T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEİSENBERG GRUBUNUN GEOMETRİSİ VE HEİSENBERG GRUBUNDA ÖZEL EĞRİLER

HÜLYA BAŞEĞMEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
AĞUSTOS - 2011

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEİSENBERG GRUBUNUN GEOMETRİSİ VE HEİSENBERG GRUBUNDA ÖZEL EĞRİLER

HÜLYA BAŞEĞMEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
DOÇ. DR. LEVENT KULA

KIRŞEHİR
AĞUSTOS - 2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: PROF. DR. KAZIM İLARSLAN İmza:

Üye: DOÇ. DR. LEVENT KULA İmza:

Üye: YRD. DOÇ. DR. BAKİ YAĞBASAN İmza:

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

DOÇ. DR. MUSTAFA KURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEİSENBERG GRUBUNUN GEOMETRİSİ VE HEİSENBERG GRUBUNDA ÖZEL EĞRİLER

Hülya BAŞEĞMEZ

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Ağustos 2011, 68 sayfa

Danışman: Doç. Dr. Levent KULA

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde ilk olarak $\mathbb{R}^{n^2}$, $n \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi olan $M_n(\mathbb{R})$ ve genel lineer grup $GL(n, \mathbb{R})$ nin manifold yapıları incelendi. Daha sonra da Lie grup yapılarına bakıldı.

Üçüncü bölüm, çalışmamızın esas kısmıdır. Bu bölümde, öncelikle N_3, $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{H}^*$ Heisenberg grupları ve özellikleri verildi, ardından grup yapıları, manifold yapıları ve Lie grup yapıları incelendi.

Dördüncü bölümde, $\mathbb{H}^*$ Heisenberg grubundaki eğrilerin helis ve slant helis olma karakterizasyonları incelendi.

Anahtar Kelimeler: Heisenberg Grubu, Lie Grubu, Lie Cebiri, Slant Helis

ABSTRACT

Master Thesis

THE GEOMETRY OF HEISENBERG GROUP AND SPECIAL CURVES IN HEISENBERG GROUP

Hülya BAŞEĞMEZ

Ahi Evran University
Institute of Science and Technology
Department of Mathematics
August 2011, 68 pages

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Levent KULA

This master thesis consist of four parts.

The first chapter, fundamental definitions and theorems used in our study are given.

In second chapter, firstly manifold strucrure of $\mathbb{R}^n$, the group of all $n \times n$ matrices with real enries $M_n(\mathbb{R})$ and general linear group over the real numbers are examined. Afterwards, Lie groups structure of theese manifolds are given.

Third chapter is original part of our study. In this chapter, firstly, N_3, $\mathbb{H}$ and $\mathbb{H}^*$ Heisenberg groups and their properties are given, later group structures, manifold structures and Lie group structures of these groups was examined.

The fourth chapter, the characterizations to be helix and slant helix of curves in Heisenberg group $\mathbb{H}^*$ are examined.

Key Words : Heisenberg Group, Lie Group, Lie Algebra, Slant Helix

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Levent KULA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Gerek tez çalışmam süresince, gerekse tüm hayatım boyunca desteklerini ve sabırlarını esirgemeyen, haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim çok değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$P(X)$	:	X kümesinin kuvvet kümesi
$M_n(\mathbb{R})$	:	Reel sayılar cismi üzerinde $n \times n$ tipinde matrislerin cümlesi
$GL(n, \mathbb{R})$	:	Genel Lineer grup
A^T	:	A matrisinin transpozu
A^{-1}	:	A matrisinin inversi
$\widetilde{A}$	:	A matrisinin eki
$\lvert A \rvert$	:	A matrisinin determinantı
S_n	:	n elemanlı bir kümenin permütasyonlarının kümesi
$T_p(M)$	:	M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı
$T_p^*(M)$	:	M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki kotanjant uzayı
$\mathfrak{F}(M)$	:	Tanım kümesi M manifoldu olan reel değerli bütün düzgün (diferensiyellenebilir) fonksiyonların cümlesi
$\chi(M)$	:	M manifoldu üzerinde düzgün vektör alanlarının uzayı
$\chi^*(M)$	:	M manifoldu üzerinde düzgün $1-$formların uzayı
$\chi_L(G)$	:	G Lie grubu üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının uzayı
D	:	Riemann koneksiyonu
∇	:	Levi- Civita koneksiyonu
$[\ ,\ ]$	:	Lie operatörü

1 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, manifold, Lie grubu, Lie cebiri ve çalışmamızda gerekli olan bazı tanımlar, teoremler ve notasyonlar hatırlatılacaktır.

Tanım 1.1 X boş olmayan bir cümle ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet cümlesinin herhangi bir alt cümlesi olsun. Eğer $\tau \subset P(X)$ aşağıdaki özelikleri sağlarsa, τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

T1) $\varnothing, X \in \tau$ dur.

T2) τ dan alınan herhangi sayıda elemanın birleşimi τ ya aittir; yani, I (sonlu veya sonsuz) herhangi bir indis cümlesi olmak üzere, $\forall \ \{U_i\}_{i\in I} \in \tau$ için, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$ dur.

T3) τ dan alınan sonlu sayıda elemanların kesişimi τ ya aittir; yani, J sonlu indis cümlesi olmak üzere, $\forall \ \{U_i\}_{i\in J} \in \tau$ için, $\bigcap_{i\in J} U_i \in \tau$ dur [12].

Tanım 1.2 X, bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki $\forall\, x, y \in X$ için $x \in U,\ y \in V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir [12].

Tanım 1.3 X ve Y iki topolojik uzay olsun. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için,

(i) f sürekli,

(ii) f^{-1} ters fonksiyonu mevcut,

(iii) f^{-1} sürekli,

ise f fonksiyonuna X den Y ye bir homeomorfizm denir [12].

Tanım 1.4 $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \in \mathbb{R}^n$ ve $1 \leqslant i \leqslant n$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rccll} u_i : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & p & \longrightarrow & u_i(p) & = u_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_i \end{array}$$

fonksiyonlarına $\mathbb{R}^n$ in doğal koordinat fonksiyonları veya Öklidyen koordinat fonksiyonları ve $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ sistemine de Öklidyen koordinat sistemi denir [17].

Tanım 1.5 $\mathbb{R}^n$ in bir U açığından reel sayılara tanımlı bir f fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f ye düzgündür denir.

$$f_{i_1 \ldots i_q} = \frac{\partial^{i_q} f}{\partial u_{i_1} \ldots \partial u_{i_q}}, \quad 1 \leqslant i_l \leqslant n, \quad 1 \leqslant l \leqslant q$$

kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f ye $C^{(q)}$ sınıfındandır denir. M den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün düzgün fonksiyonların cümlesi bir halkadır ve bu halka $\mathfrak{F}(M)$ veya $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ile gösterilir [17].

Tanım 1.6 S bir topolojik uzay olsun. S nin bir U açığından $\mathbb{R}^n$ in bir $\xi(U)$ açık cümlesine giden ξ homeomorfizmine $n-$boyutlu bir koordinat sistemi veya harita denir.

$$\xi : U \subset S \longrightarrow \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

olmak üzere, $\forall\ p \in U$ için,

$$\xi(p) = \{x_1(p), ..., x_n(p)\}$$

dir. Burada $x_i = u_i \circ \xi : U \subset S \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına S topolojik uzayında ξ nin koordinat fonksiyonları denir [17].

Tanım 1.7 S üzerinde $n-$boyutlu koordinat sistemleri olan ξ ve η dönüşümlerinin düzgün kesişmesi için gerek ve yeter şart $\eta \circ \xi^{-1}$ ve $\xi \circ \eta^{-1}$ düzgün olmasıdır [17].

Açıkça, $\xi : U \subset S \to \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ve $\eta : V \subset S \to \eta(V) \subset \mathbb{R}^n$ ise, o zaman $\xi \circ \eta^{-1} : \xi(U \cap V) \longrightarrow \eta(U \cap V)$ şeklinde tanımlıdır ve ters fonksiyonu olan $\eta \circ \xi^{-1}$ de onun tersi yönde tanımlıdır.

Tanım 1.8 Bir S topolojik uzayı üzerinde, $n-$boyutlu bir $\mathcal{A}$ atlası S deki $n-$boyutlu koordinat sistemlerinin aşağıdaki önermeleri sağlayan kolleksiyonudur:

$A1)$ S nin her bir noktası $\mathcal{A}$ daki en az bir koordinat sisteminin tanım bölgesinde bulunur.

$A2)$ $\mathcal{A}$ daki herhangi iki koordinat sistemi düzgün kesişirler. Yani, $\forall\ \xi, \eta \in \mathcal{A}$ için

$$\xi \text{ ve } \eta \text{ düzgün kesişirler} \Leftrightarrow \ \eta \circ \xi^{-1} \text{ ve } \xi \circ \eta^{-1} \text{ düzgündür}$$

[17].

Tanım 1.9 $\mathcal{A}$, S topolojik uzayı üzerinde $n-$boyutlu bir atlas olsun. $\mathcal{A}$ nın her bir koordinat sistemiyle düzgün kesişen S deki her koordinat sistemi yine $\mathcal{A}$ nın elemanı oluyorsa, bu $\mathcal{A}$ atlasına $n-$boyutlu tam atlas denir [17].

Tanım 1.10 M Hausdorff uzayı üzerinde $n-$boyutlu bir tam atlas varsa bu uzaya $n-$boyutlu düzgün manifold denir [17].

Bu tezde, manifold deyince düzgün manifold anlaşılacaktır.

Tanım 1.11 M ve N iki manifold ve $\phi : M \to N$ düzgün bir dönüşüm olmak üzere $\phi^{-1} : N \to M$ ters dönüşümü de düzgün ise ϕ ye bir diffeomorfizm denir [17].

Teorem 1.12 M, $n-$boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda, $\xi : U \subset M \to \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$ koordinat sistemi bir diffeomorfizmdir [17].

Teorem 1.13 M bir manifold olsun. N, M nin bir açık alt kümesi ise N, M nin bir alt manifoldudur ve N ye M nin açık alt manifoldu denir [3].

Tanım 1.14 M bir manifold olsun. $p \in M$ için,

$$\begin{array}{rcccl} v_p & : & \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longrightarrow & v_p(f) \end{array}$$

reel değerli fonksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlıyorsa, v_p ye $p \in M$ de bir tanjant vektör denir:

(i) v_p, R-lineerdir. Yani, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere,

$$v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$$

dir.

(ii) v_p, Leibniz kuralını sağlar. Yani, $p \in M$ ve $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere,

$$v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g)$$

dir [17].

M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki bütün tanjant vektörlerinin cümlesi,

$T_p(M) = \{v_p : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R} | v_p, R-\text{ lineer ve Leibniz kuralını sağlar}\}$

ile gösterilir. $T_p(M)$ cümlesi üzerinde

$$\begin{array}{cccccc} + : & T_P(M) & \times & T_P(M) & \longrightarrow & T_P(M) \\ & (v_p & , & u_p) & \longrightarrow & v_p + u_p \end{array}$$

$$(v_p + u_p)(f) = v_p(f) + u_p(f), \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M) \tag{1.1}$$

ve

$$\begin{array}{cccccc} : & \mathbb{R} & \times & T_P(M) & \longrightarrow & T_P(M) \\ & (c & , & v_p) & \longrightarrow & cv_p \end{array}$$

$$(cv_p)(f) = cv_p(f), \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M) \tag{1.2}$$

biçiminde tanımlanan toplama ve skalerle çarpım işlemleriyle birlikte bir reel vektör uzayı olur. $T_p(M)$ vektör uzayına M nin p noktasındaki tanjant uzayı denir [17].

Tanım 1.15 M bir manifold ve $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p \in M$ de bir koordinat sistemi olsun. $f \in \mathfrak{F}(M)$ ise

$$\partial_i|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u_i}(\xi(p)), \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $u_1, u_2, \ldots, u_n$ $\mathbb{R}^n$ in doğal koordinat fonksiyonlarıdır ve $p \in M$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ birer tanjant vektördür [17].

Teorem 1.16 M bir manifold ve $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$, $p \in M$ de bir koordinat sistemi olsun. $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$ cümlesi $T_p(M)$ nin bir bazıdır [17].

Tanım 1.17 $\phi : M \to N$ düzgün dönüşüm olsun. $p \in M$, $v_p \in T_p(M)$ ve $g \in \mathfrak{F}(N)$ için,

$$\phi_{*p}(v_p)(g) = d\phi_p(v_p)(g) = v_p(g \circ \phi) \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlı

$$\phi_{*p} = d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}(N)$$

lineer fonksiyonuna $p \in M$ de ϕ nin diferensiyel dönüşümü denir [17].

Tanım 1.18 I, $\mathbb{R}$ nin açık bir aralığı olmak üzere, diferensiyellenebilen bir

$$\alpha : \ I \to \mathbb{R}^n$$

dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir *eğri* denir [18].

Bir $t \in I$ değerine karşılık eğrinin elde edilen $\alpha(t)$ noktası,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$$

şeklindedir. Buradaki α_i fonksiyonları

$$\alpha_i : I \to \mathbb{R}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

biçiminde tanımlı olup, diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. M nin $\alpha(t)$ noktasındaki koordinat fonksiyonları $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ise,

$$\alpha_i = x_i \circ \alpha, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

biçimindedir.

Tanım 1.19 $\alpha : I \to M$ bir eğri olsun. α nın $\forall\, t \in I$ noktasındaki,

$$\alpha'(t) = \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t)\right) \in T_{\alpha(t)}(M)$$

vektörüne eğrinin hız vektörü denir ve $(\alpha(t), \alpha'(t))$ ikilisi bir tanjant vektör olup, bu vektör kısaca $\alpha'(t)$ şeklinde gösterilir [17].

Tanım 1.20 Bir M manifoldu üzerindeki bir vektör alanı, manifoldun her noktasına o noktadaki tanjant uzayın bir elemanını karşılık getiren dönüşümdür. V, M üzerinde bir vektör alanı ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ ise

$$(Vf)(p) = V_p(f), \quad \forall\, p \in M$$

ile tanımlı Vf, M üzerinde reel değerli bir fonksiyondur. Her $f \in \mathfrak{F}(M)$ için Vf düzgün bir fonksiyon ise V ye düzgündür denir. M üstünde tanımlanan tüm düzgün vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir. $f \in \mathfrak{F}(M)$ ve $V,\ W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (fV)_p &= f(p)V_p, \quad p \in M \\ (V+W)_p &= V_p + W_p \end{aligned}$$

işlemleriyle birlikte $\chi(M)$ kümesi $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür. Ayrıca $V,\ W \in \chi(M),\ \ f \in \mathfrak{F}(M)$ için $V + W \in \chi(M)$ ve $fV \in \chi(M)$ dir [17].

Tanım 1.21 $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi olsun. O zaman her $1 \leqslant i \leqslant n$ için her $p \in U$ ya $\partial_i|_p$ tanjant vektörünü karşılık getiren $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ düzgün vektör alanına ξ nin i. koordinat vektör alanı denir [17].

Tanım 1.22 $\chi(M)$, M üzerinde tanımlanan düzgün vektör alanlarının uzayı olmak üzere, $\chi(M)$ üzerinde bracket operatörü olarak bilinen,

$$\begin{array}{rcll} [\ ,\ ]: & \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (V,W) & \to & [V,W] \end{array}$$

işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $\chi(M)$ vektör uzayına $[\ ,\ ]$ operatörü ile $\chi(M)$ üzerinde Lie cebiri denir;

(i) Bilineerlik özeliği; $\forall\ V,W,X\in\chi(M)$ ve $\forall\ a,b\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} [aV+bW,X] &= a[V,X]+b[W,X], \\ [X,aV+bW] &= a[X,V]+b[X,W]. \end{aligned}$$

(ii) Antisimetrik (alterne) olma özeliği; $\forall\ V,W\in\chi(M)$ için;

$$[V,W]=-[V,W].$$

(iii) Jakobi özdeşliği; $\forall\ V,W,X\in\chi(M)$ olmak üzere;

$$[V,[W,X]]+[W,[X,V]]+[X,[V,W]]=0$$

dır [17].

Tanım 1.23 M manifoldunun bir $p\in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ olsun. $T_p(M)$ nin cebirsel duali olan $T_p^*(M)$ uzayına M nin p noktasındaki kotanjant uzayı denir ve

$$T_p^*(M)=\{v^*|v^*:T_p(M)\to\mathbb{R},\ v^*\ \text{lineer}\}$$

ile gösterilir. $T_p^*(M)$ nin her bir elemanına, $p\in M$ noktasında kotanjant vektör adı verilir [9].

Tanım 1.24 M manifoldunun her bir p noktasına $T_p^*(M)$ kotanjant uzayının bir elemanını karşılık getiren fonksiyona, M üstünde bir $1-$form denir. $1-$formların cümlesi $\chi^*(M)$ ile gösterilir.

Tanım 1.25 $f \in \mathfrak{F}(M)$ olsun. $p \in M,\ v_p \in T_p(M)$ için

$$(df)_p(v_p) = v_p(f) \tag{1.4}$$

eşitliğiyle tanımlanan

$$(df)_p : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun p noktasındaki diferensiyeli denir. M uzayının her bir p noktasına

$$df : p \longrightarrow (df)_p$$

fonksiyonunu karşılık getiren df fonksiyonuna f fonksiyonunun diferensiyeli denir. Açıkça df, M uzayı üstünde bir $1-$formdur [18].

$U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun. df dönüşümünde f yerine x_i alınırsa, U üzerinde $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ koordinat $1-$formlarını elde edilir.

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

olduğu için $\chi(M)$ uzayının standart bazı olan

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} : 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$$

ile $\chi^*(M)$ uzayının standart bazı olan

$$\{dx_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

bazı, dual bazlardır [17].

Tanım 1.26 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ üzerinde Öklid metriği denir [15].

Tanım 1.27 M bir manifold, M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve düzgün fonksiyonların cümlesi de $\mathfrak{F}(M)$ olmak üzere,

$$\langle\ ,\ \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathfrak{F}(M)$$

dönüşümü aşağıdaki önermeleri sağlıyorsa, bu dönüşüme M üzerinde Riemann metriği ya da metrik tensör denir:

(i) $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir, yani $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle aX_1 + bX_2, Y\rangle &= a\langle X_1, Y\rangle + b\langle X_2, Y\rangle, \quad X_1, X_2, Y \in \chi(M), \\ \langle X, aY_1 + bY_2\rangle &= a\langle X, Y_1\rangle + b\langle X, Y_2\rangle, \quad X, Y_1, Y_2 \in \chi(M). \end{aligned}$$

(ii) $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümü simetriktir, yani

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle, \qquad X, Y \in \chi(M).$$

(iii) $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümü pozitif tanımlıdır,

$$\langle X, X\rangle \geqslant 0, \quad \langle X, X\rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0, \quad X \in \chi(M).$$

Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan düzgün manifolda ise Riemann manifoldu denir ve $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ ile gösterilir [11].

Tanım 1.28 M, $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üstündeki düzgün vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{aligned} D :\ \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to D_X Y \end{aligned}$$

operatörü, $\forall\ f \in \mathfrak{F}(M)$ ve $X,\ Y,\ Z \in \chi(M)$ için,

D1) $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$,

D2) $D_{(X+Y)} Z = D_X Z + D_Y Z$,

D3) $D_{fX} Y = f D_X Y$,

D4) $D_X(fY) = f D_X Y + X[f] Y$,

önermelerini sağlıyor ise D ye M üzerinde bir lineer koneksiyon (afin koneksiyon) denir ve D_X ise X vektör alanı yönünde kovaryant türev olarak adlandırılır. Ayrıca,

D5) $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ (sıfır torsiyon özeliği),

D6) $X[\langle Y, Z\rangle] = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$ (koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği),

önermeleri de sağlanıyor ise D, M nin Riemann koneksiyonu ya da Levi-Civita koneksiyonu olarak adlandırılır ve D yerine genellikle ∇ sembolü kullanılır. Levi-Civita koneksiyonu genellikle

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad -\langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle \end{aligned}$$

Koszul formülüyle karakterize edilir. (D5) özeliğine sahip D koneksiyonuna, simetrik koneksiyon da denir. Şu halde Riemann koneksiyonu bir simetrik koneksiyondur [17].

Teorem 1.29 M, bir Riemann manifoldu olsun. O zaman, M üzerindeki metrik tensörün ifadesi;

$$\langle\ ,\ \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

dir. Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ile M nin koordinat komşuluğundaki koordinat fonksiyonları gösterilmektedir [11].

Tanım 1.30 M bir Riemann manifoldu, D, M nin Levi-Civita koneksiyonu ve g de M nin metriği olsun. $\forall\ X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{array}{rccccccccl} R: & \chi(M) & \times & \chi(M) & \times & \chi(M) & \times & \chi(M) & \rightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ & (X & , & Y & , & Z & , & W) & \rightarrow & R(X, Y, Z, W) \end{array}$$

$$R(X, Y, Z, W) = \langle X, R(Z, W)Y\rangle = g(X, R(Z, W)Y))$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir. Burada ,

$$\begin{array}{rccccccl} R: & \chi(M) & \times & \chi(M) & \times & \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X & , & Y & , & Z) & \to & R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z \end{array}$$

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z \\ &= ([D_X, D_Y] - D_{[X,Y]})Z \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona Riemann eğrilik tensörü adı verilir [11].

Riemann eğrilik tensörünün diğer bir ifadesi de

$$R(e_j, e_k)e_i = \sum_{l=1}^{3} R^l_{ijk} e_l$$

şeklindedir. Bu eşitlikteki R^l_{ijk} katsayılarına M nin Riemann eğrilik tensörünün katsayıları denir [10].

Teorem 1.31 Bir (yarı) Riemann manifoldu M ve M üzerindeki Riemann koneksiyonu D olsun. Buna göre aşağıdaki bağıntılar, M üzerinde geçerlidir:

(i) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X = 0$,

(ii) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y = 0$, (Birinci Bianchi özeliği),

(iii) $g(R(X,Y)Z, W) + g(R(X,Y)W, Z) = 0$,

(iv) $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$ [11].

Tanım 1.32 G bir grup, aynı zamanda da düzgün bir manifold olsun. Bu durumda $\forall\ a \in G$ için ters eleman a^{-1} olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} \cdot : G \times G & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \longrightarrow & ab \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (\ )^{-1} : G & \longrightarrow & G \\ a & \longrightarrow & a^{-1} \end{array}$$

dönüşümleri düzgün ise, G ye bir Lie grubu denir [17].

Tanım 1.33 G bir Lie grubu ve $a \in G$ olsun.

$$\begin{array}{rccl} L_a: & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longrightarrow & L_a(g) = ag \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} R_a: & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longrightarrow & R_a(g) = ga \end{array}$$

biçiminde tanımlı diffeomorfizmlere, sırasıyla, $a \in G$ ile belirli sol çarpım (sol öteleme) ve sağ çarpım (sağ öteleme) denir [12, 11].

Tanım 1.34 G, bir Lie grubu ve $\forall\ a \in G$ için sol ve sağ çarpımlar, sırasıyla, L_a ve R_a olsun. $X \in \chi(G)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} dL_a = (L_a)_*: & T_G(g) & \longrightarrow & T_G(ag) \\ & X_g & \longrightarrow & (L_a)_*(X_g) = X_{ag} \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} dR_a = (R_a)_*: & T_G(g) & \longrightarrow & T_G(ga) \\ & X_g & \longrightarrow & (R_a)_*(X_g) = X_{ga} \end{array}$$

biçiminde tanımlı dönüşümlere, sırasıyla, sol grup paralelizmi ve sağ grup paralelizmi denir [12, 11].

Tanım 1.35 G, bir Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere, $\forall\ a, g \in G$ için;

$$(L_a)_*(X_g) = X_{ag}$$

ise X vektör alanına bir sol-invaryant vektör alanı denir.

Sol invaryant vektör alanları düzgündür. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skalerle çarpım işlemleri sol invaryant vektör alanlarının cümlesini bir vektör uzayı yapar. Bu vektör uzayı $\chi_L(G)$ ile gösterilir. $\chi_L(G)$ de [,] parantez operatörü tanımlanarak $\chi_L(G)$ bir Lie cebiri olur. $\chi_L(G)$, $boy G = n$ (sonlu) boyutuna sahiptir [11, 17].

Teorem 1.36 $X \in \chi_L(G)$ elemanını $X_e \in T_e(G)$ vektör alanına dönüştüren,

$$: \ \chi_L(G) \longrightarrow T_e(G)$$

dönüşümü bir lineer izomorfizmdir. Bu izomorfizm $\chi_L(G) \cong T_e(G)$ biçiminde gösterilir. Burada e, G nin grup işlemine göre birim elemanıdır [17].

Tanım 1.37 G, Lie grubu üzerinde tanımlı $\langle \ , \ \rangle$ metriği, $\forall\ a, b \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_bG$ için,

$$\langle u, v\rangle_b = \langle (dL_a)_b u, (dL_a)_b v\ \rangle_{ab} \tag{1.5}$$

şartını sağlıyorsa $\langle \ , \ \rangle$ metriğine sol invaryanttır denir. Benzer şekilde $\langle \ , \ \rangle$ metriği $\forall\ a, b \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_bG$ için,

$$\langle u, v\rangle_b = \langle (dR_a)_b u, (dR_a)_b v, \ \rangle_{ba} \tag{1.6}$$

şartını sağlıyorsa $\langle \ , \ \rangle$ metriğine sağ invaryanttır denir. Hem sol invaryant hem de sağ invaryant olan bir Riemann metriğine biinvaryant metrik denir [8].

Teorem 1.38 G, Lie grubu üzerindeki sol invaryant (sağ invaryant) metrikler ile G nin $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerindeki iç çarpımları arasında bijektif eşleme vardır [8].

İspat. G üzerindeki metrik sol invaryant ise o zaman $\forall\ a \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_aG$ için,

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_a &= \langle d(L_a \circ L_{a^{-1}})_a u, d(L_a \circ L_{a^{-1}})_a v\rangle_a \\
&= \langle d(L_a)_e((dL_{a^{-1}})_a u), (dL_a)_e((dL_{a^{-1}})_a v)\rangle_a \\
&= \langle (dL_{a^{-1}})_a u, (dL_{a^{-1}})_a v\rangle_e
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Bu eşitlik metriğin $\mathfrak{g} = T_eG$ ye kısıtlaması ile tam olarak ifade edilebilir. Tersine, $\mathfrak{g}$ üzerindeki iç çarpım $\langle \ , \ \rangle$ olsun ve $\forall\ g \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_gG$ için,

$$\langle u, v\rangle_g = \langle (dL_{g^{-1}})_g u, (dL_{g^{-1}})_g v\rangle \tag{1.7}$$

dir. Açık olarak $\langle\ ,\ \rangle_g$ iç çapım ailesi, G üzerindeki Riemann metriğini verir. Sol invaryantlığı ispatlamak için zincir kuralı ve sol ötelemelerin grup izomorfizmleri oluşu kullanılacaktır. $\forall\ a, b \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_bG$ için,

$$\begin{aligned}
\langle (dL_a)_b u, (dL_a)_b v\rangle_{ab} &= \langle (dL_{(ab)^{-1}})_{ab}((dL_a)_b u), (dL_{(ab)^{-1}})_{ab}((dL_a)_b v)\rangle_e \\
&= \langle d(L_{(ab)^{-1}} \circ L_a)_b u, d(L_{(ab)^{-1}} \circ L_a)_b v\rangle_e \\
&= \langle d(L_{b^{-1}a^{-1}} \circ L_a)_b u, d(L_{b^{-1}a^{-1}} \circ L_a)_b v\rangle_e \\
&= \langle (dL_{b^{-1}})_b u, (dL_{b^{-1}})_b v\rangle_e \\
&= \langle u, v\rangle_b
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

G üzerindeki sağ invaryant metrik için de benzer hesaplamalar yapılarak, $\forall\ u, v \in T_gG$ ve $\forall\ g \in G$ için,

$$\langle u, v\rangle_g = \langle (dR_{g^{-1}})_g u, (dR_{g^{-1}})_g v\rangle \tag{1.8}$$

elde edilir. ■

Tanım 1.39 Girdileri reel sayı olan bütün $n \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $gl(n, \mathbb{R})$ veya $M_n(\mathbb{R})$ ile gösterilir yani,

$$gl(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}]_{n\times n} |\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

dir.

Teorem 1.40 $M_n(\mathbb{R})$ cümlesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde n^2 boyutlu bir vektör uzayıdır [19].

İspat. $M_n(\mathbb{R})$ cümlesi üzerinde iki matrisin toplamı işlemi $A,\ B \in M_n(\mathbb{R})$ için,

$$A + B = [a_{ij}]_{n\times n} + [b_{ij}]_{n\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times n}$$

kuralıyla tanımlıdır. Buna göre,

1. $\forall\ A, B \in M_n(\mathbb{R})$ için $A + B$ tanımlıdır ve $A + B \in M_n(\mathbb{R})$ dir.

2. $\forall\ A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ için $(A + B) + C = A + (B + C)$ dir.

3. $\forall\ A \in M_n(\mathbb{R})$ için $A + 0 = 0 + A = A$ olacak şekilde tüm bileşenleri sıfır olan $0 \in M_n(\mathbb{R})$ matrisi vardır.

4. $\forall\ A \in M_n(\mathbb{R})$ için $M_n(\mathbb{R})$ kümesinde $-A$ ile gösterilen ve
$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$
eşitliğini sağlayan ve bileşenleri A nın bileşenlerinin toplama işlemine göre tersi olan bir $-A$ elemanı vardır.

5. $M_n(\mathbb{R})$ kümesinin toplama işlemine göre değişme özelliği vardır. $\forall\ A, B \in M_n(\mathbb{R})$ için $A + B = B + A$ dır.

$M_n(\mathbb{R})$ cümlesi üzerinde skalerle çarpma işlemi; $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $A \in M_n(\mathbb{R})$ için,
$$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{n\times n} = [\lambda a_{ij}]_{n\times n}$$
kuralıyla tanımlıdır. Buna göre,

6. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ için $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ dır.

7. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in M_n(\mathbb{R})$ için $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ dır.

8. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in M_n(\mathbb{R})$ için $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ dır.

9. $\mathbb{R}$ cisminin çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğuna göre, $M_n(\mathbb{R})$ nin her elemanı için $1A = A$ dır.

■

Tanım 1.41 A matrisi $m \times n$ tipinde ve B matrisi $n \times p$ tipinde olmak üzere, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ olsun. Bu durumda A ile B matrisinin çarpımı AB ile gösterilir ve
$$[a_{ij}]_{m\times n} \cdot [b_{jk}]_{n\times p} = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right]_{m\times p}$$
eşitliğiyle verilebilir [19].

Tanım 1.42 $n \times n$ tipindeki reel bileşenli bütün tersinir matrislerin cümlesi $GL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilir. O halde,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}]_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$$

dir. $GL(n, \mathbb{R})$ matris çarpım işlemi altında gruptur. $GL(n, \mathbb{R})$ cümlesine genel lineer grup denir. Tersinir matrislerin çarpımı da tersinirdir. Birim matris, bu grup için birim elemandır [13].

Tanım 1.43 $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} S(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

eşitliğiyle tanımlanan

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna $M_n(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı determinant fonsiyonu denir.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ olmak üzere $\sum_{\sigma \in S_n} S(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}$ sayısına A matrisinin determinantı denir ve bu sayı $detA$ veya $|A|$ biçiminde gösterilir [19].

Tanım 1.44 Bir A matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin satırları sütun yapılarak elde edilen yeni matrise A nın transpozu denir ve A^T ile gösterilir [19].

Tanım 1.45 A, $n \times n$ tipinde bir matris ve a_{ij}, A nın i nci satır ve j nci sütundaki bileşeni olsun. i nci satır ve j nci sütun atıldıktan sonra geriye kalan bileşenlerin oluşturduğu matrisin determinantına, a_{ij} bileşeninin minörü denir.

a_{ij} bileşeninin minörünün $(-1)^{i+j}$ ile çarpımına, a_{ij} bileşeninin eşçarpanı (kofaktörü) denir ve A_{ij} ile gösterilir [19].

Tanım 1.46 $[A_{ij}]_{n \times n}^T$ matrisine, A matrisinin adjoint matrisi (ek matrisi) denir ve $adj(A)$ ile (veya $\widetilde{A}$ ile) gösterilir [19].

Tanım 1.47 $(G, \cdot)$ ve $(G^{'}, *)$ iki grup ve $f : G \longrightarrow G'$ bir fonksiyon olsun. $\forall$ $a, b \in G$ için ,

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

ise f ye G den G' ye bir grup homomorfizmi denir [7].

Teorem 1.48 V, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı ise V vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ vektör uzayına izomorftur [19].

Teorem 1.49 $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ örtendir gerek ve yeter koşul f örtendir [1].

2 $\mathbb{R}^n$ VEKTÖR UZAYI VE GENEL LİNEER GRUP

Bu bölümde $\mathbb{R}^n$, $M_n(\mathbb{R})$ ve $GL(n,\mathbb{R})$ nin önce manifold yapıları ardından da Lie grup yapıları incelenmiştir.

2.1. $\mathbb{R}^n$'İN MANİFOLD YAPISI

2.1.1. $\mathbb{R}^n$'in Topolojisi

Tanım 1.26 daki gibi tanımlı Öklid metriği ile birlikte $\mathbb{R}^n$ bir topolojik uzaydır:

$\tau_d = \{U_i\}_{i\in I}$ aşağıdaki **(p)** önermesini sağlayan $\mathbb{R}^n$ in tüm alt cümlelerinin ailesini göstersin,

(p) U_i açıktır $\equiv \ \{\forall\ a \in U_i \ \Rightarrow\ \exists\ r,\ r \in \mathbb{R}^+, B_r(a) \in U_i\}$.

T1) $\{\forall\ a \in \varnothing,\ a \in \varnothing \Rightarrow\ \exists\ r,\ r \in \mathbb{R}^+, B_r(a) \subset \varnothing\} \equiv \varnothing$ açıktır
$\{\forall\ a \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow\ \exists\ r,\ r \in \mathbb{R}^+, B_r(a) \subset \mathbb{R}^n\} \equiv \mathbb{R}^n$ açıktır.

T2) I (sonlu veya sonsuz) herhangi bir indis kümesi olmak üzere, $\forall\ \{U_i\}_{i\in I} \in \tau_d$

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_d$$

olduğu gösterilecektir.

$$\left\{\forall\ a \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I,\ a \in U_{i_0} \to \exists\ i_0\ \in I,\right.$$

$$\left.\exists r \in \mathbb{R}^+,\ B_r(a) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i\right\} \equiv \bigcup_{i\in I} U_i \text{ açıktır.}$$

T3) $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere, $\forall \ \{U_i\}_{i\in I} \in \tau_d, \ \ 1 \leqslant i \leqslant n$ için

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau_d$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$a \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Leftrightarrow a \in U_i, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

olup,

$$\begin{array}{lll} \exists \ \ r_1 & \in \mathbb{R}^+ & \ni \ B_{r_1}(a) \subset U_1 \\ \exists \ \ r_2 & \in \mathbb{R}^+ & \ni \ B_{r_2}(a) \subset U_2 \\ \ \ \ \ \vdots & & \\ \exists \ \ r_n & \in \mathbb{R}^+ & \ni \ B_{r_n}(a) \subset U_n \end{array}$$

ve $r = min \ \{r_1, r_2, ..., r_n\}$ olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{lcl} B_r(a) & \subseteq & B_{r_1}(a) \subset U_1 \\ B_r(a) & \subseteq & B_{r_2}(a) \subset U_2 \\ & \vdots & \\ B_r(a) & \subseteq & B_{r_n}(a) \subset U_n \end{array}\right. \quad \Rightarrow B_r(a) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

bulunur.

Böylece, τ_d ailesi $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir topolojik yapı teşkil eder.

2.1.2. $\mathbb{R}^n$'in Hausdorff Uzay Yapısı

$\mathbb{R}^n$, d metriği ile birlikte bir Hausdorff uzayıdır:

$\mathbb{R}^n$ de farklı iki nokta a ve b olsun. Bu takdirde $d(a, b) > 0$ olup, $0 < r \leqslant \frac{1}{2}d(a, b)$ seçilirse $B_r(a) \cap B_r(b) = \varnothing$ olur. Böylece $\mathbb{R}^n$ bir Hausdorff uzaydır.

2.1.3. $\mathbb{R}^n$'in Haritası

$$\begin{array}{rcl} I: \ \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \rightarrow & I(x) = x \end{array}$$

özdeşlik dönüşümü bir homeomorfizmdir:

I **birebirdir**: $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $I(x) = I(y) \Rightarrow x = y$ olur.

I **örtendir**: $x \in \mathbb{R}^n$ için $I(x) = x$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}^n$ vardır.

I **süreklidir**: $U \subset \mathbb{R}^n$ için, U cümlesi açık olup,

$$I^{-1}(U) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n | I(x) \in U \Big\} = U$$

ters görüntü cümlesi de açıktır.

I^{-1} **süreklidir**: $I^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için V, $\mathbb{R}^n$ de bir açık olmak üzere $(I^{-1})^{-1}(V) = I^{-1}(V) = V$ olup, I^{-1} süreklidir.

2.1.4. $\mathbb{R}^n$'in Atlası

$\mathcal{A} = \{I\}$ cümlesi $\mathbb{R}^n$ nin bir atlasıdır:

$A1)$ I nın tanım kümesi $\mathbb{R}^n$ olduğundan, $\mathbb{R}^n$ in her bir noktası $\mathcal{A}$ daki bu koordinat sisteminin tanım bölgesinde yer alır.

$A2)$ $\mathcal{A}$ daki herhangi iki koordinat sistemi düzgün kesişir.

$$I^{-1} \circ I = I$$

bileşke dönüşümü düzgün olduğundan, I ile I düzgün kesişirler.

$$u_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

olmak üzere, $u_i = u_i \circ I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ için, u_i koordinat fonksiyonları düzgün olduğundan I düzgündür.

2.1.5. $\mathbb{R}^n$'in Tam Atlası

$\xi : U \subset \mathbb{R}^n \to \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir koordinat sistemi olsun.

$$\begin{aligned} \xi \circ I^{-1} &= \xi \\ I \circ \xi^{-1} &= \xi^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümlerini ele alırsak $\mathbb{R}^n$ in tam atlasında, $\mathbb{R}^n$ in U açığından $\xi(U)$ açığına giden diffeomorfizmler mevcuttur. $\mathbb{R}^n$ in tam atlasını $\mathcal{A}'$ ile göstereceğiz.

2.2. $M_n(\mathbb{R})$ NİN MANİFOLD YAPISI

Teorem 2.1

$$M_n(\mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}]_{n\times n} | a_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{lccl} f: & M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{n^2} \\ & A = [a_{ij}]_{n\times n} & \to & f([a_{ij}]) = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \end{array}$$

dönüşümünü ele alalım. Teorem 1.40 ve Teorem 1.48 den $M_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n^2}$ ye izomorftur. Yani, f birebir ve örtendir.

2.2.1. $M_n(\mathbb{R})$ nin Topolojisi

$\mathbb{R}^{n^2}$ manifoldunun topoloji ailesi τ olmak üzere,

$$\tau' = \left\{ f^{-1}(U) | U \in \tau \right\}$$

cümlesi de $M_n(\mathbb{R})$ nin topoloji ailesidir. Böylece $M_n(\mathbb{R})$, τ' topoloji ailesiyle birlikte bir topolojik uzaydır:

T1)

$$\begin{aligned}
\varnothing \in \tau \;\; &\Rightarrow \;\; f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau' \\
\mathbb{R}^{n^2} \in \tau \;\; &\Rightarrow \;\; f^{-1}(\mathbb{R}^{n^2}) \in \tau', \qquad (f, \text{örtendir}) \\
&\Rightarrow \;\; f^{-1}(\mathbb{R}^{n^2}) = M_n(\mathbb{R}) \in \tau'
\end{aligned}$$

bulunur.

T2) I (sonlu veya sonsuz) bir indis kümesi ve $\forall\ \{U_i\}_{i \in I} \in \tau$ için,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau \;\; &\Rightarrow \;\; f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) \in \tau' \\
&\Rightarrow \;\; \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \in \tau'
\end{aligned}$$

elde edilir.

T3) $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ bir indis kümesi ve $\forall\ \{U_i\}_{i \in J} \in \tau$ için,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \tau \;\; &\Rightarrow \;\; f^{-1}\Big(\bigcap_{j=1}^{n} U_j\Big) \in \tau' \\
&\Rightarrow \;\; \bigcap_{j=1}^{n} f^{-1}(U_j) \in \tau'
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, $M_n(\mathbb{R})$, τ' cümlesi ile birlikte bir topolojik uzaydır. Ayrıca, τ' nün tanımından f sürekliliği ve ek olarak f nin örtenliğinden f nin açık fonksiyon olduğu kolayca görülebilir.

2.2.2. $M_n(\mathbb{R})$ nin Hausdorff Uzay Yapısı

$$f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

olmak üzere, $A \neq B$ ve $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. f, $1:1$ olduğundan $A \neq B$ için $f(A) = a \neq b = f(B)$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}^{n^2}$ vardır. $\mathbb{R}^{n^2}$ Hausdorff uzay olduğundan, a ve b yi içeren açıklar, sırasıyla, U ve V olmak üzere;

$$U \cap V = \varnothing$$

dir. Ayrıca A ve B yi içeren açıklar, sırasıyla, $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ dir. Buna göre;

$$\begin{aligned} U \cap V = \varnothing &\Rightarrow f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) \\ &\Rightarrow f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(\varnothing) \\ &\Rightarrow f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing \end{aligned}$$

bulunur.

2.2.3. $M_n(\mathbb{R})$ nin Atlası

$$\mathcal{B} = \left\{ f | f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2} \right\}$$

cümlesi $M_n(\mathbb{R})$ nin atlasıdır:

$A1)$ f fonksiyonunun tanım kümesi $M_n(\mathbb{R})$ olduğundan, $M_n(\mathbb{R})$ nin her bir elemanı $\mathcal{B}$ nin f koordinat sisteminin tanım bölgesinde bulunur.

$A2)$ $f \in \mathcal{B}$ için,

$$f \circ f^{-1} = I$$

bileşke dönüşümü düzgün olup, f ile f düzgün kesişirler.

Dolayısıyla, $\mathcal{B}$, $M_n(\mathbb{R})$ nin atlasıdır.

2.2.4. $M_n(\mathbb{R})$ nin Tam Atlası

$\xi : U \subset \mathbb{R}^{n^2} \to \xi(U) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathbb{R}^{n^2}$ nin tam atlasındaki bir koordinat sistemi olsun. $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ olmak üzere,

$$M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n^2} \cap U \xrightarrow{\xi} \xi(U) \subset \mathbb{R}^{n^2}$$

için,

$$\xi \circ f : f^{-1}(U) \subset M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \xi(U) \subset \mathbb{R}^{n^2}$$

bileşke fonksiyonu da $M_n(\mathbb{R})$ de bir koordinat sistemidir:

$\xi \circ f$ **birebirdir**: ξ, bir homeomorfizm olduğundan $1:1$ dir. f ise tanımı gereği $1:1$ dir. Dolayısıyla, $\xi \circ f$ bileşke fonksiyonu $1:1$ dir.

$\xi \circ f$ **örtendir**: ξ bir homeomorfizm olduğu için örtendir. Dolayısıyla, Teorem 1.49 dan $\xi \circ f$ örtendir.

$\xi \circ f$ **süreklidir**: $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ dönüşümü için $\overset{\text{açık}}{U} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ ve $f^{-1}(U) \overset{\text{açık}}{\subset} M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere, açık cümlenin ters görüntü cümlesi de açık olduğu için f süreklidir. ξ ise homeomorfizm olduğu için süreklidir. Böylece sürekli fonksiyonların bileşkesi olan $\xi \circ f$ dönüşümü süreklidir.

$(\xi \circ f)^{-1}$ **süreklidir**: $(\xi \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \xi^{-1}$ bileşke fonksiyonun sürekli olması için ξ^{-1} ve f^{-1} bileşen fonksiyonları sürekli olmalıdır.

ξ, homeomorfizm olduğu için tersi var ve süreklidir.

$h = f^{-1} : \mathbb{R}^{n^2} \to M_n(\mathbb{R})$ ve $\forall\ \overset{\text{açık}}{U} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ alt cümlesi için $f^{-1}(U) \overset{\text{açık}}{\subset} M_n(\mathbb{R})$ olsun. Buna göre; $f^{-1}(U) = W$ için,

$$\begin{aligned} h^{-1}(W) &= (f^{-1})^{-1}(W) \\ &= (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U)) \\ &= f(f^{-1}(U)), \quad (f \text{ örtendir}) \\ &= U \end{aligned}$$

bulunur. f^{-1} fonksiyonuna göre, açık cümlenin ters görüntü cümlesi açık olduğundan f^{-1} süreklidir. Böylece, f^{-1} ve ξ^{-1} sürekli olduğundan $(\xi \circ f)^{-1}$ de süreklidir.

Sonuç olarak $\xi \circ f$ de bir koordinat sistemidir. Ayrıca, $\mathcal{B} = \{f\}$ atlası için,

$$\begin{aligned} f \circ (\xi \circ f)^{-1} &= (f \circ f^{-1}) \circ \xi^{-1} = \xi^{-1} \\ (\xi \circ f) \circ f^{-1} &= \xi \circ (f \circ f^{-1}) = \xi \end{aligned}$$

bileşke fonksiyonları düzgündür. Dolayısıyla, $\xi \circ f$ ve f düzgün kesişirler. $\mathcal{B}'$, $M_n(\mathbb{R})$ nin atlası olmak üzere, $\mathcal{B}'$ de $\xi \circ f$ koordinat sistemleri mevcuttur.

Böylece, $M_n(\mathbb{R})$, üzerinde tanımlı $\mathcal{B}'$ tam atlasıyla birlikte bir manifolddur.

Teorem 2.2 $M_n(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı determinant fonksiyonu süreklidir.

İspat. $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$ ve $a = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rlll} f: & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n^2} \\ & A & \longrightarrow & f(A) = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rlll} u_{ij}: & \mathbb{R}^{n^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longrightarrow & u_{ij}(a) = a_{ij} \quad , \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n \end{array}$$

dönüşümleri için, $x_{ij} = u_{ij} \circ f$ olmak üzere,

$$x_{ij}(A) = a_{ij}$$

dir.

$$A = [x_{ij}(A)]_{n\times n} = [x_{ij}]_{n\times n}(A) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} (A)$$

şeklindeki karesel A matrisi için,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} S(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \left(\sum_{\sigma\in S_n} S(\sigma)x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}\dots x_{\sigma(n)n}\right)(A)\end{aligned}$$

olup, determinant fonksiyonu

$$\det = \sum_{\sigma\in S_n} S(\sigma)x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}\dots x_{\sigma(n)n} \tag{2.1}$$

eşitliği ile belirlidir. Determinant fonksiyonu koordinat fonksiyonlarına göre bir polinomdur. Polinomlar ise diferensiyellenebilir yapılar olduğundan determinant fonksiyonu süreklidir. ■

Teorem 2.3 Sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı V olsun. Bu durumda V vektör uzayı bir manifolddur [12].

Teorem 2.4 $GL(n,\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{R})$ nin bir açık alt manifoldudur.

İspat. $M_n(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı toplama ve skalerle çarpım işlemleriyle birlikte bir vektör uzayı, dolayısıyla bir manifolddur.

$$\begin{aligned} f: M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} \\ A &\longrightarrow f(A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \end{aligned}$$

dönüşümünü ve

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

determinant fonksiyonunu ele alalım. $\{0\}$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir cümle olduğu için f nin sürekliliğinden, $\det^{-1}\{0\}$ ters görüntü cümlesi de $M_n(\mathbb{R})$ de kapalıdır. Bu sebeple

$$(\overset{-1}{\det}\{0\})' = \{A \in M_n(R) |\det A \neq 0\} = GL(n,\mathbb{R})$$

tümleyen cümlesi $M_n(\mathbb{R})$ nin açık bir alt cümlesidir. Dolayısıyla, Teorem 1.13 den $GL(n,\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{R})$ nin bir açık alt manifoldudur. ■

2.3. $GL(n, \mathbb{R})$ NİN LİE GRUP YAPISI

$GL(n, \mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{R})$ nin bir açık alt manifoldu, aynı zamanda da matris çarpım işlemine göre bir gruptur. Ayrıca,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

olup, A ve B matrisleri regüler ise AB de regülerdir.

AB çarpım matrisinin bileşenleri, A ve B nin bileşenlerinden oluşan polinomlardır ve bu bileşenler çarpım dönüşümünün yerel koordinatları yardımıyla tam olarak ifade edilebilir, böylece düzgündür.

$A = [a_{ij}] \in GL(n, \mathbb{R})$ matrisinin tersi $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ji}$ olarak yazılabilir. Burada A_{ij}, A nın kofaktörleridir ve A nın bileşenlerinden oluşan polinomlardır. Ayrıca $\det A$, A nın bileşenlerinin bir polinomudur. Dolayısıyla, A^{-1} in bileşenlerinin $GL(n, \mathbb{R})$ de paydası sıfırdan farklı olacak şekilde rasyonel fonksiyonlar olduğu sonucu çıkarılır ve böylece düzgündür.

Dolayısıyla, hem $(A, B) \to AB$, hemde $A \to A^{-1}$ dönüşümleri düzgündür. Sonuç olarak, $GL(n, \mathbb{R})$ bir Lie grubudur. Özel olarak $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$, sıfırdan farklı reel sayıların çarpım grubudur.

3 HEİSENBERG GRUBU

Heisenberg grubu için üzerinde tanımlanan işleme göre farklı tanımlar kullanılmaktadır. Bu tanımlar içinde en çok bilineni N_3 cümlesi ile gösterilen matris grup modelidir. Ancak diğer tanımlar da en az bunun kadar kullanışlıdır. Bu bölümde, sırasıyla, bu tanımlamalar verilip, her biri için manifold yapıları, Lie grup yapıları, Lie cebirleri ve sol invaryant vektör alanlarını incelenecektir.

3.1. N_3 HEİSENBERG GRUBU

Teorem 3.1 $M_3(\mathbb{R})$ nin

$$N_3 = \left\{ K = \begin{bmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

biçiminde tanımlanan alt cümlesi matris çarpım işlemi altında bir gruptur.

İspat.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ K_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & t_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ K_3 = \begin{bmatrix} 1 & x_3 & t_3 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N_3$$

olsun.

G1) Kapalılık Özeliği:

$$\begin{aligned} K_1K_2 &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_2 & t_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 + x_2 & t_1 + t_2 + x_1y_2 \\ 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N_3 \end{aligned}$$

dır.

G2) Birleşme Özeliği: $K_1(K_2K_3) = (K_1K_2)K_3$ eşitliği sağlanır:

$$K_1(K_2K_3) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & x_2 & t_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_3 & t_3 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_2+x_3 & t_2+t_3+x_2y_3 \\ 0 & 1 & y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1+x_2+x_3 & t_1+t_2+t_3+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_3 \\ 0 & 1 & y_1+y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$(K_1K_2)K_3 = \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_2 & t_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & x_3 & t_3 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1+x_2 & t_1+t_2+x_1y_2 \\ 0 & 1 & y_1+y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_3 & t_3 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1+x_2+x_3 & t_1+t_2+t_3+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_3 \\ 0 & 1 & y_1+y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup, $K_1(K_2K_3) = (K_1K_2)K_3$ eşitliği sağlanır.

G3) Birim eleman: $n \times n$ tipindeki her kare matris için

$$K\ \mathbf{I} = \mathbf{I}\ K = K$$

olduğundan, N_3 grubunun birim elemanı $\mathbf{I}$ birim matrisidir.

G4) Ters eleman: $\forall\ K = \begin{bmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N_3$ matrisi için

$$K^{-1}\ K = K\ K^{-1} = \mathbf{I}$$

olacak şekilde bir tek $K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -x & xy-t \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N_3$ vardır.

N_3 cümlesi matris çarpma işlemi ile birlikte bir gruptur, fakat değişmeli grup değildir. ■

Sonuç 3.2 $\forall\, K \in N_3$ için $\det K \neq 0$ olduğundan $K \in GL(3,\mathbb{R})$ dir ve N_3 , $GL(3,\mathbb{R})$ nin alt grubudur.

Teorem 3.3 N_3, $M_3(\mathbb{R})$ de kapalıdır.

İspat.

$$f : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^9$$

dönüşümü Teorem 2.1 ve $M_n(\mathbb{R})$ nin topolojik yapısından dolayı birebir, örten ve süreklidir.

$$S = \left\{(1,x,t,0,1,y,0,0,1) \in \mathbb{R}^9 | x,y,t \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^9$$

ve $k = (k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{31}, k_{32}, k_{33}) \in \mathbb{R}^9$ için S cümlesinin tümleyeni,

$$\begin{aligned} S' = &\left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{11} > 1\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{11} < 1\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{21} > 0\right\} \\ &\cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{21} < 0\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{22} > 1\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{22} < 1\right\} \\ &\cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{31} > 0\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{31} < 0\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{32} > 0\right\} \\ &\cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{32} < 0\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{33} > 1\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{R}^9 : k_{33} < 1\right\} \end{aligned}$$

formundaki açık yarı uzayların birleşim kümesi olduğundan dolayı S' açıktır. Dolayısıyla, S cümlesi $\mathbb{R}^9$ da kapalıdır. O halde S nin f sürekli fonksiyonu altındaki ters görüntü kümesi olan

$$f^{-1}(S) = N_3 = \left\{ K = \begin{bmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x,y,t \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesi de $M_3(\mathbb{R})$ de kapalıdır. ■

Lemma 3.4 Y, X in bir alt uzayı olsun. U, Y de açık ve Y, X de açık ise U, X de açıktır. Yani,

$$\overset{\text{açık}}{U} \subset Y \text{ ve } \overset{\text{açık}}{Y} \subset X \Rightarrow \overset{\text{açık}}{U} \subset X$$

dir [16].

Burada,

- "$p : U,\ Y$ de açıktır."
- "$q : Y,\ X$ de açıktır."
- "$r : U,\ X$ de açıktır."

önermeleri için, Lemma 3.4 ün sembolik olarak ifadesi $(p \wedge q) \Rightarrow r$ şeklindedir.

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \Rightarrow r \ &\equiv\ r' \Rightarrow (p \wedge q)' \\
&\equiv\ r' \Rightarrow (p' \vee q') \\
&\equiv\ r' \Rightarrow (q' \vee p') \\
&\equiv\ r' \Rightarrow (q \Rightarrow p')
\end{aligned}$$

denk önermelerinden $r' \Rightarrow (q \Rightarrow p')$ önemesinin bir yorumu olarak Y, X in bir alt uzayı olmak üzere, "U, X de kapalı ise U, Y de kapalıdır." diyebiliriz.

Teorem 3.5 N_3, $GL(3,\mathbb{R})$ de kapalıdır.

İspat. Lemma 3.4 de $X = M_3(\mathbb{R})$, $Y = GL(3,\mathbb{R})$ ve $U = N_3$ olarak alınırsa $GL(3,\mathbb{R})$, $M_3(\mathbb{R})$ nin bir alt uzayı olduğundan, "N_3, $M_3(\mathbb{R})$ de kapalı ise N_3, $GL(3,\mathbb{R})$ de kapalıdır." ifadesine ulaşılır. ■

Teorem 3.6 $GL(n,\mathbb{R})$ nin kapalı alt grubu bir manifolddur [2].

Teorem 3.7 N_3 Heisenberg grubu bir manifolddur.

İspat. Teorem 3.5 ve Sonuç 3.2 den N_3 Heisenberg grubu $GL(3,\mathbb{R})$ nin kapalı alt grubudur. Böylece, Teorem 3.6 dan, N_3 bir manifolddur. ■

3.1.1. N_3 Heisenberg Grubunun Lie Grup Yapısı

N_3 cümlesi Teorem 3.1 den dolayı gruptur. Aynı zamanda da düzgün bir manifolddur. Bu durumda $K_1, K_2 \in N_3$ için,

$$\begin{array}{rrcl} : & N_3 \times N_3 & \longrightarrow & N_3 \\ & (K_1, K_2) & \longrightarrow & K_1 K_2^{-1} \end{array}$$

işlemini tanımlayalım. Burada,

$$\begin{aligned} K_1 K_2^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_2 & t_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x_2 & x_2 y_2 - t_2 \\ 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 - x_2 & x_2 y_2 - y_2 x_1 + t_1 \\ 0 & 1 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N_3 \end{aligned}$$

dir. Sonuç matrisinin bileşenleri sabitlerden ve koordinat fonksiyonlarından oluşmaktadır. Yani sonuç matrisi koordinat fonksiyonlarının bir polinomudur. O halde N_3 cümlesi üzerinde tanımlanan matris çarpım işlemi düzgündür. Dolayısıyla, N_3 bir Lie grubudur.

3.1.2. N_3 Heisenberg Grubunun Lie Cebiri

Teorem 3.8 N_3 Lie grubu için,

$$X_{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; Y_{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } Z_{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$T_{\mathbf{I}}(N_3) = Sp\,\{X_{\mathbf{I}}, Y_{\mathbf{I}}, Z_{\mathbf{I}}\}$$

dır.

İspat. $X_{\mathbf{I}} \in T_{\mathbf{I}}(N_3)$ olsun. N_3 içinde $\alpha(0) = \mathbf{I}$ ve $\dot{\alpha}(0) = X_{\mathbf{I}}$ olacak şekilde en az bir

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \ I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & N_3 \\ u & \longrightarrow & \alpha(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

eğrisi vardır.

$$\dot{\alpha}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\alpha}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X_{\mathbf{I}} \in T_{\mathbf{I}}(N_3)$$

dır.

$Y_{\mathbf{I}} \in T_{\mathbf{I}}(N_3)$ olsun. N_3 içinde $\beta(0) = \mathbf{I}$ ve $\dot{\beta}(0) = Y_{\mathbf{I}}$ olacak şekilde en az bir

$$\begin{array}{rcl} \beta : \ I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & N_3 \\ u & \longrightarrow & \beta(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

eğrisi vardır.

$$\dot{\beta}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\beta}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Y_{\mathbf{I}} \in T_{\mathbf{I}}(N_3)$$

dır.

$Z_{\mathbf{I}} \in T_{\mathbf{I}}(N_3)$ olsun. N_3 içinde $\gamma(0) = \mathbf{I}$ ve $\dot{\gamma}(0) = Z_{\mathbf{I}}$ olacak şekilde en az bir

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \ I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & N_3 \\ u & \longrightarrow & \gamma(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

eğrisi vardır.

$$\dot{\gamma}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Z_{\mathbf{I}} \in T_{\mathbf{I}}(N_3)$$

elde edilir. $T_{\mathbf{I}}(N_3)$, $\mathbf{I} \in N_3$ noktasından geçen eğrilerin hız vektörlerinin kümesidir. $T_{\mathbf{I}}(N_3)$ deki her vektörü, $\mathbf{I}$ noktasındaki teğet uzayının $\{X_{\mathbf{I}}, Y_{\mathbf{I}}, Z_{\mathbf{I}}\}$ bazındaki vektörlerin lineer bileşimi olarak yazabiliriz. Buna göre $T_{\mathbf{I}}(N_3) \subset Sp\{X_{\mathbf{I}}, Y_{\mathbf{I}}, Z_{\mathbf{I}}\}$ dir. $boyN_3 = boyT_{\mathbf{I}}(N_3)$
$= 3$ olduğundan $T_{\mathbf{I}}(N_3) = Sp\{X_{\mathbf{I}}, Y_{\mathbf{I}}, Z_{\mathbf{I}}\}$ bulunur. Burada elde edilen $X_{\mathbf{I}}$, $Y_{\mathbf{I}}$, $Z_{\mathbf{I}}$ için Lie parantezlerine bakılırsa,

$$\begin{aligned}
[X_{\mathbf{I}}, Y_{\mathbf{I}}] &= X_{\mathbf{I}}Y_{\mathbf{I}} - Y_{\mathbf{I}}X_{\mathbf{I}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Z_{\mathbf{I}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X_{\mathbf{I}}, Z_{\mathbf{I}}] &= X_{\mathbf{I}}Z_{\mathbf{I}} - Z_{\mathbf{I}}X_{\mathbf{I}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Y_{\mathbf{I}}, Z_{\mathbf{I}}] &= Y_{\mathbf{I}}Z_{\mathbf{I}} - Z_{\mathbf{I}}Y_{\mathbf{I}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

dır. Yani

$$[X_{\mathbf{I}}, Y_{\mathbf{I}}] = Z_{\mathbf{I}}, \qquad [Y_{\mathbf{I}}, Z_{\mathbf{I}}] = 0, \qquad [X_{\mathbf{I}}, Z_{\mathbf{I}}] = 0$$

elde edilir. Buradan N_3 Heisenberg grubunun $\chi_L(N_3)$ sol invaryant vektör alanlarının uzayı için $\chi_L(N_3) \cong T_{\mathbf{I}}(N_3)$ olduğundan, $\chi_L(N_3) = Sp\{X, Y, Z\}$ elde edilir. ■

3.2. $\mathbb{H}$ HEİSENBERG GRUBU

Heisenberg grubunu ifade etmenin diğer bir yolu sıralı üçlüleri kullanmaktır. İlk olarak,

$$\mathbb{H} = \{(x, y, t) : x, y, t \in \mathbb{R}\}$$

cümlesini $(x_1, y_1, t_1),\ (x_2, y_2, t_2) \in \mathbb{H}$ için

$$(x_1, y_1, t_1) \cdot (x_2, y_2, t_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, t_1 + t_2 + x_1 y_2) \qquad (3.1)$$

işlemi ile birlikte ele alalım.

Teorem 3.9 $(\mathbb{H}, \cdot)$ bir gruptur.

İspat.

G1) Kapalılık özeliği: $\forall\ k_1 = (x_1, y_1, t_1),\ k_2 = (x_2, y_2, t_2) \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} k_1 \cdot k_2 &= (x_1, y_1, t_1) \cdot (x_2, y_2, t_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, t_1 + t_2 + x_1 y_2) \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

dir.

G2) Birleşme özeliği: $\forall\ k_1 = (x_1, y_1, t_1),\ k_2 = (x_2, y_2, t_2),\ k_3 = (x_3, y_3, t_3) \in \mathbb{H}$ için $k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3) = (k_1 \cdot k_2) \cdot k_3$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3) &= (x_1, y_1, t_1) \cdot ((x_2, y_2, t_2) \cdot (x_3, y_3, t_3)) \\ &= (x_1, y_1, t_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3, t_2 + t_3 + x_2 y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, \\ &\quad t_1 + t_2 + t_3 + x_2 y_3 + x_1 y_2 + x_1 y_3) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (k_1 \cdot k_2) \cdot k_3 &= ((x_1, y_1, t_1) \cdot (x_2, y_2, t_2)) \cdot (x_3, y_3, t_3) \\ &= (x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2, t_1 + t_2 + x_1 y_2) \cdot (x_3, y_3, t_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, \\ &\quad t_1 + t_2 + t_3 + x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_3) \end{aligned}$$

dir.

G3) Birim eleman: $\forall\ k = (x, y, t) \in \mathbb{H}$ için

$$k \cdot e \ = \ e \cdot k = k$$

olacak şekilde bir tek $e = (0, 0, 0) \in \mathbb{H}$ vardır.

G4) Ters eleman: $\forall\ k = (x, y, t) \in \mathbb{H}$ için

$$k \cdot k^{-1} = k^{-1} \cdot k = e$$

olacak şekilde bir tek $k^{-1} = (-x, -y, -t + xy) \in \mathbb{H}$ vardır.

$\mathbb{H}$ grubu değişmeli değildir. ■

3.2.1. $\mathbb{H}$ Heisenberg Grubunun Lie Grup Yapısı

$\mathbb{H}$ cümlesi,

$$g_1 = dx^2 + dy^2 + (dz + xdy)^2 \tag{3.2}$$

metriği ile birlikte bir manifolddur. Şimdi, $k_1 = (x_1, y_1, t_1)$, $k_2 = (x_2, y_2, t_2) \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{array}{rccl} h_1 : & \mathbb{H} \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & (k_1, k_2) & \longrightarrow & h_1(k_1, k_2) = k_1 \cdot k_2^{-1} \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada,

$$\begin{aligned} h_1(k_1, k_2) &= k_1 \cdot k_2^{-1} \\ &= (x_1, y_1, t_1) \cdot (x_2, y_2, t_2)^{-1} \\ &= (x_1, y_1, t_1) \cdot (-x_2, -y_2, -t_2 + x_2 y_2) \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2 + x_2 y_2 - x_1 y_2) \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

bulunur.

$$h_1(k_1, k_2) = k_1 \cdot k_2^{-1} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2 + x_2 y_2 - x_1 y_2)$$

fonksiyonu koordinat fonksiyonlarına göre polinomlardan oluştuğu için h_1 işlemi düzgündür. Dolayısıyla, $\mathbb{H}$ bir Lie grubudur.

Teorem 3.10

$$\varphi \ : \ N_3 = \left\{ K = \begin{bmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}) : x, y, t \in \mathbb{R} \right\} \ \rightarrow \ (\mathbb{H}, \cdot)$$

dönüşümünü $K \in N_3$ için $\varphi(K) = (x, y, t)$ olacak şekilde tanımlayalım. φ bir grup izomorfizmidir.

İspat.

φ **birebirdir:** $K_1, K_2 \in N_3$ için $\varphi(K_1) = \varphi(K_2) \Longrightarrow K_1 = K_2$ olduğu gösterilmelidir.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & t_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N_3$$

olsun. Bu durumda;

$$\varphi(K_1) = (x_1, y_1, t_1) = k_1 \quad \text{ve} \quad \varphi(K_2) = (x_2, y_2, t_2) = k_2$$

olup,

$$\begin{aligned}\varphi(K_1) = \varphi(K_2) \quad &\Rightarrow \; (x_1, y_1, t_1) = (x_2, y_2, t_2\ ) \\ &\Rightarrow \; x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ t_1 = t_2) \\ &\Rightarrow \; K_1 = K_2\end{aligned}$$

bulunur.

φ **örtendir:** $\forall\ k = (x, y, t) \in \mathbb{H}$ için $\varphi(K) = k$ olacak şekilde $K = \begin{bmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N_3$ vardır.

φ **grup homomorfizmidir:**

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & t_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N_3$$

olmak üzere,

$$K_1K_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 + x_2 & t_1 + x_1y_2 + t_2 \\ 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned}\varphi(K_1K_2) &= \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 + x_2 & t_1 + x_1y_2 + t_2 \\ 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, t_1 + x_1y_2 + t_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi(K_1) \cdot \varphi(K_2) &= (x_1, y_1, t_1) \cdot (x_2, y_2, t_2) \\ &= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2, t_1 + t_2 + x_1y_2)\end{aligned}$$

olup ,

$$\varphi(K_1K_2) = \varphi(K_1) \cdot \varphi(K_2)$$

dir. O halde, φ bir grup homomorfizmidir.

$\blacksquare$

Teorem 3.11

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{3.3}$$

vektör alanları, (3.1) işlemiyle verilen $\mathbb{H}$ Lie grubuna göre sol invaryanttır [5].

İspat. $a = (a_1, a_2, a_3),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}$ için sol öteleme

$$L_{(a_1,a_2,a_3)}(x_1, x_2, x_3) = (a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3 + a_1x_2)$$

şeklindedir. X, sol invaryant vektör alanı olsun. Bu durumda $\forall\ a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{H}$ için $X_a = (L_a)_*X_e$ dir. x_i, i. koordinat vektör alanı ve X_e de X vektör alanının birim noktadaki değeri olmak üzere,

$$X_a^i = X_a(x_i) = (L_a)_*X_e(x_i) = X_e(x_i \circ L_a) \tag{3.4}$$

dır. $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{H}$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
(x_1 \circ L_a)(b) &= x_1(L_a(b)) = x_1(a \cdot b) = a_1 + b_1 = x_1(a) + x_1(b),\\
(x_2 \circ L_a)(b) &= x_2(L_a(b)) = x_2(a \cdot b) = a_2 + b_2 = x_2(a) + x_2(b),\\
(x_3 \circ L_a)(b) &= x_3(L_a(b)) = x_3(a \cdot b) = a_3 + b_3 + a_1b_2\\
&= x_3(a) + x_3(b) + x_1(a)x_2(b)
\end{aligned}$$

dir. Burada eşitliğin her iki tarafından b atılırsa,

$$\begin{aligned}
x_1 \circ L_a &= x_1(a) + x_1,\\
x_2 \circ L_a &= x_2(a) + x_2,\\
x_3 \circ L_a &= x_3(a) + x_3 + x_1(a)x_2
\end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler (3.4) eşitliğinde yerine yazılır ve

$$X_e = \xi^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x_2} + \xi^3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
X_a^1 &= X_e(x_1(a) + x_1) = \xi^1,\\
X_a^2 &= X_e(x_2(a) + x_2) = \xi^2,\\
X_a^3 &= X_e(x_3(a) + x_3 + x_1(a)x_2) = \xi^3 + x_1(a)\xi^2
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, X sol invaryant vektör alanı

$$\begin{aligned} X &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (\xi^3 + x_1 \xi^2) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= \xi^1 V_1 + \xi^2 V_2 + \xi^3 V_3 \end{aligned}$$

formundadır. O halde, $V_1,\ V_2$ ve V_3 lineer bağımsız vektör alanları $\chi_L(\mathbb{H})$ nin bir bazını oluşturur. ■

3.3. $\mathbb{H}^*$ HEİSENBERG GRUBU

Heisenberg grubunu ifade etmenin bir diğer yolu

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \big\{(z,t) : z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\big\}, \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

cümlesini $(x,y,t),\ (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) \in \mathbb{H}^*$ için

$$(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) * (x,y,t) = (\tilde{x}+x, \tilde{y}+y, \tilde{t}+t+\frac{1}{2}\tilde{x}y - \frac{1}{2}\tilde{y}x) \tag{3.5}$$

işlemi ile birlikte tanımlamaktır.

Teorem 3.12 $\mathbb{H}^*$ cümlesi bir gruptur.

İspat.

G1) Kapalılık Özeliği: $\forall\ k_1, k_2 \in \mathbb{H}^*$ için $k_1 * k_2 \in \mathbb{H}^*$ dir.

G2) Birleşme Özeliği: $\forall\ k_1 = (x_1,y_1,t_1),\ k_2 = (x_2,y_2,t_2),\ k_3 = (x_3,y_3,t_3) \in \mathbb{H}^*$ için, $(k_1 * k_2) * k_3 = k_1 * (k_2 * k_3)$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} &(k_1 * k_2) * k_3 \\ &= ((x_1,y_1,t_1) * (x_2,y_2,t_2)) * (x_3,y_3,t_3) \\ &= (x_1+x_2, y_1+y_2, t_1+t_2+\frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1) * (x_3,y_3,t_3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, t_1 + t_2 + t_3 + \frac{1}{2}x_1y_2 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}y_3(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}x_3(y_1 + y_2)) \\
&= (x_1, y_1, t_1) * (x_2 + x_3, y_2 + y_3, t_2 + t_3 + \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_2) \\
&= (x_1, y_1, t_1) * ((x_2, y_2, t_2) * (x_3, y_3, t_3)) \\
&= k_1 * (k_2 * k_3)
\end{aligned}
$$

dir.

G3) Birim eleman: $\forall\ k = (x, y, t) \in \mathbb{H}^*$ için

$$k * e = e * k = k$$

olacak şekilde bir tek $e = (0, 0, 0) \in \mathbb{H}^*$ vardır.

G4) Ters eleman: $\forall\ k = (x, y, t) \in \mathbb{H}^*$ için

$$k * k^{-1} = k^{-1} * k = e$$

olacak şekilde bir tek $k^{-1} = (-x, -y, -t) \in \mathbb{H}^*$ vardır.

$\mathbb{H}^*$ grubu değişmeli değildir. ■

3.3.1. $\mathbb{H}^*$ Heisenberg Grubunun Lie Grup Yapısı

$\mathbb{H}^*$ cümlesi,

$$g_2 = dx^2 + dy^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy)\right)^2 \tag{3.6}$$

Riemann metriği ile birlikte bir manifolddur. Şimdi, $k_1 = (x_1, y_1, t_1)$, $k_2 = (x_2, y_2, t_2) \in \mathbb{H}^*$ için,

$$
\begin{aligned}
h_2 :\ \mathbb{H}^* \times \mathbb{H}^* &\longrightarrow \mathbb{H}^* \\
(k_1, k_2) &\longrightarrow h_2(k_1, k_2) = k_1 * k_2^{-1}
\end{aligned}
$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada,

$$\begin{aligned}
h_2(k_1,k_2) &= k_1 * k_2^{-1} \\
&= (x_1,y_1,t_1) * (x_2,y_2,t_2)^{-1} \\
&= (x_1,y_1,t_1) * (-x_2,-y_2,-t_2) \\
&= (x_1-x_2, y_1-y_2, t_1-t_2-\frac{1}{2}(x_1y_2+y_1x_2)) \in \mathbb{H}^*
\end{aligned}$$

dır.

$$h_2(k_1,k_2) = k_1 * k_2^{-1} = \left(x_1-x_2, y_1-y_2, t_1-t_2-\frac{1}{2}(x_1y_2+y_1x_2)\right)$$

fonksiyonu koordinat fonksiyonlarına göre polinomlardan oluştuğu için h_2 fonksiyonu düzgündür.

Teorem 3.13

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2}x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{3.7}$$

vektör alanları, (3.5) işlemiyle verilen $\mathbb{H}^*$ Lie grubuna göre sol invaryanttır.

İspat. $k = (x,y,t),\ l = (x',y',t') \in \mathbb{H}^*$ için sol öteleme

$$\begin{aligned}
L_k :\ \mathbb{H}^* &\longrightarrow \mathbb{H}^* \\
l &\longrightarrow L_k(l) = k * l = (x+x', y+y', t+t'+\tfrac{1}{2}(xy'-yx'))
\end{aligned}$$

şeklindedir. X, sol invaryant vektör alanı olsun. x_i, i. koordinat vektör alanı ve X_e de X vektör alanının $e=(0,0,0)$ birim noktadaki değeri olmak üzere,

$$(dL_k)_e(X_e) = X_k = \sum_{i=1}^{3} X_k^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_k$$

dır. Burada X_k^i bileşenleri,

$$X_k^i = (dL_k)_e(X_e)[x_i] = X_e[x_i \circ L_k]$$

olur.

$$\begin{aligned}
(x_1 \circ L_k)(l) &= x_1(L_k(l)) = x_1[k * l] = x + x' = x_1(k) + x_1(l) \\
(x_1 \circ L_k)(l) &= x_1(k) + x_1(l) \Rightarrow x_1 \circ L_k = x_1(k) + x_1
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
(x_2 \circ L_k)(l) &= x_2(L_k(l)) = x_2[k * l] = y + y' = x_2(k) + x_2(l) \\
(x_2 \circ L_k)(l) &= x_2(k) + x_2(l) \Rightarrow x_2 \circ L_k = x_2(k) + x_2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(x_3 \circ L_k)(l) &= x_3(L_k(l)) = x_3[k * l] = \frac{1}{2}(xy' - yx') + t + t' \\
(x_3 \circ L_k)(l) &= \frac{1}{2}(x_1(k)x_2(l) - x_1(l)x_2(k)) + x_3(k) + x_3(l) \\
\Rightarrow (x_3 \circ L_k) &= \frac{1}{2}(x_1(k)x_2 - x_1x_2(k)) + x_3(k) + x_3
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
X_k^1 &= X_e[x_1 \circ L_k] = X_e[x_1(k) + x_1] = X_e[x_1] = X_e^1 \\
X_k^2 &= X_e[x_2 \circ L_k] = X_e[x_2(k) + x_2] = X_e[x_2] = X_e^2 \\
X_k^3 &= X_e[x_3 \circ L_k] = X_e[\frac{1}{2}(x_1(k)x_2 - x_1x_2(k)) + x_3(k) + x_3] \\
&= \frac{1}{2}(x_1(k)X_e^2 - x_2(k)X_e^1) + X_e^3
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$X^1 = \xi_1 \quad , \quad X^2 = \xi_2 \quad , \quad X^3 = \xi_3 + \frac{1}{2}(x_1\xi_2 - x_2\xi_1)$$

ve

$$X_e^1 = \xi_1 \quad , \quad X_e^2 = \xi_2 \quad , \quad X_e^3 = \xi_3$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda X sol invaryant vektör alanı,

$$\begin{aligned}
X &= \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\xi_3 + \frac{1}{2}(x_1\xi_2 - x_2\xi_1)\right) \frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= \xi_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \xi_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, X_1, X_2, X_3 lineer bağımsız vektör alanları $\chi_L(\mathbb{H}^*)$ ın bir bazını oluşturur. Ayrıca, $L_k(l) = k * l$ sol çarpım operatörünün

$$dL_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & 1 \end{bmatrix}$$

diferensiyeline sahip olduğu da görülebilir. ■

3.3.2. $\mathbb{H}^*$ Heiseberg Grubu Üzerinde Metrik Kavramı

$\mathbb{H}^*$ cümlesinin g_2 metriğine göre ortonormal bir bazı (3.7) eşitliğiyle verilen $\psi = \{X_1, X_2, X_3\}$ olmak üzere, ψ bazının dual bazı,

$$\theta^1 = dx, \qquad \theta^2 = dy, \qquad \theta^3 = dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy)$$

dır.

$$\begin{array}{rlll} g_2: & \mathbb{H}^* \times \mathbb{H}^* & \to & \mathfrak{F}(\mathbb{H}^*) \\ & (U,V) & \to & g_2(U,V) = \left\{(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 + (\theta^3)^2\right\}(U,V) \end{array}$$

olur. g_2 metriğinin simetri, bilineer ve pozitif tanımlı olma özeliğini sağladığı kolayca gösterilebilir.

$\forall\ U = (u_1, u_2, u_3),\ V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{H}^*$ için,

$$\begin{aligned} g_2 &= (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 + (\theta^3)^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + \left(dt + \frac{1}{2}ydx - xdy\right)^2 \end{aligned}$$

olup, metriğe uygulanırsa,

$$\begin{aligned} dx^2(U,V) &= (dx \otimes dx)(U,V) \\ &= (dx)(U)(dx)(V) \\ &= v_1 u_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
dy^2(U,V) &= (dy\otimes dy)(U,V)\\
&= (dy)(U)(dy)(V)\\
&= v_2u_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(dz+\frac{1}{2}(ydx-xdy))^2(U,V)\\
&\quad=(dt+\frac{1}{2}(ydx-xdy))\otimes(dt+\frac{1}{2}(ydx-xdy))(U,V)\\
&\quad=(dt+\frac{1}{2}(ydx-xdy))(U)(dt+\frac{1}{2}(ydx-xdy))(V)\\
&\quad=(v_3+\frac{1}{2}(yv_1-xv_2))(u_3+\frac{1}{2}(yu_1-xu_2))
\end{aligned}
$$

değerleri elde edilir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
g_2(U,V) &= \{dx^2+dy^2+(dt+\frac{1}{2}(ydx-xdy))^2\}(U,V)\\
&= v_1u_1+v_2u_2+(v_3+\frac{1}{2}(yv_1-xv_2))(u_3+\frac{1}{2}(yu_1-xu_2))\\
&= v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3+\frac{1}{2}v_3(yu_1-xu_2)\\
&\quad+\frac{1}{2}u_3(yv_1-xv_2)+\frac{1}{4}(y^2v_1u_1-xyv_1u_2)\\
&\quad-\frac{1}{4}(xyu_1v_2-x^2v_2u_2)\\
&= \left(1+\frac{1}{4}y^2\right)v_1u_1-\left(\frac{1}{4}xy\right)v_1u_2-\left(\frac{1}{4}xy\right)v_2u_1\\
&\quad+\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)v_2u_2+\left(\frac{1}{2}y\right)v_1u_3-\left(\frac{1}{2}x\right)v_2u_3\\
&\quad+\left(\frac{1}{2}y\right)v_3u_1-\left(\frac{1}{2}x\right)v_3u_2+v_3u_3\\
&= \left(1+\frac{1}{4}y^2\right)u_1v_1-\left(\frac{1}{4}xy\right)u_2v_1+\left(\frac{1}{2}y\right)u_3v_1\\
&\quad-\left(\frac{1}{4}xy\right)u_1v_2+\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)u_2v_2-\left(\frac{1}{2}x\right)u_3v_2\\
&\quad+\left(\frac{1}{2}y\right)u_1v_3-\left(\frac{1}{2}x\right)u_2v_3+v_3u_3
\end{aligned}
$$

olur. Bu metriğe karşılık gelen matris $[(g_2)_{ij}]$ ise,

$$[(g_2)_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{4}y^2 & -\frac{1}{4}xy & \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{4}xy & 1+\frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}x & 1 \end{bmatrix}$$

olup,

$$\det [(g_2)_{ij}] = 1 \neq 0$$

bulunur. Bu matris regülerdir ve tersi $[(g_2)_{ij}]^{-1}$ ile gösterilirse,

$$[(g_2)_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x}{2} \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1+\frac{1}{4}(x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

dır.

Teorem 3.14

$$g_2 = dx^2 + dy^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy)\right)^2$$

metriğinin Riemann koneksiyonunun kovaryant türevlerine ait matris;

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_X X & \nabla_X Y & \nabla_X Z \\ \nabla_Y X & \nabla_Y Y & \nabla_Y Z \\ \nabla_Z X & \nabla_Z Y & \nabla_Z Z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ -Y & X & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $X,\ Y$ ve Z, sırasıyla, (3.7) denkleminde verilen $X_1,\ X_2$ ve X_3 sol invaryant vektör alanlarıdır [4].

İspat. X, Y, Z vektör alanları için Koszul formülü

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X,Y], Z \rangle - \langle [Y,Z], X \rangle + \langle [Z,X], Y \rangle \}$$

biçimde tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X X, Z\rangle &= \frac{1}{2}\{\langle [X,X],Z\rangle - \langle [X,Z],X\rangle + \langle [Z,X],X\rangle\}\\
&= \frac{1}{2}\{\langle 0,Z\rangle - \langle 0,X\rangle + \langle 0,X\rangle\}\\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. (3.7) den $Z \neq 0$ olduğundan dolayı,

$$\nabla_X X = 0$$

dır. Benzer hesaplamalarla,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}\{\langle [X,Y],Z\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle\}\\
&= \frac{1}{2}\{\langle Z,Z\rangle - \langle 0,X\rangle + \langle 0,Y\rangle\}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\nabla_X Y = Z \Rightarrow \nabla_X Y = \frac{Z}{2}$$

dir. Diğer kovaryant türevler de benzer hesaplamalar sonucu,

$$\begin{aligned}
\nabla_X X &= 0\ ,\ \nabla_X Y = \frac{1}{2}Z\ ,\ \nabla_X Z = -\frac{1}{2}Y\\
\nabla_Y X &= -\frac{1}{2}Z\ \ ,\nabla_Y Y = 0\ ,\ \nabla_Y Z = \frac{1}{2}X\\
\nabla_Z X &= -\frac{1}{2}Y\ ,\nabla_Z Y = \frac{1}{2}X,\ \nabla_Z Z = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Burada X, Y, Z vektör alanları için bracket operatörü,

$$[X,Y] = Z,\ \ [X,Z] = 0,\ [Y,Z] = 0$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \nabla_X Y - \nabla_Y X \\
&= \frac{1}{2}Z - \Big(-\frac{1}{2}Z\Big) \\
&= (0,0,\frac{1}{2}) - (0,0,-\frac{1}{2}) \\
&= (0,0,1) \\
&= Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Y,Z] &= \nabla_Y Z - \nabla_Z Y \\
&= (0,0,0) - (0,0,0) \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X,Z] &= \nabla_X Z - \nabla_Z X \\
&= (0,0,0) - (0,0,0) \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

dir. Yani,

$$[X,Y] = Z, \quad [X,Z] = 0, \quad [Y,Z] = 0. \tag{3.8}$$

Tanım 1.30 dan,

$$R_{abc} = R(e_a, e_b)e_c \ , \ R_{abcd} = R(e_a, e_b, e_c, e_d)$$

yazılır. $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$R(X,Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

den $R_{121} = R(X,Y)X$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
R_{121} = R(X,Y)X &= -\nabla_X \nabla_Y X + \nabla_Y \nabla_X X + \nabla_{[X,Y]} X \\
&= -\nabla_X \left(-\frac{1}{2}Z\right) + \nabla_Y 0 + \nabla_Z X \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}Y + \left(-\frac{1}{2}Y\right) \\
&= -\frac{3}{4}Y
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} R_{133} = R(X,Z)Z &= -\nabla_X\nabla_Z Z + \nabla_Z\nabla_Z X + \nabla_{[X,Z]}Z \\ &= -\nabla_X 0 + \nabla_Z\left(-\frac{1}{2}Y\right) + \nabla_0 Z \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}X \\ &= -\frac{1}{4}X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{122} = R(X,Y)Y &= -\nabla_X\nabla_Y Y + \nabla_Y\nabla_X Y + \nabla_{[X,Y]}Y \\ &= -\nabla_X 0 + \nabla_Y(\frac{1}{2}Z) + \nabla_Z Y \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X \\ &= \frac{3}{4}X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{232} = R(Y,Z)Y &= -\nabla_Y\nabla_Z Y + \nabla_Z\nabla_Y Y + \nabla_{[Y,Z]}Y \\ &= -\nabla_Y\left(\frac{1}{2}X\right) + \nabla_Z 0 + \nabla_0 Y \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}Z\right) \\ &= \frac{1}{4}Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{133} = R(X,Z)Z &= -\nabla_X\nabla_Z Z + \nabla_Z\nabla_X Z + \nabla_{[X,Z]}Z \\ &= -\nabla_X 0 + \nabla_Z\left(-\frac{1}{2}Y\right) + \nabla_0 Z \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}X\right) \\ &= -\frac{1}{4}X \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{1212} = R(X,Y,X,Y) &= g(R(X,Y)X,Y) \\
&= g\left(-\frac{3}{4}Y, Y\right) \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{2323} = R(Y,Z,Y,Z) &= g(R(Y,Z)Y,Z) \\
&= g\left(\frac{1}{4}Z, Z\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$
\begin{gathered}
R_{121} = -\frac{3}{4}Y, \quad R_{133} = -\frac{1}{4}X, \quad R_{122} = \frac{3}{4}X \\
R_{232} = -\frac{1}{4}X, \quad R_{133} = -\frac{1}{4}X
\end{gathered} \tag{3.9}
$$

$$
R_{1212} = -\frac{3}{4}, \quad R_{2323} = \frac{1}{4} \tag{3.10}
$$

yazılabilir.

4 $\mathbb{H}^*$ HEİSENBERG GRUBUNDA ÖZEL EĞRİLER

Bu bölümde Lancert'ın tanımına sadık kalarak $\mathbb{H}^*$ Heisenberg grubunda verilen $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^*$ yay parametreli eğrisi için helis olma karakterizasyonu verildi. Ayrıca, $\mathbb{H}^*$ da slant helis olma karakterizasyonu elde edildi.

Tanım 4.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^*$ yay parametreli, diferensiyellenebilir ve düzlemsel olmayan bir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ ise $\mathbb{H}^*$ da γ boyunca ortonormal çatı alanı olsun. T birim teğet, N normal, B binormal vektör alanı olmak üzere,

$$T = \gamma' \quad , \quad N = \frac{\nabla_T T}{|\nabla_T T|} \quad , \quad B = T \times N$$

dir. Burada T, N, B vektörlerine γ eğrisinin Frenet vektörleri, $\{T,\ N,\ B\}$ kümesine de Frenet çatısı denir. Buna göre, $\kappa = |\nabla_T T| \neq 0$, γ nın geodezik eğriliği ve τ da onun geodezik torsiyonu olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} \nabla_T T & = & \kappa N \\ \nabla_T N & = & -\kappa T \quad + \tau B \\ \nabla_T B & = & -\tau N \end{array} \tag{4.1}$$

Frenet denklemlerini elde ederiz. Ayrıca $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı $\chi_L(G)$ nin $\{X, Y, Z\}$ bazı cinsinden

$$\begin{array}{rcl} T & = & T_1 X + T_2 Y + T_3 Z \\ N & = & N_1 X + N_2 Y + N_3 Z \\ B & = & B_1 X + B_2 Y + B_3 Z \end{array}$$

olarak ifade edilebilir [4].

Şimdi, Lancert'ın $\mathbb{R}^3$ de verdiği helis tanımını $\mathbb{H}^*$ Heisenberg grubuna uyarlayalım.

Tanım 4.2 Yay parametreli

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{H}^* \\ & s & \to & \gamma(s) \end{array} \tag{4.2}$$

eğrisi verilsin. $\forall\ s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa, γ eğrisine helis, $Sp\{U\}$ ya da bu helisin ekseni denir.

Tanım 4.3 Yay parametreli

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{H}^* \\ & s & \to & \gamma(s) \end{array} \tag{4.3}$$

eğrisi verilsin. N birim asli normal vektör alanı sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa, γ eğrisine slant helis, $Sp\{U\}$ ya ise bu slant helisin ekseni denir [14].

Teorem 4.4 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^*$ yay parametreli eğrisi verilsin. Bu durumda γ, eksen $Z = e_3$ olan bir helis ise $\tan\varphi = \frac{\kappa}{\tau+\frac{1}{2}}$ oranı sabittir.

İspat. Kabul edelim ki $U = (u_1, u_2, u_3)$ sabit bir vektör olmak üzere $\langle T, U\rangle = \cos\varphi$ sabit olsun. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$T\langle T, U\rangle = T[\cos\varphi] = T[sabit] = 0 \tag{4.4}$$

yazılabilir. $T = (T_1, T_2, T_3)$ olmak üzere, (4.4) denkleminden

$$\langle D_T T, U\rangle + \langle T, D_T U\rangle = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} D_T U &= D_{T_1X+T_2Y+T_3Z}(u_1X + u_2Y + u_3Z) \\ &= T_1(D_X(u_1X + u_2Y + u_3Z)) + T_2(D_Y(u_1X + u_2Y + u_3Z)) \\ &\quad + T_3(D_Z(u_1X + u_2Y + u_3Z)) \\ &= T_1((D_Xu_1)X + (D_Xu_2)Y + (D_Xu_3)Z + \frac{1}{2}u_2Z - \frac{1}{2}u_3Y) \\ &\quad + T_2((D_Yu_1)X + (D_Yu_2)Y + (D_Yu_3)Z - \frac{1}{2}u_1Z + \frac{1}{2}u_3X) \\ &\quad + T_3((D_Zu_1)X + (D_Zu_2)Y + (D_Zu_3)Z - \frac{1}{2}u_1Y + \frac{1}{2}u_2X) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (T_1 D_X u_1 + T_2 D_Y u_1 + T_3 D_Z u_1 + \frac{1}{2} T_2 u_3 + \frac{1}{2} T_3 u_2) X \\
&\quad + (T_1 D_X u_2 + T_2 D_Y u_2 + T_3 D_Z u_2 - \frac{1}{2} T_1 u_3 - \frac{1}{2} T_3 u_1) Y \\
&\quad + (T_1 D_X u_3 + T_2 D_Y u_3 + T_3 D_Z u_3 - \frac{1}{2} T_2 u_1 + \frac{1}{2} T_1 u_2) Z \\
&= (\frac{1}{2} T_2 u_3 + \frac{1}{2} T_3 u_2) X + (-\frac{1}{2} T_1 u_3 - \frac{1}{2} T_3 u_1) Y \\
&\quad + (\frac{1}{2} T_1 u_2 - \frac{1}{2} T_2 u_1) Z
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\langle T, D_T U \rangle &= \frac{1}{2} T_1 T_2 u_3 + \frac{1}{2} T_1 T_3 u_2 - \frac{1}{2} T_1 T_2 u_3 - \frac{1}{2} T_2 T_3 u_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} T_1 T_3 u_2 - \frac{1}{2} T_2 T_3 u_1 \\
&= T_1 T_3 u_2 - T_2 T_3 u_1
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (4.5) denklemi

$$
\langle \kappa N, u \rangle + T_1 T_3 u_2 - T_2 T_3 u_1 = 0 \tag{4.6}
$$

formunda düzenlenebilir. $U = Z$ için (4.6) denkleminden

$$
\langle N, U \rangle = 0 \tag{4.7}
$$

bulunur. (4.7) denkleminin tekrar türevi alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\langle N, u \rangle = 0 &\Rightarrow T \langle N, U \rangle = T[0] \\
&\Rightarrow \langle D_T N, U \rangle + \langle N, D_T U \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle -\kappa T + \tau B, U \rangle + \langle N, D_T U \rangle = 0 \\
&\Rightarrow -\kappa \langle T, U \rangle + \tau \langle B, U \rangle + \frac{1}{2} T_2 N_1 u_3 - \frac{1}{2} T_1 N_2 u_3 = 0 \\
&\Rightarrow -\kappa \langle T, U \rangle + \tau \langle B, U \rangle + \frac{1}{2} u_3 (T_2 N_1 - T_1 N_2) = 0 \\
&\Rightarrow -\kappa \langle T, U \rangle + \tau \langle B, U \rangle + \frac{1}{2} u_3 B_3 = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\langle B, U \rangle = \langle B, Z \rangle = B_3 u_3$ olduğundan (4.8) denklemi

$$
-\kappa \langle T, U \rangle + (\tau + \frac{1}{2}) \langle B, U \rangle = 0 \tag{4.8}
$$

olarak bulunur. O halde,

$$-\kappa\cos\varphi + (\tau + \frac{1}{2})\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\kappa}{\tau + \frac{1}{2}} = \tan\varphi = sabit$$

elde edilir. ■

Teorem 4.5 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^*$ yay parametreli eğrisi verilsin. γ, Z eksenli bir slant helis ise

$$\cot\varphi = \left(\frac{\tau + \frac{1}{2}}{\kappa}\right)' \frac{\kappa^2}{\left[(\tau + \frac{1}{2})^2 + \kappa^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

sabittir.

İspat. Kabul edelim ki

$$\langle N, Z\rangle = \cos\varphi \tag{4.9}$$

sabit olsun. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$T\langle N, Z\rangle = T[\cos\varphi] = 0 \tag{4.10}$$

yazılabilir. (4.10) denkleminin tekrar türevi alınırsa

$$\langle D_T N, Z\rangle + \langle N, D_T Z\rangle = 0 \tag{4.11}$$

elde edilir. $N = (N_1, N_2, N_3)$ ile gösterilirse,

$$\langle N, D_T Z\rangle = \frac{1}{2}T_2 N_1 u_3 - \frac{1}{2}T_1 N_2 u_3 \tag{4.12}$$

olur. O halde (4.11) nolu denklem

$$-\kappa\langle T, Z\rangle + \tau\langle B, Z\rangle + \frac{1}{2}(T_2 N_1 - T_1 N_2) = 0 \tag{4.13}$$

veya

$$-\kappa\langle T, Z\rangle + \tau\langle B, Z\rangle + \frac{1}{2}\langle B, Z\rangle = 0 \tag{4.14}$$

biçiminde yazılabilir. (4.14) denkleminin tekrar türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
-\kappa'\langle T,Z\rangle \; - \; \kappa T\langle T,Z\rangle + \tau'\langle B,Z\rangle + (\tau+\frac{1}{2})T\langle B,Z\rangle = T[0] \\
\Rightarrow \;\; & -\kappa'\langle T,Z\rangle - \kappa[\langle D_T T,Z\rangle + \langle T,D_T Z\rangle] + \tau'\langle B,Z\rangle \\
& + (\tau+\frac{1}{2})[\langle D_T B,Z\rangle + \langle B,D_T Z\rangle = 0 \\
\Rightarrow \;\; & -\kappa'\langle T,Z\rangle - \kappa[\kappa\langle N,Z\rangle + \langle T,D_T Z\rangle] + \tau'\langle B,Z\rangle \\
& + (\tau+\frac{1}{2})[-\tau\langle N,Z\rangle + \langle B,D_T Z\rangle] = 0 \\
\Rightarrow \;\; & -\kappa'\langle T,Z\rangle - \kappa^2\langle N,Z\rangle + \tau'\langle B,Z\rangle - \tau^2\langle N,Z\rangle \\
& - \frac{\tau}{2}\langle N,Z\rangle - \frac{\tau}{2}(T_2B_1 - T_1B_2) - \frac{1}{4}(T_2B_1 - T_1B_2) = 0
\end{aligned}
$$

olup, son denklemin düzenlenmesiyle

$$
\begin{aligned}
& -\kappa'\langle T,Z\rangle - \kappa^2\langle N,Z\rangle + \tau'\langle B,Z\rangle - \tau^2\langle N,Z\rangle - \frac{\tau}{2}\langle N,Z\rangle \\
& -\frac{\tau}{2}\langle N,Z\rangle - \frac{1}{4}\langle N,Z\rangle = 0 \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.8) denkleminden $\langle B,U\rangle$ çekilir ve (4.15) de yerine yazılırsa,

$$
\langle T,Z\rangle = \frac{\left[\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2 + \kappa^2\right]\cos\varphi}{\frac{\tau'\kappa}{\tau+\frac{1}{2}} - \kappa'} \qquad (4.16)
$$

bulunur. (4.16) eşitliği (4.8) veya (4.15) denkleminde kullanılırsa,

$$
\langle B,Z\rangle = \frac{\left[\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2 + \kappa^2\right]\cos\varphi\kappa}{-\kappa'\tau + \tau'\kappa - \frac{\kappa'}{2}} \qquad (4.17)
$$

elde edilir. Buradan

$$
\langle T,Z\rangle^2 + \langle B,Z\rangle^2 + \langle N,Z\rangle^2 = 1 \qquad (4.18)
$$

ifadesinde, (4.9), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\frac{\left[\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2+\kappa^2\right]^2\cos^2\varphi(\tau+\frac{1}{2})^2}{\left[\tau'\kappa-\kappa'(\tau+\frac{1}{2})\right]^2}+\frac{\left[\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2+\kappa^2\right]^2\cos^2\varphi\kappa^2}{\left[\kappa'(\tau+\frac{1}{2})-\tau'\kappa\right]^2}+\cos^2\varphi=1$$

$$\Rightarrow\frac{\left[\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2+\kappa^2\right]^3}{\left[\tau'\kappa-\kappa'(\tau+\frac{1}{2})\right]^2}=\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\tan^2\varphi$$

bulunur. Son eşitliğin düzenlenmesiyle,

$$k_g=\left(\frac{\tau+\frac{1}{2}}{\kappa}\right)'\frac{\kappa^2}{\left[(\tau+\frac{1}{2})^2+\kappa^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\cot\varphi=sabit \qquad (4.19)$$

şeklinde elde edilir. ■

KAYNAKLAR

[**1**] Akkaş, S.; Hacısalihoğlu, H. H.; Özel Z.; Sabuncuoğlu A. *Çözümlü Soyut Matematik Problemleri*, Seçkin Yayıncılık, Mayıs, 2000.

[**2**] Artin, M. *Algebra*, Prentice Hall, First edition, 1991.

[**3**] Boothby, W. M. *An Inroduction to Differentiable Manifolds and Riemann Geometry*, Academic Press, New York, 1975.

[**4**] Caddeo, R.; Oniciuc, C.; Piu P. *Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group.* Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 62, 265-277, 2004.

[**5**] Calin, O.; Chang, D.; Greiner, P. *Geometric Analysis on the Heisenberg Group and Its Generalizations*, Cambridge, MA: American Mathematics Society and International Press, 2007.

[**6**] Cãlin, O.; Mangione, V. *Variational Calculus on Sub-Riemann Manifolds*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.8, No.1, pp. 21-32, 2003.

[**7**] Çallıalp, F. *Örneklerle Soyut Cebir*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2001.

[**8**] Gallier, J. *Notes on Differential Geometry and Lie Groups*, Department of Computer and Information Science University of Pennsylvania, Chapter 18, 503-504, May, 2010.

[**9**] Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri*, *Cilt 1*, Hacısalihoğlu Yayınları, 2000.

[**10**] Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri*, *Cilt 2*, Hacısalihoğlu Yayınları, 2000.

[**11**] Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri*, *Cilt 3*, Hacısalihoğlu Yayınları, 2004.

[12] Hacısalihoğlu, H. H. *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1980.

[13] Hall, Brian C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An elementary Introduction*, Springer, New York, 2004.

[14] Izumiya, S.; Takeuchi, N. *New Special Curves and Developable Surfaces*, Turkish J. Math. 28, 153-164, 2004.

[15] Koçak, M. *Genel Topolojiye Giriş I*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 2004.

[16] Munkres, James R. *Topology Second Edition*, Massachusetts Instute of Technology, Chapter 2, 89-90, 2000.

[17] O'Neill, B. *Semi Riemannian Geometry with Application to Relativity.* Academic-Press, New York, 1983.

[18] Sabuncuoğlu, A. *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2004.

[19] Sabuncuoğlu, A. *Lineer Cebir*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, Ekim, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Kırşehir de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kaman Merkez İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini Kaman Lisesinde tamamladıktan sonra 2005 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2009 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yıl Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde Yüksek Lisans eğitimine başladı.