böylece, K_ε (4.29) şartını sağlar. Eğer $|x| > \varepsilon$ ve $|x-y| < \varepsilon$ ise bu durumda $|x|/2 \leq |x-y| < \varepsilon$ ve $\varepsilon < |x| < 2\varepsilon$ elde edilir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)| dx &\leq \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 2\varepsilon} |K_\varepsilon(x)| dx \\ &\leq CB, \end{aligned}$$

burada C sabiti ε dan bağımsızdır. Benzer şekilde $|x| < \varepsilon$ ve $|x-y| < \varepsilon$ olduğunda K_ε , ε içinde (4.29) düzgünlüğünü sağlar.

Şimdi de $\{T_\varepsilon\}$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayında ε içinde (4.29) düzgün sınırlı olduğu gösterilecektir. Gerçekten de herhangi bir $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ için Plancherel Teoremi'nden 2.34.

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{K}_\varepsilon(\xi)| \leq CB. \quad (4.30)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabitinin olduğunu göstermek yeterlidir. Aslında $\xi \in \mathbb{R}^n$, için

$$\begin{aligned} \hat{K}_\varepsilon(\xi) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_\varepsilon(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{|x| \leq R} e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_\varepsilon(x) dx + \int_{\frac{a}{|\xi|} < |x| \leq R} e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_\varepsilon(x) dx \right) \\ &:= \lim_{R \rightarrow \infty} (I_1 + I_2). \end{aligned}$$

(4.27) ve (4.28) şartlarından

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_{|x| \leq \frac{a}{|\xi|}} (e^{-2\pi i x \cdot \xi} - 1) K_\varepsilon(x) dx \right| \\ &\leq C |\xi| \int_{|x| \leq \frac{a}{|\xi|}} |x| |K_\varepsilon(x)| dx \\ &\leq CaB. \end{aligned}$$

Şimdi I_2 göz önüne alınsın. $y = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ şeklinde alınırsa bu durumda $e^{2\pi i y \cdot \xi} = -1$ olur.

Böylece

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{a}{|\xi|} < |x-y| \leq R} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} K_\varepsilon(x-y) dx \\ &= - \int_{\frac{a}{|\xi|} < |x-y| \leq R} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} K_\varepsilon(x-y) dx \\ &= - \int_{\frac{a}{|\xi|} < |x| \leq R} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} K_\varepsilon(x-y) dx + J, \end{aligned}$$

burada

$$\left(J = \int_{\frac{a}{|\xi|} < |x| \leq R} - \int_{\frac{a}{|\xi|} < |x-y| \leq R} \right) e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} K_\varepsilon(x-y) dx.$$

Dolayısıyla

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{|\xi|} < |x| \leq R} [K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)] e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} dx + \frac{J}{2}$$

elde edilir.

$|y| = \frac{1}{2|\xi|}$ ve $a > 1$ olduğunda,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\frac{a}{|\xi|} < |x| \leq R} [K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)] e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} dx \right| \\ & \leq \int_{|x| \geq 2|y|} |K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)| \\ & \leq CB \end{aligned}$$

burada C ve B , ε ve ξ den bağımsızdırlar.

Diğer yandan, $\{x : \frac{a}{|\xi|} < |x| \leq R\}$ ve $\{x : \frac{a}{|\xi|} < |x-y| \leq R\}$ kümelerinin simetrik farkını E kümesi ise bu durumda

$$|J| \leq \int_E |K_\varepsilon(x-y)| dx.$$

$|y| = \frac{1}{2|\xi|}$ ve $a > 1$ şeklinde alınırsa

$$E \subset \left\{ x : \frac{a}{2|\xi|} \leq |x| \leq \frac{2a}{|\xi|} \right\} \cup \left\{ x : \frac{R}{2} \leq |x| \leq 2R \right\}.$$

Böylece (4.27) eşitsizliğinden

$$|J| \leq \int_{\frac{a}{2|\xi|} \leq |x| \leq \frac{2a}{|\xi|}} |K_\varepsilon(x-y)| dx + \int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq 2R} |K_\varepsilon(x-y)| dx \leq CB,$$

burada C , B , ξ ve ε dan bağımsızdırlar. Yukarıda elde edilen sonuçlardan, (4.30) şartı elde edilir. Böylece $\{T_\varepsilon\}$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ε için düzgün sınırlıdır.

Şimdi T_ε operatörünün (1,1) zayıf tipli ve ε dan bağımsız sınırlı olduğu gösterilecektir.

Her bir $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda > 0$ için Teorem 2.35. (Calderón-Zygmund Ayrıştırma Teoremi) den Q_j örtüşmeyen küplerin bir serisi ve g, b iki fonksiyon olmak üzere $f = g + b$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) $\|g\|_2^2 \leq C\lambda \|f\|_1$, $|g(x)| \leq 2^n \lambda$, **hemen hemen her** $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\lambda \leq \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^n \lambda$, **her** Q_j için;

(c) $\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$;

(d) $b(x) = \sum_j b_j(x)$, $\int_{Q_j} b_j(x) dx = 0$, $\text{supp } b_j \subset Q_j$ **ve** $\|b_j\|_{L^1} \leq 2 \int_{Q_j} |f(x)| dx$

dir.

$$T_\varepsilon f(x) = T_\varepsilon g(x) + T_\varepsilon b(x)$$

den

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon f(x)| > \lambda\}| &\leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon g(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \\ &:= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Birinci adımdan ve (a) şıkkından dolayı

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |T_\varepsilon g(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{4C}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{4C}{\lambda} \|f\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

I_2 için $Q_j^* = 2\sqrt{n}Q_j$, Q_j gibi aynı merkezli ve kenarları Q_j küpünün $2\sqrt{n}$ katı olan bir küp olsun. $E^* = \bigcup_j Q_j^*$ olsun bu durumda (c) şıkkından

$$|E^*| \leq \sum_j |Q_j^*| \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} I_2 &\leq |E^*| + \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus E^* : |T_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \\ &\leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\varepsilon b(x)| dx \end{aligned}$$

olur.

$|T_\varepsilon b(x)| \leq |T_\varepsilon b_j(x)|$ olduğunu göstermek için

$$\sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\varepsilon b_j(x)| dx \leq C \|f\|_1 \quad (4.31)$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Q_j küpünün merkezi y_j olarak alınsın, bu durumda (4.29) şartından dolayı

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\varepsilon b_j(x)| dx &\leq \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \int_{Q_j} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x-y_j)| |b_j(y)| dy dx \\ &\leq \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x-y_j)| dx dy \\ &\leq CB \int_{Q_j} |b_j(y)| dy \\ &\leq 2CB \int_{Q_j} |f(y)| dy \end{aligned}$$

olur ki (b) ve (c) şıklarından (4.31) elde edilir. T_ε operatörü $(1, 1)$ zayıf tiplidir ve onun sınırı ε ya da f den bağımsızdır.

Şimdi T_ε operatörünün $(1 < p < \infty)$ olmak üzere (p, p) tipli olduğu gösterilecektir. Teorem 2.49. (Marcinkiewiz İnterpolasyon Teoremi) den dolayı T_ε operatörü $(1 < p < 2)$ olmak üzere (p, p) tipli olduğu bilinmektedir ve sınırı ε ya da f den bağımsızdır. Şimdi $2 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olduğunu kabul edilsin bu durumda $1 < p' < 2$ olur. Eğer T_ε operatörünün duali \tilde{T}_ε operatörü olarak alınırsa bu durumda $\tilde{T}_\varepsilon f(x) = \tilde{K}_\varepsilon * f(x)$ olur, burada $\tilde{K}_\varepsilon(x) = \overline{K_\varepsilon(-x)}$. Açıkçası $\tilde{K}_\varepsilon, K_\varepsilon$ nun tüm şartlarını sağlar. Böylece \tilde{T}_ε operatörü (p', p') tiplidir. Böylece herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}
\| T_\varepsilon f \|_p &= \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_\varepsilon f(x) g(x) dx \right| \\
&= \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) T_\varepsilon g(\tilde{x}) dx \right| \\
&\leq \| f \|_p \cdot \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \| T_\varepsilon g \|_{p'} \\
&\leq A_p \| f \|_p .
\end{aligned}$$

Burada A_p , ε veya f dan bağımsızdır. Bu da (i) şikkının ispatını tamamlar.

Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) için Tf mevcut ve L^p de $\{T_\varepsilon f\}$ limitidir. İlk olarak kabul edilsin ki $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Herhangi bir y ($y \neq 0$) için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C |y| \quad (4.32)$$

olduğu gösterilecektir. Gerçektende,

$$\frac{d}{dt} f(x - ty) = \langle \nabla f, -y \rangle (x - ty)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
f(x-y) - f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x - ty) dt \\
&= \int_0^1 \langle \nabla f, -y \rangle (x - ty) dt \\
&= \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy') ds, \\
&\leq A_p \| f \|_p
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $y' = \frac{y}{|y|}$. Böylece

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy') ds \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \leq \int_0^{|y|} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy')|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ds \\
&= \leq |y| \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p .
\end{aligned}$$

Şimdi $0 < \eta < \varepsilon$ olduğu kabul edilirse bu durumda (4.32) ve (4.27) eşitsizliklerinde

$$\begin{aligned} \|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p &\leq \int_{\eta < |y| \leq \varepsilon} |K(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &\leq C \int_{\eta < |y|} |y| \cdot |K(y)| dy \\ &\leq CB\varepsilon \rightarrow 0 \quad (\eta, \varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Bu da gösterir ki her bir $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için $\{T_\varepsilon f\}$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ de bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|T_\varepsilon f - Tf\|_p = 0$$

olacak şekilde $Tf \in L^p$ vardır.

$$\|Tf\|_p \leq \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + \|T_\varepsilon f\|_p \leq \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + A_p \|f\|_p$$

olduğundan

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

elde edilir.

Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\delta > 0$ için $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vardır öyle ki $f = g + h$ ve $\|h\|_p < \delta$ dir. Böylece $0 < \eta < \varepsilon$ olacak şekilde η, ε sifira yakınsarken

$$\begin{aligned} \|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p &\leq \|T_\eta(f-g)\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p + \|T_\varepsilon(g-f)\|_p \\ &\leq A_p \|f-g\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p + A_p \|g-f\|_p \\ &\rightarrow 2A_p \delta, \end{aligned}$$

dir. δ keyfi olduğundan dolayı $\{T_\varepsilon f\}$, herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında daima bir Cauchy dizisidir. Böylece

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Tf - T_\varepsilon f\|_p = 0$$

ve

$$\| Tf \|_p \leq A_p \| f \|_p$$

olacak şekilde $Tf \in L^p$ dir ve bu da ispatı tamamlar. ■

4.1.7. Fourier Çarpanları ve Kaldırmalar

Bu kısımda, Fourier çarpanları ve kaldırmalar ile ilgili tanım ve özellikler incelenmiştir.

Ω , \mathbb{R}^n üzerinde kompakt bir küme ve $0 < p \leq \infty$ ise bu durumda

$$L_{pq,\Omega} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \text{supp} \mathcal{F}f \subset \Omega, \|f\|_{L_{pq}} < \infty\}.$$

$0 < p, q \leq \infty$ ve $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$, \mathbb{R}^n üzerinde kompakt bir dizi olsun. $j \in \mathbb{N}_0$ ve $f = \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \in l_q(L_{pq})$ için $f_j \in L_{p,\Omega_j}$ ise bu durumda

$$f = \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \in l_q(L_{pq,\Omega})$$

dizisi şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki $L_{pq,\Omega}$ uzayı ile ilgili bazı teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 4.18. $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ ve $0 < s \leq p$, Ω kompakt bir küme, d , Ω kümesinin çapı ve $f \in L_{pq,\Omega}$ olsun.

(1) $s < p < \infty$ ise bu durumda

$$\left\| \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(\cdot - y)|}{1 + d|y|^{n/s}} \right\|_{L_{pq}} \leq C \|f\|_{L_{pq}}, \quad \forall f \in L_{pq};$$

(2) $p = s$ ise bu durumda

$$\left\| \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(\cdot - y)|}{1 + d|y|^{n/s}} \right\|_{WL_{sq}} \leq C \|f\|_{L_{sq}}, \quad \forall f \in L_{sq}$$

olmak üzere burada pozitif bir C (f den bağımsız) sabiti vardır.

Teorem 4.19. $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < s < \min\{p, q\}$ ve $0 < r \leq \infty$ olsun. Ω_j kompakt kümelerin bir dizisi, $j \in \mathbb{N}_0$ için $f_j \in L_{pq,\Omega_j}$ ve d , Ω_j nin bir çapı olsun.

$$\left\| \left\{ \left\| \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f_j(\cdot - y)|}{1 + d_j|y|^{n/s}} \right\|_{L_{pq}} \right\} \right\|_{l_r} \leq C \left\| \left\{ \|f_j\|_{L_{pq}} \right\} \right\|_{l_r}, \quad \forall \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \in l_r(L_{pq}).$$

olacak şekilde pozitif bir C sabiti vardır.

$s \in \mathbb{R}$ ise bu durumda

$$H_2^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{H_2^s} = \|(1 + |\cdot|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\cdot)\|_{L_2} < \infty \right\}$$

şeklinde yazılır.

4.2. Triebel-Lizorkin-Lorentz Uzayları Tanımı ve Bazı Özellikleri

Harmonik analizin önemli konularından biri olan Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayları bir çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Özellikle, $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ Besov ve $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ Triebel-Lizorkin uzaylarında, adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin incelenmesinde zengin ve kullanışlı araçlar sağlayan tüm klasik uzayları yani Hölder uzayları, Sobolev uzayları, Bessel-potansiyel, Zygmund, yerel Hardy ve $BMO(\mathbb{R}^n)$ gibi uzayları kapsar. (Bkz. [42] [45], [46], [47], [49])

Bu bölümde,

$$\mathcal{S}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y) dy$$

Fourier çarpanlarının temelinde tanımlanan Besov Lorentz ve Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayları incelenmiştir. Ayrıca Triebel-Lizorkin-Lorentz fonksiyon uzaylarının kaldırma özellikleri, Fourier çarpanları, ayrık karakterizasyonları gibi bazı temel özellikleri verilmiştir. Benzer şekilde n-boyutlu Öklid uzayı üzerinde tanımlı Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayları arasında bazı gömmeler ve bu uzaylar üzerinde pseudo diferensiyel operatörün sınırlılığı da incelenmiştir. Benzer problemler Besov-Morrey ve Lizorkin-Triebel-Morrey uzayları için de bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. (Bkz. [8], [12], [17], [26], [37], [39], [43]).

4.2.1. Triebel-Lizorkin-Lorentz Uzayları

Tanım 4.20. $s \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty, 1 \leq r \leq \infty$ olmak üzere Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayı

$$F_{p,q}^{s,r} := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{F_{p,q}^{s,r}} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır [52].

Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayının normu:

$$\|u\|_{F_{p,q}^{s,r}}, \|(\varphi_k * u)_{k \in \mathbb{N}_0}\|_{L_{p,r}(l_q^s)},$$

burada $(\hat{\varphi}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, aşağıdaki gibi tanımlanan bir ikili ayrıştırma ailesidir.

Tanım 4.21. Φ_N , $(N \in \mathbb{N})$, aşağıdaki özelliklere sahip $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sistemlerinin kümesi olarak tanımlanır:

- $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $\hat{\varphi}_k \geq 0$.
- $k \in \mathbb{N}$ için $\text{spt}(\hat{\varphi}_k) \subset \{2^{k-N} \leq |x| \leq 2^{k+N}\}$ ve $\text{spt}(\hat{\varphi}_0) \subset \{|x| \leq 2^N\}$.
- $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ için

$$D_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}_k(\xi) \leq D_2 \quad (4.33)$$

olacak şekilde $D_1, D_2 > 0$ mevcuttur.

- Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ için,

$$|\xi|^{|\alpha|} |\partial^\alpha \hat{\varphi}_k(\xi)| \leq C_\alpha \quad (4.34)$$

olacak şekilde her $k \in \mathbb{N}_0$ ve $\xi \in \mathbb{R}^n$ için $C_\alpha > 0$ mevcuttur.

Ayrıca, $\Phi := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \Phi_N$ kümesi ve $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \Phi$ ile her bir $(\hat{\varphi}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ailesi bir ikili ayrıştırma ailesidir [44].

Burada dikkat edilirse, (4.34) eşitsizliğindeki C_α sabiti k indeksinden bağımsız fakat seçilen $N \in \mathbb{N}$ bağılıdır, yani, ikili ayrıştırmanın 2^N çapındadır. Ayrıca (4.33) eşitsizliğindeki D_2 nin varlığı, $\alpha = 0$ ve $\text{spt}(\hat{\varphi}_k)$ nin özellikleri ile (4.34) eşitsizliğinden elde edilir [15].

Örnek 4.22. $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\{|x| \leq \frac{1}{2}\}$ ve $0 \leq \phi \leq 1$ olmak üzere $\text{spt}(\phi) \subset \{|x| \leq 1\}$, $\phi = 1$ ile radyal simetrik olsun.

$\xi \in \mathbb{R}^n$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\hat{\psi}(\xi) := \phi\left(\frac{\xi}{2}\right) - \phi(\xi)$$

ve

$$\hat{\psi}_k(\xi) := \psi(2^{-k}\xi)$$

şeklinde tanımlansın.

$k \geq 1$ için $\varphi_k := \psi_k$ ve

$$\hat{\varphi}_0(\xi) = \begin{cases} \sum_{j \leq 0} \hat{\psi}_j(\xi), & \xi \neq 0 \text{ ise} \\ 1 & , \xi = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\hat{\varphi}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Bu durumda, her $\xi \in \mathbb{R}^n$ için $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \varphi_k(\xi) = 1$ olmak üzere $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \Phi_1$ elde edilir. Ayrıca, aşağıdaki özellikler gerçekleşir:

(a) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|\varphi_k\|_{L^1} = \|\psi\|_{L^1}$.

(b) \mathbb{R}^n üzerinde $\sum_{k=1}^N \hat{\varphi}_k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$ lokal olarak tektir.

(c) $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ için $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $\sum_{j=0}^N \varphi_j * f \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$.

(d) $\forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ için $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ uzayında $\sum_{j=0}^N \varphi_j * u \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u$.

Eğer $\|\cdot\|_{L_{p,r}(l_q^s)}$ Lorentz-normu yerine $\|\cdot\|_{L_p(l_q^s)}$ yazılırsa bu durumda çok iyi bilinen $F_{p,q}^s$ Triebel-Lizorkin uzayları elde edilir. Daha genel olarak $F_{p,q}^{s,p} = F_{p,q}^s$ [15].

Aşağıdaki sonuçlar Yang, Cheng ve Peng [52] tarafından elde edilmiştir. İspatları dalga teorisine dayanmaktadır. Ayrıca burada belirtelim ki, H. Triebel [44] tarafından geliştirilen interpolasyon özelliği ile L^p -interpolasyon, geri çekme ve düzeltme teknikleri ile türetmenin mümkün olduğu görülmektedir.

Önerme 4.23. Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayları, ikili ayrıştırmanın seçiminden bağımsızdır [15].

Teorem 4.24. $s \in \mathbb{R}, 1 < p_0, p_1, q < \infty, 1 \leq r_0, r_1, r \leq \infty, p_0 \neq p_1$ ve $0 < \theta < 1$ için öyle ki $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ olacak şekilde

$$(F_{p_0,q}^{s,r_0}, F_{p_1,q}^{s,r_1})_{\theta,r} = F_{p,q}^{s,r}$$

[15].

Lemma 4.25. $s \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty$ ve $1 \leq r \leq \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sürekli gömmeler mevcuttur.

(i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset F_{p,q}^{s,r} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ve yoğundur.

(ii) $\tau \geq 0$ için $F_{p,q}^{s+\tau,r} \subset F_{p,q}^{s,r}$.

(iii) $s > 0 \Rightarrow F_{p,q}^{s,r} \subset L_{p,r}$ [15].

İspat. (i) şıkkı, Triebel-Lizorkin uzayları için

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset F_{p_0,q}^s \cap F_{p_1,q}^s \subset F_{p,q}^{s,r} \subset F_{p_0,q}^s + F_{p_1,q}^s \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

olduğundan ve Banach uzaylarının interpolasyon çiftinin kesişiminin reel interpolasyon uzayında yoğun olmasından ispatlanır.

(ii) şıkkı $l_q^{s+\tau} \subset l_q^s$ nin bir sonucudur.

(iii) şıkkının ispatında Örnek 4.22. nin $(\hat{\varphi}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ikili ayrıştırmasını kullanarak ilk önce $\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k * u| \right\|_{L_{p,r}} \leq C \left\| \left(\frac{1}{2^{sk}} \right)_{k \in \mathbb{N}_0} \right\|_{l_{q'}} \|u\|_{F_{p,q}^{s,r}} \quad (4.35)$$

elde edilir. $s > 0$ olduğundan $u \in F_{p,q}^{s,r}$ için sağ taraf sonludur. Örnek 4.22. (d) den $u = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k * u$ elde edilir, buradaki yakınsama $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ içindir. Şimdi (4.35) eşitsizliği, serinin hemen hemen her yerde noktasal yakınsaklığını verir ve böylece u ölçülebilir bir fonksiyondur. Diğer taraftan (4.35) eşitsizliğinden

$$\|u\|_{L_{p,r}} \leq C' \|u\|_{F_{p,q}^{s,r}}.$$

■

Önerme 4.26. $s \in \mathbb{R}$ ve $1 < p, q, r < \infty$ için $F_{p,q}^{s,r}$ uzayı \mathcal{HT} sınıfındandır [15].

İspat. Hilbert dönüşümünün

$$H : \mathcal{S}(\mathbb{R}, F_{p,q}^{s,r}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}, F_{p,q}^{s,r}),$$

$$Hf(t) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|s|>\epsilon} \frac{f(t-s)}{s} ds$$

uzantısının $H \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}, F_{p,q}^{s,r}))$ olduğunu göstermek gerekiyor . Herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ ve $1 < q < \infty$ için, Tonelli'nin teoremi şunu ifade eder:

$L_q(\mathbb{R}, l_q^s)$ uzayı \mathcal{HT} sınıfının bir uzayıdır ve ayrıca keyfi bir $1 < p < \infty$ için de $L_p(\mathbb{R}, l_q^s)$ uzayıda \mathcal{HT} sınıfının bir uzayıdır . Böylece, $F_{p,q}^s$ Triebel-Lizorkin uzayı, $L_p(\mathbb{R}, l_q^s)$

uzayının bir alt uzayı olduğundan, herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ ve $1 < p, q < \infty$ için \mathcal{HT} -özellikleri $F_{p,q}^s$ uzayı içinde geçerlidir.

Şimdi ispatın tamamlanması yönünden Teorem 4.24. in şartlarını sağlayan s, p, q, r sabit parametreleri için, interpolasyon özelliğinin doğrudan bir sonucu olarak

$$L_r(\mathbb{R}, (X_0, X_1)_{\theta,r}) = (L_r(\mathbb{R}, X_0), L_r(\mathbb{R}, X_1))_{\theta,r}$$

olup $(X_0, X_1)_{\theta,r}$ reel interpolasyon uzayı \mathcal{HT} sınıfının uzayının bir X_0, X_1 interpolasyonu çifti için \mathcal{HT} sınıfındadır. Dolayısıyla $F_{p,q}^{s,r}$ uzayı \mathcal{HT} sınıfıdır. ■

Sonuç 4.27. $s \in \mathbb{R}$ ve $1 < p, q, r < \infty$ için $F_{p,q}^{s,r}$ uzayı, refleksifdir [33].

Sonuç 4.27. ya benzer aşağıdaki sonuç, H. Triebel [44] tarafından Triebel-Lizorkin uzayları için elde ettiği sonuç (bkz. Teorem 2.6.2) ve Teorem 4.24. in bir sonucu olarak verilmiştir.

Önerme 4.28. $s \in \mathbb{R}$ ve $1 < p, q, r < \infty$ için $F_{p,q}^{s,r}$ uzayının dual uzayı, $F_{p,q}^{-s,r'}$ uzayıdır, burada $1 < p', q', r' < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Önerme 4.29. $s \in \mathbb{R}$ ve $1 < p, q, r < \infty$ için $F_{p,q}^{s,r}$ uzayı (α) özelliğine sahiptir [15].

İspat. $L_p(\mathbb{R}^n, l_q^s)$ uzayında sürekli bir gömme mevcut olduğundan dolayı $F_{p,q}^s$ Triebel-Lizorkin uzayları (α) özelliğine sahiptirler. Dolayısıyla (α) özelliği reel interpolasyon altında korunduğundan bunu gerektirir (bkz. [15], Teorem 4.5). ■

Teorem 4.30. (Triebel-Lizorkin-Lorentz uzayları için Çarpan Teoremi)

$s \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty$ ve $1 \leq r \leq \infty$ olsun. $\forall \alpha \in \{0, 1\}^n$ için

$$C_\alpha := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \lambda \in \Lambda} |\xi^\alpha \partial^\alpha m_\lambda(\xi)| < \infty$$

olacak şekilde $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ olsun. Bu durumda $\forall \lambda \in \Lambda$ için

$$\mathcal{F}^{-1} m_\lambda \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

$$\|T_\lambda\|_{\mathcal{S}(F_{p,q}^{s,r})} \leq C \max_{\alpha \in \{0,1\}^n} C_\alpha$$

olacak şekilde

$$T_\lambda : F_{p,q}^{s,r} \rightarrow F_{p,q}^{s,r}$$

sürekli bir (tek) uzantıya sahiptir, burada $C > 0$ sabiti, p, q, s, r ve n parametrelerine bağlıdır. Ayrıca $1 < r < \infty$ durumunda $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{S}(F_{p,q}^{s,r})$, \mathcal{R} -sınırlıdır [15].

İspat. $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in l_q^s$ ve $\lambda \in \Lambda$ için $M_\lambda(\xi)x := (m_\lambda(\xi)x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ olacak şekilde $M_\lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}(l_q^s))$ tanımlansın. Kahane büzülme ilkesine göre (Teorem 2.60.), $C_\alpha < \infty$ olması durumunda $\{\xi^\alpha \partial^\alpha M_\lambda(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{S}(l_q^s)$ ifadesinin \mathcal{R} -sınırlılığını ve \mathcal{R}_q -sınırı $2 \max_{\alpha \in \{0,1\}^n} C_\alpha$ değerini aşmadığı görülür. l_q^s ($1 < q < \infty$) \mathcal{HT} sınıfı olduğundan ve (α) özelliğine sahip olduğundan dolayı teorem 2.61., M_λ nin bir Fourier çarpanı olduğunu yani, her $\lambda \in \Lambda$ için

$$\mathcal{F}^{-1}M_\lambda \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, l_q^s) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, l_q^s)$$

ifadesinin sürekli bir uzantısı $\mathcal{S}_\lambda : L_p(l_q^s) \rightarrow L_p(l_q^s)$ olduğu görülür öyle ki

$$\mathcal{R}_q(\{\mathcal{S}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}) \leq C \max_{\alpha \in \{0,1\}^n} C_\alpha =: K. \quad (4.36)$$

Buradan

$$(\varphi_k * \mathcal{F}^{-1}m_\lambda \mathcal{F}f)_{k \in \mathbb{N}_0} = \mathcal{F}^{-1}M_\lambda \mathcal{F}(\varphi_k * f)_{k \in \mathbb{N}_0} \quad (4.37)$$

özdeşliğinden $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ için $\|\mathcal{F}^{-1}m_\lambda \mathcal{F}f\|_{F_{p,q}^s} \leq K \|f\|_{F_{p,q}^s}$ eşitsizliğini ve sonuç olarak $\mathcal{F}^{-1}m_\lambda \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nin sürekli bir $T_\lambda : F_{p,q}^s \rightarrow F_{p,q}^s$ uzantısı elde edilir. Dolayısıyla (4.36) ve (4.37) eşitsizliklerinden $\mathcal{R}_q(\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}) \leq K$. Böylece $p = r$ için ispat tamamlanmış olur.

Sonucu daha da genelleştirmek için, $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$ ve $0 < \theta < 1$ aralığından seçilirse öyle ki $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ ve $F_{p,q}^{s,r} = (F_{p_0,q}^s, F_{p_1,q}^s)_{\theta,r}$ elde edilir. Böylece

$$T_\lambda : (F_{p_0,q}^s, F_{p_1,q}^s)_{\theta,r} \rightarrow (F_{p_0,q}^s, F_{p_1,q}^s)_{\theta,r}$$

için $\|T_\lambda\|_{\mathcal{S}(F_{p,q}^{s,r})} \leq C' \max_{\alpha \in \{0,1\}^n} C_\alpha$ elde edilir, çünkü reel interpolasyon methodu θ türündendir, ayrıca burada $C' > 0$ sadece p, q, s, r ve n bağlı bir sabittir.

$j = 0, 1$ için $F_{p_j,q}^s$, \mathcal{HT} sınıfına ait olduğundan, $p = r$ durumunun bir sonucu olarak $1 < r < \infty$ için

$$T_\lambda : ((F_{p_0,q}^s, F_{p_1,q}^s)_{\theta,r}) \rightarrow (F_{p_0,q}^s, F_{p_1,q}^s)_{\theta,r}$$

\mathcal{R} -sınırlılığı elde edilir (bkz. [19], Teorem [3.19]). ■

Önerme 4.31. $s \in \mathbb{R}$, $1 < p, q < \infty$ ve $1 \leq r \leq \infty$ olmak üzere

(i) $\sigma \in \mathbb{R}$ için

$$F_{p,q}^{s+\sigma,r} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}} \mathcal{F}u \in F_{p,q}^{s,r}\}.$$

(ii) $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$F_{p,q}^{s+k,r} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha u \in F_{p,q}^{s,r} \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k\}.$$

(iii) $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$F_{p,q}^{s+2m,r} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \Delta^j u \in F_{p,q}^{s,r} \forall j \in \mathbb{N}_0, j \leq m\}.$$

(i), (ii), (iii) ile verilen uzayların normları sırasıyla

(i)

$$\|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}} \mathcal{F}u\|_{F_{p,q}^{s,r}},$$

(ii)

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{F_{p,q}^{s,r}},$$

(iii)

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \|\Delta^j u\|_{F_{p,q}^{s,r}}$$

şeklinde olup birbirleri ile denk normalardır [15].

İspat. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$B^\sigma u := \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}} \mathcal{F}u$$

Bessel-potensiyel operatörü gözönüne alındığında

$(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \Phi$ sabit ve $\sigma \in \mathbb{R}^n$ ise bu durumda

$$\hat{\psi}_k(\xi) = \frac{2^{k\sigma}}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}}} \hat{\varphi}_k(\xi)$$

olduğundan Fourier kaldırma özelliğinden yararlanarak $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \Phi$ elde edilir. Böylece

$$\|u\|_{F_{p,q}^{s,r}} \sim \|B^\sigma u\|_{F_{p,q}^{s-\sigma,r}} \quad (4.38)$$

ve (i) şıkkının ispatı tamamlanır.

Şimdi (4.38) eşitsizliğinde özel olarak $\sigma = 2m$ şeklinde seçilirse, $\|u\|_{F_{p,q}^{s+2m,r}} \sim \|(1 - \Delta)^m u\|_{F_{p,q}^{s,r}}$ denkliği ile birlikte

$$F_{p,q}^{s+2m,r} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (1 - \Delta)^m u \in F_{p,q}^{s,r}\}$$

elde edilir. Dolayısıyla (iii) ispatlamak için

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \|\Delta^j u\|_{F_{p,q}^{s,r}} \leq C \|(1 - \Delta)^m u\|_{F_{p,q}^{s,r}}$$

olduğunu göstermek yeterlidir, çünkü aksi durumu aşıkardır. Bu amaçla

$$(-\Delta)^j u = \mathcal{F}^{-1} \frac{|\xi|^{2j}}{(1 + |\xi|^2)^k} \mathcal{F}(1 - \Delta)^k u$$

şeklinde yazılsın; gerçekten de $\frac{|\xi|^{2j}}{(1 + |\xi|^2)^k}$ ifadesi Teorem 4.30. un şartlarını sağladığından dolayı (iii) şıkkı ispatlanmış olur.

Şimdi (ii) şıkkının ispatı için

$$\partial^\alpha u = i^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1} \frac{\xi^\alpha}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}} \mathcal{F} B^{|\alpha|} u, \quad |\alpha| \leq k, \quad (4.39)$$

ve

$$B^k u = \mathcal{F}^{-1} \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{k!}{\alpha!(k - |\alpha|)!} \xi^\alpha \frac{\xi^\alpha}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}}} \mathcal{F} u \quad (4.40)$$

yazılırsa; Teorem 4.30. ve (4.38) denkliğinden

$$\|u\|_{F_{p,q}^{s+k,r}} \sim \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{F_{p,q}^{s,r}}$$

elde edilir, burada (4.40) eşitliği " \leq " durumunu ve (4.39) eşitliği " \geq " durumunu ifade eder. ■

Teorem 4.19. ve H. Triebel [46] tarafından $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki (Blm. 1.6.3, Teorem 1, syf. 31-32) sonuçlarına göre elde edilen teorem ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 4.32. $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ ve $0 < r \leq \infty$ olsun. $\Omega = \{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$, \mathbb{R}^n üzerinde kompakt bir dizi olsun $j \in \mathbb{N}_0$ için $f_j \in L_{pq, \Omega_j}$ ve d_j , Ω_j nın çapı olsun. $\nu > n/2 + n/\min\{p, q\}$ ise pozitif bir C sabiti vardır öyle ki;

Herhangi bir $\{G_j\} \in H_2^\nu(\mathbb{R}^n)$ dizisi için

$$\|\{\mathcal{F}^{-1}G_j\mathcal{F}f_j\}\|_{L_{pq}(l_r)} \leq C \sup_j \|G_j(d_j \cdot)\|_{H_2^\nu} \|\{f_j\}\|_{L_{pq}(l_r)}$$

ve

$$\left\| \left\{ \|\mathcal{F}^{-1}G_j\mathcal{F}f_j\|_{L_{pq}} \right\} \right\|_{l_r} \leq C \sup_j \|G_j(d_j \cdot)\|_{H_2^\nu} \left\| \left\{ \|f_j\|_{L_{pq}} \right\} \right\|_{l_r}$$

[3].

$B_{pq,r}^s$ ve $F_{pq,r}^s$ uzayları için elde edilen sonuç:

Teorem 4.33. $\phi = \{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$, $\psi = \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ olsun.

(i) $-\infty < s < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$ ise bu durumda $F_{pq,r}^s$ uzayında $\|f\|_{F_{pq,r}^s}^\phi$ ve $\|f\|_{F_{pq,r}^s}^\psi$ normları denktir;

(ii) $-\infty < s < \infty$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ ise bu durumda $B_{pq,r}^s$ uzayında $\|f\|_{B_{pq,r}^s}^\phi$ ve $\|f\|_{B_{pq,r}^s}^\psi$ normları denktir [3].

$L \in \mathbb{N}$ ve $\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$, kompakt destekli tüm $\Phi = \{\Phi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ fonksiyon dizilerinin koleksiyonu olsun ve

$$L(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^L \sum_{|\gamma| \leq L} |D^\gamma \phi_0(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, j \in \mathbb{N}} (|x|^L + |x|^{-L}) \sum_{|\gamma| \leq L} |D^\gamma \phi_j(2^j x)| < \infty$$

sağlansın. Bu durumda herhangi bir $L \in \mathbb{N}$ için

$$\Phi(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$$

olduğu kolayca görülebilir.

$L \in \mathbb{N}$, $\phi = \{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ve $a > 0$ olsun. Maksimal fonksiyon

$$(\phi_j^* f)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\mathcal{F}^{-1} \phi_j \mathcal{F} f)(x - y)|}{1 + |2^j y|^a}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \mathbb{N}_0$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.19. ve H. Triebel [46] tarafından maksimal eşitsizlikler için ispatlanan (Blm. 2.3.6, Önerme 1, syf. 53) sonuçlara göre elde edilen teoremler aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 4.34. $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < r \leq \infty$, $a > n/\min\{p, q\}$ olsun. $L > |s| + 3a + n + 2$ ise bu durumda

$$\left\| \left\{ 2^{js} \sup_{0 < \tau < 1} (\phi_j^{\tau*} f) \right\} \right\|_{l_r(L_{pq})} \leq C \sup_{0 < \tau < 1} L(\phi^\tau) \|f\|_{l_r(L_{pq})}^\phi \quad (4.41)$$

ve $\forall \phi = \{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\phi^\tau = \{\phi_j^\tau\}_{j \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$, $0 < \tau < 1$ için

$$\left\| \left\{ 2^{js} \left\| \sup_{0 < \tau < 1} (\phi_j^{\tau*} f) \right\|_{L_{pq}} \right\} \right\|_{l_r} \leq C \sup_{0 < \tau < 1} L(\phi^\tau) \|f\|_{BM_{pq,r}^s}^\phi \quad (4.42)$$

olacak şekilde pozitif bir C sabiti vardır [3].

Bir $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu,

$$\|\mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F}f\|_{B_{pq,r}^s} \leq C \|f\|_{B_{pq,r}^s}, \quad \forall f \in BM_{pq,r}^s,$$

olacak şekilde pozitif bir C sabiti mevcut ise $(B_{pq,r}^s, B_{pq,r}^s)$ Besov-Lorentz uzayında bir Fourier çarpanı olarak adlandırılır.

Benzer şekilde, Fourier çarpanı $(F_{pq,r}^s, F_{pq,r}^s)$ Tribel-Lizorkin uzayında da tanımlanır.

$N \in \mathbb{N}$ olmak üzere m Fourier çarpanınının normu

$$\|m\|_N = \sup_{|\gamma| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{N/2} |D^\gamma m(x)|$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 4.35. $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ ve $0 < r \leq \infty$ olsun. N yeterince büyük seçilirse bu durumda $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F}f\|_{B_{pq,r}^s} \leq C \|m\|_N \|f\|_{B_{pq,r}^s}, \quad \forall f \in B_{pq,r}^s, \quad (4.43)$$

ve

$$\|\mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F}f\|_{F_{pq,r}^s} \leq C \|m\|_N \|f\|_{F_{pq,r}^s}, \quad \forall f \in F_{pq,r}^s, \quad (4.44)$$

olacak şekilde pozitif bir C sabiti vardır [3].

I_σ Bessel potensiyeli, $\sigma \in \mathbb{R}$ için

$$I_\sigma f = \mathcal{F}^{-1} (1 + |x|^2)^{\sigma/2} \mathcal{F} f, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada,

$$I_\sigma I_\beta = I_{\sigma+\beta}$$

ve sırasıyla, I_σ Bessel potensiyel fonksiyonu, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ Tempered Schwartz ve $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Schwartz uzaylarında birebirdir.

Aşağıdaki teoremda $B_{pq,r}^s$ Besov-Lorentz ve $F_{pq,r}^s$ Triebel-Lizorkin uzayları için kaldırma özelliği ile ilgili elde edilen sonuç verilmiştir.

Teorem 4.36. $s, \sigma \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ ve $0 < r \leq \infty$ olsun. Bu durumda

(i) I_σ Bessel potensiyeli, $B_{pq,r}^s$ uzayından $B_{pq,r}^{s-\sigma}$ uzayına izomorfik bir dönüşümdür. Ayrıca, $\forall f \in B_{pq,r}^s$ için

$$\sum_{|\gamma| \leq m} \|D^\gamma f\|_{B_{pq,r}^{s-m}} \asymp \|f\|_{B_{pq,r}^s} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right\|_{B_{pq,r}^{s-m}}, \quad (4.45)$$

(ii) I_σ Bessel potensiyeli, $F_{pq,r}^s$ uzayından $F_{pq,r}^{s-\sigma}$ uzayına izomorfik bir dönüşümdür. Ayrıca, $\forall f \in F_{pq,r}^s$ için

$$\sum_{|\gamma| \leq m} \|D^\gamma f\|_{F_{pq,r}^{s-m}} \asymp \|f\|_{F_{pq,r}^s} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right\|_{F_{pq,r}^{s-m}}. \quad (4.46)$$

[3]

İspat. (i) şikkini ispatlamak yeterlidir ve (ii) nin ispatıda benzer şekilde yapılır.

İlk önce $\phi = \{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$\psi(x) = \{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0} = \{2^{-k\sigma} (1 + |x|^2)^{n/2} \phi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n),$$

burada L büyük bir sayı seçilebilir.

$f \in BM_{pq,r}^s$, Teorem 4.34. ve

$$|\mathcal{F}^{-1}\psi_k\mathcal{F}f(x)| \leq \psi_k^*f(x), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \|I_\sigma f\|_{BM_{pq,r}^{s-\sigma}} &= \left\| \left\{ 2^{(s-\sigma)k} \mathcal{F}^{-1}(1 + |\cdot|^2)^{\sigma/2} \phi_k \mathcal{F}f \right\} \right\|_{l_r(L_{pq})} \\ &= \left\| \left\{ 2^{sk} \mathcal{F}^{-1}\psi_k \mathcal{F}f \right\} \right\|_{l_r(L_{pq})} \\ &\leq C \|f\|_{BM_{pq,r}^s} \end{aligned} \quad (4.47)$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.47) eşitsizliği ve $f = I_\sigma I_{-\sigma} f$ olmasından dolayı

$$\|f\|_{BM_{pq,r}^s} \leq C \|I_\sigma f\|_{BM_{pq,r}^{s-\sigma}}. \quad (4.48)$$

I_σ Bessel potensiyeli, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bire bir olduğundan dolayı $BM_{pq,r}^s$ uzayından $BM_{pq,r}^{s-\sigma}$ uzayına bire birdir. (4.47) ve (4.48) eşitsizliklerinden, $\|I_\sigma f\|_{BM_{pq,r}^{s-\sigma}}$ normu $BM_{pq,r}^s$ için bir yarı normdur.

Şimdi (4.45) eşitsizliğinin ispatı verilsin. $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ için Teorem 4.35. dan dolayı $x^\gamma(1 + |x|^2)^{-m/2}$, $BM_{pq,r}^s$ üzerinde bir Fourier çarpanıdır.

$|\gamma| \leq m$ ve $f \in BM_{pq,r}^s$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq m} \|D^\gamma f\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} &= \sum_{|\gamma| \leq m} \|\mathcal{F}^{-1}x^\gamma \mathcal{F}f\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} \\ &= \sum_{|\gamma| \leq m} \|\mathcal{F}^{-1}x^\gamma(1 + |x|^2)^{-m/2} \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1}(1 + |x|^2)^{m/2} \mathcal{F}f\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} \\ &\leq \|I_m f\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} \leq C \|f\|_{BM_{pq,r}^s} \end{aligned} \quad (4.49)$$

elde edilir.

Böylece (4.47) eşitsizliğinden (4.49) eşitsizliği elde edilir.

Son olarak, $j = 1, \dots, n$ için f , $\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \in BM_{pq,r}^{s-m}$ ve $f \in BM_{pq,r}^s$ olduğu varsayalım. Ayrıca H. Triebel [46] tarafından, $BM_{pq,r}^{s-m}$ uzayı üzerinde $\rho_1(x), \dots, \rho_n(x)$ Fourier çarpanları ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için C pozitif bir sabit olacak şekilde

$$1 + \sum_{j=1}^n \rho_j(x) x_j^m \geq C(1 + |x|^2)^{m/2}$$

olduğu ispatlanmıştır.

Teorem 4.35. den, $(BM_{pq,r}^{s-m}, BM_{pq,r}^{s-m})$ üzerinde

$$M(x) = (1 + |x|^2)^{m/2} \left(1 + \sum_{j=1}^n \rho_j(x) x_j^m \right)^{-1}$$

bir Fourier çarpanıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|f\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} &\leq C \left\| \mathcal{F}^{-1} (1 + |x|^2)^{m/2} \mathcal{F} f \right\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} \\ &\leq C \left\| \mathcal{F}^{-1} M(x) \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^n \rho_j(x) x_j^m \right) \mathcal{F} f \right\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} \\ &\leq C \|f\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} + C \sum_{j=1}^n \left\| \mathcal{F}^{-1} \rho_j(x) x_j^m \mathcal{F} f \right\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece

$$x_j^m \mathcal{F} f = C \mathcal{F} \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \quad j = 1, \dots, n$$

ve $\rho_j(x)$ in Fourier çarpanı özelliklerinden

$$\|f\|_{BM_{pq,r}^s} \leq C \|f\|_{BM_{pq,r}^{s-m}} + C \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right\|_{BM_{pq,r}^{s-m}}$$

elde edilir. Bu sonuca göre (4.45) denklığı gösterilmiş olur. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

$F_{p,q}^{s,r}$ ölçeği birçok önemli fonksiyon uzayı içerir: $r = p$ olmak üzere, $q = 2$ için H_p^s Bessel potansiyel uzaylarını elde edildi. Bununla birlikte sırasıyla $s \notin \mathbb{Z}$ durumunda $q = p$ için ve $s \in \mathbb{Z}$ durumunda $q = 2$ için W_p^s Sobolev-Slobodeckij uzayları elde edildi. Özellikle, $s = 0$ olması durumunda, L_p Lebesgue uzaylarını ve Lorentz uzaylarını $L_{p,r} = F_{p,2}^{0,r}$ elde edildi. Bu tez konusunu bir başlangıç kabul edilerek, "Harmonik Analizde Triebel-Lizorkin-Lorentz Uzayları ve İntegral Operatörleri" konusunda daha ileri düzeyde çalışmalar yapabilmek için bir temel oluşturulması hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Adams, R.A., & Fournier, J. (2003). *Sobolev Spaces*, Academic Press, London.
- [2] Akbulut, A., Guliyev, V.S. & Mustafayev, R. (2010). On the boundedness of the maximal operator and singular integral operators in generalized Morrey spaces, *Mathematica Bohemica*.
- [3] Akbulut, A., & Girginol, S. (2025). *Some properties of Triebel-Lizorkin-Lorentz*, Proceedings of the 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, pp. 1-6.
- [4] Alp, M., & Musayev, B. (2000). *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, Ankara.
- [5] Alvarez, J., Lakey, J., & Guzman-Partida, M. (2000). Spaces of bounded λ -central mean oscillation, Morrey spaces, and λ -central Carleson measures, *Collect. Math.*, 51(1), 1-47.
- [6] Amann, H. (1997). Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications, *Math. Nachr.*, 186:5-56.
- [7] Besov, O.V. (1959). On some families of functional spaces. Imbedding and extension theorems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (in Russian).
- [8] Bergh, J., & Löfström, L. (1976) *Interpolation spaces, an introduction* Springer-Verlag.
- [9] Denk, R., Hieber, M., & Prüss, J. (2003). R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 166:viii+14.
- [10] Eleonora, D.N., Palatucci, G., & Valdinoci, E. (2012). Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, *Bull. Sci. Math.*, 136(2012), 521-573.
- [11] Grafakos, L. (2004). *Classical and modern Fourier analysis*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London.
- [12] Guliev., V.S., & Najafov, A.M. (2003). *The imbedding theorems on the Lizorkin Triebel-Morrey type space*, *Progress in Analysis* Proceeding of the 3 rd International ISAAC Congress. Volume I, Editors: H.Begehr, R.P.Gilbert, M.W.Wong, pp. 23-30.
- [13] Gunawan, H., Hakim, D.I., Limanta, K.M., & Masta, A.A. (2017). Inclusion properties of generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.*, 290, 332-340.
- [14] Tanaka, H., (2002). A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood Maximal Function, *Math. Sci.*, Austral, 65, 253-258.
- [15] Hobus, P., & Saal, J. (2019). Triebel-Lizorkin-Lorentz Spaces and the Navier-Stokes Equations, *Z. Anal. Anwend.*, 38(1), 41-72.

- [16] Hytönen, T., Van Neerven, J., Veraar, M., & Weis, L. (2016). *Analysis in Banach Spaces*, Springer.
- [17] Henggen, W., (2009). Decomposition for Morrey type Besov-Triebel spaces, *Math. Nachr.*, 282, 774-787.
- [18] Kinnunen, J. (1997). The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function, *Israel J. Math.*, 100 , 117-124.
- [19] Kaip, M., & Saal, J. (2012). The permanence of R-boundedness and property τ under interpolation and applications to parabolic systems, *J. Math. Sci. Univ.*, Tokyo, 19(3), 359-407.
- [20] Kolmogorov, A.N., & Fomin, S.V. (1957). *Elements of the theory of functions and functional analysis, Volume I*, Graylock Press Rochester, N. Y.
- [21] Kuttler, K. (2001). *Basic Analysis*, Rinton Press, ISBN: 158-949-019-3, 978-158-949-019-2.
- [22] Lawrence, C.E. (2010). *Partial Differential Equations: Second Edition (Graduate Studies in Mathematics) 2nd Edition*, American Mathematical Society, ISBN:978-0821849743.
- [23] Lebesgue, H. (1950). *Notices d'histoire des mathématiques.*, French avec une introduction de L. Felix. Monographies de L'Enseignement Mathematique, no.4 L'Enseignement mathematique, Geneva.
- [24] Lorentz, G.G. (1950). Some new functional spaces, *Annals of Mathematics*, Second Series, 51(1), 37-55.
- [25] Lorentz, G.G. (1951). On the theory of spaces, *Pacific J. Math.*, 1, 411-429.
- [26] Lin T., & Xu, J. (2005). Some properties of Morrey type Besov-Triebel spaces, *Math. Nachr.*, 278, 904-917.
- [27] Lunardi, A. (1995). *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Basel:Birkhäuser Verlag.
- [28] Pick, L., Kufner, A., John, O., & Fucík, S. (2012). *Function Spaces*, 1. Berlin, Boston: De Gruyter.
- [29] Prüss, J., & Simonett, G. (2016). *Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations*, Birkhäuser.
- [30] Richard, M. (2020). *Introduction to Functional Analysis*, Cambridge
- [31] Riesz, F. (1910). Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.*, (German), 4(69), 449-497.
- [32] Royden, H. L. (1968). *Real Analysis*, MacMillan, New York, 2nd ed..
- [33] Rubio de Francia, J. (1986). *Martingale and integral transforms of Banach space valued functions*, In Probability and Banach Spaces, pages 195-222. Springer, Berlin.

- [34] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics*, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf.
- [35] Rudin, W. (1991). *Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics*, McGraw-Hill, Inc., New York.
- [36] Sadosky, C. (1979). *Interpolation of operators and singular integrals*, Marcel Dekker Inc., New York.
- [37] Sawano, Y. (2009). *A note on Besov-Morrey spaces and Triebel-Lizorkin-Morrey spaces*, Acta Math. Sinica 25, 1223-1242.
- [38] Sawano, Y. (2020). *Morrey Spaces, Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, Volume I*, Chapman and Hall/CRC, New York.
- [39] Sawano., Y. & Tanako., H. (2007) *Decompositions of Besov-Morrey spaces and Triebel-Lizorkin-Morrey spaces*, Math. Z. 257, 871-905.
- [40] Shanzhen, L., Yong, D., & Dunyan, Y. (2007). *Singular Integrals and Related Topics*, World Scientific Publishing Company, Singapore, ISBN: 978-9812706232.
- [41] Slobodeckij, L.N. (1958). *Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary value problems of partial differential equations*, Leningrad. Gos. Ped. Inst. Uèep. Zap.
- [42] Stein. E,M (1970). *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- [43] Taibleson., M.H.(1964) *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space I*, J. Math. Mech. 13, 407-479.
- [44] Triebel, H. (1978). *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [45] Triebel, H. (1978). *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North- Holland, Amsterdam, 1978 and VEB, Berlin, 1978.
- [46] Triebel, H. (1983). *Theory of Function Spaces*, Birkhauser, Basel.
- [47] Triebel, H. (1992). *Theory of Function Spaces II*, Birkhauser, Basel.
- [48] Triebel, H. (1995). *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators* Heidelberg: Johann Ambrosius Barth.
- [49] Triebel, H. (1997). *Fractals and Spectra: Related to Fourier Analysis and Function Spaces*, Birkhauser, Basel.
- [50] Xiang, Z., & Yan, W. (2011). On the well-posedness of the quasi-geostrophic equation in the Triebel-Lizorkin-Lorentz spaces, *J. Evol. Equ.*, 11(12), 241-263.
- [51] Weis, L., & Girardi, M. (2003). *Criteria for R-boundedness of operator families. In Evolution equations*, pages 203-221. Dekker, New York.

- [52] Yang, Q., Cheng, Z., & Peng, L. (2005). Uniform characterization of function spaces by wavelets, *Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed.*, 25(1), 130-144.
- [53] Yitzhak, K. (1968). *An introduction to Harmonic analysis*, New York

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı	Sezgin GİRGINOL
Uyruğu	T.C
Orcid Numarası	0000-0002-7426-5648

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Kırklareli Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2022
Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Enstitü	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Mezuniyet Yılı	2025

Makaleler ve Bildiriler	
Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler	
1. Akbulut, A., & Girginol, S. (2025). <i>Some properties of Triebel-Lizorkin-Lorentz</i> , Proceedings of the 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 2025, pp. 1-6.	
Uluslararası Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler	
1. Akbulut, A., Girginol, S. (2024) " <i>Some properties of Triebel-Lizorkin-Lorentz</i> ", COIA-2024 - The 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications , 27-29 August 2024, İstanbul, Türkiye.	
2. Çelik, S., Girginol, S., Akbulut, A. (2025) "Commutator of sharp maximal operator on Lorentz spaces, ICCMA-2025 3rd International Conference: Constructive Mathematical Analysis, 02-05 July 2025, Konya, TURKEY (Temmuz 2025)	