T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİLER ve AÇILABİLİR YÜZEYLERİN ELASTİK OLMAYAN AKIŞLARI ÜZERİNE

Ramazan LEYLEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR - 2014

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİLER ve AÇILABİLİR YÜZEYLERİN ELASTİK OLMAYAN AKIŞLARI ÜZERİNE

Ramazan LEYLEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
PROF. DR. LEVENT KULA

KIRŞEHİR - 2014

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: PROF. DR. LEVENT KULA

Üye: DOÇ. DR. ALİ AKBULUT

Üye: YRD. DOÇ. DR. BÜLENT ALTUNKAYA

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

DOÇ. DR. MAHMUT YILMAZ
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik, davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ramazan LEYLEK

EĞRİLER ve AÇILABİLİR YÜZEYLERİN ELASTİK OLMAYAN AKIŞLARI ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Ramazan LEYLEK

Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran 2014

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, öncelikle düzlemsel eğrilerin elastik olmayan akışları için temel sonuçlar ele alındı ve bu sonuçlar uzay eğrileri için genişleştirilerek örnekler verildi. Dördüncü bölüm, çalışmamızın esas kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, açılabilir yüzeylerin elastik olmayan akışları için temel sonuçlar ele alındı. Bazı özel eğrilerden oluşan açılabilir regle yüzeylerin elastik olmayan akışlarına örnekler verildi.

Bilim Kodu:
Anahtar Kelimeler: Düzlemsel eğri, Eğri akışı, Açılabilir yüzey, Elastik olmayan akışlar
Sayfa Adedi: 58
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Levent KULA

ON INEXTENSIBLE FLOWS OF CURVES AND DEVELOPABLE SURFACES

Master's Thesis

Ramazan LEYLEK
Ahi Evran University
Institute of Science

June 2014

ABSTRACT

This master thesis consists of four parts. The first chapter is the introduction. In the second chapter, main definitions and theorems have been explained. In the third chapter, firstly the main results for inextensible flows of plane curves have been reviewed and these results have been extended for the space curves with given examples. The fourth chapter, constitutes the core of the thesis. In this chapter, main results for the inextensible flows of developable surfaces have been reviewed. Examples have been given for the inextensible flows of the developable ruled spaces made up of some special curves.

Science Code :
Key Words : Plane curve, Curve flow, Developable surface, Inextensible
Number of Pages: 58
Thesis Advisor : Prof. Dr. Levent KULA

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her safhasında büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, danışman hocam sayın Prof. Dr. Levent KULA'ya, her türlü destek ve anlayışla Mesut ALTINOK'a ve bu tez çalışması boyunca beni desteklemelerinin yanı sıra çok büyük fedakarlık gösteren eşim Özlem, oğlum Osman Fatih ve kızım Beyza İrem'e içtenlikle teşekkür ederim.

Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri birimi'ne (BAP[1]) maddi ve manevi desteklerin dolayı teşekkür ederim.

Ramazan LEYLEK

[1]Tezin yazarı PYO-FEN.4001.12.040 numaralı proje ile desteklenmektedir.

İÇİNDEKİLER LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^3$	:	3-boyutlu Öklid uzay
S^2	:	Birim küre
$\langle\ ,\ \rangle$	:	İç çarpım fonksiyonu
$\alpha : [0, l] \times [0, \omega] \to \mathbb{R}^3$	:	Eğrilerin bir parametreli ailesi
l	:	Başlangıç eğrisinin yay uzunluğu
T	:	Teğetler göstergesi
N	:	Normaller göstergesi
B	:	Binormaller göstergesi
κ	:	Eğrilik
τ	:	Torsion (burulma)
u	:	Eğri parametrizasyonun değişkeni
ν	:	Eğrinin hızı
s	:	Yay parametresi

1 GİRİŞ

$\mathbb{R}^3$ deki eğri veya yüzeyin zamana göre değişimleri onlara $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen akışlarıyla üretilir. $\mathbb{R}^3$ deki eğrinin zamana göre değişimlerinde, eğrinin ilk ve son konumlarında yay uzunluğu korunuyorsa (başka bir ifadeyle zamana göre yay uzunluğu değişimi sıfır ise); aynı zamanda $\mathbb{R}^3$ deki yüzeyin zamana göre değişimlerinde, yüzeyin ilk ve son konumlarında esas eğrilik korunuyorsa, bu durumdaki eğri ve yüzeye elastik olmayan eğri ve yüzey denilecektir [12].

Fiziksel olarak gerilim enerjisinin olmadığı durumdaki hareketlerin ortaya çıkması akışkan yüzeyler ve elastik olmayan eğrilere neden olacaktır. Örneğin sabit uzunluktaki bir kablonun salınım hareketi veya bir kağıt parçasının rüzgar tarafından salınım hareketi elastik olmayan eğri ve yüzey akışları tarafından tanımlanabilir [12].

Daha açık bir ifadeyle $\forall t$ için $X(u, v, t)$ yüzey evolüsyonunun, herhangi bir t_0 başlangıç zamanında tanımlanan $X(u, v, t_0)$ orjinal yüzeyinin izometrik görüntüsü olduğunu ifade eder. Bir açılabilir yüzey için, $X(u, v, t)$ fiziksel olarak dalgalanan bir bayrağın parametrizasyonu gibi resmedilebilir [12].

Bu durum fiziksel uygulamaların geniş bir alanında tamamen doğal olarak ortaya çıkar. Örneğin hem Chirikjian ve Burdick [1] hem de Mochiyama, Shimemura ve Kobayashi [2] gereğinden fazla aşırı hareketliliğin durum kontrolü üzerinde çalışmışlardır (yılan benzeri robotlar) [12].

Elastik olmayan eğri ve yüzey akışları bilgisayar görüntüsü [3, 4], bilgisayar animasyonu [5] hatta mekanik hareket bilimindeki pek çok problemin içeriğinde ortaya çıkar [1].

Yukarıdaki problemlerde neyin yaygın olarak kullanıldığını açıklamak için elastik olmayan yüzey ve eğrileri ifade eden evolüsyonları matematiksel olarak tanımlamaya ihtiyaç vardır. Düzlemsel eğri akışları hakkında litaretürde çok sayıda çalışma bulunmasına rağmen yüzey evolüsyonun akışları hakkında çok fazla çalışma bulunmamaktadır [12].

Özellikle bu düzlemsel eğri akışları hakkındaki çalışma Gage, Hamilton [7] ve Grayson'nun [8] metotları yardımıyla ısı denklemi aracılığıyla kapalı düzlem eğrilerinin bir çembere daralması ele alınmıştır. Ayrıca Gage düzlem eğrilerinin alan korumalı evolüsyonlarını çalışmıştır [9]. Chirikjian [10] bölgesel olarak yalnızca hacmi koruyan daha kısıtlanmış dönüşümleri ele almıştır [12].

Kwon ve Park [11] daha önceki çalışmalarında düzlemsel eğrilerin elastik olmayan akışları ve ısı (hareket) akışkanlıkları arasındaki ayrımı ayrıntılı bir şekilde ele almışlar ve daha ileri düzeyde bazı örnekler vermişlerdir [12].

Kwon ve Park [12] sonraki çalışmalarında, başlangıç düzeydeki düzlemsel sonuçlara dayanarak $\mathbb{R}^3$ de eğriler ve açılabilir yüzeylerin elastik olmayan akışları için genel bir formül ortaya koymuşlardır. İlk olarak, bir yüzey eğrisinin eğrilik ve torsiyonu hakkında gerek ve yeter koşullar elastik olmayan eğri akışı olacak şekilde türetmişlerdir. Daha sonra açılabilir yüzeyler için karşılık gelen evolüsyonlar elde etmişler ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözüm kümesi, açılabilir yüzeyler ve uzay eğrileri için elastik olmayan akışları tamamen karakterize ettiğini göstermişlerdir.

Bu çalışmda, Kwon ve Park [12] çalışmalarına ek olarak düzlem, uzay eğrileri ve açılabilir yüzeylerin elastik olmayan akışları aytıntılı bir şekilde ele alındı. Düzlem ve uzay eğrilerinin elastik olmayan akışlarına örnekler verilerek şekillerin grafikleri çizildi. Ayrıca özel eğriler yardımıyla oluşturulan açılabilir regle yüzeylerin evolüsyonlarına örnekler verilerek resmedildi.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan,

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının **doğal iç çarpımı** veya **Öklid iç çarpımı** denir.

$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|\ ,\ \| : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre, $\mathbb{R}^n$ uzayına normlu vektör uzayı denir.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlanan. $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Bu metrik ile, $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzay olur. Bu uzaya **Öklid uzayı** denir ve kimi zaman $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir [18].

Tanım 2.2 I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir **eğri** denir [18].

Tanım 2.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. I aralığının bir u noktasındaki teğet uzayı olan $T_u(\mathbb{R}^1)$ uzayı 1- boyutlu bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^1$ deki koordinat fonksiyonu x olmak üzere $T_u(\mathbb{R}^1)$ uzayının doğal tabanı

$$\left\{ \frac{d}{dx}(u) \right\}$$

kümesidir. $\frac{d}{dx}$, $\mathbb{R}^1$ uzayının her bir u noktasına $\frac{d}{dx}(u)$ vektörünü karşılık getiren vektör alanıdır.

$\alpha_{*u} : T_u(\mathbb{R}) \longrightarrow T_{\alpha(u)}(\mathbb{R}^n)$ dönüşümünde, $\alpha_{*u}\left(\frac{d}{dx}(u)\right)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(u)$ noktasındaki **hız vektörü** denir ve kısaca $\alpha'(u)$ ile gösterilir [18].

Tanım 2.4 Bir

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

eğrisi için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1, \quad \forall s \in I$$

ise α eğrisine **birim hızlı** eğri denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir [13, 18].

Tanım 2.5 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir. T vektör alanına, α eğrisinin **teğet vektör alanı** adı verilir [18].

Tanım 2.6 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \to \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir [18].

Tanım 2.7 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birinci dik vektörü (asli normali)** denir. N vektör alanına, α eğrisinin **birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı)** adı verilir [18].

Tanım 2.8 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **ikinci dik vektörü (binormali)** denir. B vektör alanına, α eğrisinin **ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı)** adı verilir [18].

Tanım 2.9 $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** denir.

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** ve
T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde **Frenet vektör alanları** adı verilir [18].

Tanım 2.10 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \langle B^{'}(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **torsionu (burulması)** denir [18].

Teorem 2.1 $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve torsionu (burulması) sırasıyla κ, τ olmak üzere,

$$\begin{aligned} T^{'} &= \kappa N \\ N^{'} &= -\kappa T - \tau B \\ B^{'} &= \tau N \end{aligned}$$

dir [18].

Teorem 2.2 Birim hızlı olmayan,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\longrightarrow \alpha(u) \end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve torsionu (burulması), sırasıyla, κ ve τ olmak üzere,

$$T = \frac{\alpha^{'}}{\|\alpha^{'}\|}, \quad N = B \times T, \quad B = \frac{\alpha^{'} \times \alpha^{''}}{\|\alpha^{'} \times \alpha^{''}\|}, \quad \kappa = \frac{\|\alpha^{'} \times \alpha^{''}\|}{\|\alpha^{'}\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{\langle \alpha^{'} \times \alpha^{''}, \alpha^{'''} \rangle}{\|\alpha^{'} \times \alpha^{''}\|^2}$$

dir [18].

Teorem 2.3 Birim hızlı olmayan,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\longrightarrow \alpha(u) \end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve torsionu (burulması), sırasıyla, κ ve τ olsun. $\|\alpha'(u)\| = \nu$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} T' &= \nu\kappa N \\ N' &= -\nu(\kappa T + \tau B) \\ B' &= \nu\tau N \end{aligned}$$

dir [18].

Tanım 2.11 Eğer bir eğrinin bütün noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye **düzlemseldir** denir [14].

Tanım 2.12 Bir küre üzerinde yatan eğriye **küresel eğri** denir [14].

Tanım 2.13 Bir,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde α eğrisinin, teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu α eğrisine **genel helis** denir [16].

Teorem 2.4 Bir,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin, genel helis olması için gerek ve yeter şart,

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) = \text{sabit}, \ \forall s \in I$$

olmasıdır. $\kappa(s) \neq 0$ ve $\tau(s)$ ikisi birden sabitseler α eğrisine **dairesel helis** denir [18].

Tanım 2.14 Bir,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde α eğrisinin, asli normal vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu α eğrisine **slant helis** denir [19].

Teorem 2.5 Eğriliği sıfırdan farklı olan bir birim hızlı α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart,

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)(s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [19].

Tanım 2.15 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa(s) \neq 0$ için α boyunca

$$\widetilde{D}(s) = -(\frac{\tau}{\kappa})(s)T(s) + B(s), \tag{2.1}$$

ve

$$\bar{D}(s) = (\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}})(s)(-\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanlarına, sırasıyla, α nın **modifiye Darboux vektör alanı** ve **birim Darboux vektör alanı** denir [19].

Tanım 2.16 $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında $\mathbb{R}^3$ ün M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir regle yüzey denir (Bu tezde yüzey X ile gösterilecektir). Daha açık olarak, $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey,

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, v) &\longrightarrow X(s, v) = \alpha(s) + v\omega(s) \end{aligned}$$

dönüşümü ile tanımlanabilir.

Burada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\omega : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ diferensiyellenebilir dönüşümler ve I bir açık aralıktır. Eğer s sabit v değişken olarak kabul edilirse $X(s, v)$, X yüzeyi üzerinde ω ya paralel bir D doğrusu çizer. O halde X yüzeyinin $s = sabit$ parametre eğrileri doğrulardan oluşur. Bu D doğrularına yüzeyin ana doğruları (doğuranlar) ve böyle bir yüzeye **regle yüzey** denir. Burada α ya regle yüzeyin **dayanak eğrisi** ve ω ya da regle yüzeyin **doğrultmanı** adı verilir. X regle yüzeyinin s ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$X_s = \alpha' + v\omega', \quad X_v = \omega$$

olduğundan, bu yüzeyin teğet düzlemi, z bu düzlemin bir noktası olmak üzere

$$det\left(z - X, \omega, \alpha' + v\omega'\right) = 0$$

dır. Eğer z noktası, yüzeyin X noktasından geçen ana doğru üzerinde ise, μ uygun olarak seçilmiş bir skaler olmak üzere,

$$z - X = \mu\omega$$

dır. Bu bağıntı teğet düzlem denkleminde göz önünde alınırsa, X noktasından geçen ana doğruların, bu noktadaki teğet düzlem içinde bulunduğu görülür [15, 16].

Tanım 2.17 Yüzeyin bir X noktasındaki normal doğrultusu,

$$\begin{aligned} X_s \times X_v &= \left(\alpha' + v\omega'\right) \times \omega \\ &= \alpha' \times \omega + v\omega' \times \omega \end{aligned}$$

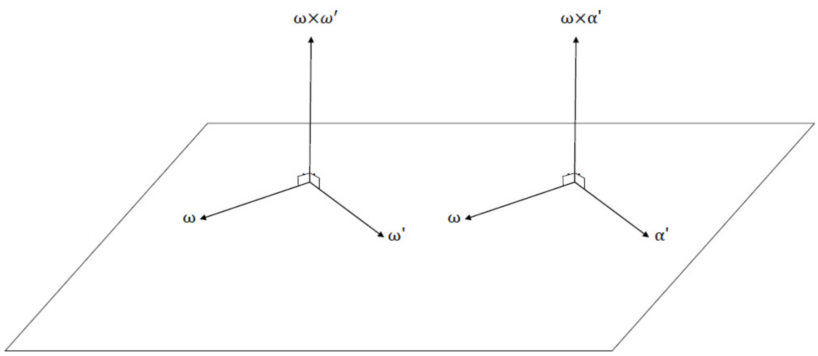
dir. Yüzeyimizin bir D ana doğrusu boyunca normal doğrultusunun aynı kalması şartı, normal doğrultu vektörünün v ye bağlı olmaması ve bunun neticesi olarak,

$$\alpha' \times \omega, \quad \omega' \times \omega$$

vektörlerinin aynı doğrultuya sahip olmaları ile gerçekleşir. Bu takdirde

$$\omega, \ \alpha', \ \omega'$$

vektörlerinin bir düzleme paralel olmaları gerekir. Şekil (2.1) de gösterilmiştir.



Şekil 2.1: Regle yüzeyin açılabilirlik şartlarını sağlayan vektörlerin konumu

O zaman, bir D ana doğrusu boyunca yüzeyin normal doğrultusunun aynı kalması şartı,

$$det\left(\omega,\ \alpha^{'},\ \omega^{'}\right) = 0$$

bağıntısı ile ifade edilir. Bu bağıntı gerçekleştiği takdirde regle yüzeye **açılabilir yüzey** denir [17].

Tanım 2.18 Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali**) denir [15].

Teorem 2.6 $X\left(s,v\right) = \alpha\left(s\right) + v\omega\left(s\right)$ regle yüzeyinin α dayanak eğrisi birim hızlı ve doğrultmanı ω birim vektörü ise bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali)

$$P_\omega = \frac{det\left(\omega, \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\omega}{\partial s}\right)}{\left\|\frac{\partial\omega}{\partial s}\right\|^2}$$

dir [15].

Teorem 2.7 $X\left(u,v\right) = \alpha\left(u\right) + v\omega\left(u\right)$ regle yüzeyinin α dayanak eğrisi birim hızlı değilse ve doğrultmanı ω birim vektörse, bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali)

$$P_\omega = \frac{det\left(\omega, \frac{d\alpha}{du}, \frac{d\omega}{du}\right)}{\left\|\frac{d\omega}{du}\right\|^2}$$

dir [15].

İspat.

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{du}$$

yazılabilir. Her iki tarafın normu alınırsa,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d\alpha}{du}\right\| &= \left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|\frac{ds}{du}, \\ &= \frac{ds}{du} \end{aligned} \tag{2.3}$$

bulunur.

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{du}}{\frac{ds}{du}} \tag{2.4}$$

dır. (2.3) ve (2.4) denklemlerinden,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{ds}}{\left\|\frac{d\alpha}{du}\right\|}$$

yazılabilir.

$$\frac{d\omega}{du}=\frac{d\omega}{ds}\frac{ds}{du}$$

bulunur.

$$\frac{d\omega}{ds}=\frac{\frac{d\omega}{du}}{\frac{ds}{du}} \tag{2.5}$$

dır. (2.3) ve (2.5) denklemlerinden,

$$\frac{d\omega}{ds}=\frac{\frac{d\omega}{du}}{\left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|}$$

yazabiliriz. Teorem (2.6) ve yukarıda elde edilen denklemler yardımıyla,

$$P_\omega=\frac{det\left(\omega,\frac{\frac{d\alpha}{du}}{\left\|\frac{d\alpha}{du}\right\|},\frac{\frac{d\omega}{du}}{\left\|\frac{d\alpha}{du}\right\|}\right)}{\frac{1}{\left\|\frac{d\alpha}{du}\right\|^2}\left\|\frac{d\omega}{du}\right\|^2} \tag{2.6}$$

elde edilir. Buradan, (2.6) denkleminin düzenlenmesiyle,

$$P_\omega=\frac{det\left(\omega,\frac{d\alpha}{du},\frac{d\omega}{du}\right)}{\left\|\frac{d\omega}{du}\right\|^2}$$

bulunur. ■

Teorem 2.8 $Y(s,v_1)=\alpha(s)+v_1\omega_0(s)$ regle yüzeyinin α dayanak eğrisi birim hızlı olup, ω_0 doğrultmanı birim vektör değilse bu regle yüzeyinin dağılma parametresi (drali),

$$P_{\omega_0}=\frac{det\left(\omega_0,\frac{d\alpha}{ds},\frac{d\omega_0}{ds}\right)}{\left\|\frac{d\omega_0}{ds}\right\|^2-\left(\frac{d\|\omega_0\|}{ds}\right)^2}$$

dir [15].

İspat.

$$\begin{aligned}Y(s,v_1)&=\alpha(s)+v_1\omega_0(s),\\&=\alpha(s)+\underbrace{v_1\|\omega_0(s)\|}_{v}\underbrace{\frac{\omega_0(s)}{\|\omega_0(s)\|}}_{\omega}\end{aligned}$$

formunda yazılabileceğinden, $Y(s,v_1)$ yüzeyini $X(s,v)=\alpha(s)+v\omega(s)$ şeklinde alabiliriz. Teorem (2.6) dan,

$$P_\omega=\frac{det\left(\omega,\frac{d\alpha}{ds},\frac{d\omega}{ds}\right)}{\left\|\frac{d\omega}{ds}\right\|^2}$$

dir.

$$\omega = \frac{\omega_0}{\|\omega_0\|}$$

eşitliğinden,

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{d\left(\frac{\omega_0}{\|\omega_0\|}\right)}{ds} = \frac{\frac{d\omega_0}{ds}\|\omega_0\| - \frac{d\|\omega_0\|}{ds}\omega_0}{\|\omega_0\|^2}$$

bulunur.
$\langle \omega, \omega \rangle = 1$ olduğundan $\langle \frac{d\omega}{ds}, \omega \rangle = 0$ bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \frac{d\left(\frac{\omega_0}{\|\omega_0\|}\right)}{ds}, \frac{\omega_0}{\|\omega_0\|} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{\|\omega_0\|^2}\left(\frac{d\omega_0}{ds}\|\omega_0\| - \frac{d\|\omega_0\|}{ds}\omega_0\right), \frac{\omega_0}{\|\omega_0\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|\omega_0\|^2}\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}, \omega_0 \right\rangle - \frac{d\|\omega_0\|}{ds}\frac{1}{\|\omega_0\|^3}\langle \omega_0, \omega_0 \rangle \\
&= \frac{1}{\|\omega_0\|^2}\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}, \omega_0 \right\rangle - \frac{1}{\|\omega_0\|}\frac{d\|\omega_0\|}{ds}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}, \omega_0 \right\rangle - \frac{d\|\omega_0\|}{ds}\|\omega_0\| = 0$$

veya

$$\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}, \omega_0 \right\rangle = \frac{d\|\omega_0\|}{ds}\|\omega_0\| \tag{2.7}$$

olur. Ayrıca,

$$\left\| \frac{d\left(\frac{\omega_0}{\|\omega_0\|}\right)}{ds} \right\|^2 = \frac{1}{\|\omega_0\|^4}\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}\|\omega_0\| - \frac{d\|\omega_0\|}{ds}\omega_0, \frac{d\omega_0}{ds}\|\omega_0\| - \frac{d\|\omega_0\|}{ds}\omega_0 \right\rangle,$$

$$= \frac{1}{\|\omega_0\|^4}\left[\|\omega_0\|^2\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}, \frac{d\omega_0}{ds} \right\rangle + \left(\frac{d\|\omega_0\|}{ds}\right)^2\langle \omega_0, \omega_0 \rangle - 2\frac{d\|\omega_0\|}{ds}\|\omega_0\|\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}, \omega_0 \right\rangle\right] \tag{2.8}$$

dir. (2.7) ve (2.8) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{d\left(\frac{\omega_0}{\|\omega_0\|}\right)}{ds} \right\|^2 &= \frac{1}{\|\omega_0\|^4}\left[\|\omega_0\|^2\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}, \frac{d\omega_0}{ds} \right\rangle + \left(\frac{d\|\omega_0\|}{ds}\right)^2\langle \omega_0, \omega_0 \rangle - 2\frac{d\|\omega_0\|}{ds}\|\omega_0\|\frac{d\|\omega_0\|}{ds}\|\omega_0\|\right], \\
&= \frac{1}{\|\omega_0\|^4}\left[\|\omega_0\|^2\left\|\frac{d\omega_0}{ds}\right\|^2 - \left(\frac{d\,\|\omega_0\|}{ds}\right)^2\|\omega_0\|^2\right], \\
&= \frac{1}{\|\omega_0\|^2}\left[\left\|\frac{d\omega_0}{ds}\right\|^2 - \left(\frac{d\|\omega_0\|}{ds}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

bulunur.

$$det\left(\frac{\omega_0}{\|\omega_0\|},\frac{d\alpha}{ds},\frac{1}{\|\omega_0\|^2}\left(\frac{d\omega_0}{ds}\|\omega_0\|-\frac{d\|\omega_0\|}{ds}\omega_0\right)\right)=\frac{1}{\|\omega_0\|^2}det\left(\omega_0,\frac{d\alpha}{ds},\frac{d\omega_0}{ds}\right) \tag{2.10}$$

dır. Dolasıyla (2.9) ve (2.10) denklemlerinden,

$$P_{\omega_0}=\frac{det\left(\omega_0,\frac{d\alpha}{ds},\frac{d\omega_0}{ds}\right)}{\|\frac{d\omega_0}{ds}\|^2-\left(\frac{d\|\omega_0\|}{ds}\right)^2}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.9 Bir $X(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [16].

3 DÜZLEM ve UZAY EĞRİLERİNİN ELASTİK OLMAYAN AKIŞLARI

Bu bölümde Kwon ve Park [11, 12] ın çalışmalarında sunulan düzlem ve uzay eğrilerinin elastik olmayan akışları için temel sonuçlar ele alındı. Sabit uzunluklu düzlem ve uzay eğrilerinin ilk ve son konumu arasındaki elastik olmayan akışı açık bir şekilde ortaya konuldu.

Başlangıç eğrisinin yay uzunluğu l olmak üzere, bir parametreli eğri ailesi,

$$\begin{aligned} \alpha : [0,l] \times [0,\omega] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,t) &\longrightarrow \alpha(u,t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Burada u, eğrinin değişken parametresi ve $0 \leq u \leq l$ dir. α nın yay uzunluğu,

$$s(u) = \int_0^u \|\frac{\partial \alpha}{\partial u}\| du$$

şeklinde verilir. α eğrisinin hızı ise,

$$\nu(u) = \|\frac{\partial \alpha}{\partial u}\|$$

olmak üzere $\frac{\partial}{\partial s}$, u cinsinden,

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{veya} \quad ds = \nu du$$

şeklinde yazılabilir. Yay uzunluğu varyasyonu,

$$L(u,t) = \int_0^u \nu du$$

olarak alınabilir. Ayrıca eğrinin herhangi bir uzama ve kısalma durumunun olmaması için,

$$\frac{\partial}{\partial t} L(u,t) = \int_0^u \frac{\partial \nu}{\partial t} du = 0, \qquad \forall u \in [0,l]$$

şartı gerçekleşmelidir.

Tanım 3.1 α, başlangıç eğrisinin yay uzunluğu l olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : [0,l] \times [0,\omega] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,t) &\longrightarrow \alpha(u,t) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\alpha(u,t)$ fonksiyonuna, eğri evolüsyonu denir [12].

Tanım 3.2 Bir

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha\left(s\right) \end{aligned}$$

eğrisi için,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

ifadesine $\alpha(u,t)$ evolüsyonunun akışı denir [12].

Tanım 3.3 $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$ de $\frac{\partial}{\partial t}\|\frac{\partial \alpha}{\partial u}\| = 0$ ise $\alpha\left(u,t\right)$ eğri evolüsyonuna ve onun $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ akışına elastik olmayan denir [11].

3.1 BİR DÜZLEMSEL EĞRİNİN ELASTİK OLMAYAN AKIŞI

Bundan sonraki üç teorem, eğrinin eğriliğine, teğetsel ve normal hızlarına göre bir elastik olmayan düzlemsel eğri akışını karakterize edecektir.

Teorem 3.1 α nın akışı $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = fT + gN$ olmak üzere,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} - g\nu\kappa = (\frac{\partial f}{\partial s} - g\kappa)\nu$$

dır [12].

İspat. $\nu^2 = \langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \rangle$ eşitliğinin t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \rangle = 2\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)\rangle$$

olduğundan,

$$2\nu\frac{\partial \nu}{\partial t} = 2\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)\rangle$$

bulunur.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = fT + gN \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{ile} \quad \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{değişimli olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} 2\nu\frac{\partial \nu}{\partial t} &= 2\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\left(fT + gN\right)\rangle \\ &= 2\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}T + f\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial u}N + g\frac{\partial N}{\partial u}\rangle \end{aligned}$$

dir. Burada,

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \nu\kappa N \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial u} = -\nu\kappa T$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} 2\nu\frac{\partial \nu}{\partial t} &= 2\langle\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}T + \nu f\kappa N + \frac{\partial g}{\partial u}N - \nu g\kappa T\rangle, \\ &= 2\langle\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \nu g\kappa\right)T + \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \nu f\kappa\right)N\rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u} = \nu T$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} 2\nu\frac{\partial \nu}{\partial t} &= 2\langle\nu T, \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \nu g\kappa\right)T + \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \nu f\kappa\right)N\rangle \\ &= 2\langle\nu T, \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \nu g\kappa\right)T\rangle, \\ &= 2\nu\left(\frac{\partial f}{\partial u} - g\nu\kappa\right) \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{\partial s}{\partial u} = \nu$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u} - g\nu\kappa, \\ &= \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u} - g\nu\kappa, \\ &= (\frac{\partial f}{\partial s} - g\kappa)\nu \end{aligned}$$

elde edilir [11]. ■

Elastik olmayan düzlemsel eğri akışına bir örnek verelim.

Örnek 3.1 Bir,

$$\alpha(s) = \left(2\arccos(\frac{1+e^{-s}}{\sqrt{2+2e^{-2s}}}), -\log(\mathrm{sech}(s))\right)$$

birim hızlı eğriyi göz önüne alalım. Buradan,

$$\alpha'(s) = T = \left(\frac{2\sqrt{1-\mathrm{sech}(s)}}{\sqrt{1+e^{-2s}}(e^s-1)}, \tanh(s)\right)$$

elde edilir. Bu α eğrisinin evolüsyonunu,

$$\alpha(s,t) = \left(\frac{2\arccos(\frac{1+e^{-s(t+1)}}{\sqrt{2+2e^{-2s(t+1)}}})}{(t+1)}, -\frac{\log(\mathrm{sech}(s(t+1)))}{(t+1)}\right)$$

olacak şekilde tanımlayalım.

$$\frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial s} = \alpha^{'}(s,t) = \Big(\frac{2\sqrt{1-\operatorname{sech}(s(t+1))}}{\sqrt{1+e^{-2s(t+1)}}(e^{s(t+1)}-1)}, \tanh(s(t+1)) \Big)$$

dir. Ayrıca,

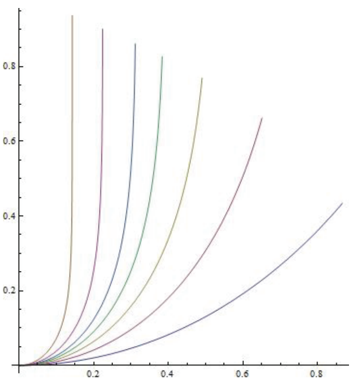
$$\nu = \|\alpha^{'}(s,t)\| = 1$$

bulunur. Tanım (3.3) den,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = 0$$

elde edilir ki $\alpha(s,t)$ eğri evolüsyonunun elastik olmadığı gösterilmiş olur.

Bu eğri evolüsyonunun t zamanına göre değişimi şekil 3.1 gösterilmiştir.



Şekil 3.1: $t \in \{0,1,2,3,4,6,10\}$, ve $s \in [0,1]$ değerleri için α eğrisinin evolüsyonu

Bu örnek $\forall t$ için $\alpha(u,t)$ eğri evolüsyonun, herhangi bir t_0 başlangıç zamanında tanımlanan $\alpha(u,t_0)$ orjinal eğrinin izometrik görüntüsü olduğunu ifade eder. Bir elastik olmayan eğri akışı, $\alpha(u,t)$ fiziksel olarak sabit uzunluktaki bir kablonun salınım hareketi resmedilebilir.

Teorem 3.2 (Elastik olmayan bir akış için gerek ve yeter koşul)

Eğrinin $\dfrac{\partial\alpha}{\partial t} = fT + gN$ akışı elastik olmayandır $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial s} = g\kappa$ dır [12].

İspat. Teorem (3.1) ve Tanım (3.3) den,

$$\frac{\partial\nu}{\partial t} = (\frac{\partial f}{\partial s} - g\kappa)\nu$$

dır. $\nu \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.3 Bir düzlemsel eğrinin elastik olmayan akışı $\frac{\partial\alpha}{\partial t} = fT + gN$ veya eşdeğer olarak $\frac{\partial f}{\partial s} = g\kappa$ olmak üzere,

$$a) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s}\right)N \tag{3.1}$$

$$b) \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s}\right)T \tag{3.2}$$

dir [11].

İspat. a)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial s} = T, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial t} = fT + gN$$

olmak üzere, $\frac{\partial}{\partial t}$ ile $\frac{\partial}{\partial s}$ değişmeli olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(fT + gN\right), \\
&= \frac{\partial f}{\partial s}T + f\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial s}N + g\frac{\partial N}{\partial s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = g\kappa, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N \text{ ve } \frac{\partial N}{\partial s} = -\kappa T$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= g\kappa T + f\kappa N + \frac{\partial g}{\partial s}N - g\kappa T, \\
&= \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s}\right)N
\end{aligned}$$

dir [11].

b) $\langle T, N\rangle = 0$ olup, eşitliğin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle T, N\rangle = 0,$$
$$\langle\frac{\partial T}{\partial t}, N\rangle + \langle T, \frac{\partial N}{\partial t}\rangle = 0$$

dır. (3.1) denklemini kullanarak,

$$\left\langle \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s}\right) N, N \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle = 0,$$
$$f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + \left\langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle = -\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s}\right)$$

bulunur. Dolasıyla,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s}\right) T$$

elde edilir. ■

Teorem 3.4 Kabul edelim ki $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = fT + gN$ eğri akışı elastik olmayan (yani $\frac{\partial f}{\partial s} = g\kappa$) olsun. O zaman $\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s}\kappa + f\frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}$ dir [12].

İspat. Teorem (3.3) den,

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\kappa + f\frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}\right) N - \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s}\right)\kappa T,$$
$$= -\kappa\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s}\right) T + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\kappa + f\frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}\right) N \qquad (3.3)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}(\kappa N) = -\kappa\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s}\right) T + \frac{\partial \kappa}{\partial t} N \qquad (3.4)$$

dır. Dolasıyla, (3.3) ve (3.4) denklemlerinden,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s}\kappa + f\frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}$$

elde edilir [11]. ■

Eğrinin ilk ve son konumlarında yay uzunluğu korunuyorsa bu eğri için bir elastik olmayan akış elde edilebilir.

Teorem 3.5 Teorem (3.4) deki kısmi diferensiyel denklem sistemleri için bir çözüm vardır. Ayrıca, sırasıyla, $\kappa_0(s)$ ve $\kappa_1(s)$ eğrilikleriyle verilen aynı uzunluklu iki eğri için, $\kappa(s,0)=\kappa_0(s)$ ve $\kappa(s,1)=\kappa_1(s)$ olacak şekilde herhangi düzgün,

$$\kappa(s,t):[0,l]\times[0,1]\to\mathbb{R}^2$$

dönüşümü, $\frac{\partial\alpha}{\partial t}=fT+gN$ eğri akışı elastik olmayacak şekilde belirlenebilir [12].

3.2 $\mathbb{R}^3$ DE BİR UZAY EĞRİSİNİN ELASTİK OLMAYAN AKIŞI

Bundan sonra aşağıdaki teoremle başlamak üzere $\mathbb{R}^3$ de elastik olmayan eğri akışı ele alınarak karakterize edilecektir.

Teorem 3.6 α nın akışı $\frac{\partial\alpha}{\partial t}=fT+gN+hB$ olmak üzere,

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}-g\nu\kappa=(\frac{\partial f}{\partial s}-g\kappa)\nu$$

dır [12].

İspat. $\nu^2=\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial\alpha}{\partial u}\rangle$ eşitliğinin t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial\alpha}{\partial u}\rangle=2\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\rangle$$

olduğundan,

$$2\nu\frac{\partial\nu}{\partial t}=2\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\rangle$$

bulunur.

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=fT+gN+hB \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{ile} \quad \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{değişimli olduğundan,}$$

$$\begin{aligned}2\nu\frac{\partial\nu}{\partial t}&=2\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}(fT+gN+hB)\rangle\\&=2\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial u}T+f\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial u}N+g\frac{\partial N}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial u}B+h\frac{\partial B}{\partial u}\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{\partial T}{\partial u}=\nu\kappa N,\quad \frac{\partial N}{\partial u}=-\nu(\kappa T+\tau B) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial B}{\partial u}=\nu\tau N$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
2\nu\frac{\partial\nu}{\partial t} &= 2\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial u}T+\nu f\kappa N+\frac{\partial g}{\partial u}N-\nu g\left(\kappa T+\tau B\right)+\frac{\partial h}{\partial u}B+\nu h\tau N\rangle,\\
&= 2\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\nu g\kappa\right)T+\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\nu f\kappa+\nu h\tau\right)N+\left(\frac{\partial h}{\partial u}-\nu g\tau\right)B\rangle
\end{aligned}$$

dir.

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{\partial\alpha}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}=\nu T$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
2\nu\frac{\partial\nu}{\partial t} &= 2\langle\nu T,\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\nu g\kappa\right)T+\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\nu f\kappa+\nu h\tau\right)N+\left(\frac{\partial h}{\partial u}-\nu g\tau\right)B\rangle\\
&= 2\langle\nu T,\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\nu g\kappa\right)T\rangle,\\
&= 2\nu\left(\frac{\partial f}{\partial u}-g\nu\kappa\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\frac{\partial s}{\partial u}=\nu$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\nu}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u}-g\nu\kappa,\\
&= \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}-g\nu\kappa,\\
&= (\frac{\partial f}{\partial s}-g\kappa)\nu
\end{aligned}$$

elde edilir [11]. ■

Teorem 3.7

Eğrinin $\frac{\partial\alpha}{\partial t}=fT+gN+hB$ akışı elastik olmayandır $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial s}=g\kappa$ dır [12].

İspat. Teorem (3.6) ve Tanım (3.3) den,

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}=(\frac{\partial f}{\partial s}-g\kappa)\nu$$

dır. $\nu\neq 0$ olduğunu göz önüne alırsak ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem (3.7) nin ilginç bir yorumu şudur: $\mathbb{R}^3$ de bir eğri evolüsyonunun elastik olmaması, bu akışın h binormal bileşeninin eğrinin uzamasında ya da kısalmasında değil, sadece bükülmesinde rol oynadığını gösterir [12].

Bu gözlem aşağıdaki sonuç ile özetlenebilir.

Sonuç 3.1 Bir elastik olmayan eğri akışı h binormal bileşeninden bağımsızdır [12].

Şimdi yukarıdaki teoremin uygulamasını aşağıdaki iki örnekle gösterelim.

Örnek 3.2 Bir,

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s), \cos(s), s) \end{aligned}$$

eğrisini ve bu eğrinin,

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] \times [0, \omega] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\longrightarrow \alpha(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sin(s(t+1))}{t+1}, \frac{\cos(s(t+1))}{t+1}, s) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı $\alpha(s, t)$ evolüsyonunu ele alalım. α eğrisinin

$$\frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial t} = fT + gN + hB$$

akışı için,

$$\frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial s} = \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(s(t+1)), -\sin(s(t+1)), 1)$$

bulunur. Buradan,

$$\nu = \|\alpha'\| = 1$$

dir. $\frac{\partial \nu}{\partial t} = 0$ olduğundan $\frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t}$ akışı elastik olmayandır. Ayrıca,

$$\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(t+1)\sin(s(t+1)), -(t+1)\cos(s(t+1)), 0)$$

ve

$$\|\alpha''\| = \frac{(t+1)}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Birim hızlı eğriler için,

$$T = \alpha' \quad , \quad N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \quad , \quad B = T \times N \quad \text{ve} \quad \kappa = \|\alpha''\|$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(s(t+1)), -\sin(s(t+1)), 1) \quad ,$$

$$N = (-\sin(s(t+1)), -\cos(s(t+1)), 0)$$

ve

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \cos(s(t+1)) & -\sin(s(t+1)) & 1 \\ -\sin(s(t+1)) & -\cos(s(t+1)) & 0 \end{vmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(s(t+1)), -\sin(s(t+1)), -1)$$

elde edilir. Ayrıca, eğriliğimiz

$$\kappa = \frac{(t+1)}{\sqrt{2}} \tag{3.5}$$

dir. α eğrisinin akışı için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha(s,t)}{\partial t} &= \left(\frac{s(t+1)\cos(s(t+1)) - \sin(s(t+1))}{(t+1)^2}, \frac{-s(t+1)\sin(s(t+1)) - \cos(s(t+1))}{(t+1)^2}, 0\right) \\ &= fT + gN + hB \end{aligned}$$

olduğundan,

$$f = \langle \frac{\partial\alpha(s,t)}{\partial t}, T\rangle = \frac{s}{2(t+1)} \tag{3.6}$$

ve

$$g = \langle \frac{\partial\alpha(s,t)}{\partial t}, N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}(t+1)^2} \tag{3.7}$$

şeklinde bulunur. (3.6) denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{2(t+1)} \tag{3.8}$$

dır. (3.5) ve (3.7) denklemlerinden,

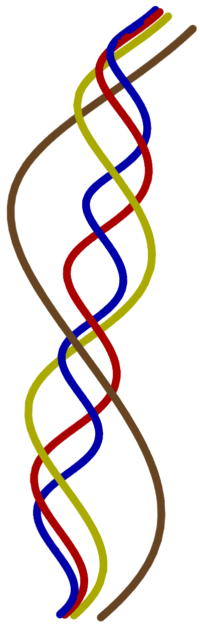
$$\begin{aligned} g\kappa &= \frac{1}{\sqrt{2}(t+1)^2}\frac{(t+1)}{\sqrt{2}}, \\ &= \frac{1}{2(t+1)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.8) ve (3.9) denklemlerinden ve teorem (3.7) ye göre,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = g\kappa$$

eşitliği sağlanmış olur.

Bu eğri evolüsyonunun $s \in [0, 2\pi]$ ve t nin 0, 1, 2 ve 3 değerleri için grafiği şekil 3.2 de gösterilmiştir.



Şekil 3.2: $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ ve $s \in [0, 2\pi]$ değerleri için α eğrisinin evolüsyonu

Örnek 3.3 Bir,

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\longrightarrow \alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin(u^2), \cos(u^2), u\right) \end{aligned}$$

eğrisini ve bu eğrinin,

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] \times [0, \omega] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, t) &\longrightarrow \alpha(u, t) = \left(\frac{\sin(u^2(t+1))}{(t+1)}, \frac{\cos(u^2(t+1))}{(t+1)}, u\right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\alpha(u, t)$ evolüsyonunu ele alalım. α eğrisinin,

$$\frac{\partial \alpha(u, t)}{\partial t} = fT + gN + hB$$

akışı için,

$$\frac{\partial \alpha(u, t)}{\partial u} = \alpha' = (2u \cos(u^2(t+1)), -2u \sin(u^2(t+1)), 1)$$

bulunur. Tanım (3.3) den,

$$\nu = \|\alpha'\| = \sqrt{4u^2 + 1}$$

ve $\frac{\partial \nu}{\partial t}=0$ olduğundan $\frac{\partial \alpha(u,t)}{\partial t}$ akışı elastik olmayandır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\alpha^{''} &= (2\cos(u^2(t+1)) - 4u^2(t+1)\sin(u^2(t+1)),\\ &\quad -2\sin(u^2(t+1)) - 4u^2(t+1)\cos(u^2(t+1)), 0)\end{aligned}$$

bulunur. Birim hızlı olmayan eğriler için,

$$T=\frac{\alpha^{'}}{\|\alpha^{'}\|},\quad N=B\times T,\quad B=\frac{\alpha^{'}\times\alpha^{''}}{\|\alpha^{'}\times\alpha^{''}\|}\ \text{ ve }\ \kappa=\frac{\|\alpha^{'}\times\alpha^{''}\|}{\|\alpha^{'}\|^3}$$

olduğunu biliyoruz.

$$T=\left(\frac{2u\cos(u^2(t+1))}{\sqrt{4u^2+1}},\frac{-2u\sin(u^2(t+1))}{\sqrt{4u^2+1}},\frac{1}{\sqrt{4u^2+1}}\right),$$

dir.

$$\alpha^{'}\times\alpha^{''}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ 2u\cos(u^2(t+1)) & -2u\sin(u^2(t+1)) & 1\\ 2\cos(u^2(t+1))-4u^2t\sin(u^2(t+1)) & -2\sin(u^2(t+1))-4u^2t\cos(u^2(t+1)) & 0\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha^{'}\times\alpha^{''} &= (2\sin(u^2(t+1)) + 4u^2(t+1)\cos(u^2(t+1)), 2\cos(u^2(t+1))\\ &\quad -4u^2(t+1)\sin(u^2(t+1)), -8u^3(t+1))\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\|\alpha^{'}\times\alpha^{''}\| &= \sqrt{4+16u^4(t+1)^2+64u^6(t+1)^2},\\ &= 2\sqrt{1+4u^4(t+1)^2+16u^6(t+1)^2}\end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}B=\frac{1}{\sqrt{1+4u^4(t+1)^2+16u^6(t+1)^2}} &\Big(\sin(u^2(t+1)) + 2u^2(t+1)\cos(u^2(t+1)),\\ &\cos(u^2(t+1)) - 2u^2(t+1)\sin(u^2(t+1)),\\ &-4u^3(t+1)\Big)\end{aligned}$$

bulunur.

$$N=B\times T$$

olduğunu biliyoruz.

$$\lambda=\frac{\sqrt{4u^2+1}}{\sqrt{1+4u^4(t+1)^2+16u^6(t+1)^2}}$$

dersek. O zaman,

$$N=\frac{1}{\lambda}\Big(\cos(u^2(t+1))-2u^2\sin(u^2(t+1))-8u^4(t+1)\sin(u^2(t+1)),-\sin(u^2(t+1))$$
$$-2u^2(t+1)\cos(u^2(t+1))-8u^4(t+1)\cos(u^2(t+1)),-2u\Big)$$

elde edilir. Ayrıca, eğriliğimiz,

$$\kappa=\frac{2\sqrt{1+4u^4(t+1)^2+16u^6(t+1)^2}}{(4u^2+1)\sqrt{4u^2+1}} \tag{3.10}$$

olarak bulunur. α eğrisinin akışı için,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha(u,t)}{\partial t}&=\Big(\frac{u^2(t+1)\cos(u^2(t+1))-\sin(u^2(t+1))}{(t+1)^2},\\&\quad\frac{-u^2(t+1)\sin(u^2(t+1))-\cos(u^2(t+1))}{(t+1)^2},0\Big)\\&=fT+gN+hB\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$f=\left\langle\frac{\partial\alpha(u,t)}{\partial t},T\right\rangle=\frac{2u^2+(t+1)}{(t+1)\sqrt{4u^2+1}} \tag{3.11}$$

ve

$$g=\left\langle\frac{\partial\alpha(u,t)}{\partial t},N\right\rangle=\frac{3u^2+8u^4(t+1)-2u(t+1)^2}{(t+1)\sqrt{1+4u^4(t+1)^2+16u^6(t+1)^2}\sqrt{4u^2+1}} \tag{3.12}$$

bulunur. α eğrisinin hızı

$$\nu=\left\|\frac{\partial\alpha(u,t)}{\partial u}\right\|=\sqrt{4u^2+1} \tag{3.13}$$

dir. (3.11) denkleminin u ya göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u(-2(t+1)+3u+8u^3)}{(t+1)(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.14}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}&=\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial s}\\&=\nu\frac{\partial f}{\partial s}\end{aligned}$$

olduğu dikkate alındığında, denklem (3.10), (3.12) ve (3.13) den,

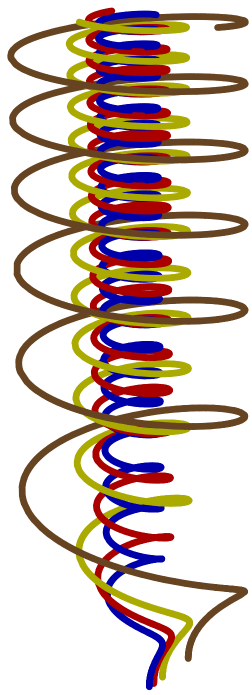
$$
\begin{aligned}
\nu g \kappa &= \sqrt{4u^2+1}\frac{3u^2+8u^4(t+1)-2u(t+1)^2}{(t+1)\sqrt{1+4u^4(t+1)^2+16u^6(t+1)^2}\sqrt{4u^2+1}} \\
&\quad \frac{2\sqrt{1+4u^4(t+1)^2+16u^6(t+1)^2}}{(4u^2+1)\sqrt{4u^2+1}}, \\
&= \frac{2u(-2(t+1)+3u+8u^3)}{(t+1)(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.14) ve (3.15) denklemlerinden,

$$
\frac{\partial f}{\partial u} = \nu g \kappa
$$

eşitliği sağlanmış olur ki $\alpha(u,t)$ evolüsyonu elastik olmayandır.

Bu eğri evolüsyonu t nin 0, 1, 2, 3 ve $u \in [0, 2\pi]$ değerleri için grafiği şekil 3.3 de gösterilmiştir.



Şekil 3.3: $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ ve $u \in [0, 2\pi]$ değerleri için α eğrisinin evolüsyonu

Teorem 3.8 α nın akışı $\frac{\partial\alpha}{\partial t}=fT+gN+hB$ ve $\psi=\left\langle\frac{\partial N}{\partial t},B\right\rangle$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t}&=\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)N+\left(-g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)B,\\ \frac{\partial N}{\partial t}&=-\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)T+\psi B,\\ \frac{\partial B}{\partial t}&=\left(g\tau-\frac{\partial h}{\partial s}\right)T-\psi N\end{aligned}$$

dir [12].

İspat. Teorem (3.7) ve Frenet-Serret formüllerini kullanarak,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(fT+gN+hB\right),\\ &=\frac{\partial f}{\partial s}T+f\kappa N+\frac{\partial g}{\partial s}N+g\left(-\kappa T-\tau B\right)+\frac{\partial h}{\partial s}B+h\tau N,\\ &=\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)N+\left(-g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)B\end{aligned}\tag{3.16}$$

elde edilir.
$\langle T,N\rangle=0$ eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle T,N\rangle=\langle\frac{\partial T}{\partial t},N\rangle+\langle T,\frac{\partial N}{\partial t}\rangle=0\tag{3.17}$$

dır. (3.16) denklemi (3.17) de yerine yazılırsa,

$$f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau+\langle T,\frac{\partial N}{\partial t}\rangle=0$$

ve buradan,

$$\langle T,\frac{\partial N}{\partial t}\rangle=-\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)\tag{3.18}$$

elde edilir.
$\langle T,B\rangle=0$ eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle T,B\rangle=\langle\frac{\partial T}{\partial t},B\rangle+\langle T,\frac{\partial B}{\partial t}\rangle=0\tag{3.19}$$

dır. (3.16) denklemi (3.19) de yerine yazılısa,

$$-g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}+\langle T,\frac{\partial B}{\partial t}\rangle=0$$

veya

$$\langle T,\frac{\partial B}{\partial t}\rangle=g\tau-\frac{\partial h}{\partial s}\tag{3.20}$$

elde edilir.
Benzer şekilde $\langle N,B\rangle = 0$ eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınıp,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle N,B\rangle = \langle\frac{\partial N}{\partial t},B\rangle + \langle N,\frac{\partial B}{\partial t}\rangle = 0, \tag{3.21}$$

bulunur.
$\psi = \langle\frac{\partial N}{\partial t},B\rangle$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\psi + \langle N,\frac{\partial B}{\partial t}\rangle &= 0,\\ \langle N,\frac{\partial B}{\partial t}\rangle &= -\psi\end{aligned} \tag{3.22}$$

dir.
$\langle N,N\rangle = 1$ eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$\langle\frac{\partial N}{\partial t},N\rangle + \langle N,\frac{\partial N}{\partial t}\rangle = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\langle\frac{\partial N}{\partial t},N\rangle = 0 \tag{3.23}$$

bulunur.
$\psi = \langle\frac{\partial N}{\partial t},B\rangle$, (3.18) ve (3.23) denklemlerinden,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)T + \psi B \tag{3.24}$$

elde edilir.
Benzer şekilde $\langle B,B\rangle = 1$ eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\langle\frac{\partial B}{\partial t},B\rangle + \langle B,\frac{\partial B}{\partial t}\rangle &= 0,\\ \langle\frac{\partial B}{\partial t},B\rangle &= 0\end{aligned} \tag{3.25}$$

dır. (3.20), (3.22) ve (3.25) denklemlerinden,

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left(g\tau - \frac{\partial h}{\partial s}\right)T - \psi N \tag{3.26}$$

bulunur [12]. ∎

Böylece uzay eğrilerinin elastik olmayan akışlarının temel sonucu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 3.9 Kabul edelim ki, $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = fT + gN + hB$ eğri akışı elastik olmayan (yani $\frac{\partial f}{\partial s} = g\kappa$) olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial s}\kappa + f\frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + 2\frac{\partial h}{\partial s}\tau + h\frac{\partial \tau}{\partial s} - g\tau^2 \\
&= \frac{\partial}{\partial s}(f\kappa) + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}(h\tau) - g\tau^2 + \tau\frac{\partial h}{\partial s}, \\
\frac{\partial \tau}{\partial t} &= \kappa\left(g\tau - \frac{\partial h}{\partial s}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial s}, \\
\kappa\psi &= -\tau\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right) - \frac{\partial}{\partial s}(g\tau) + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}
\end{aligned}$$

dır. Burada $\psi = \langle \frac{\partial N}{\partial t}, B \rangle$ dır [12].

İspat. $\frac{\partial}{\partial s}$ ile $\frac{\partial}{\partial t}$ değişmeli olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s}$$

yazılabilir. (3.16) denkleminden,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)N + \left(-g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right)B\right], \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial s}(f\kappa) + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}(h\tau)\right)N + \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)\frac{\partial N}{\partial s} \\
&+ \left(-\frac{\partial}{\partial s}(g\tau) + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right)B + \left(-g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right)\frac{\partial B}{\partial s}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\frac{\partial N}{\partial s} = -(\kappa T + \tau B) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial B}{\partial s} = \tau N$$

eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial s}(f\kappa) + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}(h\tau)\right)N - \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)(\kappa T + \tau B) \\
&+ \left(-\frac{\partial}{\partial s}(g\tau) + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right)B + \left(-g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right)\tau N, \\
&= -\left(f\kappa^2 + \frac{\partial g}{\partial s}\kappa + h\tau\kappa\right)T + \left(\frac{\partial}{\partial s}(f\kappa) + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}(h\tau) - g\tau^2 + \frac{\partial h}{\partial s}\tau\right)N \\
&+ \left(-\tau\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right) - \frac{\partial}{\partial s}(g\tau) + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right)B \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t}(\kappa N)\\ &= \frac{\partial \kappa}{\partial t}N + \kappa\frac{\partial N}{\partial t}\end{aligned}$$

dır. (3.24) denkleminden,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s} &= \frac{\partial \kappa}{\partial t}N + \kappa\left(-\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)T + \psi B\right),\\ &= -\left(f\kappa^2 + \frac{\partial g}{\partial s}\kappa + h\tau\kappa\right)T + \frac{\partial \kappa}{\partial t}N + \kappa\psi B \qquad (3.28)\end{aligned}$$

bulunur. (3.27) ve (3.28) denklemlerinden,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}(f\kappa) + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}(h\tau) - g\tau^2 + \tau\frac{\partial h}{\partial s},$$

ve

$$\kappa\psi = -\tau\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right) - \frac{\partial}{\partial s}(g\tau) + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}$$

olduğunu görürüz. Benzer şekilde,

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial s}$$

yazılabilir. (3.26) denkleminden,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(g\tau - \frac{\partial h}{\partial s}\right)T - \psi N\right],\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial s}(g\tau) - \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right)T + \left(g\tau - \frac{\partial h}{\partial s}\right)\frac{\partial T}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial s}N - \psi\frac{\partial N}{\partial s}\end{aligned}$$

bulunur.

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial s} = -(\kappa T + \tau B)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial s}(g\tau) - \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right)T + \left(g\tau - \frac{\partial h}{\partial s}\right)\kappa N - \frac{\partial \psi}{\partial s}N + \psi(\kappa T + \tau B),\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial s}(g\tau) - \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \kappa\psi\right)T + \left(g\tau\kappa - \frac{\partial h}{\partial s}\kappa - \frac{\partial \psi}{\partial s}\right)N + \tau\psi B \qquad (3.29)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{\partial B}{\partial s} = \tau N$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t}(\tau N)\\ &= \frac{\partial \tau}{\partial t}N + \tau\frac{\partial N}{\partial t}\end{aligned}$$

bulunur. (3.24) denkleminden,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial s} &= \frac{\partial \tau}{\partial t}N + \tau\left(-\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)T + \psi B\right), \\
&= -\tau\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)T + \frac{\partial \tau}{\partial t}N + \tau\psi B
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

yazabiliriz. (3.29) ve (3.30) denklemlerinden,

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \kappa\left(g\tau - \frac{\partial h}{\partial s}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial N}{\partial s}$$

eşitliği kullanılarak da yukarıdaki formüller elde edilebilir [12]. ■

4 AÇILABİLİR YÜZEYLERİN ELASTİK OLMAYAN AKIŞLARI

Eğer $det\left(\omega,\omega',\alpha'\right)=0$ ise $\|\omega\left(u\right)\|=1$ olmak üzere $X\left(u,v\right)=\alpha\left(u\right)+v\omega\left(u\right)$ regle yüzeyine açılabilirdir denir. Açılabilir yüzey, Gauss eğriliği heryerde sıfır olan bir yüzeydir veya düzlemin izometrik bir görüntüsüdür. Bu tezde, silindirik olmayan yani $\forall u$ için $w'\neq 0$ durumu dikkate alınacaktır.

$\|\omega\left(u\right)\|=1$, $\omega'\neq 0$, $det\left(\omega,\omega',\alpha'\right)=0$ olacak şekilde $X\left(u,v,t\right)=\alpha\left(u,t\right)+v\omega\left(u,t\right)$ açılabilir yüzeylerin bir parametreli ailesi olsun. Burada $'$ simgesi $\frac{\partial}{\partial u}$ türevini belirtmektedir. Bu çalışmada, X in elastik olmayan evolüsyonları ele alınacağından ve α, X üzerinde yatan bir eğri olduğundan; $\alpha\left(u,t\right)$, $\mathbb{R}^3$ de bir eğrinin elastik olmayan evolüsyonu olarak alınacaktır. Böylece her t için α nın yay uzunluğu u kabul edilebilir. Bu bölüm boyunca, u parametresi yay parametresi olarak kabul edilecektir.

Tanım 4.1

$$X\left(u,v,t\right)=\alpha\left(u,t\right)+v\omega\left(u,t\right), \quad \|\omega\left(u\right)\|=1, \quad \omega'\neq 0, \quad det\left(\omega,\omega',\alpha'\right)=0$$

ve u, α nın yay uzunluğu olsun. X in birinci temel formu, $\{E,F,G\}$,

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial G}{\partial t}=0$$

şartını sağlıyorsa $X\left(u,v,t\right)$ yüzey evolüsyonu ve $\frac{\partial X}{\partial t}$ akışı, elastik olmayan olarak adlandırılır [12].

Bu tanım $\forall t$ için $X\left(u,v,t\right)$ yüzeyinin, herhangi bir t_0 başlangıç zamanında tanımlanan $X\left(u,v,t_0\right)$ orjinal yüzeyinin izometrik görüntüsü olduğunu ifade eder. Bir açılabilir yüzey için, $X\left(u,v,t\right)$ fiziksel olarak dalgalanan bir bayrağın parametrizasyonu gibi resmedilebilir.

Örnek 4.1 $a,b\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere,

$$X\left(u,v\right)=\underbrace{\left(b\cos\left(\frac{u}{b}\right),b\sin\left(\frac{u}{b}\right),a\right)}_{\alpha(u)}+v\underbrace{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\cos\left(\frac{u}{b}\right),b\sin\left(\frac{u}{b}\right),a\right)}_{\omega(u)}$$

koni yüzeyi verilsin. Bu koni, dayanak eğrisi α, doğrultmanı ω olan bir regle yüzeydir.

$$\alpha^{'}\left(u\right)=\left(-\sin\left(\frac{u}{b}\right),\cos\left(\frac{u}{b}\right),0\right)$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned}\|\alpha^{'}(u)\| &= \sqrt{\langle\left(-\sin\left(\frac{u}{b}\right),\cos\left(\frac{u}{b}\right),0\right),\left(-\sin\left(\frac{u}{b}\right),\cos\left(\frac{u}{b}\right),0\right)\rangle}\\ &= 1\end{aligned}$$

yani α birim hızlı bir eğridir. Ayrıca,

$$\|\omega(u)\| = 1$$

olduğundan ω birimdir. Teorem (2.6) dan,

$$det\left(\omega,\alpha^{'},\omega^{'}\right) = \begin{vmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(\frac{u}{b}\right) & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(\frac{u}{b}\right) & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\sin\left(\frac{u}{b}\right) & \cos\left(\frac{u}{b}\right) & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(\frac{u}{b}\right) & \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(\frac{u}{b}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ve

$$\begin{aligned}\|\omega^{'}(u)\|^2 &= \langle\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\sin\left(\frac{u}{b}\right),\cos\left(\frac{u}{b}\right),0\right),\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\sin\left(\frac{u}{b}\right),\cos\left(\frac{u}{b}\right),0\right)\rangle\\ &= \frac{1}{a^2+b^2},\\ &\neq 0\end{aligned}$$

dir. $\|\omega^{'}(u)\|^2 \neq 0$ olduğundan $X(u,v)$ yüzeyi açılabilir bir regle yüzeydir.
Şimdi,

$$\begin{aligned}X(u,v,t) &= \underbrace{\left(\frac{b}{(t+1)}\cos\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),\frac{b}{(t+1)}\sin\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),\sqrt{a^2+b^2-\frac{b^2}{(t+1)^2}}\right)}_{\alpha(u,t)}\\ &+ \underbrace{v\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{(t+1)}\cos\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),\frac{b}{(t+1)}\sin\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),\sqrt{a^2+b^2-\frac{b^2}{(t+1)^2}}\right)}_{\omega(u,t)}\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı yüzey evolüsyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}X_u &= \left(-\sin\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),\cos\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),0\right)\\ &+v\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\sin\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),\cos\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),0\right)\end{aligned}$$

ve

$$X_v = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{(t+1)}\cos\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),\frac{b}{(t+1)}\sin\left(\frac{u(t+1)}{b}\right),\sqrt{a^2+b^2-\frac{b^2}{(t+1)^2}}\right)$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
E &= 1+\frac{v^2}{a^2+b^2}+\frac{2v}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\sin^2(\frac{u(t+1)}{b})+\cos^2(\frac{u(t+1)}{b})\right),\\
&= 1+\frac{v^2}{a^2+b^2}+\frac{2v}{\sqrt{a^2+b^2}},\\
&= (1+\frac{v}{\sqrt{a^2+b^2}})^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\frac{b}{(t+1)}\cos(\frac{u(t+1)}{b})\sin(\frac{u(t+1)}{b})+\frac{b}{(t+1)}\cos(\frac{u(t+1)}{b})\sin(\frac{u(t+1)}{b})\right)\\
&+\frac{v}{a^2+b^2}\left(-\frac{b}{(t+1)}\cos(\frac{u(t+1)}{b})\sin(\frac{u(t+1)}{b})+\frac{b}{(t+1)}\cos(\frac{u(t+1)}{b})\sin(\frac{u(t+1)}{b})\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

ve

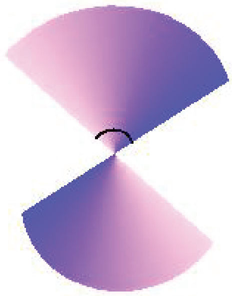
$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{b^2}{(t+1)^2}\cos^2(\frac{u(t+1)}{b})+\frac{b^2}{(t+1)^2}\sin^2(\frac{u(t+1)}{b})+a^2+b^2-\frac{b^2}{(t+1)^2}\right)\\
&= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

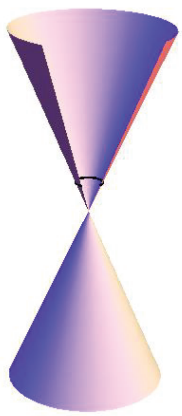
$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial G}{\partial t}=0$$

dır. Tanım (4.1) den $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonu elastik olmayandır.

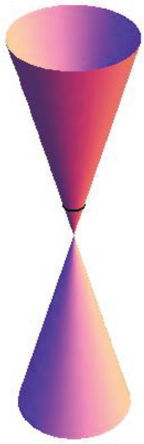
Bu yüzey evolüsyonunun t zamanına göre değişimi sırasıyla şekil 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4 de gösterilmiştir.



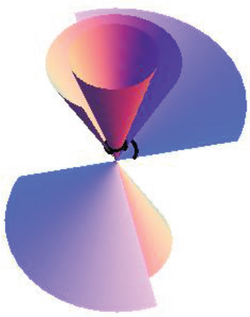
Şekil 4.1: $t = 0$, $a = 3$ ve $b = 4$ için yüzey evolüsyonu



Şekil 4.2: $t = 1$, $a = 3$ ve $b = 4$ için yüzey evolüsyonu



Şekil 4.3: $t = 2$, $a = 3$ ve $b = 4$ için yüzey evolüsyonu



Şekil 4.4: Şekil 4.1, 4.2 ve 4.3 ün görüntüsü

Teorem 4.1

$$X\,(u,v,t)=\alpha\,(u,t)+v\omega\,(u,t)\,,\quad \|\omega\,(u)\,\|=1,\quad \omega'\neq 0,\quad det\,(\omega,\omega',\alpha')=0$$

ve u, α nın yay uzunluğu olsun. X in birinci temel formu,

$$\begin{aligned}E &= \langle X_u, X_u\rangle = 1+2v\langle\alpha',\omega'\rangle+v^2\|\omega'\|^2,\\ F &= \langle X_u, X_v\rangle = \langle\alpha',\omega\rangle,\\ G &= \langle X_v, X_v\rangle = 1\end{aligned}$$

dir [12].

İspat.

$$X_u=\alpha'\,(u,t)+v\omega'\,(u,t)\,,\quad X_v=\omega\,(u,t)$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}E=\langle X_u,X_u\rangle &= \langle\alpha'\,(u,t)+v\omega'\,(u,t)\,,\alpha'\,(u,t)+v\omega'\,(u,t)\rangle,\\ &= \langle\alpha'\,(u,t)\,,\alpha'\,(u,t)\rangle+2v\langle\alpha'\,(u,t)\,,\omega'\,(u,t)\rangle+v^2\langle\omega'\,(u,t)\,,\omega'\,(u,t)\rangle,\\ &= 1+2v\langle\alpha'\,(u,t)\,,\omega'\,(u,t)\rangle+v^2\|w'(u,t)\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}F=\langle X_u,X_v\rangle &= \langle\alpha'\,(u,t)+v\omega'\,(u,t)\,,\omega\,(u,t)\rangle,\\ &= \langle\alpha'\,(u,t)\,,\omega\,(u,t)\rangle+v\langle\omega'\,(u,t)\,,\omega\,(u,t)\rangle,\\ &= \langle\alpha'\,(u,t)\,,\omega\,(u,t)\rangle\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}G=\langle X_v,X_v\rangle &= \langle\omega\,(u,t)\,,\omega\,(u,t)\rangle\\ &= \|w(u,t)\|^2\\ &= 1\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 4.2 Teorem 4.1 de tanımlanan $X(u,v,t)$ elastik olmayandır $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha', w'\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\|w'\|^2 = \frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha', w\rangle = 0$ dır [12].

İspat. Teorem (4.1) den $E = 1 + 2v\langle\alpha'(u,t), \omega'(u,t)\rangle + v^2\|w'(u,t)\|^2$ dir. Tanım (4.1) den,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(1 + 2v\langle\alpha'(u,t), \omega'(u,t)\rangle + v^2\|w'(u,t)\|^2\right) = 0$$

olmalıdır. Buradan,

$$2v\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha'(u,t), \omega'(u,t)\rangle + v^2\frac{\partial}{\partial t}\langle\omega'(u,t), \omega'(u,t)\rangle = 0$$

veya

$$2\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha'(u,t), \omega'(u,t)\rangle + v\frac{\partial}{\partial t}\langle\omega'(u,t), \omega'(u,t)\rangle = 0$$

bulunur.
$v_0 \neq 0$, $v_1 \neq 0$, $v_0 \neq v_1$ olmak üzere,
$v = v_0$ için,

$$2\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha'(u,t), \omega'(u,t)\rangle + v_0\frac{\partial}{\partial t}\langle\omega'(u,t), \omega'(u,t)\rangle = 0 \tag{4.1}$$

$v = v_1$ için,

$$2\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha'(u,t), \omega'(u,t)\rangle + v_1\frac{\partial}{\partial t}\langle\omega'(u,t), \omega'(u,t)\rangle = 0 \tag{4.2}$$

dır. (4.1) ve (4.2) denklem sistemi çözüldüğünde,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\omega'(u,t), \omega'(u,t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\|w'(u,t)\|^2 = 0$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha'(u,t), \omega'(u,t)\rangle = 0$$

elde edilir. Teorem (4.1) den,

$$F = \langle\alpha'(u,t), \omega(u,t)\rangle$$

dır.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha'(u,t), \omega(u,t)\rangle = 0$$

bulunur. Ayrıca,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha', w'\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\|w'\|^2 = \frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha', w\rangle = 0$$

olduğu dikkate alınırsa, Teorem (4.1) ve Tanım (4.1) den,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(1+2v\langle\alpha'(u,t),\omega'(u,t)\rangle+v^2\|w'(u,t)\|^2\right),\\ &= \frac{\partial}{\partial t}(1),\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha'(u,t),\omega(u,t)\rangle,\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

elde edilir ki ispat tamamlamış olur. ∎

Teorem (4.2) açılabilir yüzeylerin elastik olmayan evolüsyonunu karakterize eder, aynı zamanda aşağıdaki teorem ilginç bir geometrik yoruma sahiptir.

Teorem 4.3 $X(u,v,t)=\alpha(u,t)+v\omega(u,t)$ bir $X(u,v)$ açılabilir yüzeyinin elastik olmayan evolüsyonu olsun. $X(u,v,t)$, biri S^2 ve diğeri $\mathbb{R}^3$ de iki eğrinin elastik olmayan evolüsyonlarıyla tamamen karakterize edilebilir [12].

İspat. Teorem (4.2) den, $\frac{\partial}{\partial t}\|w'\|^2=0$ dır. Böylece, $\frac{\partial}{\partial t}\|w'\|^2=2\|w'\|\frac{\partial}{\partial t}\|w'\|=0$ dır.
$w'\neq 0$ olduğu için, $\frac{\partial}{\partial t}\|w'\|=0$ dır. Bu yüzden Tanım (3.3) deki şart sağlanır [12]. ∎

Şimdi bu bölümün ana sonucunu söyleyecek durumdayız.

Teorem 4.4 α nın yay uzunluğu u, $\frac{\partial\alpha}{\partial t}=f^1T^1+g^1N^1+h^1B^1$, $\frac{\partial w}{\partial t}=f^2T^2+g^2N^2+h^2B^2$ ve $\|w(u)\|=1$, $w'\neq 0$, $det(w,w',\alpha')=0$ olmak üzere,

$$X(u,v,t)=\alpha(u,t)+vw(u,t)$$

açılabilir regle yüzeyi verilsin. Burada, T^i,N^i,B^i, $i=1,2$ için, sırasıyla, α ve w nın Frenet çatılarıdır.
X elastik olmayan evolüsyon veya denk olarak,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha',w'\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\|w'\|^2=\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha',w\rangle=0$$

olsun. O zaman $f^i,g^i,h^i,i=1,2$ için Teorem (3.9) in eşitlikleri sağlanır [12].

Teorem 4.5 α birim hızlı bir slant helis ve $\bar{D}(u) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}(-\tau T + \kappa B)$ olmak üzere,
$X(u,v) = \alpha(u) + v\bar{D}(u)$ regle yüzeyi verilsin. $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonu,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \text{ ise}$$

elastik olmayandır.

İspat.

$$\begin{aligned}
\bar{D}'(u) &= \left(\frac{-\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\right)' T - \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\kappa N + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\right)' B + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\tau N \\
&= \left(\frac{-\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\right)' T + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\right)' B
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\right)' &= \frac{\tau'\sqrt{\tau^2+\kappa^2} - \frac{\left(\tau\tau'+\kappa\kappa'\right)\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}}{\tau^2+\kappa^2}, \\
&= \frac{\tau'\left(\tau^2+\kappa^2\right) - \tau\left(\tau\tau'+\kappa\kappa'\right)}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\
&= \frac{\kappa\left(\tau'\kappa - \tau\kappa'\right)}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\
&= \frac{\kappa^3}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)', \\
&= \kappa\frac{\kappa^2}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'
\end{aligned}$$

dır. $\sigma = \frac{\kappa^2}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ olduğundan,

$$\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\right)' = \kappa\sigma \tag{4.3}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\right)' &= \frac{\kappa'\sqrt{\tau^2+\kappa^2}-\frac{\left(\tau\tau'+\kappa\kappa'\right)\kappa}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}}{\tau^2+\kappa^2},\\ &= \frac{\kappa'\left(\tau^2+\kappa^2\right)-\kappa\left(\tau\tau'+\kappa\kappa'\right)}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}},\\ &= \frac{\tau\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}},\\ &= \frac{-\kappa^2\tau}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)',\\ &= -\tau\frac{\kappa^2}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\end{aligned}$$

bulunur. $\sigma=\frac{\kappa^2}{(\tau^2+\kappa^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ olduğundan,

$$\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\right)'=-\tau\sigma \tag{4.4}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}det(\bar{D},\alpha',\bar{D}') &= det(-\sigma(\int\kappa du)T-\sigma(\int\tau du)B,T,-\kappa\sigma T-\tau\sigma B),\\ &= det(-\sigma(\int\kappa du)T,T,-\kappa\sigma T)+det(-\sigma(\int\tau du)B,T,-\kappa\sigma T),\\ &+ det(-\sigma(\int\kappa du)T,T,-\tau\sigma B)+det(-\sigma(\int\tau du)B,T,-\tau\sigma B),\\ &= 0\end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}\|\bar{D}'(u)\|^2 &= \langle-\kappa\sigma T-\tau\sigma B,-\kappa\sigma T-\tau\sigma B\rangle,\\ &= \sigma^2(\kappa^2+\tau^2),\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $\|\bar{D}'(u)(u)\|^2\neq 0$ elde edilir. Teorem (2.6) göre $X(u,v)$ açılabilir bir regle yüzeydir.

$$X(u,v,t)=\alpha(u,t)+v\bar{D}(u,t)$$

yüzey evolüsyonunu göz önüne alalım. Teorem (4.2) den,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha'(u,t),\bar{D}'(u,t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\kappa N,-\kappa\sigma T-\tau\sigma B\rangle,\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\|\bar{D}'(u,t)\|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}\sigma^2(\kappa^2+\tau^2),\\ &= 2\sigma^2\Big(\kappa(\frac{\partial\kappa}{\partial t})+\tau(\frac{\partial\tau}{\partial t})\Big)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha^{'}\left(u,t\right),\bar{D}\left(u,t\right)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\kappa N,-\sigma(\int\kappa du)T-\sigma(\int\tau du)B\rangle, \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. $\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$ olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha^{'}\left(u,t\right),\bar{D}^{'}\left(u,t\right)\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\|\bar{D}^{'}\left(u,t\right)\|^{2}=\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha^{'}\left(u,t\right),\bar{D}\left(u,t\right)\rangle=0$$

elde edilir ki $X\left(u,v,t\right)$ yüzey evolüsyonu elastik olmayandır. ■

Yukarıdaki teoremin uygulamasını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 4.2 Bir,

$$\alpha(u) = \left(-\frac{1}{6}(-4\sin(u)+\sin(2u)), \frac{1}{6}(-4\cos(u)+\cos(2u)), -\frac{4}{3}\sqrt{2}\sin(\frac{u}{2})\right)$$

birim hızlı slant helisi göz önüne alalım. Buradan,

$$T = \left(\frac{1}{3}(2\cos(u)-\cos(2u)), \frac{4}{3}\sin^2(\frac{u}{2})\sin(u), -\frac{2}{3}\sqrt{2}\cos(\frac{u}{2})\right),$$

$$B = \left(\frac{\csc(\frac{u}{2})\sin^3(u)}{3\sqrt{\sin^2(\frac{u}{2})}}, -\frac{-2\sin(\frac{u}{2})+\sin(\frac{3u}{2})+\sin(\frac{5u}{2})}{6\sqrt{\sin^2(\frac{u}{2})}}, \frac{2}{3}\sqrt{1-\cos(u)}\right)$$

ayrıca eğrilikler,

$$\kappa = \sqrt{2}\sin(\frac{u}{2})$$

ve

$$\tau = -\sqrt{2}\cos(\frac{u}{2})$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\bar{D} = (-\frac{1}{3}\cos(\frac{3u}{2}), -\frac{1}{3}\sin(\frac{3u}{2}), \frac{2\sqrt{2}}{3})$$

bulunur. Dayanak eğrisi α ve doğrultmanı $\bar{D}$ olan regle yüzey,

$$\begin{aligned} X(u,v) &= \left(-\frac{1}{6}(-4\sin(u)+\sin(2u)), \frac{1}{6}(-4\cos(u)+\cos(2u)), -\frac{4}{3}\sqrt{2}\sin(\frac{u}{2})\right) \\ &+ v(-\frac{1}{3}\cos(\frac{3u}{2}), -\frac{1}{3}\sin(\frac{3u}{2}), \frac{2\sqrt{2}}{3}) \end{aligned}$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} det(\bar{D}, \alpha', \bar{D}') &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\cos(\frac{3u}{2}) & -\frac{1}{3}\sin(\frac{3u}{2}) & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3}(\cos(u)-\frac{1}{3}\cos(2u) & \frac{2}{3}\sin(u)-\frac{1}{3}\sin(2u)) & -\frac{2}{3}\sqrt{2}\cos(\frac{u}{2}) \\ \frac{1}{2}\sin(\frac{3u}{2}) & -\frac{1}{2}\cos(\frac{3u}{2}) & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\|\bar{D}'\|^2 = \frac{1}{2}$$

olduğundan, $X(u,v)$ yüzeyi açılabilir regle yüzeydir.

$t \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \{0,1,2,...\}$ olacak şekilde bu regle yüzeyin evolüsyonunu,

$$X(u,v,t) = \left(-\frac{1}{6}(-4\sin(u)+\sin(2u)), \frac{1}{6}(-4\cos(u)+\cos(2u)), -\frac{4}{3}\sqrt{2}\sin(\frac{u}{2})\right)$$
$$+ v(-\frac{1}{3}\cos(\frac{3u}{2}), -\frac{1}{3}\sin(\frac{3u}{2}), \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{(\sin(t)+\cos(t))}{\sqrt{1+\sin(2t)}})$$

biçiminde tanımlayalım. Bu yüzey evolüsyonu için,

$$\kappa = \sqrt{2}\sin(\frac{u}{2})$$

ve

$$\tau = -\sqrt{2}\cos(\frac{u}{2})$$

dir.

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} E &= 1 + \frac{v^2}{4} + v\sin(\frac{u}{2}), \\ &= 1 + \frac{v^2}{4} + v\frac{\sqrt{2}\kappa}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{8\cos(\frac{u}{2})+1}{9}, \\ &= \frac{-4\sqrt{2}\tau+1}{9} \end{aligned}$$

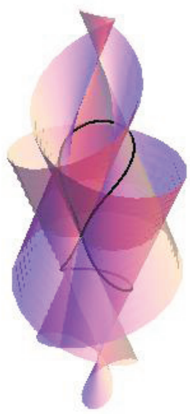
ve

$$G = 1$$

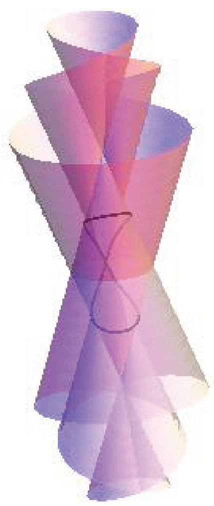
dir. Buradan,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

elde edilir. Tanım (4.1) den $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonunun elastik olmadığı gösterilmiş olur. Bu yüzey evolüsyonunun t zamanına göre değişimi şekil 4.5, 4.6 4.7 ve 4.8 de gösterilmiştir.

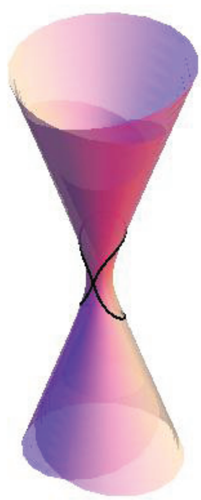


Şekil 4.5: $t = 0$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$ ve $v \in [-2\pi, 2\pi]$ için yüzey evolüsyonu



Şekil 4.6: $t = 1$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$ ve $v \in [-2\pi, 2\pi]$ için yüzey evolüsyonu

Şekil 4.7: $t = 2$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$ ve $v \in [-2\pi, 2\pi]$ için yüzey evolüsyonu



Şekil 4.8: $t = 3$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$ ve $v \in [-2\pi, 2\pi]$ için yüzey evolüsyonu

Teorem 4.6 α birim hızlı bir eğri ve $\widetilde{D}(u) = -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)T + B$ olmak üzere, $X(u,v) = \alpha(u) + v\widetilde{D}(u)$ regle yüzeyi verilsin. $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonu,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) = 0 \text{ ve } \frac{\tau}{\kappa} \text{ oranı sabit değil (yani } \alpha \text{ bir genel helis değil)}$$

ise elastik olmayandır.

İspat.

$$\begin{aligned}\widetilde{D}'(u) &= -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'T - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)\kappa N + \tau N,\\ &= -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'T\end{aligned}$$

dır.

$$\|\widetilde{D}(u)\| = \sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + 1},$$

olduğundan $\widetilde{D}$ vektörü birim değildir. Teorem (2.8) den,

$$\begin{aligned}det\left(\widetilde{D}, \alpha', \widetilde{D}'\right) &= det\left(-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)T + B, T, -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'T\right),\\ &= det\left(-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)T, T, -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'T\right) + det\left(B, T, -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'T\right),\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olmadığından,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{D}'(u)\|^2 - \left(\|\widetilde{D}(u)\|'\right)^2 &= \langle -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'T, -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'T\rangle - \left[\frac{\partial\sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + 1}}{\partial u}\right]^2,\\ &= \left[\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]^2 - \left[\frac{\tau\kappa\left(\tau'\kappa - \kappa'\tau\right)}{\kappa^4\sqrt{\frac{\kappa^2+\tau^2}{\kappa^2}}}\right]^2\\ &= \left[\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]^2 - \left[\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\sqrt{\kappa^2}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right]^2,\\ &= \left[\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]^2\left[1 - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}\right],\\ &= \left[\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]^2\left[\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}\right],\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\|\widetilde{D}'(u)\|^2 - \left(\|\widetilde{D}(u)\|'\right)^2 \neq 0$ dır. Böylece $X(u,v)$ yüzeyi açılabilir bir regle yüzeydir.

$$X(u,v,t) = \alpha(u,t) + v\widetilde{D}(u,t)$$

yüzey evolüsyonunu göz önüne alalım. Teorem (4.2) den,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha^{'}(u,t),\widetilde{D}^{'}(u,t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle T,-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{'}T\rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\|\widetilde{D}^{'}(u)\|^{2} &= \frac{\partial}{\partial t}\langle-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{'}T,-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{'}T\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{'}\right)^{2}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha^{'}(u,t),\widetilde{D}(u,t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle T,-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)T+B\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)\end{aligned}$$

dir. $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)=0$ olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha^{'}(u,t),\widetilde{D}^{'}(u,t)\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\|\widetilde{D}^{'}(u)\|^{2}=\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha^{'}(u,t),\widetilde{D}(u,t)\rangle=0$$

elde edilir ki $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonu elastik olmayandır. ■

Teorem 4.7 $\alpha: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{3}$ birim hızlı bir eğri ve α nın T teğet vektör alanının evolüsyonu elastik olmayan olmak üzere, $X(u,v)=T+vB$ regle yüzeyi verilsin. $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonu,

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=0 \qquad \text{ise}$$

elastik olmayandır.

İspat. Teorem (2.7) den,

$$det(B,\kappa N,\tau N)=0$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|B^{'}\|^{2} &= \langle\tau N,\tau N\rangle, \\ &= \tau^{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|B^{'}\|^{2}\neq 0$ dır. Böylece $X(u,v)$ yüzeyi açılabilir regle yüzeydir. α nın T teğet vektör alanının evolüsyonu elastik olmayan olduğundan,

$$\nu=\|\kappa N\|=\kappa$$

dır. Tanım (3.3) den,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0$$

elde edilir.

$$X(u,v,t) = T(u,t) + vB(u,t)$$

yüzey evolüsyonunu göz önüne alalım.

$$X_u = \kappa N + v\tau N \quad \text{ve} \quad X_v = B$$

ve

$$\begin{aligned} E &= \langle (\kappa + v\tau) N, (\kappa + v\tau) N \rangle = (\kappa + v\tau)^2, \\ F &= \langle (\kappa + v\tau) N, B \rangle = 0, \\ G &= \langle B, B \rangle = 1 \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= 2(\kappa + v\tau)\left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} + v\frac{\partial \tau}{\partial t}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

elde edilirki Tanım (4.1) den $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonu elastik olmayandır. ■

Yukarıdaki teoremin uygulamasını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 4.3 $a, b \in \mathbb{R}$ ve $|a| > |b|$ olmak üzere,

$$\alpha(u) = \Big((-\tfrac{a^2-b^2}{2a})(\tfrac{\cos((a+b)u)}{(a+b)^2} + \tfrac{\cos((a-b)u)}{(a-b)^2}), (-\tfrac{a^2-b^2}{2a})(\tfrac{\sin((a+b)u)}{(a+b)^2} + \tfrac{\sin((a-b)u)}{(a-b)^2}), \sqrt{\tfrac{a^2-b^2}{2a}}\cos(bu)\Big)$$

birim hızlı slant helisini göz önüne alalım. Buradan,

$$T = \Big(\cos(bu)\sin(au) - \tfrac{b\cos(au)\sin(bu)}{a}, \tfrac{a\cos(au)\cos(bu)+b\sin(au)\sin(bu)}{a}, \tfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}\sin(bu)}{a}\Big),$$

$$B = \Big(\tfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}\cos(bu)(b\cos(au)+a\sin(au)\tan(bu))}{a\sqrt{(a-b)(a+b)}}, \tfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}\cos(bu)(b\sin(au)-a\cos(au)\tan(bu))}{a\sqrt{(a-b)(a+b)}}, \tfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}\cos(bu)}{a}\Big)$$

dir. Ayrıca eğrilikler,

$$\kappa = \sqrt{(a-b)(a+b)}\cos(bu)$$

ve

$$\tau = -\sqrt{(a-b)(a+b)}\sin(bu)$$

elde edilir. Buradan, dayanak eğrisi T ve doğrultmanı B olan regle yüzey,

$$X(u,v) = \Big(\big(\cos(bu)\sin(au) - \tfrac{b\cos(au)\sin(bu)}{a}, \tfrac{a\cos(au)\cos(bu)+b\sin(au)\sin(bu)}{a}, \tfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}\sin(bu)}{a}\big) + v\big(\tfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}\cos(bu)(b\cos(au)+a\sin(au)\tan(bu))}{a\sqrt{(a-b)(a+b)}}, \tfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}\cos(bu)(b\sin(au)-a\cos(au)\tan(bu))}{a\sqrt{(a-b)(a+b)}}, \tfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}\cos(bu)}{a}\big)$$

dir. Burada, $a = 4,\ b = 3$ alınırsa

$$X(u,v) = \Big((-\tfrac{3}{4}\cos(4u)\sin(3u) + \cos(3u)\sin(4u), \tfrac{1}{4}(-4\cos(3u)\cos(4u) - 3\sin(3u)\sin(4u)), -\tfrac{\sqrt{7}}{4}\sin(3u)\big) + v\big(\tfrac{1}{4}\cos(3u)(3\cos(4u)+4\sin(4u)\tan(3u)), \tfrac{1}{4}\cos(3u)(3\sin(4u) - 4\cos(4u)\tan(3u)), \tfrac{1}{4}\sqrt{7}\cos(3u))\Big)$$

ve

$$\kappa = \sqrt{7}\cos(3u),$$

$$\tau = -\sqrt{7}\sin(3u)$$

elde edilir. Ayrıca Tanım (3.3) den,

$$\nu = \|T^{'}\| = \kappa,$$
$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0$$

bulunur. Ayrıca,

$$det(B, T^{'}, B^{'}) = det\,(B, \kappa N, \tau N) = 0$$

ve

$$\|B^{'}\|^{2} = \tau^{2}$$

dir. Burada $\|B^{'}\|^{2} \neq 0$ olduğundan, $X(u,v)$ yüzeyi açılabilir bir regle yüzeydir.

$t \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ olacak şekilde bu regle yüzeyin evolüsyonunu,

$$X(u,v,t) = \Big((-\tfrac{3}{4}\cos(4u)\sin(3u) + \cos(3u)\sin(4u), \tfrac{1}{4}(-4\cos(3u)\cos(4u) -3\sin(3u)\sin(4u)), -\tfrac{\sqrt{7}}{4}\sin(3u)) + v(\tfrac{1}{4}\cos(3u)(3\cos(4u) + 4\sin(4u)\tan(3u), \tfrac{1}{4}\cos(3u)(3\sin(4u) - 4\cos(4u)\tan(3u), \tfrac{\sqrt{7}}{4}\tfrac{(\sin(t)+\cos(t))}{\sqrt{1+\sin(2t)}}\cos(3u))\Big)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu yüzey evolüsyonu için,

$$\kappa = \sqrt{7}\cos(3u)$$

ve

$$\tau = -\sqrt{7}\sin(3u)$$

dir. Teorem (4.2) den,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle T^{'}\,(u,t)\,, B^{'}\,(u,t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle(\frac{7}{4}\cos(3u)\cos(4u), \frac{7}{4}\cos(3u)\sin(4u), -\frac{3}{4}(\sqrt{7}\cos(3u)), \\
&\quad (\frac{7(\sin(2u)+\sin(10u)}{16\cos(u)}, \frac{7(\cos(2u)-\cos(10u)}{16\cos(u)}, -(\frac{(3\sqrt{7}\sin(6u)}{8\cos(u)}))\rangle, \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(7\cos(3u)\sin(3u)), \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(-\kappa\tau), \\
&= -(\frac{\partial \kappa}{\partial t}\tau + \kappa\frac{\partial \tau}{\partial t}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|B^{'}\|^{2} &= \frac{\partial}{\partial t}\langle(\frac{7(\sin(2u)+\sin(10u)}{16\cos(u)},\frac{7(\cos(2u)-\cos(10u)}{16\cos(u)},-(\frac{(3\sqrt{7}\sin(6u)}{8\cos(u)}),\\
&\quad(\frac{7(\sin(2u)+\sin(10u)}{16\cos(u)},\frac{7(\cos(2u)-\cos(10u)}{16\cos(u)},-(\frac{(3\sqrt{7}\sin(6u)}{8\cos(u)})\rangle,\\
&= \frac{\partial}{\partial t}(7\sin^{2}(3u)),\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\tau^{2},\\
&= 2\tau\frac{\partial\tau}{\partial t}
\end{aligned}
$$

ve

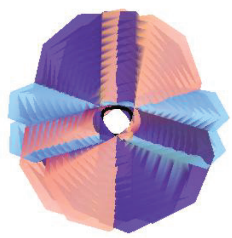
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle T^{'}(u,t),B(u,t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle(\frac{7}{4}\cos(3u)\cos(4u),\frac{7}{4}\cos(3u)\sin(4u),-\frac{3}{4}(\sqrt{7}\cos(3u)),\\
&\quad(\frac{1}{4}(\cos(3u)(3\cos(4u)+4\sin(4u)\tan(3u)),\\
&\quad\frac{1}{4}(\cos(3u)(3\sin(4u)-4\cos(4u)\tan(3u)),\frac{\sqrt{7}}{4}\cos(3u))\rangle,\\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. $\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$ olduğundan,

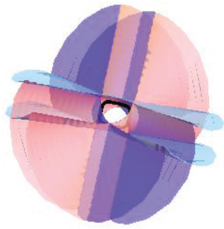
$$
\frac{\partial}{\partial t}\langle T^{'}(u,t),B^{'}(u,t)\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\|B^{'}\|^{2}=\frac{\partial}{\partial t}\langle T^{'}(u,t),B(u,t)\rangle=0
$$

elde edilir ki $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonu elastik olmayandır.

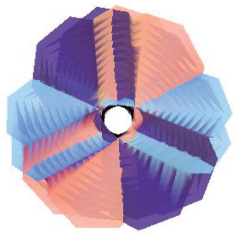
Bu yüzey evolüsyonunun t zamanına göre değişimi şekil 4.9, 4.10 ve 4.11 de gösterilmiştir.



Şekil 4.9: $t=0$, $u\in[-2\pi,2\pi]$ ve $v\in[-2\pi,2\pi]$ için yüzey evolüsyonu



Şekil 4.10: $t = 1$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$ ve $v \in [-2\pi, 2\pi]$ için yüzey evolüsyonu



Şekil 4.11: $t = 2$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$ ve $v \in [-2\pi, 2\pi]$ için yüzey evolüsyonu

Teorem 4.8 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve α nın T teğet vektör alanının evolüsyonu elastik olmayan olmak üzere, $X(u,v) = T + vN$ regle yüzeyi verilsin. $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonu,

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \qquad \text{ise}$$

elastik olmayandır.

İspat. Teorem (2.7) den,

$$det(N, \kappa N, -\kappa T - \tau B) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} \left\|N'\right\|^2 &= \langle -\kappa T - \tau B, -\kappa T - \tau B\rangle, \\ &= \kappa^2 + \tau^2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\left\|N'\right\|^2 \neq 0$ dır. Böylece $X(u,v)$ yüzeyi açılabilir regle yüzeydir. α nın T teğet vektör alanının evolüsyonu elastik olmayan olduğundan,

$$\nu = \|\kappa N\| = \kappa,$$

dır. Tanım (3.3) den,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0$$

elde edilir.

$$X(u,v,t) = T(u,t) + vN(u,t)$$

yüzey evolüsyonunu göz önüne alalım.

$$X_u = \kappa N + v(-\kappa T - \tau B) \quad \text{ve} \quad X_v = N$$

dir.

$$\begin{aligned} E &= \langle \kappa N - v\kappa T - v\tau B, \kappa N - v\kappa T - v\tau B\rangle = \kappa^2 + v^2\kappa^2 + v^2\tau^2, \\ F &= \langle \kappa N - v\kappa T - v\tau B, N\rangle = \kappa, \\ G &= \langle N, N\rangle = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= 2\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t} + 2v^2\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t} + 2v^2\tau\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Tanım (4.1) den $X(u,v,t)$ yüzey evolüsyonu elastik olmayandır. ■

KAYNAKLAR

[1] Chirikjian, G. ; Burdick, J. *A modal approach to hyper-redundant manipulator kinematics*, IEEE Trans. Robot. Autom. **1994**, *10*, 343-354.

[2] Mochiyama, H. ; Shimemura, E ; Kobayashi, H. *Shape control of manipulators with hyper degrees of freedom*, Int. J. Robot. Res. **1999**, *18*, 584-600.

[3] Kass, M. ; Witkin, A. ; Terzopoulos, D. *Snakes: active contour models*, in: Proc. 1st Int. Conference on Computer Vision, **1987**, pp. 259-268.

[4] Lu, H.Q. ; Todhunter, J.S. ; Sze, T.W. *Congruence conditions for nonplanar developable surfaces and their application surface recognition*, CVGIP, Image Underst,**1993**, *56*, 265-285.

[5] Desbrun, M. ; Cani-Gascuel, M., P. *Active implicit surface for animation*, in: Proc. Graphics Interface-Canadian Inf. Process. Soc.,**1998**, pp. 143-150.

[6] Unger, D.J. *Developable surfaces in elastoplastic fracture mechanics*, Int. J. Fract., **1991**, *50*, 33-38.

[7] Gage, M. ; Hamilton, R.S. *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geom.,**1986**, *23*, 69-96.

[8] Grayson, M. *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom.,**1987**, *26*, 285-314.

[9] Gage, M. *On an area preserving evolution equation for plane curves*, Contemp. Math. **1986**, *51*, 51-62.

[10] Chirikjian, G.S. *Closed-form primitives for generating volume preserving deformations*, ASME J.Mechanical Design., **1995**, *117*, 347-354.

[11] Kwon, D.Y. ; Park, F.C. *Evolution of inelastic plane curves*, Appl. Math. Lett.,**1999**,*12*, 115-119.

[12] Kwon, D.Y. ; Park, F.C. ; Chi, D.P. *Inextensible flows of curves and developable surfaces*, Appl. Math. Lett., **2005**,*18*, 1156-1162

[13] Hacısalihoglu, H. H. *Diferensiyel Geometri 1. Cilt*, Fen Fakültesi, Besevler-Ankara, **2000**.

[14] Karger, A. ; Novak, J. *Space Kinematics and Lie Groups*, Gordon and Breach Science Publishers, **1985**.

[15] Hacısalihoglu, H. H. *Diferensiyel Geometri 2. Cilt*, Fen Fakültesi, Besevler-Ankara. **2000**.

[16] Izumiya, S. ; Takeuchi, N. *Generic properties of helices and Bertrand curves*, Journal of Geometry, **2002**. 74, 97-109.

[17] Biran, L., *Diferensiyel Geometri Dersleri*, İstanbul Üniversitesi Fen Fak. Yayınları, İstanbul, **1970**.

[18] Sabuncuoğlu, A. *Diferensiyel Geometri*, Nobel-Ankara, **2006**.

[19] Izumiya, S. ; Takeuchi, N. *New Special Curves and Developable Surfaces*, Turk, J. Math., **2004**, *28*, 153-163.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Eskişehir'de doğdu. İlk öğrenimini Mehmetçik İlkokulunda, orta öğrenimini Emek Ortaokulunda, lise öğrenimini Yunusemre Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladıktan sonra 1999 yılında Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 2004 yılında aynı bölümden mezun oldu. $2004-2006$ yıllarında Konya'da, $2006-2009$ yıllarında Ankara'da özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği yaptı. 2009 yılının Eylül ayında Ahi Evran Üniversitesi Kaman Meslek Yüksek Okulunda Öğretim Görevlisi olarak göreve başladı. Halen görevine devam etmektedir. 2011 yılında Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir. Evli ve iki çocuk babasıdır.