T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LOKAL GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SCHRÖDINGER TİPLİ OPERATÖRLERE KARŞILIK GELEN YÜKSEK MERTEBEDEN RIESZ DÖNÜŞÜMLERİ VE ONLARIN KOMÜTATÖRLERİ

Süleyman ÇELİK

DOKTORA TEZİ

KIRŞEHİR
2024

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LOKAL GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SCHRÖDINGER TİPLİ OPERATÖRLERE KARŞILIK GELEN YÜKSEK MERTEBEDEN RIESZ DÖNÜŞÜMLERİ VE ONLARIN KOMÜTATÖRLERİ

SÜLEYMAN ÇELİK

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN

PROF. DR. ALİ AKBULUT

KIRŞEHİR
2024

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 25/07/2024

Öğrenci

Süleyman ÇELİK

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

İÇİNDEKİLER DİZİNİ I

TEŞEKKÜR III

ÖZET IV

ABSTRACT V

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ VI

1. GİRİŞ 1

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 3

2.1. Ön Bilgiler 3

2.2. Bazı Fonksiyon Uzayları 4

2.2.1. L_p Lebesgue Uzayları 5

2.2.2. BMO Uzayı 8

2.2.3. $L_{p,\lambda}$ Morrey Uzayları 10

2.2.4. $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayları 12

2.2.5. $LM_{p,\varphi}$ Lokal Genelleştirilmiş Morrey Uzayları 14

2.2.6. $VM_{p,\varphi}$ Sıfırlanan Genelleştirilmiş Morrey Uzayları 15

2.3. Schrödinger Operatörü ve Buna Karşılık Gelen Fonksiyon Uzayları 16

2.3.1. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Yüksek Mertebeden Riesz Dönüşümlerinin Bazı Özellikleri 16

2.3.2. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Lokal Genelleştirilmiş Morrey Uzayı 18

2.3.3. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Genelleştirilmiş Morrey Uzayı 21

2.3.4. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Sıfırlanan Genelleştirilmiş Morrey Uzayı 21

2.4. Bazı İntegral Operatörleri ve Onların Komütatörleri 22

3. MATERYAL VE METOT 33

4. BULGULAR VE TARTIŞMA 35

4.1. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Sıfırlanan Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Kesirli Maksimal Operatörlerin ve Onların Komütatörlerinin Sınırlılığı 35

4.1.1. Başlıca Sonuçlar 35
4.1.2. Başlıca Sonuçların İspatında Kullanılan Yardımcı Teoremler 37
4.1.3. Başlıca Sonuçların İspatı 40
4.1.3.1. Teorem 4.1. İspatı 40
4.1.3.2. Teorem 4.2. İspatı 44
4.1.3.3. Teorem 4.3. İspatı 47
4.1.3.4. Teorem 4.4. İspatı 48
4.2. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Yüksek Mertebeden Riesz Dönüşümlerinin ve Onların Komütatörlerinin Morrey Tipli Uzaylarda Sınırlılığı 49
4.2.1. Başlıca Sonuçlar 50
4.2.2. Başlıca Sonuçların İspatında Kullanılan Yardımcı Teoremler 53
4.2.3. Başlıca Sonuçların İspatı 55
4.2.3.1. Teorem 4.17. İspatı 55
4.2.3.2. Teorem 4.19. İspatı 59
4.2.3.3. Teorem 4.20. İspatı 64
4.2.3.4. Teorem 4.21. İspatı 65
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 67
6. KAYNAKLAR 69
ÖZGEÇMİŞ 73

TEŞEKKÜR

İlk başta beni sabırla yetiştiren, değer veren hayatın her alanında yanımda olan, önerilerde bulunan, yardımlarını sakınmayan, doktora süreci boyunca gece gündüz demeyip Matematik adına tüm iyi ve güzel şeyleri anlatan, engin bilgilerini aktaran, çok kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali AKBULUT'a sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Yaptığı üstün akademik çalışmalarla dünya literatüründe büyük başarılara ve buluşlara sahip olan, bizlerden alan çalışmamız esnasında yardım ve bilgilerini esirgemeyen ve bizden hiçbir durumda vazgeçmeyen, bana kişisel olarak katkılar sunan, hayatım boyunca matematiksel ve kişisel olarak her alanda kullanacağım bilgi ve öğütleri aktardığı için Sayın Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV'e sonsuz sevgi ve teşekkürler.

Engin bilgileriyle çalışmamın daha iyi hale gelmesine yardımcı olan kıymetli hocalarım Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ' ye, Prof. Dr. Simten DOĞAN BAYRAKÇI' ya, Prof. Dr. İ. Onur KIYMAZ' a, Prof. Dr. Levent KULA'ya çok teşekkür ederim.

Ayrıca bana her zaman moral ve motive katıp desteklerini esirgemeyen Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Rektörü Sayın Prof. Dr. Mustafa Kasım KARAHOCAGİL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Benim bu günlere gelmemde büyük emekleri ve duaları olan rahmetli babam Sait ÇELİK'e ve annem Sayet ÇELİK'e hassaten çok teşekkür ederim.

Tez çalışmam süreci boyunca bana desteklerini esirgemeyen çok kıymetli eşim Doç. Dr. Fatma ÇELİK'e, sevgili çocuklarım Zahit Talha ve Elif İrem'e çok teşekkür ederim.

İyiki varsınız.

Temmuz, 2024 Süleyman ÇELİK

ÖZET

DOKTORA TEZİ

LOKAL GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SCHRÖDINGER TİPLİ OPERATÖRLERE KARŞILIK GELEN YÜKSEK MERTEBEDEN RIESZ DÖNÜŞÜMLERİ VE ONLARIN KOMÜTATÖRLERİ

Süleyman ÇELİK

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman:	**Prof. Dr. Ali AKBULUT**
	Yıl: 2024 Sayfa: 74
Jüri:	**Prof. Dr. Ali AKBULUT**
	Prof. Dr. Vagif Sabir GULİYEV
	Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
	Prof. Dr. Simten DOĞAN BAYRAKÇI
	Prof. Dr. İ. Onur KIYMAZ

Bu doktora tezinde, Schrödinger tipli operatörlere karşılık gelen bazı Morrey tipli uzaylarda Schrödinger tipli operatörlere karşılık gelen kesirli maksimal operatör, yüksek mertebeden Riesz dönüşümleri ve onların komütatörlerinin sınırlılığı araştırılmış ve orijinal sonuçlar elde edilmiştir. İlk bölümde, araştırmanın önemi, kapsamı ve amacı ifade edilmiş, çalışmamızın bilime sağladığı katkılar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamız ile ilgili bazı temel tanımlara ve ana sonuçlarımızın ispatında kullanılan araçlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, tez konusu ile ilgili materyal ve metotlar hakkında kısa bilgi verilmiştir. Dördüncü bölüm iki kesimden oluşmaktadır. Birinci kesimde Schrödinger operatörüne karşılık gelen genelleştirilmiş Morrey uzayları ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Schrödinger operatörüne karşılık gelen kesirli maksimal operatörün ve onun komütatörlerinin sınırlılığı ispat edilmiştir. İkinci kesimde, Schrödinger operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümleri ve onların komütatör operatörlerinin Schrödinger operatörüne karşılık gelen sırasıyla, lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları, genelleştirilmiş Morrey uzayları ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı ispat edilmiştir. Bu bölümde elde ettiğimiz sonuçlar orijinaldir. Son bölümde tez konusunun araştırılmasındaki amaç ve hedefler hakkında kısa bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger operatörü, Morrey uzayı, lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları, yüksek mertebeden Riesz dönüşümleri, kesirli integral operatör, komütatörler.

ABSTRACT

PhD THESIS

HIGHER ORDER RIESZ TRANSFORMS RELATED TO SCHRÖDINGER TYPE OPERATORS AND THEIR COMMUTATORS IN LOCAL GENERALIZED MORREY SPACES

Süleyman ÇELİK

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: **Prof. Dr. Ali AKBULUT**
Year: 2024 Pages: 74
Juries: **Prof. Dr. Ali AKBULUT**
Prof. Dr. Vagif Sabir GULİYEV
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Prof. Dr. Simten DOĞAN BAYRAKÇI
Prof. Dr. İ. Onur KIYMAZ

In this doctoral thesis, the boundedness of fractional maximal operators, higher order Riesz transformations and their commutators corresponding to Schrödinger type operators in some Morrey type spaces corresponding to Schrödinger type operators were investigated and original results were obtained. In the first chapter, the importance, scope and purpose of the research are expressed and information is given about the contributions of our study to science. In the second chapter, some basic definitions and characteristics of the thesis will be given. In the third chapter, brief information is given about the materials and methods related to the thesis topic. The fourth chapter consists of two parts. In the first part, the boundedness of the fractional maximal operator and its commutators corresponding to Schrödinger operator in generalized Morrey spaces and vanishing generalized Morrey spaces corresponding to Schrödinger operator are proved. In the second part, the boundedness of the higher order Riesz transformations and their commutator operators corresponding to the Schrödinger operator in local generalized Morrey spaces, generalized Morrey spaces and vanishing generalized Morrey spaces corresponding to the Schrödinger operator, respectively, are proved. The results obtained in the chapter are original. In the last chapter, the aims and objective of researching the thesis topic is briefly mentioned.

Keywords: Morrey spaces, local generalized Morrey spaces, higher order Riesz transforms, fractional integral operator, commutators.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$B(x,r)$	: x merkezli r yarıçaplı yuvar
$\|B\|$	: B kümesinin Lebesgue ölçümü
χ_B	: B kümesinin karakteristik fonksiyonu
$L^0(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir fonksiyonların sınıfı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	: Lebesgue uzayı
$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ de $p-$lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$L_1^{loc}(E^n)$	: E^n de lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	: Morrey uzayı
$M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	: Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	: Sıfırlanan Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$RH_{Q/2}$	: Ters Hölder sınıfları
L	: Schrödinger operatörü
I_β	: Kesirli integral operatörü
$[b,\mathcal{I}_\beta^L]$	: Komutatör operatörü
I_α	: Kesirli integral operatör (Riesz potansiyeli)
$\mathcal{T}$	: Calderón-Zygmund operatörü
$[b,T]$	: Calderón-Zygmund operatörünün komütatörü
$[b,I_\alpha]$	: Riesz potansiyelinin komütatörü
$[b,I_\rho]$	: Genelleştirilmiş kesirli integral operatörün komütatörü

1. GİRİŞ

Analizin birçok alanlarında, ayrıca kısmi diferansiyel denklemler teorisinde regülerlik probleminin çözümünün araştırılmasında, harmonik analiz tekniğinin kullanılması çok önemli bir yere sahiptir. Diğer taraftan fonksiyon uzaylarında, diferansiyel denklemler teorisinde problem çözümü araştırılırken, incelenen fonksiyon uzaylarında gömme teoremlerinin elde edilmesi, ortaya çıkan harmonik analizin integral operatörleri ve onların komutatörlerinin bu fonksiyon uzaylarında sınırlılığının ispatlanması önemli bir yer tutmaktadır.

Klasik Morrey uzayları ilk olarak 1938 yılında Morrey [37] tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının incelenmesi ve lokal düzgünlüğünün Lebesgue uzaylarından daha net olduğunu ifade etmek için tanımlanmıştır.

$1 \leq p < \infty,\ 0 \leq \lambda \leq n,\ f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $L_{p,\lambda} \equiv L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$L_{p,\lambda} := \big\{ f :\ ||f||_{L_{p,\lambda}} < \infty \big\}$$

olacak şeklinde ve $||f||_{L_{p,\lambda}}$ normu

$$||f||_{L_{p,\lambda}} \equiv ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\lambda = 0$ ise bu durumda $L_{p,0} \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ olur.

Ters Hölder eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan V potansiyelli $-\triangle + V$ formundaki Schrödinger operatörüne karşılık gelen L_p Lebesgue ve $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarının özel bir yeri vardır. Ayrıca Schrödinger operatörüne karşılık gelen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bu uzaylarda araştırılması da önemli bir yere sahiptir.

$\mathcal{L} = -\triangle + V$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen Riesz dönüşümü $\mathcal{R}_1 = \nabla \mathcal{L}^{-1/2}$ ve bunun duali $\mathcal{R}_1^* = \mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ şeklinde ve $\mathcal{L}_2 = (-\triangle)^2 + V^2$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümü $\mathcal{R} = \nabla^2 \mathcal{L}_2^{-1/2}$ ve bunun duali $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}_2^{-1/2}\nabla^2$ şeklinde tanımlanırlar.

L_p Lebesgue uzayında, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}^*$ operatörlerinin sınırlılıkları Shen [45], Liu ve Dong [34] tarafından elde edilmiştir. Ayrıca, $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere Bongioanni, Harboure ve Salinas [8], Liu, Zhang, Sheng ve Wang [35] tarafından $[b, \mathcal{R}_1]$ ve $[b, \mathcal{R}_1^*]$ komütatör operatörlerinin L_p uzayında sınırlı olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra genelleştirilmiş Morrey uzaylar ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Guliyev ve Omarova [30] tarafından $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere $\mathcal{R}_1^*$ ve $[b, \mathcal{R}_1^*]$ komütatör operatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmıştır. Son yıllarda ise Akbulut, Guliyev ve Omarova [4], $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere μ_j^L Marcinkiewicz ve $[b, \mu_j^L]$ komütatör operatörlerinin genelleştirilmiş Morrey ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlı olduklarını göstermişlerdir.

Bugüne kadar Reel analizde, klasik operatörlerinin sınırlılık teorisi detaylı bir şekilde ele alınarak incelenmiştir ve elde edilen bu sonuçlar, kısmi diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir uygulama alanı olmuştur. Son yıllarda kısmi diferansiyel denklemler teorisinde genelleştirilmiş Morrey tipli uzaylar önemli bir rol oynamaktadır.

Schrödinger operatörüne karşılık gelen klasik operatörlerinin (maksimal operatör, kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyeli, gerçek singüler integraller) bir lokal genelleştirilmiş Morrey uzayından, diğer bir lokal genelleştirilmiş Morrey uzayına sınırlılığını sağlayan fonksiyonel parametrelerden elde edilir. Dolayısıyla bu tür sonuçlar, çağdaş reel analizin geliştirilmesi ve her şeyden önce Schrödinger operatörüne karşılık gelen kısmi diferansiyel denklemlerin uygulamaları için çok önemlidir. Morrey uzaylarının genişlemesi olan genelleştirilmiş Morrey uzayları Guliyev [22], Mizuhara [36] ve Nakai [38] tarafından tanımlanmış ve harmonik analizin önemli integral operatörleri olan kesirli integral operatörü ve singüler integral operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılığını araştırmışlardır. Guliyev [24], matematik literatüründe önem verilen genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normunu tanımlamış ve doktora tezinde [22] ortaya koyduğu "Guliyev metodu" olarak adlandırılan metot yardımıyla genelleştirilmiş Morrey uzayında harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığını Nakai'ye göre daha zayıf şartlar altında araştırmıştır. Sonrasında bu şartlar Akbulut ve ark. [2] ve Guliyev ve ark. [26] tarafından daha da zayıflatılmıştır.

Bu doktora tezinde, Schrödinger tipli operatörlere karşılık gelen bazı Morrey tipli uzaylarda Schrödinger tipli operatörlere karşılık gelen kesirli maksimal operatör, yüksek mertebeden Riesz dönüşümleri ve onların komütatörlerinin sınırlılığı araştırılmış ve orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölüm orijinal sonuçların elde edildiği bölümdür. Bu bölüm iki kesimden oluşmaktadır. Birinci kesimde Schrödinger operatörüne karşılık gelen genelleştirilmiş Morrey uzayları ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Schrödinger operatörüne karşılık gelen $M^{\theta}_{\beta,V}$ kesirli maksimal operatörün ve $b \in BMO_{\theta}(\rho)$ olmak üzere onun $[b, M^{\theta}_{\beta,V}]$ komütatörlerinin sınırlılığı ispat edilmiştir. İkinci kesimde, Schrödinger operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümleri ve onların komütatör operatörlerinin Schrödinger operatörüne karşılık gelen sırasıyla, lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları, genelleştirilmiş Morrey uzayla- rı ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı ispat edilmiştir. İspatlarda Guliyev [22] tarafından verilen metodlar kullanılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, çalışmamız ile ilgili olan temel kavramlar, uzaylar ve operatörler hakkında genel bilgilere, bazı temel tanımlara ve ana sonuçlarımızın ispatında kullanılan araçlara yer verilmiştir.

2.1. Ön Bilgiler

Bu kısımda, tezde geçen bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. X bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $\mathfrak{M}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathfrak{M}$ sınıfı X üzerinde bir **σ-cebir** olarak adlandırılır.

(i) $X \in \mathfrak{M}$

(ii) $\forall E \in \mathfrak{M}, \quad {}^{c}E = X - E \in \mathfrak{M}$

(iii) $\forall n = 1, 2, ...$ için $\quad E_n \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$

[42].

Bu durumda $(X, \mathfrak{M})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathfrak{M}$ deki her bir kümeye de **ölçülebilir küme** adı verilir [42].

Tanım 2.2. $(X, \mathfrak{M})$ bir ölçülebilir uzay olsun. Bir $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Her $A \in \mathfrak{M}$ için $\mu(A) \geq 0$,

(iii) $\mathfrak{M}$ nin her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerin sağlıyorsa bu fonksiyona $\mathfrak{M}$ üzerinde bir **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** adı verilir. Eğer her $A \in \mathfrak{M}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ölçüsüne **sonlu ölçü** denir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü **σ-sonlu** olarak adlandırılır. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** denir. Ayrıca $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ **ölçü uzayı** olarak adlandırılır [42].

Tanım 2.3. $(X, \mathfrak{M})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : f(x) > t\} \in \mathfrak{M}$ oluyorsa f fonksiyonu **ölçülebilirdir** denir. Ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ ile gösterilir [42].

$\mathfrak{M}$ nin elemanları $\mathbb{R}^n$ nin (Lebesgue) ölçülebilir alt kümeleri olarak adlandırılır ve μ, $\mathbb{R}^n$ de (**Lebesgue) ölçü** olarak adlandırılır. Lebesgue ölçüsü $\mathbb{R}^3$ deki hacmin doğal bir genişlemesi olduğundan $A \in \mathfrak{M}$ için $\mu(A)$, A nın ölçüsü veya hacmi olarak adlandırılır.

Tanım 2.4. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir kümenin tümleyeni üzerinde veya kendisi $\mathfrak{M}$ ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme **hemen hemen her yerde** doğrudur denir [42].

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1 \cdots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ tam uzayı üzerinde f fonksiyonunun **(Lebesgue) integrali**

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int \cdots \int f(x_1, ..., x_n)dx_1 \cdots dx_n$$

ile gösterilir.

$B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$, merkezi x, yarıçap uzunluğu r olan açık yuvarı ve ${}^cB(x, r)$ onun tümleyenini göstersin. $|B(x, r)|$, $B(x, r)$ açık yuvarının Lebesgue ölçüsü ve $\nu_n = |B(0, 1)|$ olmak üzere

$$|B(x, r)| = \nu_n r^n = \frac{2\pi^{n/2} r^n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{1}{n}|S^{n-1}|r^n$$

biçimindedir. Burada $|S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $\mathbb{R}^n$ de $n \geq 1$ için yarıçapı 1 olan $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ küresinin yüzey alanıdır. $\Gamma(z)$ gamma fonksiyonu ve bir z kompleks sayısı için Re$z > 0$ olmak üzere $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ ile tanımlanır [42].

Bundan sonra;
$Q = Q(x_0, r)$ ile x_0 merkezli ve kenar uzunluğu r olan küpü ifade edeceğiz. Verilen bir Q küpü ve $\lambda > 0$ için λQ ile Q nun mekezine sahip ve kenar uzunluğu Q nun kenar uzunluğunun λ katı olan küpü göstereceğiz.

$A \lesssim B$ sembolü; C sabiti, tüm önemli parametrelerden bağımsız olarak evrensel bir pozitif olmak üzere $A \leq CB$ yerine kullanıldı. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir.

$\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde hemen her x için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna **hemen heryerde sınırlıdır** denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin Ω bölgesindeki **esas supremumu (veya esaslı sınırı)** denir ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \operatorname{ess\,inf} \{K : |f(x)| \leq K \quad \text{hemen her } x \in \Omega\}$$

seklinde gösterilir.

2.2. Bazı Fonksiyon Uzayları

Bu kısımda, harmonik analizde tanımlanmış bazı fonksiyon uzaylarının tanım ve özellikleri verilmiştir.

2.2.1. L_p Lebesgue Uzayları

L_p Lebesgue uzayı sonlu boyutlu vektör uzayı için p normunun genelleşmesi kullanılarak tanımlanmış bir fonksiyon uzayıdır. Fonksiyonel analizde, Banach uzaylarının ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını L_p Lebesgue uzayı oluşturur. Lebesgue uzayının fizik, istatistik, finans, mühendislik ve diğer disiplinlerde uygulamaları vardır.

Tanım 2.5. $0 < p \leq \infty$ ve f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere Lebesgue uzayı

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \text{ölçülebilir } : \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

ile verilir, burada $0 < p < \infty$ için

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ durumunda ise

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

biçiminde verilir [44].

Tanım 2.6. $WL_p(\mathbb{R}^n)$ zayıf L_p uzayı $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} t \left| \{ y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > t \} \right|^{1/p} < \infty$$

quasi-normuna sahip f ölçülebilir fonksiyonlarının uzayıdır. Kolayca gösterilebilir ki
$1 \leq p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n) \subset WL_p(\mathbb{R}^n)$ dir.

Örnek 2.7.

(1) $f(x) = |x|^\alpha \notin L_p(\mathbb{R}^n)$

(2) $f(x) = |x|^\alpha \chi_{B(0,1)}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha > -\frac{n}{p}$

(3) $f(x) = |x|^\alpha \chi_{{}^c B(0,1)}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha < -\frac{n}{p}$

(4) $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \notin L_p(\mathbb{R}^n)$, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \in WL_p(\mathbb{R}^n)$

[44].

Teorem 2.8. Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise L_p bir Banach uzayıdır [44].

Tanım 2.9. (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere $f \in L_p(X)$, $g \in L_q(X)$ olsun. Bu durumda

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p}\|f\|_{L_q}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir [6].

Tanım 2.10. (Minkowski Eşitsizliği) Eğer $p \geq 1$ için $f, g \in L_p(X)$ ise bu durumda

$$\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$$

eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği denir [6].

Teorem 2.11. $L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $1 \leq p \leq \infty$ için bütün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının birleşimlerini içerir. Daha genel olarak $0 < p < q < \infty$ için

$$L_q(\mathbb{R}^n) \subseteq L_q^{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir [44].

Teorem 2.12. (Lebesgue Diferansiyelleme Teoremi) Eğer $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

sağlanır [44].

Tanım 2.13. Bir f fonksiyonunun desteği

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır. Yani f fonksiyonunun desteği onun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapanışıdır. Eğer $\mathrm{supp} f$ sınırlı bir küme ise f fonksiyonuna **kompakt desteğe sahiptir** denir [44].

Tanım 2.14. $\mathcal{T}$, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir (X, μ) ölçü uzayı üzerinde tanımlanmış ve bir (Y, ν) ölçü uzayı üzerinde bütün kompleks değerli hemen her yerde sonlu ölçülebilir fonksiyonların kümesinde değerler alan bir operatör olsun.
Bu durumda her f, g ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\mathcal{T}(f + g) = \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g) \text{ ve } \mathcal{T}(\lambda f) = \lambda \mathcal{T}(f)$$

ise $\mathcal{T}$ ye **lineer operatör**,

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq |\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)| \quad \text{ve} \quad |\mathcal{T}(\lambda f)| \leq |\lambda|\, |\mathcal{T}(f)|$$

ise $\mathcal{T}$ ye **altlineer operatör**, bir $K > 0$ sabiti için

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq K\left(|\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)|\right) \quad \text{ve} \quad |\mathcal{T}(\lambda f)| \leq |\lambda|\, |\mathcal{T}(f)|$$

ise $\mathcal{T}$ ye **quasilineer operatör** denir. Altlineerlik, quasilinerliğin özel bir durumudur.

Tanım 2.15. ((p,q) Tipli Operatör) $1 \leq p, q \leq \infty$, (X,μ) ve (Y,ν) iki ölçü uzayı ve $\mathcal{T}$, $L_p(X,\mu)$ den tanım ve görüntü kümeleri sırasıyla Y ve $\mathbb{C}$ olan ölçülebilir fonksiyonların uzayına bir operatör (altlineer) olsun. Eğer $q < \infty$ olmak üzere

$$\nu\left(\{y \in Y : |\mathcal{T}f(y)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

ise $\mathcal{T}$ zayıf (p,q) tipinden ve eğer $q = \infty$ iken $L_p(X,\mu)$ den $L_\infty(Y,\nu)$ ye sınırlı bir operatör ise zayıf (p,∞) tipindedir denir.

Eğer $\mathcal{T}$, $L_p(X,\mu)$ den $L_q(Y,\nu)$ ya sınırlı ise kuvvetli (p,q) tiplidir denir. Yani, her $f \in L_p(X,\mu)$ için

$$\|\mathcal{T}f\|_q \leq C\|f\|_p$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Buradan $q = \infty$ olması durumunda zayıf ve kuvvetli tip çakışmaktadır.

Eğer $\mathcal{T}$, kuvvetli (p,q) tipli ise aynı zamanda zayıf (p,q) tiplidir. Gerçekten, eğer $E_\lambda = \{y \in Y : |\mathcal{T}f(y)| > \lambda\}$ olarak alırsak, bu durumda

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{\mathcal{T}f(x)}{\lambda}\right|^q d\nu \leq \frac{\|\mathcal{T}f\|_q^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

olur.

Eğer $(X,\mu) = (Y,\nu)$ ve $\mathcal{T}$ özdeşlik operatörü olursa zayıf (p,p) klasik Chebyshev eşitsizliği olur [44].

Teorem 2.16. (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) (X,μ) ve (Y,ν) ölçü uzayları olsunlar. $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ olmak üzere $\mathcal{T}$, $L_{p_0}(X,\mu) + L(p_1)(X,\mu)$ den Y üzerindeki ölçülebilir fonksiyonlara giden ve zayıf (p_0,p_0) ve zayıf (p_1,p_1) tipli bir altlineer operatör olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$, $p_0 < p < p_1$ için kuvvetli (p,p) tiplidir [18].

2.2.2. BMO Uzayı

BMO **(Bounded Mean Oscillation)** uzayı, 1961 yılında John ve Nirenberg [32] tarafından ortaya konulmuştur. BMO uzayı L_∞ uzayı ile benzer özelliklere sahiptir ve sıklıkla L_∞ yerine kullanılır. Klasik singüler integral operatörler L_∞ uzayından L_∞ uzayına sınırlı olmamasına rağmen L_∞ uzayından BMO uzayına sınırlıdır. Fefferman 1971 yılında BMO uzayının H^1 Hardy uzayına dual olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.17. f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|f\|_* = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}|dy < \infty$$

ile verilen $\|\cdot\|_*$ yarı-normu ile tanımlı Banach uzayıdır. Burada $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

dır. BMO uzayı $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına eşit değildir. Fakat $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ dır.
Gerçekten;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| dy \\
&\qquad \le \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy + \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left|f_{B(x,r)}\right| dy \\
&\qquad = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy + |f_{B(x,r)}| \\
&\qquad \le 2\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \\
&\qquad \le 2||f||_\infty
\end{aligned}$$

ve buradan

$$||f||_* \le 2||f||_\infty$$

elde edilir.

$||f||_* \le 2||f||_\infty$ olduğundan $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. Her sınırlı (ölçülebilir) fonksiyon BMO uzayındandır. Ancak sınırlı olmayan BMO fonksiyonları da vardır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olan fakat $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olmayan tipik bir örnek $\log|x|$ verilebilir.

Şimdi BMO uzayına ait olmayan bir fonksiyon örneği verelim.

Örnek 2.18. $g(x) = sign(x) \log \frac{1}{|x|}$ fonksiyonu $BMO([-1,1])$ uzayına ait değildir. Gerçekten $0 < h < 1$ ve $I \equiv [-h,h]$ için $g_1 = 0$ ve

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I |g(y)-g_1|dy &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left|\log\frac{1}{|x|}\right|dx = \frac{1}{h}\int_0^h \log\frac{1}{x}dx \\ &= 1+\log\frac{1}{h} \longrightarrow \infty, \quad h \longrightarrow 0 \text{ iken}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu örnek bir fonksiyonun mutlak değeri BMO sınıfına ait ise bu fonksiyonun bir BMO fonksiyonu olmasını gerektirmeyeceğini gösterir.

Uyarı 2.19.

(1) Her $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha > 0$ için

$$|\{x \in B : |f(x) - f_B| > \alpha\}| \le C_1 |B| e^{-C_2\alpha/\|f\|_*}, \qquad \forall B \subset \mathbb{R}^n$$

olacak şekilde pozitif C_1 ve C_2 sayıları vardır. Bu eşitsizlik John-Nirenberg eşitsizliği olarak bilinir.

(2) John-Nirenberg eşitsizliği $1 < p < \infty$ için

$$\|f\|_* \approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0}\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\left|f(y)-f_{B(x,r)}\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmasını gerektirir.

(3) $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $0 < 2r < t$ için

$$\left|f_{B(x,r)} - f_{B(x,t)}\right| \le C\|f\|_* \ln\frac{t}{r} \tag{2.1}$$

olacak şekilde x, r, t ve f fonksiyonundan bağımsız pozitif bir C sayısı vardır [32].

Uyarı 2.20.

(i) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ ise bu durumda $f(\cdot - h) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\cdot - h)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

dır.

(ii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ ise bu durumda $f(\lambda x) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

dır.

(iii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$\|f\|_{BMO} \approx \sup_Q \inf_{c\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c|\, dx$$

dır

[32].

2.2.3. $L_{p,\lambda}$ Morrey Uzayları

Klasik $L_{p,\lambda}$ Morrey uzayları 1938 yılında C.B. Morrey [37] tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları araştırılırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenilirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride önemli uygulamaları vardır.

Tanım 2.21. $1 \le p < \infty$ ve $0 \le \lambda \le n$ olmak üzere $L_{p,\lambda} \equiv L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$||f||_{L_{p,\lambda}} \equiv ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu sonlu olacak şekilde tüm $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonların kümesi olarak tanımlanır.

$\lambda = 0$ için $L_{p,0} \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $L_{p,\lambda} = \theta$ olur. Burada θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir.

$WL_{p\lambda} \equiv WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile bütün $f \in WL_p^{loc}$ fonksiyonlarının uzayı olan zayıf Morrey uzayını göstereceğiz. Burada,

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_{p,\lambda}(B(x,r))} < \infty$$

şeklindedir.

Lemma 2.22. $1 \le p < \infty$ olsun. Bu durumda $L_{p,n}(\mathbb{R}^n) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{L_{p,n}} = v_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olup, burada $v_n = |B(0,1)|$ dır.

İspat. $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\left(t^{-n} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \le v_n^{1/p} ||f||_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olur. Buradan $f \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{L_{p,n}} \leq v_n^{1/p}\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

şeklindedir. $f \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere Lebesgue yakınsaklık teoreminden [47]

$$\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1}\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

olur. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1}\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} \leq v_n^{-1/p}\|f\|_{L_{p,n}}$$

şeklindedir. Buradan $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dır ve

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq v_n^{-1/p}\|f\|_{L_{p,n}}$$

olur. ■

Lemma 2.23. $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\alpha = \frac{n-\lambda}{p}$ için

$$\|f\|_{L_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/p'}\|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

dır ve buradan $L_{p,\lambda} \subset L_{1,n-p}$ olur. Burada $1/p + 1/p' = 1$ dır.

İspat. $f \in L_{p,\lambda}$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ ve $\alpha p = n - \lambda$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\int_{B(x,t)} |f(y)|dy &\leq \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy\right)^{1/p}\left(\int_{B(x,t)} dy\right)^{1/p'} \\ &= v_n^{1/p'}t^{n/p'}\left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy\right)^{1/p}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}t^{\alpha-n}\int_{B(x,t)} |f(y)|dy &\leq v_n^{1/p'}t^{\alpha-n/p}\left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} \\ &= v_n^{1/p'}\left(t^{-\lambda}\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} \\ &\leq v_n^{1/p'}\|f\|_{L_{p,\lambda}}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $f \in L_{1,n-\alpha}$ ve

$$\|f\|_{L_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

şeklindedir. ■

2.2.4. $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayları

Morrey uzaylarının genişlemesi olan genelleştirilmiş Morrey uzaylari Guliyev [22], Mizuhara [36] ve Nakai [38] tarafından bir birinden bağımsız olarak tanımlanmış ve harmonik analizin önemli integral operatörleri olan kesir integral operatörü ve singüler integral operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılığı araştırılmıştır. Guliyev [24], matematik literatüründe önem verilen genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normunu tanımlamış ve doktora tezinde [22] ortaya koyduğu "Guliyev metodu" olarak adlandırılan metot yardımıyla genelleştirilmiş Morrey uzayında harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığını Nakai'ye göre daha zayıf şartlar altında araştırmıştır. Sonrasında bu şartlar Akbulut ve ark. [2] ve Guliyev ve ark. [26] tarafından daha da zayıflatılmıştır. Ayrıca Guliyev [25], [26] tarafından $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında maksimal, potansiyel ve singüler integral operatörlerin sınırlılıkları ortaya koyduğu yeni metod ile elde edilmiştir.

$M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı Mizuhara [36] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.24. $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ ile

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca doğal topoloji ile verilen $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayları her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için $f\chi_B \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_B \in WL_p(\mathbb{R}^n)$ şeklindeki bütün f fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır [36].

Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda}{p}}$ için

$$L_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda}{p}}} \, ,$$

$$WL_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda}{p}}}$$

olduğu görülür.

$M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleşmiş normlu hali Guliyev tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.25. $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ ile

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1} \, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} \, \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

normalleşmiş normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1} \, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} \, \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

normalleşmiş normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır [24].

Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ için

$$L_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

$$WL_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

olduğu görülür.

Harmonik analizin integral operatörlerinin $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılıklarını elde etmek amacıyla (φ_1, φ_2) üzerindeki şartlar ile ilgili birçok çalışma vardır. Guliyev [24] tarafından (φ_1, φ_2) çifti için

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi_1(x,t) \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r) \tag{2.2}$$

şartı getirilmiştir. Burada, C sayısı x ve r den bağımsız pozitif bir sayıdır. Guliyev [2], [26] tarafından Calderón-Zygmund singüler integral operatörünün ve $1 < p < q < \infty$, $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olmak üzere, Riesz potansiyelinin, $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$

uzayına sınırlılığı elde edilmiş ve $x \in \mathbb{R}^n$ ve $1 \le p < \infty$ için

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \le \varphi_2(x,r), \quad r > 0 \tag{2.3}$$

daha zayıf şart tanımlanmıştır.

Eğer (φ_1, φ_2) çifti (2.2) şartını sağlarsa, bu durumda (2.3) şartını da sağlar. Ancak tersi doğru değildir [26].

(φ_1, φ_2) çifti (2.3) ve

$$\int_r^\infty \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) \frac{\operatorname{ess}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r)$$

şartlarını sağlamak üzere, Guliyev [2], [26] tarafından kaba çekirdekli $T_{\Omega,\alpha}$ kesirli integral operatörünün ve $[b, T_{\Omega,\alpha}]$ komütatörünün genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığı elde edilmiştir.

2.2.5. $LM_{p,\varphi}$ Lokal Genelleştirilmiş Morrey Uzayları

Tanım 2.26. $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \le p < \infty$ olsun. $LM_{p,\varphi} \equiv LM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{LM_{p,\varphi}} = \sup_{r>0} \varphi(0,r)^{-1} |B(0,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(B(0,r))}$$

sonlu quasinormuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WLM_{p,\varphi} \equiv WLM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WLM_{p,\varphi}} = \sup_{r>0} \varphi(0,r)^{-1} |B(0,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{WL_p(B(0,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır [28].

Tanım 2.27. $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \le p < \infty$ olsun. Herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sabiti için $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}} \equiv LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}} = \|f(x_0 + \cdot)\|_{LM_{p,\varphi}}$$

sonlu quasinormuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WLM_{p,\varphi}^{\{x_0\}} \equiv WLM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WLM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}} = \|f(x_0 + \cdot)\|_{WLM_{p,\varphi}} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır [28].

Bu tanıma göre $\varphi(x_0, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ için

$$LM_{p,\lambda}^{\{x_0\}} = LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}\Big|_{\varphi(x_0,r)} = r^{\frac{\lambda-n}{p}},$$

$$WLM_{p,\lambda}^{\{x_0\}} = WLM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}\Big|_{\varphi(x_0,r)} = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

olduğu görülür.

2.2.6. $VM_{p,\varphi}$ Sıfırlanan Genelleştirilmiş Morrey Uzayları

Tanım 2.28. $VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzayı

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,r))} = 0$$

olacak şekilde $f \in WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı gibi tanımlanır.

Tanım 2.29. $VWM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlanan zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{WL^p(B(x,r))} = 0$$

olacak şekilde $f \in WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı gibi tanımlanır.

Her yerde

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,r)} = 0$$

ve

$$\sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,r)} < \infty,$$

sonuçlarının olduğu kabul edildiğinde $VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $VWM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarını önemsiz kılar, çünkü kompakt destekli sınırlı fonksiyonlar bu uzaya aittir.

$VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $VWM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayları sırasıyla,

$$\|f\|_{VM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,r))},$$

$$\|f\|_{VWM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}|B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{WL^p(B(x,r))},$$

normlarına göre birer Banach uzaylarıdır.

$$\mathfrak{M}^{p,\varphi}(f;x,r) := \varphi(x,r)^{-1}|B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(B(x,r))}$$

ve

$$\mathfrak{M}^{W}_{p,\varphi}(f;x,r) := \varphi(x,r)^{-1}|B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{WL^p(B(x,r))}$$

olmak üzere

$$VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \{f \in M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) : \lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{M}^{p,\varphi}(f;x,r) = 0\}$$

ve benzer durum $VWM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı içinde geçerlidir.

$\mathfrak{M}^{p,\varphi}(f;x,r)$ modulünün yanısıra onun en az azalmayan baskın olan

$$\widetilde{\mathfrak{M}}^{p,\varphi}(f;x,r) = \sup_{0<t<r} \mathfrak{M}^{p,\varphi}(f;x,t),$$

modülü sıfırlanan uzaylarının tanımına denk olarak kullanılabilir, çünkü

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{M}^{p,\varphi}(f;x,r) = 0 \Leftrightarrow \lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathfrak{M}}^{p,\varphi}(f;x,r) = 0.$$

2.3. Schrödinger Operatörü ve Buna Karşılık Gelen Fonksiyon Uzayları

Bu kısımda, Schrödinger diferansiyel oparatörüne karşılık gelen genelleştirilmiş Morrey uzayları, lokal genelleştirilmiş Morrey uzayları ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzayları ile ilgili gerekli bazı bilgiler ifade edilmiştir.

2.3.1. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Yüksek Mertebeden Riesz Dönüşümlerinin Bazı Özellikleri

Schrödinger diferansiyel oparatörü, V, negatif olmayan potansiyel fonksiyonu, $V \neq 0$ ve bazı $q \geq n/2$ için RH_q ters Hölder sınıflarına ait olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ üzerinde, $n \geq 5$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\mathcal{L}_2 = (-\triangle)^2 + V^2(x)$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathcal{L}_2$ operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümü

$$\mathcal{R} = \nabla^2 \mathcal{L}_2^{-\frac{1}{2}}$$

ile ve dualide

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{L}_2^{-\frac{1}{2}}\nabla^2$$

şeklinde tanımlanır.

$B(x,r)$, x ($x \in \mathbb{R}^n$) merkezli, r ($0 < r < \infty$), yarıçaplı bir yuvar olmak üzere, $\forall B \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B V(y)^q dy\Big)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|}\int_B V(y)dy$$

ters Hölder eşitsizliğini gerçekleştiren bir C sabiti mevcut olması durumunda $\mathbb{R}^n$ üzerinde V fonksiyonuna negatif olmayan lokal L_q integrallenebilen bir fonksiyon denir.

Açıkçası, $q_2 > q_1$ ise $RH_{q_2} \subset RH_{q_1}$. Fakat önemli olan RH_q sınıfının kendini geliştirme özelliğine sahip olduğu, yani, eğer $V \in RH_q$ ise bu durumda bazı $\epsilon > 0$ için $V \in RH_{q+\epsilon}$.

V fonksiyonunun ters Hölder indeksi

$$q_0 = \sup\{q : V \in RH_q\}$$

olarak tanımlanır.

$q > n/2$ olmak üzere verilen bir $V \in RH_q$ potensiyeli için, ρ fonksiyonu

$$\rho(x) := \frac{1}{m_V(x)} = \sup\Big\{r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}}\int_{B(x,r)} V(y)dy \leq 1\Big\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

olacak şekilde yardımcı fonksiyon olarak Shen [45] tarafından tanımlandı ve herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $0 < \rho(x) < \infty$.

$V \neq 0$ ise bu durumda $0 < m_V(x) < \infty$. Özellikle, $V = 1$ olduğunda $m_V(x) = 1$ ve $V(x) = |x|^2$ olduğunda $m_V(x) \sim 1 + |x|$.

Not edelim ki, $P(x)$ bir polinom ve $\beta > 0$ ise bu durumda kolayca görülür ki $q_1 \geq n/2$ için $V(x) = |P(x)|^\beta$ potansiyeli, RH_{q_1} aittir ve $V(x) \leq C m_V(x)^2$ olacak şekilde bir C sabiti vardır [34].

Bongioanni, Harboure ve Salinas [8] tarafından, $\theta \geq 0$ için b lokal integrallenebilir fonksiyonlarının yeni bir BMO uzayı $BMO_\theta(\rho)$ sınıfı olarak $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |b(y) - b_B|dy \leq C\Big(1 + \frac{r}{\rho(x)}\Big)^\theta, \quad r > 0 \tag{2.4}$$

olacak şekilde tanımlandı, burada

$$b_B = \frac{1}{|B|}\int_B b(y)dy.$$

$b \in BMO_\theta(\rho)$ için norm, $[b]_\theta$ ile (2.4) eşitsizliğindeki sabitlerinin infimumu olacak şekilde ifde edilir. (2.4) eşitsizliğinde, $\theta = 0$ olması durumunda ise BMO John-Nirenberg uzayı elde edilir. Verilen tanımdan dolayı

$$BMO_\infty(\rho) = \bigcup_{\theta>0} BMO_\theta(\rho)$$

şeklinde tanımlanır. Dolaysıyla, $1 < \theta < \theta'$ için $BMO \subset BMO_\theta(\rho) \subset BMO_{\theta'}(\rho)$ olduğu aşikardır ve böylece $BMO \subset BMO_\infty(\rho)$. Ayrıca, $BMO_\infty(\rho)$ uzayı genel olarak daha büyük bir sınıftır. Örnek olarak, ρ, $1 \le j \le n$ için $b_j(x) = |x_j|$ fonksiyonlarının sabiti (bu, V için pozitif bir sabit olarak karşılık gelir) ise bu durumda $BMO_\infty(\rho)$ uzayına aittir ancak BMO uzayına ait değildir. Ayrıca, $V(x) = |x|^2$ ve $\mathcal{L}$ Hermit operatörü oluyor ise budurumda $\rho(x) \simeq \frac{1}{1+|x|}$ elde edilir ve $b(x) = |x_j|^2$ olarak alınabilir.

Bundan sonra kısalık bakımından dolayı kullanılacak olan notasyonlar aşağıda ifade edilmiştir.

$$\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x,r) := \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} r^{-n/p}\,\varphi(x,r)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}$$

ve

$$\mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{\Phi,\varphi}(f;x,r) := \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} r^{-n/p}\,\varphi(x,r)^{-1}\|f\|_{WL_p(B(x,r))}.$$

2.3.2. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Lokal Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

Tanım 2.30. $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ de pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \le p < \infty$, $\alpha \ge 0$ ve $V \in RH_q$, $q \ge 1$ olsun. Herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sabiti için $LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi} = LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı, $f \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$ tüm fonksiyonların uzayının

$$\|f\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}} = \sup_{r>0} \mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x_0,r).$$

sonlu normu ile tanımlanır.

Ayrıca, $WLM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi} = WLM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen zayıf lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı, $f \in WL^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$ tüm fonksiyonların uzayının

$$\|f\|_{WLM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}} = \sup_{r>0} \mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x_0,r) < \infty$$

sonlu normu ile tanımlanır.

$LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $WLM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ lokal uzayları sırasıyla

$$\begin{aligned}\|f\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}} &= \sup_{r>0} \mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x_0,r),\\ \|f\|_{WLM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}} &= \sup_{r>0} \mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x_0,r),\end{aligned}$$

normlarına göre Banach uzaylardır.

Uyarı 2.31. (i) $\alpha = 0$ ve $\varphi(x,r) = r^{(\lambda-n)/p}$ olduğunda, $LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $LM^{\{0\}}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ lokal (merkez) Morrey uzay olduğu Alvarez, Lakey ve Guzman-Partida [7] tarafından çalışılmıştır;

(ii) $\alpha = 0$ olduğunda, $LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $VM^{\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzay olduğu Guliyev [22] tarafından çalışılmıştır, ayrıca bkz. [23, 28].

Her şeyden önce, $LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}$ ve $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}$ uzaylarını sağlayan doğal koşulları bulmak önemsizdir, yani bu yalnızca $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0'a denk fonksiyonlardan oluşmaz.

Lemma 2.32. $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ de pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \le p < \infty$, $\alpha \ge 0$ ve $V \in RH_q$, $q \ge 1$ olsun. Eğer bazı $t > 0$için,

$$\sup_{t<r<\infty} \left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x_0,r)} = \infty \tag{2.5}$$

ise bu durumda $LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \Theta$, burada Θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 denk tüm fonksiyonların kümesidir.

İspat. (2.5) eşitsizliğini sağlansın ve f fonksiyonu sıfıra denk olmasın. Bu durumda

$$\|f\|_{L_p(B(x_0,t))} > 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\|f\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}} &\ge \sup\nolimits_{t<r<\infty} \left(1 + \tfrac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} \varphi(x_0,r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0,r))}\\ &\ge \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \sup\nolimits_{t<r<\infty} \left(1 + \tfrac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} \varphi(x_0,r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}}.\end{aligned}$$

Dolaysıyla,

$$\|f\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}} = \infty$$

. ∎

Lemma 2.33. $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ de pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \le p < \infty$, $\alpha \ge 0$ ve $V \in RH_q$, $q \ge 1$ olsun.

(i) Eğer

$$\sup_{t<r<\infty}\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\alpha}\frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)}=\infty, \quad \text{bazı } t>0 \text{ ve her } x\in\mathbb{R}^n \quad \text{için}, \tag{2.6}$$

ise bu durumda $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)=\Theta$.

(ii) Eğer

$$\sup_{0<r<\tau}\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\alpha}\varphi(x,r)^{-1}=\infty, \quad \text{bazı } \tau>0 \text{ ve her } x\in\mathbb{R}^n \quad \text{için}, \tag{2.7}$$

ise bu durumda $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)=\Theta$ [4].

Uyarı 2.34. $\Omega^{\alpha,V}_{p,loc}$, $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ üzerinde tüm pozitif ölçülebilir fonksiyonların kümesi φ olmak üzere her $t>0$ için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big\|\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\alpha}\frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)}\Big\|_{L_\infty(t,\infty)}<\infty.$$

Ayrıca, $\Omega^{\alpha,V}_{p}$, $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ üzerinde tüm pozitif ölçülebilir fonksiyonların kümesi φ olmak üzere her $t>0$ için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big\|\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\alpha}\frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)}\Big\|_{L_\infty(t,\infty)}<\infty$$

ve

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big\|\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\alpha}\varphi(x,r)^{-1}\Big\|_{L_\infty(0,t)}<\infty$$

[4].

Uyarı 2.35. $\Omega^{\alpha,V}_{p,1}$, $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ üzerinde tüm pozitif ölçülebilir fonksiyonların kümesi φ olmak üzere

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\inf_{r>\delta}\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{-\alpha}\varphi(x,r)>0, \text{ bazı } \delta>0 \text{ için}, \tag{2.8}$$

ve

$$\lim_{r\to 0}\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\alpha}\frac{r^{n/p}}{\varphi(x,r)}=0 \tag{2.9}$$

[4].

$LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayları için sırasıyla daima $\varphi\in\Omega^{\alpha,V}_{p,loc}$, $\varphi\in\Omega^{\alpha,V}_{p}$ ve $\varphi\in\Omega^{\alpha,V}_{p,1}$ olarak kabul edilmiştir.

2.3.3. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

Bu kısımda, 2014 yılında Guliyev [29] tarafından tanımlanan Schrödinger operatörüne karşılık gelen genelleştirilmiş Morrey ve zayıf genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.36. $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ de $\varphi(x,r)$, pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \le p < \infty$, $\alpha \ge 0$ ve $V \in RH_q$, $q \ge 1$ olsun. $M^{\alpha,V}_{p,\varphi} = M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen genelleştirilmiş Morrey uzay,

$$\begin{aligned} \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\alpha} \varphi(x,r)^{-1} r^{-n/p} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x,r) \end{aligned}$$

sonlu quasinorm olmak üzere $f \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$ tüm fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca, $WM^{\alpha,V}_{p,\varphi} = WM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen zayıf genelleştirilmiş Morrey uzay,

$$\begin{aligned} \|f\|_{WM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\alpha} \varphi(x,r)^{-1} r^{-n/p} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x,r) \\ &< \infty \end{aligned}$$

olmak üzere $f \in WL^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$ tüm fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

Uyarı 2.37. (i) $\alpha = 0$ ve $\varphi(x,r) = r^{(\lambda-n)/p}$ olduğunda, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzay olduğu Morrey [37] tarafından tanıtıldı;

(ii) $\varphi(x,r) = r^{(\lambda-n)/p}$ olduğunda, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının, $L^{\alpha,V}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen Morrey uzay olduğu Tang ve Dong [48] tarafından çalışıldı;

(iii) $\alpha = 0$ olduğunda, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının, $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzay olduğu Mizuhara ve Nakai [36, 38] tarafından tanıtıldı.

(iv) $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen genelleştirilmiş Morrey uzay Guliyev [29] tarafından tanımı verildi.

2.3.4. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Sıfırlanan Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

Tanım 2.38. $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzay, $f \in M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır öyle ki

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x,r) = 0. \tag{2.10}$$

$VWM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen sıfırlanan zayıf genelleştirilmiş Morrey uzay, $f \in WM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır öyle ki

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x,r)=0.$$

$VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $VWM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlanan uzayları sırasıyla

$$\|f\|_{VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x,r),$$
$$\|f\|_{VWM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0}\mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{p,\varphi}(f;x,r),$$

normlarına göre Banach uzaylarıdır.

Uyarı 2.39. (i) $\alpha=0$ ve $\varphi(x,r)=r^{(\lambda-n)/p}$ olduğunda, $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının, $VL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlanan Morrey uzay olması durumu Vitanza [51] tarafından tanıtıldı;

(ii) $\alpha=0$ olduğunda, $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının, $VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzay olduğu Akbulut ve Samko [3, 43] tarafından çalışılmıştır.

(iii) $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzay Akbulut, Guliyev ve Omarova [4] tarafından çalışılmıştır.

2.4. Bazı İntegral Operatörleri ve Onların Komütatörleri

Bu kısımda, hamonik analizdeki bazı integral operatörlerin tanım ve özellikleri verilmiştir. Singüler integral operatörler harmonik analizde önemli bir yere sahip olup ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin regülerliği ile ilgili çalışmalarla yakından ilgilidir.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ilk olarak 1930 yılında $n=1$ için Hardy ve Littlewood [31] tarafından 1939 yılında Wiener [50] tarafından $n>1$ için kompleks analizin uygulamalarına yönelik olarak tanımlanmıştır. Maksimal fonksiyon analizde pekçok operatörün sınırlılığında çok önemli bir role sahiptir. Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun farklı tanımları aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.40. (Hardy-Littlewood Maksimal Fonksiyonu) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, M Hardy-Littlewood maksimal operatör

$$Mf(x) := \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy, \tag{2.11}$$

ve M_β kesirli operatör fonksiyonu

$$M_\beta f(x) := \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy, \quad 0<\beta<n$$

şeklinde tanımlanır.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu yuvar yerine küp alınarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer Q_r, $[-r,r]^n$ kübü ise $M'f$ merkezli Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{Q_r} |f(x-y)|\, dy \tag{2.12}$$

ile tanımlanır. $n = 1$ iken M ve M' çakışır. Eğer $n > 1$ ise bu durumda

$$C_1 M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_2 M'f(x)$$

olacak şekilde sadece n ye bağlı C_1 ve C_2 sabitleri vardır. Bu eşitsizlikten dolayı M ve M' operatörleri uygun koşullara göre değiştirilebilir. Ayrıca, M^*f merkezli olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$M^*f(x) = \sup_{B(x_0,r)\ni x} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y)|dy \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum x i içeren ve kenarları eksenlere paralel olan bütün $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarları üzerinden alınmaktadır. M ve M^* noktasal olarak eşdeğerdir.

Uyarı 2.41. (2.11)-(2.13) ifadeleri için her $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$C_0 Mf(x) \leq C_1 M'f(x) \leq C_2 M^*f(x) \leq C_3 Mf(x)$$

eşitsizliğini sağlayan n ye bağlı $C_i (i = 0,1,2,3)$ sayıları vardır. Mf, $M'f$ ve M^*f Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonları noktasal olarak eşdeğerdir.

Uyarı 2.42. $f \in L_1^{loc}$ olmak üzere $Mf(x)$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de alt yarı sürekli ölçülebilir bir fonksiyondur.

M Hardy-Littlewood maksimal operatörü altlineer ve homojen bir operatördür. Yani,

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \quad \text{ve} \quad M(\lambda f) = \lambda(Mf), \ \ \forall \lambda \geq 0$$

sağlanır.

Hardy-Littewood maksimal operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayındaki sınırlılığı $1 < p \leq \infty$ olmak üzere $n = 1$ için Hardy-Littlewood [31] tarafından $n > 1$ için Wiener [50] tarafından araştırılmıştır.

Uyarı 2.43. M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı değildir. Gerçekten; $n = 1$ ve $x \geq 1$ durumunda $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ için

$$Mf(x) \geq \frac{1}{2x}\int_0^{2x} |f(y)|dy = \frac{1}{2x}$$

olup, buradan

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)dx \geq \int_1^{\infty} Mf(x)dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2x}dx = \infty$$

elde edilir.

Önerme 2.44. Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sıfıra denk değilse bu durumda $Mf \notin L_1(\mathbb{R}^n)$ dir [18].

M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olmamasına rağmen, $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Aşağıdaki teorem M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün hemen hemen her yerde sonlu, zayıf $(1,1)$ ve $1 < p \leq \infty$ için (p,p) tipinden bir operatör olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2.45.

(1) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) < \infty$ dır.

(2) $p = 1$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ ve $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

(3) $1 < p \leq \infty$ ise bu durumda her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n,p) > 0$ sabiti vardır [46].

Teorem 2.46. $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{L_{p,\lambda}} \leq C\|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WL_{1,\lambda}} \leq C\|f\|_{L_{1,\lambda}}$$

sağlanır. Burada C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır [13].

Ayrıca $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $f \in L_{p,\lambda}$ için $\mathbb{R}^n$ de Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

Aşağıdaki teorem 1994 yılında Nakai [38] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.47. $1 \leq q < p < \infty$ olsun. $r \leq t \leq 2r$ iken $c \geq 1$ sayısı t, r, $x \in \mathbb{R}^n$ den, C sayısı da x ve r den bağımsız olmak üzere $\varphi(x,r)$

$$c^{-1}\varphi(x,r) \leq \varphi(x,t) \leq c\varphi(x,r)$$

ve

$$\int_r^\infty \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq C\varphi(x,r)^p$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda M operatörü $1 \leq q < p < \infty$ için $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında sınırlıdır [38].

Tanım 2.48. $V \in RH_{n/2}$ olmak üzere $\mathcal{L} = -\triangle + V$ olsun. M_V^θ Hardy-Littlewood maksimal operatörünün Schrödinger operatörüne karşılık gelen versiyonu (bkz. [8])

$$M_V^\theta f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\Psi_\theta(B(x,r))|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

ve kesirli maksimal operatörünün Schrödinger operatörüne karşılık gelen bir versiyonu $M_{\beta,V}^\theta$ (bkz.[48])

$$M_{\beta,V}^\theta f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{(\Psi_\theta(B(x,r))|B(x,r)|)^{1-\frac{\beta}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy, \quad 0 < \beta < n$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.49. (Singüler integral operatörü ve komütatör operatörü) Singüler integraller

$y' = y/|y|$ olmak üzere

$$\mathcal{T}f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)dy$$

biçimindeki operatörlerdir. Burada Ω, $\mathbb{R}^n$ deki S^{n-1} birim küresi üzerinde tanımlanmış olup sıfır ortalamalı, integrallenebilir bir fonksiyondur.

$C_\infty^c(\mathbb{R}^n)$ den $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ tanımlı $\mathcal{T}$ operatörü aşağıdaki şartları sağlarsa **Calderón-Zygmund operatörü** olarak adlandırılır.

(a) $\mathcal{T}$, $L_2(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı lineer operatördür.

(b) Her $f \in L_\infty^c(\mathbb{R}^n)$ için

$$\mathcal{T}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy \quad x \in \{\mathrm{supp} f\}^c,$$

şeklinde bir K çekirdeği vardır.

(c) K çekirdeği $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x \neq y$ olduğunda $C > 0$ ve bazı $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} |K(x,y)| &\leq \frac{C}{|x-y|^n}, \\ |K(x+h,y) - K(x,y)| &\leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \\ |K(x,y+h) - K(x,y)| &\leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \end{aligned}$$

Calderón-Zygmund eşitsiziklerini sağlar. Burada $|h| < |x-y|/2$ dır [45].

Teorem 2.50. Eğer $1 < p < \infty$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır. Eğer $p = 1$ ise, bu durumda her $\lambda > 0$ ve $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{T}f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır [17].

Teorem 2.51. $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü $L_{p,\lambda}$ üzerinde sınırlıdır. Ayrıca $p = 1$ için $L_{1,\lambda}$ uzayından $WL_{1,\lambda}$ uzayına sınırlıdır [13].

Aşağıdaki teorem 1994 yılında Nakai [38] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.52. $1 \leq p < \infty$ olsun. $r \leq t \leq 2r$ iken $c \geq 1$ sayısı t, r, $x \in \mathbb{R}^n$ den, C sayısı da x ve r den bağımsız olmak üzere $\varphi(x,r)$

$$c^{-1}\varphi(x,r) \leq \varphi(x,t) \leq c\varphi(x,r)$$

ve

$$\int_r^\infty \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq C\varphi(x,r)^p$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $\mathcal{T}$ operatörü $p > 1$ için $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında ve $M_{1,\varphi}$ uzayından $WM_{1,\varphi}$ uzayına sınırlıdır [38].

Aşağıdaki teorem, 1994 yılında Guliyev [23] tarafından ispatlanmış ve Mizuhara [36] tarafından elde edilen sonuçları içermektedir. Ayrıca $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ durumu için 1994 yılında

Nakai [38] tarafından elde edilen sonuçları da içermektedir. Burada her t, $r > 0$ ve $C > 0$ için $0 < r \leq t \leq 2r$ olacak şekilde φ

$$C^{-1}\varphi(t) \leq \varphi(r) \leq C\varphi(t)$$

doubling şartını sağlar.

Teorem 2.53. $1 \leq p < \infty$ iken C pozitif bir sayı olmak üzere her $t > 0$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^{\infty} \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r} \leq C\varphi_2(x,t) \tag{2.14}$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır [23].

Ayrıca, Guliyev ve ark. [2, 26] tarafından daha zayıf şartla Calderón-Zygmund singüler integral oparatörünün $1 \leq p < \infty$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_1} uzayına sınırlılığı araştırılmışır.

Teorem 2.54. $1 \leq p < \infty$ iken C pozitif bir sayı olmak üzere her $t > 0$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}}dt \leq C\varphi_2(x,r) \tag{2.15}$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır [2], [26].

Tanım 2.55. $f \in C_0^{\infty}$, $b \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü olmak üzere $[b, \mathcal{T}]$ komütatör operatörü

$$[b, \mathcal{T}]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)]\, K(x-y)f(y)dy, \;\; x \notin \operatorname{supp} f$$

şeklinde tanımlanır.

K, Calderón-Zygmund singüler integral operatör ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $[b, K]f = K(bf) - bKf$ şeklinde tanımlanan komütatör operatörü $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır [11], [12].

1976 yılında Coifman, Rochberg ve Weiss [16] tarafından T_Ω Calderón-Zygmund singüler integral operatörünün ve bir b fonksiyonunun ürettiği $[b, T_\Omega]$ komütatör operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ sınırlılığı üzerine araştırma yapılmıştır. Burada Ω

(i) Herhangi bir $\lambda > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\Omega(\lambda x) = \Omega(x)$

(ii) $\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0$

şartlarını sağlamak üzere, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için $[b, T_\Omega]$ komütatör operatörü

$$[b, T_\Omega](f)(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} \left[b(x) - b(y)\right] f(y) dy \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanır.

Ölçülebilir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı bir lineer $\mathcal{T}$ operatörü ve bir b fonksiyonu için $[b, \mathcal{T}]$ komütatörü

$$[b, \mathcal{T}]f(x) = b(x)\mathcal{T}f(x) - \mathcal{T}(bf)(x)$$

ile tanımlanır.

Coifman, Rochberg ve Weiss [16] tarafından $[b, \mathcal{T}_\Omega]$ komütatörünün $L_p(Rn)$, $1 < p < \infty$ sınırlılığını kullanarak başarılı bir şekilde $H^1(\mathbb{R}^n)$ Hardy uzayının ayrışımı verilmiştir. (2.16) tipindeki komütatörler ikinci mertebeden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin regülerliği çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır [14, 15, 20]. Açık olarak $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $[b, \mathcal{T}]$, $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır. Coifman, Rochberg ve Weiss, [16] çalışmasında $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ iken $[b, \mathcal{T}]$ komütatör operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ sınırlılığını göstermişlerdir. Daha sonra Janson, [33] çalışmasında $[b, \mathcal{T}]$ komütatör operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı iken $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermiştir. $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü zayıf $(1, 1)$ eşitsizliğini sağlamasına rağmen $[b, \mathcal{T}]$ komütatör operatörü bu eşitsizliği sağlamaz. Buna karşılık aşağıdaki zayıf sonuç doğrudur.

Teorem 2.56. $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in C_0^\infty$ ve her $\lambda > 0$ için

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |[b, \mathcal{T}]f(y)| > \lambda\}| \leq C\|b\|_* \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\right) dy$$

sağlanır. Burada, $\log^+ t = \max(\log t, 0)$ biçimindedir [39].

Teorem 2.57. $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü olmak üzere $[b, \mathcal{T}]$ komütatör operatörü $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayında sınırlıdır [19].

Aşağıdaki teorem 2011 yılında Guliyev [26] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.58. $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ için C pozitif bir sayı olmak üzere (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r)$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{T}_b$ Calderón-Zygmund operatörünün komütatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır [26].

Aşağıdaki teorem 2011 yılında Guliyev [27] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.59. $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in A_p$ için C pozitif bir sayı olmak üzere (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)(\omega(B(x,s)))^{\frac{1}{p}}}{\omega(B(x,t))^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r)$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{T}_b$ Calderón-Zygmund operatörünün komütatörü $M_{p,\varphi_1}(\omega)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(\omega)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,\varphi_1}(\omega)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(\omega)$ uzayına sınırlıdır [27].

Tanım 2.60. (Riesz potansiyeli) $0 < \alpha < n$ için $\mathcal{I}_\alpha$ Riesz potansiyeli

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki teorem I_α Riesz potansiyelinin $0 < \alpha < n$ için (L_p, L_q) sınırlılığını ifade etmektedir.

Teorem 2.61. $1 \leq p < q < \infty$, $0 < \alpha < n$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|\mathcal{I}_\alpha f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

ve $p = 1$ için

$$\|\mathcal{I}_\alpha f\|_{L_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde $C = C(n, \alpha, p) < \infty$ sabiti vardır ve burada $\alpha = n(1/p - 1/q)$ biçimindedir [21].

Teorem 2.62. $0 < \alpha < n, 1 \leq p < n/\alpha$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olsun. Bu durumda $0 < \lambda < n$ için $\mathcal{I}_\alpha$ Riesz potansiyeli $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [1, 40].

Aşağıdaki teorem 1994 yılında Nakai [38] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.63. $1 \leq p < \infty$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olsun. $r \leq t \leq 2r$ iken $c \geq 1$ sayısı t, r, $x \in \mathbb{R}^n$ den, C sayısı da x ve r den bağımsız olmak üzere $\varphi(x, r)$

$$c^{-1}\varphi(x,r) \leq \varphi(x,t) \leq c\varphi(x,r)$$

ve

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq C\varphi(x,r)^p$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $\mathcal{I}_\alpha$ operatörü $p > 1$ için $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında ve $M_{1,\varphi}$ uzayından $WM_{1,\varphi}$ uzayına sınırlıdır [38].

Aşağıdaki teorem, 1994 yılında Guliyev [23] tarafından ispatlanmış ve Mizuhara [36] tarafından elde edilen sonuçları içermektedir. Ayrıca $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ durumu için 1994 yılında Nakai [38] tarafından elde edilen sonuçları da içermektedir. Burada her t, $r > 0$ ve $C > 0$ için $0 < r \leq t \leq 2r$ olacak şekilde φ

$$C^{-1}\varphi(t) \leq \varphi(r) \leq C\varphi(t)$$

doubling şartını sağlar.

Teorem 2.64. $1 \leq p < \infty$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olsun. Ayrıca her $r > 0$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi_1(x,t) \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r) \tag{2.17}$$

şartını sağlayan pozitif ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, pozitif bir C sayısı vardır. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{I}_\alpha$ operatörü operatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır [23].

Ayrıca, Akbulut, Guliyev ve ark. [2, 26] tarafından daha zayıf şartla Riesz potansiyelinin $1 \leq p < \infty$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_1} uzayına sınırlılığı araştırılmışır.

Teorem 2.65. $1 \leq p < q < \infty$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olsun. Ayrıca her $t > 0$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \leq C\varphi_2(x,r) \tag{2.18}$$

şartını sağlayan pozitif ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, pozitif bir C sayısı vardır. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{I}_\alpha$ Riesz potansiyeli M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır [2, 26].

Eğer (φ_1, φ_2) çifti (2.17) şartını sağlarsa, bu durumda (2.18) şartını da sağlar. Ancak tersi doğru değildir (Hatırlatma 4.7, [26]).

$\mathcal{L}$ operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörü $0 < \beta < n$ için

$$\mathcal{I}_\beta f(x) = \mathcal{L}^{-\beta/2} f(x) = \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}} f(x) \frac{dt}{t^{-\beta/2+1}}$$

$b \in BMO_\theta(\rho)$ olsun. $\mathcal{I}_\beta$ komutatörü

$$[b, \mathcal{I}_\beta] f(x) = b(x)\mathcal{I}_\beta f(x) - \mathcal{I}_\beta(bf)(x)$$

şeklinde tanımlanır.

3. MATERYAL VE METOT

Ters Hölder eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan V potansiyelli $-\triangle+V$ formundaki Schrödinger operatörüne karşılık gelen harmonik analizde L_p Lebesgue ve $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarının özel bir yeri vardır. Ayrıca Schrödinger operatörüne karşılık gelen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bu uzaylarda araştırılması da önemli bir yere sahiptir.

$\mathcal{L} = -\triangle+V$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen Riesz dönüşümü $\mathcal{R}_1 = \nabla\mathcal{L}^{-1/2}$, duali $\mathcal{R}_1^* = \mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ şeklinde ve $\mathcal{L}_2 = (-\triangle)^2 + V^2$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümü $\mathcal{R} = \nabla^2\mathcal{L}_2^{-1/2}$, duali $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}_2^{-1/2}\nabla^2$ şeklinde tanımlanırlar.

L_p Lebesgue uzayında, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}^*$ operatörlerinin sınırlılıkları Shen [45] tarafından elde edilmiştir. Ayrıca, $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere Bongioanni, Harboure ve Salinas [8] tarafından $[b, \mathcal{R}_1]$ ve $[b, \mathcal{R}_1^*]$ komütatör operatörlerinin L_p uzayında sınırlı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş Morrey uzaylar ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Guliyev ve Omarova [30] tarafından $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere $\mathcal{R}_1^*$ ve $[b, \mathcal{R}_1^*]$ komütatör operatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmıştır. Son yıllarda ise Akbulut, Guliyev ve Omarova [4], $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere μ_j^L Marcinkiewicz ve $[b, \mu_j^L]$ komütatör operatörlerinin genelleştirilmiş Morrey ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlı olduklarını göstermişlertir.

L_p uzayında, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}^*$ operatörlerinin sınırlılıkları Liu ve Dong [34] tarafından ispatlanmıştır. $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere Liu, Zhang, Sheng ve Wang [35] tarafından da $[b, \mathcal{R}]$ ve $[b, \mathcal{R}^*]$ komütatör oparatörlerinin L_p uzayında sınırlılıkları gösterilmiştir.

Schrödinger operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümü ve onların komütatör operatörlerinin küme üzerinde L_p Lebesgue normunu Guliyev lokal eşitsizliği ile lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylar üzerindeki sınırlılıkları elde edilmiştir. Schrödinger operatörüne karşılık gelen genelleştirilmiş Morrey uzayları ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere $M_{\beta,V}^\theta$ kesirli maksimal operatörünün ve onun komutatörlerinin sınırlılığı araştırılmıştır. Guliyev metodu ile genelleştirilmiş Morrey uzaylarının ve lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanım ve temel özellikleri verilerek, bu uzaylarda Schrödinger operatörüne karşılık gelen operatörlerinin ve onların komütatör operatörlerinin sınırlılığı için yeter şartlar incelenmiştir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, ilk kısımda Schrödinger operatörüne karşılık gelen $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayları ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}$ sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere $M^{\theta}_{\beta,V}$ operatörünün ve onun $[b, M^{\theta}_{\beta,V}]$ komütatörlerinin sınırlılığı ispatlandı. $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzayın- dan bir başka $VM^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}$, $1/p - 1/q = \beta/n$ uzayına $M^{\theta}_{\beta,V}$ operatörünün sınırlılıkları için (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeter şartlar elde edilmiştir.

Son kısımda ise Schrödinger operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümü ve onların komütatör operatörlerinin lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylar üzerindeki sınırlılıkları ispatlanmıştır. Ayrıca, Guliyev metodu ile genelleştirilmiş Morrey uzaylarının ve lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanım ve temel özellikleri verilerek, bu uzaylarda Schrödinger operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümlerinin ve onların komütatör operatörlerinin sınırlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir.

4.1. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Sıfırlanan Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Kesirli Maksimal Operatörlerin ve Onların Komütatörlerinin Sınırlılığı

4.1.1. Başlıca Sonuçlar

Bu kısımda elde edilen başlıca sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.1. $V \in RH_{n/2}$, $\alpha \geq 0$, $1 < p < n/\beta$, $1/q = 1/p - \beta/n$ ve $\varphi_1 \in \Omega^{\alpha,V}_p$, $\varphi_2 \in \Omega^{\alpha,V}_q$ yeter şart

$$\sup_{r<t<\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}}} \leq c_0 \varphi_2(x,r), \tag{4.1}$$

olsun, burada c_0, x ve r den bağımsızdır. Bu durumda $M^{\theta}_{\beta,V}$ operatörü $M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ uzayınından $p > 1$ için $M^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}$ uzayına ve $M^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}$ uzayınından $WM^{\alpha,V}_{\frac{n}{n-\beta},\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

Ayrıca $p > 1$ için

$$\|M^{\theta}_{\beta,V} f\|_{M^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}} \leq C\|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}},$$

$p = 1$ için

$$\|M^{\theta}_{\beta,V} f\|_{WM^{\alpha,V}_{\frac{n}{n-\beta},\varphi_2}} \leq C\|f\|_{M^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}},$$

burada C, f bağımsızdır [5].

Teorem 4.2. $V \in RH_{n/2}$, $\alpha \geq 0$, $1 < p < n/\beta$, $1/q = 1/p - \beta/n$ ve $\varphi_1 \in \Omega_p^{\alpha,V}$, $\varphi_2 \in \Omega_q^{\alpha,V}$ yeter şart

$$\sup_{r<t<\infty} \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}}} \leq c_0 \varphi_2(x,r), \tag{4.2}$$

olsun, burada c_0, x ve r den bağımsızdır. Eğer $b \in BMO_\theta(\rho)$, bu durumda $[b, M_{\beta,V}^\theta]$ komütatör operatörü $M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}$ uzayından $M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}$ uzayına sınırlı ve

$$\|[b, M_{\beta,V}^\theta] f\|_{M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}} \leq C[b]_\theta \|f\|_{M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}},$$

burada C, f bağımsızdır [5].

Teorem 4.3. $V \in RH_{n/2}$, $\alpha \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi_1 \in \Omega_{p,1}^{\alpha,V}$, $\varphi_2 \in \Omega_{q,1}^{\alpha,V}$ yeter şartlar her $\delta > 0$ için

$$c_\delta := \int_\delta^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_1(x,t) \frac{dt}{t} < \infty$$

ve

$$\int_r^\infty \varphi_1(x,t) \frac{dt}{t^{1-\beta}} \leq C_0 \varphi_2(x,r), \tag{4.3}$$

olsun, burada C_0, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ bağımsızdır. Bu durumda $M_{\beta,V}^\theta$ operatörü $VM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}$ uzayından $p > 1$ için $VM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}$ uzayına ve $VM_{1,\varphi_1}^{\alpha,V}$ uzayından $VWM_{\frac{n}{n-\beta},\varphi_2}^{\alpha,V}$ uzayına sınırlıdır [5].

Teorem 4.4. $V \in RH_{n/2}$, $b \in BMO_\theta(\rho)$, $1 < p < \infty$ ve $\varphi_1 \in \Omega_{p,1}^{\alpha,V}$, $\varphi_2 \in \Omega_{q,1}^{\alpha,V}$ yeter şartları

$$\sup_{r<t<\infty} \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) \varphi_1(x,t) t^\beta \leq c_0 \varphi_2(x,r), \tag{4.4}$$

olsun, burada c_0, x ve r den bağımsızdır,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\ln \frac{1}{r}}{\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_2(x,r)} = 0 \tag{4.5}$$

ve her $\delta > 0$ için

$$c_\delta := \int_\delta^\infty \Big(1 + |\ln t|\Big) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_1(x,t) \frac{dt}{t^{1-\beta}} < \infty. \tag{4.6}$$

Bu durumda $[b, M_{\beta,V}^\theta]$ operatörü $VM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}$ uzayından $VM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}$ uzayına sınırlıdır [5].

4.1.2. Başlıca Sonuçların İspatında Kullanılan Yardımcı Teoremler

Yukarıdaki teoremlerin ispatlarında kullanılan kritik fonksiyonlar ile ilgili bazı önemli sonuçları ispatsız olarak aşağıda verildi.

Lemma 4.5. $V \in RH_{n/2}$ olsun. ρ yardımcı fonksiyonu için

$$C^{-1}\rho(x)\Big(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\Big)^{-k_0} \leq \rho(y) \leq C\rho(x)\Big(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\Big)^{\frac{k_0}{1+k_0}}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n, \quad (4.7)$$

olacak şekilde bir C ve $k_0 \geq 1$ mevcuttur [45].

Lemma 4.6. $x \in B(x_0,r)$ olmak üzere bu durumda $k \in N$ için

$$\frac{1}{\Big(1+\frac{2^k r}{\rho(x)}\Big)^N} \lesssim \frac{1}{\Big(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\Big)^{N/(k_0+1)}}$$

elde edilir [5].

İspat. (4.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Big(1+\frac{2^k r}{\rho(x)}\Big)^N} &\lesssim \frac{1}{\Bigg(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)\Big(1+\frac{|x-x_0|}{\rho(x_0)}\Big)^{\frac{k_0}{k_0+1}}}\Bigg)^N} \\ &\lesssim \frac{\Big(1+\frac{|x-x_0|}{\rho(x_0)}\Big)^{\frac{k_0 N}{k_0+1}}}{\Big(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\Big)^N} \\ &\lesssim \frac{1}{\Big(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\Big)^{N/(k_0+1)}}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Yeni BMO tipli $BMO_\theta(\rho)$ uzayları için bazı eşitsizlikler aşağıda ifade edilmiştir.

Lemma 4.7. $1 \leq s < \infty$ olsun. Eğer $b \in BMO_\theta(\rho)$ ise bu durumda $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olmak üzere her $B = B(x,r)$ için

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |b(y)-b_B|^s dy\Big)^{1/s} \leq [b]_\theta\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\theta'},$$

burada $\theta' = (k_0+1)\theta$ ve k_0, (4.7) eşitsizliğindeki sabitlerdir [8].

Lemma 4.8. $1 \leq s < \infty$, $b \in BMO_\theta(\rho)$, ve $B = B(x,r)$ olsun. Bu durumda θ', Lemma 4.7. deki gibi olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\Big(\frac{1}{|2^k B|}\int_{2^k B} |b(y) - b_B|^s dy\Big)^{1/s} \leq [b]_\theta k \Big(1 + \frac{2^k r}{\rho(x)}\Big)^{\theta'}$$

[8].

K_β, $\mathcal{I}_\beta$ nin çekirdeği olsun. $K_\beta(x,y)$ çekirdeği için aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Lemma 4.9. $V \in RH_{n/2}$ ise burumda her N için

$$|K_\beta(x,y)| \leq \frac{C}{\Big(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\Big)^N} \frac{1}{|x-y|^{n-\beta}} \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır [9].

Son olarak da, essential supremum ve essential infimum arasındaki ilişkiyi veren bağıntı aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.10. f reel değerli negatif olmayan ve E kümesinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Big(\operatorname*{ess\,inf}_{x \in E} f(x)\Big)^{-1} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} \frac{1}{f(x)}$$

[49].

Lemma 4.11. $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ de pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \leq p < \infty$, $\alpha \geq 0$ ve $V \in RH_q$, $q \geq 1$ olsun.

(i)

$$\sup_{t<r<\text{ß}} \Big(1 + \frac{r}{\rho(x)}\Big)^\alpha \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)} = \infty \quad \text{bazı } t > 0 \text{ için ve her } x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.9}$$

ise bu durumda $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \Theta$.

(ii)

$$\sup_{0<r<\tau} \Big(1 + \frac{r}{\rho(x)}\Big)^\alpha \varphi(x,r)^{-1} = \infty \quad \text{bazı } \tau > 0 \text{ için ve her } x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.10}$$

ise bu durumda $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \Theta$

[5].

İspat. (i) (4.9) eşitsizliği sağlansın ve f fonksiyonu sıfıra eşit olmasın. Bu durumda

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B(x,t))} > 0,$$

böylece

$$\begin{aligned}\|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi}} &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{t<r<\infty} \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} \varphi(x,r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\ &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \sup_{t<r<\infty} \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} \varphi(x,r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}}.\end{aligned}$$

Dolaysıyla, $\|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \infty$.
(ii) $f \in M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve (4.10) sağlansın. Bu durumda iki olasılık vardır:
(1. Durum):

$$\sup_{0<r<t} \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} \varphi(x,r)^{-1} = \infty, \forall t > 0.$$

(2. Durum):

$$\sup_{0<r<t} \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} \varphi(x,r)^{-1} < \infty \text{ bazı } t \in (0,\tau) \text{ için }.$$

1. durum için, Lebesgue diferansiyel teoreminden, hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L_p}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L_p}} = |f(x)|. \tag{4.11}$$

İddia ediliyor ki her x için $f(x) = 0$. Gerçekte, x sabit ve $|f(x)| > 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda (4.11) eşitsizliğinden her $0 < r \leq t_0$ için

$$r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \geq 2^{-1} v_n^{\frac{1}{p}} |f(x)|$$

olacak şekilde $t_0 > 0$ vardır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi}} &\geq \sup_{0<r<t_0} \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} \varphi(x,r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\ &\geq 2^{-1} v_n^{\frac{1}{p}} |f(x)| \sup_{0<r<t_0} \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} \varphi(x,r)^{-1}.\end{aligned}$$

Dolaysıyla, $\|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \infty$, böylece $f \notin M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve bu bir çelişki olup kabul doğru değildir.

2. durum da ise

$$\sup_{s<r<\tau}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi(x,r)^{-1}=\infty$$

olduğunu ifade eder, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\sup_{s<r<\infty}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi(x,r)^{-1}r^{-\frac{n}{p}} &\geq \sup_{s<r<\tau}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi(x,r)^{-1}r^{-\frac{n}{p}}\\ &\geq \tau^{-\frac{n}{p}}\sup_{s<r<\tau}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi(x,r)^{-1}\\ &=\infty,\end{aligned}$$

(i) şıkkı gerçeklenir. ■

Uyarı 4.12. $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ de her $t>0$ için $\Omega_p^{\alpha,V}$, tüm pozitif ölçülebilir φ fonksiyonlarının bir kümesi olarak tanımlansın. Sırasıyla

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\|\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)}\right\|_{L_\infty(t,\infty)}<\infty$$

ve

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\|\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi(x,r)^{-1}\right\|_{L_\infty(0,t)}<\infty.$$

Aşağıdaki sonuçta Lemma 4.11. da olduğu gibi daima $\varphi\in\Omega_p^{\alpha,V}$ olduğu kabul edilmiştir.

Uyarı 4.13. $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ de $\Omega_{p,1}^{\alpha,V}$, tüm pozitif ölçülebilir φ fonksiyonlarının bir kümesi olarak tanımlansın.

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\inf_{r>\delta}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{-\alpha}\varphi(x,r)>0,\ \text{bazı } \delta>0, \tag{4.12}$$

ve

$$\lim_{r\to 0}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\frac{r^{n/p}}{\varphi(x,r)}=0,$$

Ayrıca burada $VM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{R}^n)$ uzayının önemsizliği için daima $\varphi\in\Omega_{p,1}^{\alpha,V}$ olduğu kabul edilmiştir.

4.1.3. Başlıca Sonuçların İspatı

4.1.3.1. Teorem 4.1. İspatı

İlk önce aşağıdaki sonuçların ispatı verilmiştir.

Teorem 4.14. $V \in RH_{n/2}$ olsun. $1 < p < n/\beta$, $1/q = 1/p - \beta/n$ ise bu durumda herhangi bir $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M^\theta_{\beta,V} f\|_{L_q(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \sup_{2r<t<\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}$$

eşitsizliği gerçeklenir.
Ayrıca, $p = 1$ olmak üzere herhangi bir $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M^\theta_{\beta,V} f\|_{WL_{\frac{n}{n-\beta}}(B(x_0,r))} \lesssim r^{n-\beta} \sup_{2r<t<\infty} \frac{\|f\|_{L_1(B(x_0,t))}}{t^{n-\beta}}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$ ve herhangi bir $\lambda > 0$ için $\lambda B = B(x_0, \lambda r)$. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2$ gibi yazılsın, burada $B(x_0, 2r)$ nin karekteristik fonksiyonları $f_1(y) = f(y)\chi_{B(x_0,2r)}(y)$ ve $\chi_{B(x_0,2r)}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\|M^\theta_{\beta,V} f\|_{L_q(B(x_0,r))} \leq \|M^\theta_{\beta,V}(f_1)\|_{L_q(B(x_0,r))} + \|M^\theta_{\beta,V}(f_2)\|_{L_q(B(x_0,r))}.$$

$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{I}_\beta$ operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlığından aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
\|M^\theta_{\beta,V}(f_1)\|_{L_q(B(x_0,r))} &\lesssim \|f\|_{L_p(B(x_0,2r))} \\
&\lesssim r^{\frac{n}{q}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2r))} \int_{2r}^\infty \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \\
&\lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^\infty \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$\|M^\theta_{\beta,V}(f_2)\|_{L_p(B(x_0,r))}$ için $x \in B$, $y \in (2B)^c$ olduğunda $|x - y| \approx |x_0 - y|$ gerçeklenir. Bu durumda (4.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B} |M^\theta_{\beta,V}(f_2)(x)| &\leq \int_{(2B)^c} |K_\beta(x,y) f(y)| dy \\
&\lesssim \int_{(2B)^c} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\beta}} dy \\
&\lesssim \sum_{k=1}^\infty (2^{k+1} r)^{-n+\beta} \int_{2^{k+1}B} |f(y)| dy
\end{aligned}$$

elde edilir.
Hölder eşitsizliğinden

$$\sup_{x\in B}|M^{\theta}_{\beta,V}(f_2)(x)| \lesssim \sum_{k=1}^{\infty}\|f\|_{L_p(2^{k+1}B)}(2^{k+1}r)^{-1-\frac{n}{p}+\beta}\int_{2^k r}^{2^{k+1}r} dt$$
$$\lesssim \sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^k r}^{2^{k+1}r}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}$$
$$\lesssim \int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}. \tag{4.14}$$

Böylece $1 \leq p < n/\beta$ için

$$\|M^{\theta}_{\beta,V}(f_2)\|_{L_q(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}. \tag{4.15}$$

Dolaysıyla (4.13) ve (4.15) eşitsizliklerinden $1 \leq p < n/\beta$ için

$$\|M^{\theta}_{\beta,V}f\|_{L_q(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}. \tag{4.16}$$

$p = 1$ durumunda $M^{\theta}_{\beta,V}$ operatörünün $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_{\frac{n}{n-\beta}}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\|M^{\theta}_{\beta,V}(f_1)\|_{WL_{\frac{n}{n-\beta}}(B(x_0,r))} \lesssim \|f\|_{L_1(B(x_0,2r))} \lesssim r^{n-\beta}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(x_0,t))}}{t^{n-\beta}}\frac{dt}{t}$$

elde edilir.
(4.15) eşitsizliğinden

$$\|M^{\theta}_{\beta,V}(f_2)\|_{WL_{\frac{n}{n-\beta}}(B(x_0,r))} \leq \|M^{\theta}_{\beta,V}(f_2)\|_{L_{\frac{n}{n-\beta}}(B(x_0,2r))} \lesssim r^{n-\beta}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(x_0,t))}}{t^{n-\beta}}\frac{dt}{t}.$$

Böylece

$$\|M^{\theta}_{\beta,V}f\|_{WL_{\frac{n}{n-\beta}}(B(x_0,r))} \lesssim r^{n-\beta}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(x_0,t))}}{t^{n-\beta}}\frac{dt}{t}.$$

■

Teorem 4.1. İspatı:

Lemma 4.10. den,

$$\frac{1}{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}} = \operatorname*{ess\,sup}_{t<s<\infty}\frac{1}{\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}$$

elde edilir.

Not edelim ki, $\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}$, t fonksiyonuna göre azalmayan ve $f \in M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}} \\
&\lesssim \operatorname*{ess\,sup}_{t<s<\infty}\frac{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}} \\
&\lesssim \sup_{0<s<\infty}\frac{\left(1+\frac{s}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(x_0,s))}}{\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}.
\end{aligned}$$

$\alpha \geq 0$ olduğunda ve (φ_1,φ_2) çifti, (4.1) koşulunu sağladığında ise bu durumda

$$\begin{aligned}
&\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t} \\
&=\int_{2r}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}\int_{2r}^{\infty}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\alpha}\int_{r}^{\infty}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\alpha}\varphi_2(x_0,r). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Teorem 4.14. den

$$\begin{aligned}
&\|M^{\theta}_{\beta,V}f\|_{M^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}} \\
&\lesssim \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n,r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x_0,r)^{-1}r^{-n/q}\|\mathcal{I}_{\beta}f\|_{L_p(B(x_0,r))} \\
&\lesssim \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n,r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x_0,r)^{-1}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}.
\end{aligned}$$

$q=\frac{n}{n-\beta}$ olsun (4.17) eşitsizliğindeki benzer durumdan dolayı

$$\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(x_0,t))}}{t^{n-\beta}}\frac{dt}{t}\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\alpha}\varphi_2(x_0,r).$$

Böylece Teorem 4.14. den

$$
\begin{aligned}
&\|M^{\theta}_{\beta,V}f\|_{WM^{\alpha,V}_{\frac{n}{n-\beta},\varphi_2}} \\
&\lesssim \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, r>0}\Big(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\Big)^{\alpha}\varphi_2(x_0,r)^{-1}r^{\beta-n}\|\mathcal{I}_{\beta}f\|_{WL_{\frac{n}{n-\beta}}(B(x_0,r))} \\
&\lesssim \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, r>0}\Big(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\Big)^{\alpha}\varphi_2(x_0,r)^{-1}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(x_0,t))}}{t^{n-\beta}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}}.
\end{aligned}
$$

4.1.3.2. Teorem 4.2. İspatı

Teorem 4.1. ispatında olduğu gibi aşağıdaki teoremi ispatlamak yeterlidir.

Teorem 4.15. $V \in RH_{n/2}$, $b \in BMO_{\theta}(\rho)$ olsun. $1 < p < n/\beta$, $1/q = 1/p - \beta/n$ ise bu durumda herhangi bir $f \in L^{p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|[b, M^{\theta}_{\beta,V}f]\|_{L_q(B(x_0,r))} \lesssim [b]_{\theta} r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty}\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t} \tag{4.18}$$

eşitsizliği gerçeklenir [5].

İspat. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2$ gibi yazılsın, burada $f_1(y) = f(y)\chi_{B(x_0,2r)(y)}$. Bu durumda

$$\|[b, M^{\theta}_{\beta,V}]f\|_{L_q(B(x_0,r))} \le \|[b, M^{\theta}_{\beta,V}](f_1)\|_{L_q(B(x_0,r))} + \|[b, M^{\theta}_{\beta,V}](f_2)\|_{L_q(B(x_0,r))}.$$

$[b, M^{\theta}_{\beta,V}]$ komütatör operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından ve (4.13) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|[b, M^{\theta}_{\beta,V}](f_1)\|_{L_q(B(x_0,r))} &\lesssim [b]_{\theta}\|f\|_{L_p(B(x_0,2r))} \\
&\lesssim [b]_{\theta} r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim [b]_{\theta} r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty}\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}.
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Şimdi $\|[b, M^{\theta}_{\beta,V}](f_2)\|_{L_q(B(x_0,r))}$ ifadesi ele alınacakdır. Herhangi bir $x \in B(x_0, r)$ için

$$|[b, M^{\theta}_{\beta,V}]f_2(x)| \le |b(x) - b_{2B}|\,|\mathcal{I}_{\beta}(f_2)(x)| + |\mathcal{I}_{\beta}((b - b_{2B})f_2)(x)|.$$

(4.8) eşitsizliğinden, Lemma 4.6. ve (4.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\sup_{x\in B}|M^{\theta}_{\beta,V}(f_2)(x)| &\lesssim \int_{(2B)^c}\frac{1}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^{n-\beta}}dy\\ &\lesssim \frac{1}{\left(1+\frac{2r}{\rho(x)}\right)^N}\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k+1}r)^{-n+\beta}\int_{2^{k+1}B}|f(y)|dy\\ &\lesssim \frac{1}{\left(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0+1)}}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Dolayısıyla Lemma 4.7. den ve $N\geq (k_0+1)\theta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\|(b(x)-b_{2B})M^{\theta}_{\beta,V}(f_2)\|_{L_q(B(x_0,r))}\\ &\lesssim [b]_{\theta}r^{\frac{n}{q}}\Big(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\Big)^{\theta-N/(k_0+1)}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}\\ &\lesssim [b]_{\theta}r^{\frac{n}{q}}\int_{2r}^{\infty}\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Sonuç olarak, $\|M^{\theta}_{\beta,V}((b-b_{2B})f_2)\|_{L_q(B(x_0,r))}$ olsun. (4.8) eşitsizliğinden Lemma 4.6. ve (4.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\beta}|M^{\theta}_{\beta,V}((b-b_{2B})f_2)(x)|\\ &\lesssim \int_{(2B)^c}\frac{1}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N}\frac{|b(y)-b_{2B}||f(y)|}{|x_0-y|^{n-\beta}}dy\\ &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2^kr)^{n-\beta}\Big(1+\frac{2^kr}{\rho(x)}\Big)^N}\int_{2^{k+1}B}|b(y)-b_{2B}||f(y)|dy\\ &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2^kr)^{n-\beta}\Big(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\Big)^{N/(k_0+1)}}\int_{2^{k+1}B}|b(y)-b_{2B}||f(y)|dy.\end{aligned}$$

Not edelim ki

$$\begin{aligned}\int_{2^{k+1}B}|b(y)-b_{2B}||f(y)|dy &\lesssim \Big(\int_{2^{k+1}B}|b(y)-b_{2B}|^{p'}\Big)^{1/p'}\|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))}\\ &\lesssim [b]_{\theta}k\Big(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\Big)^{\theta'}(2^kr)^{\frac{n}{p'}}\|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))}.\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B}|M^{\theta}_{\beta,V}((b-b_{2B})f_2)(x)| &\lesssim [b]_\theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(2^k r)^{-\frac{n}{p}+\beta}}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0+1)-\theta'}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))} \\
&\lesssim [b]_\theta \sum_{k=1}^{\infty} k(2^k r)^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))} \\
&\lesssim [b]_\theta \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

$2^k r \le t \le 2^{k+1} r$ olduğundan $k \approx \ln \frac{t}{r}$. Böylece

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B}|M^{\theta}_{\beta,V}((b-b_{2B})f_2)(x)| &\lesssim [b]_\theta \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim [b]_\theta \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \ln\frac{t}{r} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim [b]_\theta \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\|M^{\theta}_{\beta,V}((b-b_{2B})f_2)\|_{L_q(B(x_0,r))} \lesssim [b]_\theta r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t}. \tag{4.21}$$

(4.19), (4.20) ve (4.21) eşitsizliklerinden Teorem 4.15. ispatı tamamlanır. ■

Teorem 4.2. ispatı:

$f \in M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ olduğundan ve (φ_1,φ_2) çifti (4.2) şartını sağladığından, (4.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_{2r}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}} \left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\alpha} \int_{r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}} \left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\alpha} \varphi_2(x_0,r).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Teorem 4.15. den

$$
\begin{aligned}
&\|[b,\mathcal{I}_\beta]f\|_{M^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}} \\
&\lesssim \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x_0,r)^{-1}r^{-n/q}\|[b,\mathcal{I}_\beta]f\|_{L_q(B(x_0,r))} \\
&\lesssim [b]_\theta \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x_0,r)^{-1}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim [b]_\theta\|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}.
\end{aligned}
$$

4.1.3.3. Teorem 4.3. İspatı

Aşağıda verilen ispat aslında (4.16) eşitsizliğinden ifade edilmiştir. Operatörün normunun ifadesi, yani, sıfırlanan uzaydaki sınırlılık Teorem 4.1. den elde edilir.
Yani sadece bunu ispatlamak yeterlidir.

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(f;x,r)=0 \;\Rightarrow\; \lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}(M^{\theta}_{\beta,V}f;x,r)=0 \tag{4.23}$$

ve

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}(f;x,r)=0 \;\Rightarrow\; \lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{n/(n-\beta),\varphi_2}(M^{\theta}_{\beta,V}f;x,r)=0. \tag{4.24}$$

r yeterince küçük seçilirse

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|M^{\theta}_{\beta,V}f\|_{L_q(B(x,r))}<\varepsilon$$

olduğunu göstermek için (4.16) eşitsizliğinin sağ tarafı parçalanır ise:

$$\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|M^{\theta}_{\beta,V}f\|_{L_q(B(x,r))}\le C[I_{\delta_0}(x,r)+J_{\delta_0}(x,r)], \tag{4.25}$$

burada $\delta_0>0$ ($\delta_0>1$ alınabilir) ve

$$I_{\delta_0}(x,r):=\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)}\int_r^{\delta_0}t^{-\frac{n}{q}-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))}dt$$

ve

$$J_{\delta_0}(x,r):=\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)}\int_{\delta_0}^{ß}t^{-\frac{n}{q}-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))}dt$$

ve $r < \delta_0$. $f \in VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere ve herhangi bir $\delta_0 > 0$ seçilirse bu durumda

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{t}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_1(x,t)^{-1}t^{-n/p}\|f\|_{L_p(B(x,t))} < \frac{\varepsilon}{2CC_0},$$

burada C ve C_0, (4.3) ve (4.17) eşitsizliklerindeki sabitlerdir. Bu, $r \in (0,\delta_0)$ deki ilk terimin düzgün bir şekilde ifade edilmesine olanak tanır:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} CI_{\delta_0}(x,r) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < r < \delta_0.$$

İkinci terimin ifadesini artık r'nin yeterince küçük seçilmesiyle yapılabilir. Aslında (4.12) koşulu sayesinde

$$J_{\delta_0}(x,r) \leq c_{\sigma_0}\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_1(x,r)}\|f\|_{VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}},$$

burada c_{σ_0}, (4.14) eşitsizliğindeki sabittir. Böylece, (4.12) eşitsizliğinden r yeterince küçük seçilir ise

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)} \leq \frac{\varepsilon}{2c_{\sigma_0}\|f\|_{VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}}$$

elde edilerek (4.23) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

(4.24) eşitsizliğinin ispatıda (4.23) eşitsizliğinin ispatına benzer şekilde ispatlanır.

4.1.3.4. Teorem 4.4. İspatı

Norm eşitsizliği Teorem 4.2. ifade edildiğinden, burada yalnızca

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{t}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_1(x,t)^{-1}t^{-n/p}\|f\|_{L_p(B(x,t))} = 0\\ \Longrightarrow\ &\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{t}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,t)^{-1}t^{-n/p}\|[b,M^{\theta}_{\beta,V}f]\|_{L_q(B(x,t))} = 0\end{aligned}$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. r yeterince küçük seçilirse

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{t}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,t)^{-1}t^{-n/p}\|[b,M^{\theta}_{\beta,V}f]\|_{L_q(B(x,t))} < \varepsilon,$$

olduğunu göstermek için (4.18) eşitsizliğinden:

$$\varphi_2(x,t)^{-1}t^{-n/p}\|[b,M^{\theta}_{\beta,V}f]\|_{L_q(B(x,t))} \lesssim \frac{[b]_\theta}{\varphi_2(x,r)}\int_r^\infty\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}.$$

$r < \delta_0$ alınırsa burada δ_0 yeterince küçük seçilirerek ve integrasyonu parçalayarak:

$$\Big(1+\frac{t}{\rho(x)}\Big)^{\alpha}\varphi_2(x,t)^{-1}t^{-n/p}\|[b,M^{\theta}_{\beta,V}f]\|_{L_q(B(x,t))} \le C[I_{\delta_0}(x,r)+J_{\delta_0}(x,r)], \quad (4.26)$$

burada

$$I_{\delta_0}(x,r) := \frac{\big(1+\frac{t}{\rho(x)}\big)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)}\int_r^{\delta_0}\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}$$

ve

$$J_{\delta_0}(x,r) := \frac{\big(1+\frac{t}{\rho(x)}\big)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)}\int_{\delta_0}^{\infty}\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{q}}}\frac{dt}{t}.$$

$\delta_0 > 0$ bir sabit olarak seçilirse

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big(1+\frac{t}{\rho(x)}\Big)^{\alpha}\varphi_1(x,t)^{-1}t^{-n/p}\|f\|_{L_p(B(x,t))} < \frac{\varepsilon}{2CC_0}, \quad t \le \delta_0,$$

burada C ve C_0, (4.26) ve (4.4) eşitsizliklerindeki sabitlerdir, $r \in (0,\delta_0)$ deki ilk terimin düzgün bir şekilde ifade edilmesine olanak tanır:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} CI_{\delta_0}(x,r) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ 0 < r < \delta_0.$$

İkinci terim için $1+\ln\frac{t}{r} \le 1+|\ln t|+\ln\frac{1}{r}$ şeklinde yazılırsa

$$J_{\delta_0}(x,r) \le \frac{c_{\delta_0}+\widetilde{c_{\delta_0}}\ \ln\frac{1}{r}}{\varphi_2(x,r)}\|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}},$$

burada c_{δ_0}, (4.6) eşitsizliğindeki $\delta = \delta_0$ sabiti ve $\widetilde{c_{\delta_0}}$ integralde logaritmik faktörün çıkarıldığı benzer bir sabittir. Dolayısıyla, (4.5) eşitsizliğinde r yeterince küçük seçilirse

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} J_{\delta_0}(x,r) < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edlir, böylece ispat tamamlanır.

4.2. Schrödinger Tipli Operatöre Karşılık Gelen Yüksek Mertebeden Riesz Dönüşümlerinin ve Onların Komütatörlerinin Morrey Tipli Uzaylarda Sınırlılığı

Bu kısımda, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}^*$ operatörlerinin, $LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı ve $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger tipli operatöre karşılık gelen sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarda sınırlılıkları ispatlandı.

Ayrıca, b, $BMO_\theta(\rho)$ yeni BMO fonksiyon uzaylarına ait olmak üzere, $[b,\mathcal{R}]$ ve $[b,\mathcal{R}^*]$ komütatör operatörlerinin $LM_{p,\varphi}^{\alpha,V,\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{R}^n)$ ve $VM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında sınırlılıkları gösterildi.

Daha sonra, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$ yüksek mertebeden Riesz dönüşümleri ve onların $[b,\mathcal{R}]$, $[b,\mathcal{R}^*]$ komütatörleri için $LM_{p,\varphi}^{\alpha,V,\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzay, $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzay ve $VM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger tipli operatöre karşılık gelen sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarda elde edilen sonuçlar ispatlandı.

4.2.1. Başlıca Sonuçlar

Bu kısımda elde edilen başlıca sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.16. $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n/2 \le q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$, $\alpha \ge 0$, $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$, q_0, V nin ters Hölder indeksi olsun. $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_{p,loc}^{\alpha,V}$

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x_0,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \le c_0 \varphi_2(x_0,r), \tag{4.27}$$

şartını sağlasın, burada c_0, r'den bağımsızdır.

(i) Eğer $p = 1$ ise bu durumda $\mathcal{R}$ operatörü, $LM_{1,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayından $WLM_{1,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayına sınırlıdır.

Ayrıca,

$$\|\mathcal{R}(f)\|_{WLM_{1,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}} \le C\|f\|_{LM_{1,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

(ii) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda $\mathcal{R}$ operatörü, $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayından $LM_{p,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayına sınırlıdır.

Ayrıca,

$$\|\mathcal{R}(f)\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}} \le C\|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

(iii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda $\mathcal{R}^*$ operatörü, $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayından $LM_{p,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayına sınırlıdır, burada $p_0' = \frac{p_0}{p_0-1}$.

Ayrıca,

$$\|\mathcal{R}^*(f)\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\alpha,V}} \le C\|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

Sonuç 4.17. $n/2 \le q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$, $\alpha \ge 0$, $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$, q_0, V nin ters Hölder indeksi olsun. $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_p^{\alpha,V}$

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \le c_0 \varphi_2(x,r), \tag{4.28}$$

şartını sağlasın, burada c_0, x ve r'den bağımsızdır.

(i) Eğer $p = 1$ ise bu durumda $\mathcal{R}$ operatörü, $M_{1,\varphi_1}^{\alpha,V}$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}^{\alpha,V}$ uzayına sınırlıdır.

(ii) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda $\mathcal{R}$ operatörü, $M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}$ uzayından $M_{p,\varphi_2}^{\alpha,V}$ uzayına sınırlıdır.

(iii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda $\mathcal{R}^*$ operatörü, $M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}$ uzayından $M_{p,\varphi_2}^{\alpha,V}$ uzayına sınırlıdır, burada $p_0' = \frac{p_0}{p_0-1}$.

Teorem 4.18. $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n/2 \le q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$, $\alpha \ge 0$, $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$, $b \in BMO_\theta(\rho)$, q_0, V nin ters Hölder indexi olsun. $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_{p,loc}^{\alpha,V}$

$$\int_r^\infty \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \le c_0 \varphi_2(x_0,r), \tag{4.29}$$

şartını sağlasın, burada c_0, x ve r'den bağımsızdır.

(i) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda $[b,\mathcal{R}]$ komütatör operatörü, $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayından $LM_{p,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca,

$$\|[b,\mathcal{R}](f)\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}} \le C\|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}}.$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

(ii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda $[b,\mathcal{R}^*]$ komütatör operatörü, $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayından $LM_{p,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca,

$$\|[b,\mathcal{R}^*](f)\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}} \le C[b]_\theta \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}},$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır, burada C, f 'den bağımsızdır.

Sonuç 4.19. $n/2 \le q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$, $\alpha \ge 0$, $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$, $b \in BMO_\theta(\rho)$, q_0 , V 'nin ters Hölder indeksi olsun. $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_p^{\alpha,V}$,

$$\int_r^\infty \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \le c_0 \varphi_2(x,r), \tag{4.30}$$

şartını sağlasın, burada c_0 , x ve r 'den bağımsızdır.

(i) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda $[b, \mathcal{R}]$ operatörü, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ uzayından $M^{\alpha,V}_{p,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

(ii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda $[b, \mathcal{R}^*]$ operatörü, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ uzayından $M^{\alpha,V}_{p,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 4.20. $n/2 \leq q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$, $\alpha \geq 0$, $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$, q_0 , V 'nin ters Hölder indeksi olsun. $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega^{\alpha,V}_{p,1}$,

$$c_\delta := \int_\delta^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_1(x,t)\frac{dt}{t} < \infty \tag{4.31}$$

$\forall\delta > 0$ için ve

$$\int_r^\infty \varphi_1(x,t)\frac{dt}{t} \leq C_0\varphi_2(x,r), \tag{4.32}$$

şartlarını sağlarsın, burada C_0 , $x \in \mathbb{R}^n$ 'den bağımsız ve $r > 0$ dır.

(i) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda $\mathcal{R}$ operatörü, $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ uzayından $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

(ii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda $\mathcal{R}^*$ operatörü, $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ uzayından $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 4.21. $n/2 \leq q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$, $\alpha \geq 0$, $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$, $b \in BMO_\theta(\rho)$, q_0 , V 'nin ters Hölder indeksi olsun. $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega^{\alpha,V}_{p,1}$,

$$\int_r^\infty \Big(1 + \ln\frac{t}{r}\Big)\varphi_1(x,t)\frac{dt}{t} \leq c_0\varphi_2(x,r), \tag{4.33}$$

şartını sağlasın, burada c_0 , x ve r 'den bağımsızdır.

$$\lim_{r\to 0} \frac{\ln\frac{1}{r}}{\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_2(x,r)} = 0 \tag{4.34}$$

ve $\forall\delta > 0$ için

$$c_\delta := \int_\delta^\infty \Big(1 + |\ln t|\Big) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_1(x,t)\frac{dt}{t} < \infty. \tag{4.35}$$

.

(i) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda $[b, \mathcal{R}]$ operatörü, $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ uzayından $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

(ii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda $[b, \mathcal{R}^*]$ operatörü, $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ uzayından $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

4.2.2. Başlıca Sonuçların İspatında Kullanılan Yardımcı Teoremler

Yukarıdaki teoremlerin ispatlarında kullanılan kritik fonksiyonlar ile ilgili bazı önemli sonuçları ispatsız olarak aşağıda verildi.

Lemma 4.22.

$$\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)} V(y)dy \leq C\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{l_0}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $l_0 > 0$ sabitleri vardır.

Lemma 4.23. $V \in RH_{n/2}$ olsun. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$C^{-1}\rho(x)\Big(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\Big)^{-k_0} \leq \rho(y) \leq C\rho(x)\Big(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\Big)^{\frac{k_0}{1+k_0}} \tag{4.36}$$

olacak şekilde ρ fonksiyonu için karşılık gelen C ve $k_0 \geq 1$ mevcuttur [45].

Lemma 4.24. $x \in B(x_0, r)$ olmak üzere $k \in N$ için

$$\frac{1}{\Big(1+\frac{2^k r}{\rho(x)}\Big)^N} \lesssim \frac{1}{\Big(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\Big)^{N/(k_0+1)}}$$

elde edilir [4].

$BMO_\theta(\rho)$; yeni BMO uzayı ile ilgili bazı eşitsizlikler aşağıda verildi:

Lemma 4.25. $1 \leq s < \infty$ olsun. $b \in BMO_\theta(\rho)$ ise bu durumda $\theta' = (k_0+1)\theta$ ve k_0 (4.36) eşitsizliğindeki bir sabit, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olmak üzere $\forall B = B(x,r)$ için,

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |b(y)-b_B|^s dy\Big)^{1/s} \leq [b]_\theta\Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^{\theta'}.$$

Lemma 4.26. $1 \leq s < \infty$, $b \in BMO_\theta(\rho)$, ve $B = B(x,r)$ olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için, θ' Lemma 4.25. deki gibi olmak üzere

$$\Big(\frac{1}{|2^k B|}\int_{2^k B} |b(y)-b_B|^s dy\Big)^{1/s} \leq [b]_\theta k\Big(1+\frac{2^k r}{\rho(x)}\Big)^{\theta'}$$

[8].

$\mathcal{R}^*$ nin çekirdeği K^* olsun. K^* çekirdeği üzerindeki temel sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Lemma 4.27. $V \in RH_q$ olsun,

(i) Eğer $n/2 \leq q < n$ ise bu durumda her N için,

$$|K^*(x,z)| \leq \frac{C_N\left(1+\frac{|x-z|}{\rho(x)}\right)^{-N}}{|x-z|^{n-2}}\left(\int_{B(z,|x-z|/4)}\frac{V^2(u)}{|u-z|^{n-2}}du+\frac{1}{|x-z|^2}\right) \tag{4.37}$$

olacak şekilde bir $C_N > 0$ sabiti vardır.

(ii) $q \geq n$ olduğunda, V içeren terim yukarıdaki formülden çıkarılabilir [8].

Aşağıdaki sonuçlar, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}^*$ operatörlerinin L_p uzayındaki sınırlılıkları ile ilgilidir.

Lemma 4.28. $n/2 \leq q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$, $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$. olsun.

(i) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda $\mathcal{R}$ operatörü, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır. Ayrıca,

$$\|\mathcal{R}(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

(ii) Eğer $p = 1$ ise bu durumda $\mathcal{R}$ operatörü, $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca,

$$\|\mathcal{R}(f)\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

(iii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda $\mathcal{R}^*$ operatörü, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır. Ayrıca,

$$\|\mathcal{R}^*(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır [34].

Aşağıdaki sonuçlar, $[b,\mathcal{R}]$ ve $[b,\mathcal{R}^*]$ operatörlerinin L_p uzayındaki sınırlılıkları ile ilgilidir.

Lemma 4.29. $n/2 \leq q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$, $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$ ve $b \in BMO_\theta(\rho)$ olsun.

(i) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda $[b,\mathcal{R}]$ komütatör operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır. Ayrıca,

$$\|[b,\mathcal{R}](f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

(ii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda $[b, \mathcal{R}^*]$ komütatör operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır. Ayrıca,

$$\|[b, \mathcal{R}^*](f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır [35].

Son olarak essential supremum ve essential infimum arasındaki ilişkiyi hatırlayalım:

Lemma 4.30. f reel değerli negatif olmayan ve E de ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left(\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x)\right)^{-1} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} \frac{1}{f(x)},$$

[49].

4.2.3. Başlıca Sonuçların İspatı

4.2.3.1. Teorem 4.17. İspatı

Teorem 4.17. ispatlamak için, aşağıdaki lokal ifadeyi verelim.

Teorem 4.31. $n/2 \leq q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$ ve $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$ olsun.

(i) Eğer $p = 1$ ise bu durumda herhangi bir $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ için,

$$\|\mathcal{R}(f)\|_{WL_1(B(x_0,r))} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_1(B(x_0,t))}}{t^n} \frac{dt}{t} \tag{4.38}$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda herhangi bir $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ için,

$$\|\mathcal{R}(f)\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \tag{4.39}$$

eşitsizliği sağlanır.

(iii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda herhangi bir $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ için,

$$\|\mathcal{R}^*(f)\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \tag{4.40}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $1 < p < p_0$ ve $p_0' < p < \infty$ durumlarında ispat benzer olduğu için sadece $p_0' < p < \infty$ durumunda ispatı vermek yeterli olacaktır.

Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için, $B = B(x_0, r)$ kümesi ve herhangi bir $\lambda > 0$ için $\lambda B = B(x_0, \lambda r)$ olsun . f fonksiyonunu $f = f_1 + f_2$ gibi yazabiliriz, burada $B(x_0, 2r)$ karakterisyon fonksiyonu, $\chi_{B(x_0,2r)}$ ve $f_1(y) = f(y)\chi_{B(x_0,2r)}(y)$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu durumda

$$\|\mathcal{R}^*(f)\|_{L_p(B(x_0,r))} \leq \|\mathcal{R}^*(f_1)\|_{L_p(B(x_0,r))} + \|\mathcal{R}^*(f_2)\|_{L_p(B(x_0,r))}.$$

$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında $p_0' < p < \infty$ için $\mathcal{R}^*$ operatörü sınırlı olduğundan,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}^*(f_1)\|_{L_p(B(x_0,r))} &\lesssim \|f\|_{L_p(B(x_0,2r))} \\
&\lesssim r^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2r))} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\
&\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

elde edilir.

$\|\mathcal{R}^*(f_2)\|_{L_p(B(x_0,2r))}$ ifadesi için diğer yandan $x \in B$, $y \in (2B)^c$ olmak üzere $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ gerçeklenir. $x \in B(x_0, r)$ için Lemma 4.28. den dolayı

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}^*(f_2)(x)| &\leq \int_{(2B)^c} |K^*(x,y)f(y)|dy \\
&\lesssim \int_{(2B)^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \\
&+ \int_{(2B)^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \int_{B(y,|x-y|/4)} \frac{V(z)}{|z-y|^{n-1}} dz dy \\
&\lesssim \int_{(2B)^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x_0-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy \\
&+ \int_{(2B)^c} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x_0-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^{n-1}} dy \int_{B(y,|x_0-y|/4)} \frac{V(z)}{|z-y|^{n-1}} dz dy \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliği ve Lemma 4.24. den dolayı

$$
\begin{aligned}
I_1 &\lesssim \frac{1}{\left(1+\frac{2r}{\rho(x)}\right)^N} \int_{(2B)^c} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy \\
&\lesssim \frac{1}{\left(1+\frac{2r}{\rho(x)}\right)^N} \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k+1}r)^{-n} \int_{2^{k+1}B} |f(y)|dy \\
&\lesssim \frac{1}{\left(1+\frac{2r}{\rho(x)}\right)^N} \sum_{k=1}^{\infty} \|f\|_{L_p(2^{k+1}B)} (2^{k+1}r)^{-1-\frac{n}{p}} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} dt \\
&\lesssim \frac{1}{\left(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0+1)}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \frac{1}{\left(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0+1)}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

elde edilir.

I_2 için, Hölder eşitsizliği, Lemma 4.22. ve Lemma 4.24. den dolayı

$$
\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k+1}r)^{n-1}} \frac{1}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x)}\right)^N} \int_{2^{k+1}B} |f(y)|dy \int_{B(x_0,2^{k+1}r)} \frac{V(z)}{|z-y|^{n-2}} dz \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k+1}r)^{n-1}} \frac{1}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0+1)}} \int_{2^{k+1}B} |f(y)| \mathcal{I}_2(V_{\chi_{B(x_0,2^{k+1}r)}})(y)dy \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k+1}r)^{n-1}} \frac{1}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0+1)}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))} \|\mathcal{I}_2(V_{\chi_{B(x_0,2^{k+1}r)}})\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$p_0' < p < \infty$, $1/p_0 = 2/s - 2/n$ olmasından dolayı, $1/p' = 2/s - 2/n$ olacak şekilde uygun bir s sayısı seçilebilir. Hatırlatalım ki, $\mathcal{I}_2$ operatörü $L_{s/2}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ve $V \in RH_s$ olduğundan Lemma 4.22. den dolayı

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{I}_2(V_{\chi_{B(x_0,2^{k+1}r)}})\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|V^2_{\chi_{B(x_0,2^{k+1}r)}}\|_{L_{s/2}(\mathbb{R}^n)} \\
&= |B(x_0,2^{k+1}r)|^{\frac{2}{s}} \left(\frac{1}{|B(x_0,2^{k+1}r)|} \int_{B(x_0,2^{k+1})} V^s(z)dz\right)^{2/s} \\
&\lesssim |B(x_0,2^{k+1}r)|^{\frac{2}{s}-\frac{4}{n}} \left(\frac{1}{(2^{k+1}r)^{n-2}} \int_{B(x_0,2^{k+1})} V(z)dz\right)^2 \\
&\lesssim (2^{k+1}r)^{\frac{n}{p'}-1} \left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{2l_0}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$I_2 \lesssim \sum_{k=1}^{\infty}(2^{k+1}r)^{-\frac{n}{p}} \frac{1}{\big(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\big)^{(N/(k_0+1)-l_0)}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))}$$

$$\lesssim \frac{1}{\big(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\big)^{(N/(k_0+1)-2l_0)}} \sum_{k=1}^{\infty}(2^{k+1}r)^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))}$$

$$\lesssim \frac{1}{\big(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\big)^{(N/(k_0+1)-2l_0)}} \int\limits_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}.$$

Böylece $1/p' = 2/s - 2/n$ ve $s < n$.

I_1 ve I_2 için elde edilen sonuçları birleştirirsek

$$\sup_{x\in B(x_0,r)} |\mathcal{R}^*(f_2)(x)| \lesssim \frac{1}{\big(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\big)^{(N/(k_0+1)-2l_0)}} \int\limits_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \tag{4.43}$$

elde edilir.

$N \geq 2l_0(k_0+1)$ alınırsa, bu durumda $p_0 < p < \infty$ için

$$\|\mathcal{R}^*(f_2)\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}$$

elde edilir.

Böylece Teorem 4.31. ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.17. ispatı:

Lemma 4.30. den,

$$\frac{1}{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}} = \operatorname*{ess\,sup}_{t<s<\infty} \frac{1}{\varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}}$$

elde edilir.

Gerçekten $\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}$, t nin azalmayan bir fonksiyonu ve $f \in M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ olmasından dolayı

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}} \\
&\lesssim \operatorname*{ess\,sup}_{t<s<\infty}\frac{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{\varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}} \\
&\lesssim \sup_{0<s<\infty}\frac{\left(1+\frac{s}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(x_0,s))}}{\varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi_1}}.
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

$\alpha \geq 0$ olduğundan ve (φ_1,φ_2) çifti (4.28) şartlarını sağladığından dolayı

$$
\begin{aligned}
&\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t} \\
&= \int_{2r}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi_1}}\int_{r}^{\infty}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\alpha}\int_{r}^{\infty}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(x_0,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\alpha}\varphi_2(x_0,r)
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

elde edilir.

Teorem 4.31. den dolayı

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}^*(f)\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi_2}} \\
&\lesssim \sup_{r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x_0,r)^{-1}r^{-n/p}\|\mathcal{R}^*(f)\|_{L_p(B(x_0,r))} \\
&\lesssim \sup_{r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x_0,r)^{-1}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V,\{x_0\}}_{p,\varphi_1}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

4.2.3.2. Teorem 4.19. İspatı

Teorem 4.17. ispatında olduğu gibi aşağıdaki sonucu ispatlamak yeterli olacaktır.

Teorem 4.32. $n/2 \leq q < n$ olmak üzere $V \in RH_q$, $\alpha \geq 0$, $1/p_0 = 2/q_0 - 2/n$ ve $b \in BMO_\theta(\rho)$ olsun.

(i) Eğer $1 < p < p_0$ ise bu durumda herhangi bir $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ için

$$\|[b, \mathcal{R}(f)]\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim [b]_\theta \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1 + \ln \tfrac{t}{r}\Big) \tfrac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \tfrac{dt}{t} \tag{4.46}$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Eğer $p_0' < p < \infty$ ise bu durumda herhangi bir $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ için

$$\|[b, \mathcal{R}^*(f)]\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim [b]_\theta \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1 + \ln \tfrac{t}{r}\Big) \tfrac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \tfrac{dt}{t} \tag{4.47}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $1 < p < p_0$ ve $p_0' < p < \infty$ durumlarında ispat benzer olduğu için sadece $p_0' < p < \infty$ durumunda ispatı vermek yeterli olacaktır.

f fonksiyonu $f = f_1 + f_2$ gibi yazılabilir, burada $f_1(y) = f(y)\chi_{B(x_0,2r)(y)}$. Bu durumda

$$\|[b, \mathcal{R}^*](f)\|_{L_p(B(x_0,r))} \leq \|[b, \mathcal{R}^*](f_1)\|_{L_p(B(x_0,r))} + \|[b, \mathcal{R}^*](f_2)\|_{L_p(B(x_0,r))}.$$

$L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında $[b, \mathcal{R}^*]$ operatörünün sınırlığından, $p_0' < p < \infty$ ve (4.41) eşitsizliğine benzer şekilde

$$\begin{aligned} \|[b, \mathcal{R}^*](f_1)\|_{L_p(B(x_0,r))} &\lesssim [b]_\theta \|f\|_{L_p(B(x_0,2r))} \\ &\lesssim [b]_\theta r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \end{aligned} \tag{4.48}$$

gerçekleşir. Şimdi de $\|[b, \mathcal{R}^*](f_2)\|_{L_p(B(x_0,r))}$ normu ile ilgili olarak verilen herhangi bir $x \in B(x_0, r)$ için

$$|[b, \mathcal{R}^*](f_2)(x)| \leq |b(x) - b_{2B}| \, |\mathcal{R}^*(f_2)(x)| + |\mathcal{R}^*((b - b_{2B})f_2)(x)|$$

elde edilir. (4.43) eşitsizliğinden

$$\sup_{x \in B(x_0,r)} |\mathcal{R}^*(f_2)(x)| \lesssim \frac{1}{\Big(1 + \frac{2r}{\rho(x_0)}\Big)^{(N/(k_0+1) - l_0)}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}.$$

Lemma 4.25. den,

$$\|b-b_{2B}\|_{L_p(B(x_0,r))}\lesssim [b]_\theta\Big(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\Big)^{\theta}.$$

Daha sonra Lemma 4.24. ve $N\geq (k_0+1)\theta$ alınarak

$$\begin{aligned}
&\||b(x)-b_{2B}|\mathcal{R}^*(f_2)\|_{L_p(B(x_0,r))}\\
&\lesssim [b]_\theta r^{\frac{n}{p}}\Big(1+\frac{2r}{\rho(x_0)}\Big)^{\theta-N/(k_0+1)+l_0}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t}\\
&\lesssim [b]_\theta r^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^{\infty}\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t}
\end{aligned}\tag{4.49}$$

elde edilir. Son olarak, $\|\mathcal{R}^*((b-b_{2B})f_2)\|_{L_p(B(x_0,r))}$ normu için (4.37) eşitsizliğinden, Lemma 4.23. ve Lemma (4.24.) den

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in B(x_0,r)}|\mathcal{R}^*((b-b_{2B})f_2)(x)|\\
&\leq \int_{(2B)^c}|K^*(x,y)(b(y)-b_{2B})f(y)|dy\\
&\lesssim \int_{(2B)^c}\frac{|b(y)-b_{2B}|}{\Big(1+\frac{|x_0-y|}{\rho(x)}\Big)^N}\frac{f(y)}{|x_0-y|^n}dy\\
&+\int_{(2B)^c}\frac{|b(y)-b_{2B}|}{\Big(1+\frac{|x_0-y|}{\rho(x)}\Big)^N}\frac{f(y)}{|x_0-y|^{n-2}}\int_{B(y,|x_0-y|/4)}\frac{V^2(z)}{|z-y|^{n-2}}dzdy\\
&=J_1+J_2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Hatırlatalım ki,

$$\begin{aligned}
&\int_{2^{k+1}B}|b(y)-b_{2B}||f(y)|dy\\
&\lesssim \int_{2^{k+1}B}|b(y)-b_{2^{k+1}B}||f(y)|dy+|b_{2^{k+1}B}-b_{2B}|\int_{2^{k+1}B}|f(y)|dy\\
&\lesssim [b]_\theta k\Big(1+\frac{2^kr}{\rho(x_0)}\Big)^{\theta'}(2^kr)^{\frac{n}{p'}}\|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))}.
\end{aligned}$$

Bundan dolayı, Lemma 4.24. den

$$
\begin{aligned}
J_1 &\lesssim [b]_\theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0+1)-\theta'}} (2^k r)^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))} \\
&\lesssim [b]_\theta \sum_{k=1}^{\infty} k (2^k r)^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))} \\
&\lesssim [b]_\theta \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}
$$

$2^k r \le t \le 2^{k+1} r$ olduğundan $k \approx \ln \frac{t}{r}$. Böylece

$$
\begin{aligned}
J_1 &\lesssim [b]_\theta \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \ln \frac{t}{r} \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim [b]_\theta \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln \frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}
$$

$p > \tilde{p}$ ve $1/\tilde{p}' = 2/\tilde{s} - 2/n$ olacak şekilde $\tilde{p}$ ve $\tilde{s}$ seçilirse bu durumda

$$
\begin{aligned}
J_2 &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k+1}r)^{n-1}} \frac{1}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0+1)}} \\
&\times \int_{2^{k+1}B} |b(y)-b_{2B}||f(y)| \mathcal{I}_2(V^2_{\chi_{B(x_0,2^{k+1})}})(y)dy \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k+1}r)^{n-1}} \frac{1}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0+1)}} \\
&\times \|(b-b_{2B})f\|_{L_{\tilde{p}}(B(x_0,2^{k+1}r))} \|\mathcal{I}_2(V^2_{\chi_{B(x_0,2^{k+1})}})\|_{L_{\tilde{p}'}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{I}_2$ operatörü $L_{\tilde{s}/2}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{\tilde{p}'}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ve $V \in RH_{\tilde{s}}$ olduğundan

$$
\|\mathcal{I}_2(V^2_{\chi_{B(x_0,2^{k+1})}})\|_{L_{\tilde{p}'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim (2^{k+1}r)^{\frac{d}{\tilde{p}'}-1} \left(1+\frac{2^{k+1}r}{\rho(x_0)}\right)^{2l_0}
$$

elde edilir. $v = \frac{p\tilde{p}}{p-\tilde{p}}$ olsun. Bu durumda

$$
\|(b-b_{2B})f\|_{L_{\tilde{p}}(B(x_0,2^{k+1}r))} \lesssim \|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))} \|(b-b_{2B})f\|_{L_v(B(x_0,2^{k+1}r))}.
$$

Fakat

$$
\|(b-b_{2B})\|_{L_v(B(x_0,2^{k+1}r))} \lesssim [b]_\theta k |2^{k+1}B|^{\frac{1}{\tilde{p}}-\frac{1}{p}} \left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta'}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
J_2 &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[b]_\theta k}{\left(1+\frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{N/(k_0-1)-l_0-\theta'}} (2^{k+1}r)^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0,2^{k+1}r))} \\
&\lesssim [b]_\theta \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}
$$

Böylece,

$$
\|\mathcal{R}^*((b-b_{2B})f_2)\|_{L_2(B(x_0,r))} \lesssim [b]_\theta r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}. \tag{4.50}
$$

(4.48), (4.49) ve (4.50) eşitsizliklerini birleştirirsek Teorem 4.32. ispatı tamamlanır.

Teorem 4.19. İspatı:

$f \in LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}$ olduğundan ve (φ_1,φ_2) çifti (4.29) şartını sağladığından, (4.45) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
&\int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_{2r}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty} \varphi_1(x_0,s) s^{\frac{n}{p}}} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty} \varphi_1(x_0,s) s^{\frac{n}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty} \varphi_1(x_0,s) s^{\frac{n}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}} \left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\alpha} \int_{r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty} \varphi_1(x_0,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}} \left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{-\alpha} \varphi_2(x_0,r)
\end{aligned} \tag{4.51}
$$

gerçekleşir. Teorem 4.32. den dolayı

$$
\begin{aligned}
&\|[b,\mathcal{R}^*](f)\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\alpha,V,\{x_0\}}} \\
&\lesssim \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} \varphi_2(x_0,r)^{-1} r^{-n/p} \|[b,\mathcal{R}^*](f)\|_{L_p(B(x_0,r))} \\
&\lesssim [b]_\theta \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(1+\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\alpha} \varphi_2(x_0,r)^{-1} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim [b]_\theta \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V,\{x_0\}}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

4.2.3.3. Teorem 4.20. İspatı

Teoremin ifadesi, (4.40) eşitsizliğinden ortaya çıkmıştır. Operatörün normunun ifadesi, yani sıfırlanan olmayan uzaydaki sınırlılık, Teorem 4.17.'den dolayı olup sadece bunu ispatlamak yeterli olacaktır.

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(f;x,r)=0,\ p_0'<p<\infty \Rightarrow \lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi_2}(\mathcal{R}^*(f);x,r)=0 \quad (4.52)$$

ve

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(f;x,r)=0,\ 1<p<p_0 \ \Rightarrow\ \lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi_2}(\mathcal{R}(f);x,r)=0. \quad (4.53)$$

r için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|\mathcal{R}^*(f)\|_{L_p(B(x,r))}<\varepsilon$$

olduğunu göstermek için (4.40) eşitsizliğinin sağ tarafını ayırırsak:

$$\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|\mathcal{R}^*(f)\|_{L_p(B(x,r))}\le C[I_{\delta_0}(x,r)+J_{\delta_0}(x,r)], \quad (4.54)$$

burada $\delta_0>0$ ($\delta_0>1$ de alınabilir) ve

$$I_{\delta_0}(x,r):=\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)}\int_r^{\delta_0}t^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))}dt$$

ve

$$J_{\delta_0}(x,r):=\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)}\int_{\delta_0}^{\infty}t^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))}dt$$

ve $r<\delta_0$ olarak da kabul edilebilir. $f\in VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olmasından ve herhangi bir seçilen $\delta_0>0$ sabiti için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_1(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|f\|_{L_p(B(x,r))}<\frac{\varepsilon}{2CC_0},$$

burada C ve C_0 sabitleri (4.32) ve (4.54) eşitsizliklerindeki sabitlerdir. Ayrıca, burada $r\in(0,\delta_0)$ de ilk terimin tek olması:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}CI_{\delta_0}(x,r)<\frac{\varepsilon}{2},\ \ 0<r<\delta_0.$$

r nin yeterince küçük seçilmesi ile ikinci terim ifade edilir. Gerçekten de (2.8) şartlarının sağlanması ile

$$J_{\delta_0}(x,r) \le c_{\sigma_0} \frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_1(x,r)} \|f\|_{VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}},$$

elde edilir, burada c_{σ_0}, (2.10) eşitsizliğindeki sabittir. Bu durumda, (2.8) eşitsizliğinde r yeterince küçük seçilirse

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)} \le \frac{\varepsilon}{2c_{\sigma_0}\|f\|_{VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}},$$

elde edilir ki bu da (4.52) eşitsizliğinin ispatlar.

(4.53) eşitsizliğinin ispatı, (4.52) eşitsizliğinin ispatına benzer şekildedir.

4.2.3.4. Teorem 4.21. İspatı

Norm eşitsizliği Teorem 4.19. tarafından sağlanmış olduğundan, yalnızca

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_1(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|f\|_{L_p(B(x,r))}=0 \\ \Longrightarrow\ &\lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|[b,\mathcal{R}^*(f)]\|_{L_p(B(x,r))}=0 \end{aligned} \tag{4.55}$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bunu doğrulamak için, r yeterince küçük seçilmek üzere

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|[b,\mathcal{R}^*(f)]\|_{L_p(B(x,r))}<\varepsilon$$

(4.47) eşitsizliğini kullanırsak:

$$\varphi_2(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|[b,\mathcal{R}^*(f)]\|_{L_p(B(x,r))} \lesssim \frac{[b]_\theta}{\varphi_2(x,r)}\int_r^\infty \left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t}.$$

$r<\delta_0$ alınarak burada δ_0 yeterince küçük seçilerek ve integrasyonun ayrıştırılmasından:

$$\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,r)^{-1}r^{-n/p}\|[b,\mathcal{R}^*(f)]\|_{L_p(B(x,r))} \le C[I_{\delta_0}(x,r)+J_{\delta_0}(x,r)] \tag{4.56}$$

elde edilir, burada

$$I_{\delta_0}(x,r) := \frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)}\int_r^{\delta_0}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t}$$

ve

$$J_{\delta_0}(x,r) := \frac{\left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha}}{\varphi_2(x,r)} \int_{\delta_0}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t}.$$

Seçilen bir $\delta_0 > 0$ sabiti için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1+\frac{r}{\rho(x)}\right)^{\alpha} \varphi_1(x,r)^{-1} r^{-n/p} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \frac{\varepsilon}{2CC_0}, \quad r \le \delta_0$$

elde edilir, burada C ve C_0 sabitleri (4.56) ve (4.33) eşitsizliklerindeki sabitlerdir, böylece ilk terimin ifadesindeki $r \in (0,\delta_0)$ tekliğinden:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} CI_{\delta_0}(x,r) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ 0 < r < \delta_0$$

elde edilir.

İkinci terim için,

$$1+\ln\frac{t}{r} \le 1 + |\ln\, t| + \ln\,\frac{1}{r},$$

yazılırsa

$$J_{\delta_0}(x,r) \le \frac{c_{\delta_0} + \widetilde{c_{\delta_0}}\, \ln\frac{1}{r}}{\varphi_2(x,r)} \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}$$

elde edilir, burada c_{δ_0} sabiti, $\delta = \delta_0$ olmak üzere (4.35) eşitsizliğindeki sabittir ve $\widetilde{c_{\delta_0}}$ sabiti integraldeki logaritmik faktörden elde edilen sabittir. Bu durumda (4.34) eşitsizliğinde yeterince küçük seçilen r için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} J_{\delta_0}(x,r) < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir, böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Şimdiye kadar maksimal operatör, kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörü gibi klasik operatörlerinin sınırlılık teorisi Reel analizde detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Bu sonuçlar, kısmi diferansiyel denklemler teorisinde verimli bir şekilde uygulanabilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler teorisinde son yıllarda genel Morrey tipli uzaylarda çözüm için ön ifadenin alınmasının araştırılması önemli bir rol oynamaktadır. XXI. yüzyılın başında bu alanda önemli gelişmeler oldu. Birçok matematikçi tarafından Morrey uzayları çeşitli bakış açısıyla incelendi. Morrey uzaylarının ayrıntılı olarak incelenmesi, lokal ve global Morrey uzaylarının dikkate alınmasına yol açtı. Ayrıca, çeşitli Morrey uzayları bilimsel çalışmalar sürecinde tanımlanmıştır. İlk olarak; birbirlerinden bağımsız olarak Guliyev, Mizuhara ve Nakai [22, 36, 38] $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanımını vermişler ve Harmonik Analizin klasik integral operatörlerinin $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında sınırlılığını araştırmışlardır (ayrıca, bkz. [23, 24, 44]). 1994 yılında Guliyev [22] tarafından homojen Lie gruplarında Riesz potansiyelinin ve singüler integral operatörünün $M_{p,\varphi(\cdot)}^{\{0\}}(\mathcal{G})$ lokal Morrey uzaylarında sınırlılığını incelemiştir.

Guliyev 1994 yılında doktora tezinde [22, syf. 75–76], (bkz. [23, syf. 123]), $M_{pq,\varphi(\cdot)}^{\{0\}}$ lokal Morrey-tipli uzayların tanımını

$$\|f\|_{M_{pq,\varphi(\cdot)}^{\{0\}}} = \big\|\varphi(r)\|\chi_{B(0,r)}f\|_{L_p}\big\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} < \infty,$$

şeklinde vermiştir. Burada φ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyondur. Ayrıca Guliyev tarafından [22, 23] $M_{pq,\varphi(\cdot)}^{\{0\}}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey-tipli uzaylarda singüler ve potansiyel operatörlerinin sınırlılığı için yeter şartları elde etmiştir. Özellikle, Guliyev ve Burenkov [10], Morrey tipli genel uzaylarda klasik operatörlerin incelenmesi ile ilgili harmonik analizde önemli yeni bir metod ile konuya farklı bir bakış açısı geliştirmişlerdir. Geliştirilen yöntemlerin önemi, Schrödinger operatörüne karşılık gelen diferansiyel denklemlerin çözümleri için düzenlilik teorisine müteakip uygulama ile Schrödinger operatörüne karşılık gelen singüler tipli integral operatörler sınıflarının sınırlılığı için gerekli ve yeterli şartların elde edilmesi gerçeğidir. Sonuç olarak, belirli bir sayısal parametreler aralığı için yeterli şartlar bulunmaktadır.

Schrödinger operatörüne karşılık gelen klasik operatörlerinin (maksimal operatör, kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyeli, gerçek singüler integraller) sınırlılığı bir genelleştirilmiş lokal Morrey tipli uzaydan diğerine sağlayan fonksiyonel parametrelerden elde edilir. Dolayısıyla bu tür sonuçlar, çağdaş reel analizin geliştirilmesi ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen kısmi diferansiyel denklemlerin uygulamaları için çok önemlidir.

Schrödinger operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümü ve onların komütatör operatörlerinin küme üzerinde L_p Lebesgue normunu Guliyev lokal eşitsizliği ile lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylar üzerindeki sınırlılıkları elde edilmiştir. Schrödinger operatörüne karşılık gelen genelleştirilmiş Morrey uzayları ve sıfırlanan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında $b \in BMO_\theta(\rho)$ olmak üzere $M^{\theta}_{\beta,V}$ kesirli maksimal operatörünün ve onun komütatörlerinin sınırlılığı araştırılmıştır. Guliyev metodu ile genelleştirilmiş Morrey uzaylarının ve lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanım ve temel özellikleri verilerek, bu uzaylarda Schrödinger operatörüne karşılık gelen yüksek mertebeden Riesz dönüşümlerinin ve komütatör operatörlerinin sınırlılığı için yeter şartlar incelenmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Adams, D. R. (1975). A note on Riesz potentials, *Duke Math. J.,* 42, 765-778.

[2] Akbulut, A., Guliyev, V.S. and Mustafayev, R. (2012). On Boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces, *Mathematica Bohemica,* 137 1, 27-43.

[3] Akbulut, A. and Kuzu, O. (2014). Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces, *Azerb. J. Math.,* 4(1), 40-54.

[4] Akbulut, A., Guliyev, V.S. and Omarova, M.N. (2017). Marcinkiewicz integrals associated with Schrödinger operators and their commutators on vanishing generalized Morrey spaces, *Bound. Value Probl.,* 121.

[5] Akbulut, A., Celik, S. and Omarova, M. N. (2024). Fractional maximal operator associated with Schrodinger operator and its commutators on vanishing generalized Morrey spaces, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.,* 44(1), 3-19.

[6] Alp, M, and Musayev, B. (2000). Fonksiyonel Analiz, *Balcı Yayınları, Ankara.*

[7] Alvarez J.and Lakey J. (2000). Guzman-Partida, M. Spaces of bounded λ-central mean oscillation Morrey spaces and λ-central Carleson measures, *Collect. Math.,* 51(1), 1-47.

[8] Bongioanni, B., Harboure, E. and Salinas, O. (2011). Commutators of Riesz transforms related to Schödinger operators, *J. Fourier Anal. Appl.,* 17(1), 115-134.

[9] Bui, T. (2014). Weighted estimates for commutators of some singular integrals related to Schrödinger operators, *Bull. Sci. Math.,* 138(2), 270-292.

[10] Burenkov, V.I. and Guliyev, V.S. (2009). Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces, *Potential Anal.,* 30, 3, 211-249.

[11] Calderon, A. P. (1965). Commutators of singular integral operators, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* 53, 1092-1099.

[12] Calderon, A. P. (1977). Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* 74(4), 1324-1327.

[13] Chiarenza, F. and Frasca, M. (1987). Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, *Rend. Math. Appl.,* 7(7), 273-279.

[14] Chiarenza, F., Frasca, M. and Longo, P. (1991). Interior $W^{2,p}$-estimates for nondivergence elliptic eqnarrays with discontinuous coefficients, *Ricerche Mat.,* 40, 149-168.

[15] Chiarenza, F., Frasca, M. and Longo, P. (1993). $W^{2,p}$-solvability of Dirichlet problem for non divergence elliptic eqnarrays with VMO coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 336, 841-853.

[16] Coifman, R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976). Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.,* 103(2), 611-635.

[17] Duoandikoetxea, J. and Rubio de Fancia, J. L. (1986). Maximal functions and singular integral operators via Fourier transform estimates, *Invent. Math.,* 84, 541-561.

[18] Duoandikoetxea, J. (2000). Fourier Analysis, *Amer. Math. Soc., Providence, Rhode. Island,* 29.

[19] Fazio, G.Di. and Ragusa, M.A. (1991). Commutators and Morrey spaces, *Boll.U.M.I.,* 7(5-A), 323-332.

[20] Fazio, G.Di. and Ragusa, M.A. (1993). Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to non divergence form eqnarrays with discontinuous coefficients, *J. Funct. Anal.,* 112, 241-256.

[21] Grafakos, L. (2004). Classical and modern Fourier analysis, *Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.*

[22] Guliyev, V.S. (1994). Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in $\mathbb{R}^n$, *Doctoral degree dissertion, Mat. Inst. Steklov, Moscow(Russian),* 329pp.

[23] Guliyev, V.S. (1999). Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups. Some applications, *Baku, Elm,* 332 p.

[24] Guliyev, V.S. (2009). Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces, *J. Inequal. Appl.,*Art. ID 503948, 20pp.

[25] Guliyev, V.S., Aliyev, S.S. and Karaman, T. (2011). Boundedness of a class of sublinear operators and their commutators on generalized Morrey spaces, *Abstract and Applied Analysis,* Article ID 356041, 18 pp.

[26] Guliyev, V.S., Aliyev, S.S., Karaman, T. and Shukurov, P.S. (2011). Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey spaces, *Integral. Equ. Oper. Theory,* 71(3), 327-355.

[27] Guliyev, V.S.(2012). Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators, *Eurasian Math. J.,* 3(3), 33-61.

[28] Guliyev, V.S. (2013). Local generalized Morrey spaces and singular integrals with rough kernel, *Azerb. J. Math.,* 3(2), 79-94.

[29] Guliyev, V.S. (2014). Function spaces and integral operators associated with Schrödinger operators: an overview, *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.,* 40, 178-202.

[30] Guliyev, V.S., Guliyev R.V. and Omarova, M.N. (2017). Riesz transforms associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces, *Appl. Comput. Math.,* 16(3), 1-21.

[31] Hardy, G. H. and Littlewood, L. E. (1930). A maximal theorem with functio theoretic applications, *Acta Math.,* 54, 81-116.

[32] John, F. and Nirenberg, L. (1961). On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.,* 14, 415-426.

[33] Janson, S. (1978). Mean oscillation and commutators of singular integral operators, *Ark. Mat.,* 16, 263-270.

[34] Liu Y. and Dong, J.F. (2010). Some estimates of higher order Riesz transform related to Schrödinger type operators, *Potential Anal.,* 32, 41-55.

[35] Liu, Y., Zhang, L., Sheng, J.L. and Wang, J.L. (2016). Some estimates for commutators of Riesz transform associated with Schrödinger operators, *Czechoslovak Math. J.,* 66, 169-191.

[36] Mizuhara, T. (1991). Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, *Harmonik analysis (Sendai, 1990), ICM-90 Satellite Conference Proceedings, Springer-Verlag, Tokyo,* 183-189.

[37] Morrey, C. (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential eqnarrays, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 43, 126-166.

[38] Nakai, E. (1994). Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.,* 166, 95-103.

[39] Pérez, C. (1995). Endpoint estimates for commutators of sinfular integral operators, *J. Funct. Anal.,* 128, 163-185.

[40] Peetre, J. (1969). On the theorey of $L_{p,\lambda}$ spaces, *J. Funct. Anal.,* 4, 71-87.

[41] Rafeiro, H. and Samko, S. (2022). Coincidence of variable exponent Herz spaces with variable exponent Morrey type spaces and boundedness of sublinear operators in these spaces, *Potential Anal.,* 56(3), 437–457.

[42] Royden, H. L. (1968). Real Analysis, *MacMillan, New York, 2nd ed.*

[43] Samko, N.(2013). Maximal, potential and singular operators in vanishing generalized Morrey spaces, *J. Glop. Optim.,* 1-15.

[44] Sawano, Y. (2020). Morrey Spaces:Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, *Volume I, New York.*

[45] Shen, Z. (1995). L_p estimates for Schrödinger operators with certain potentials, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* 45(2), 513-546.

[46] Stein, E.M. (1970). Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, *Princeton Univ. Press, Princeton,* 304pp.

[47] Stein, E.M. (1993). Harmonic Analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, *Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.*

[48] Tang, L. and Dong, J. (2009). Boundedness for some Schrödinger type operator on Morrey spaces related to certain nonnegative potentials, *J. Math. Anal. Appl.,* 355, 101-109.

[49] Wheeden, R. and Zygmund, A. (1977). Measure and integral, An introduction to real analysis, *Pure and Applied Mathematics,* 43, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel.

[50] Wiener, N. (1939). The ergodic theorem, *Duke Math. J.,* 5, 1-18.

[51] Vitanza, C. (1990). Functions with vanishing Morrey norm and elliptic partial differential eqnarrays, *In Proceedings of methods of real analysis and partial differential eqnarrays, Capri,* 147-150.

[52] Vitanza, C. (1993). Regularity results for a class of elliptic eqnarrays with coefficients in Morrey spaces, *Ric. Mat.,* 42 (2), 265-281.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Süleyman ÇELİK
Uyruğu:	T.C.
ORCID Numarası:	0000-0003-3255-1950

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite:	Fırat Üniversitesi
Fakülte:	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	1994
Yüksek Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü:	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2016
Doktora	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü:	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2024

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler 1. Guliyev, S.V., Akbulut, A., Çelik, S. and Omarova, M. N. (2018). Higher order Riesz transforms related to Schrodinger type operator on local generalized Morrey spaces, *TWMS J. Pure Appl. Math.,* 10(1), 58-75. 2. Akbulut, A., Çelik, S. and Omarova, M. N. (2024). Fractional maximal operator associated with Schrodinger operator and its commutators on vanishing generalized Morrey spaces, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.,* 44(1), 3-19. **Uluslararası Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler** 1. Çelik, S. (2017). Higher order Riesz transforms related to Schrödinger type operator on local generalized Morrey spaces, *International Conference "Modern problems of Mathematics and Mechanics" dedicated to the 80-th anniversary of famous scientist Academicia Akif Hadjiev, 6-8 December, 2017, Bakü, Azerbaijan, 60.* 2. Çelik, S. (2017). Riesz potential associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morey spaces, *Turkish World Mathematical Society, (TWMS 2017), Astana, Kazakhstan, 57,* http://www.twmsj.az/. 3. Çelik, S. (2017). Riesz potential associated with Schrödinger operator on generalized Morrey spaces, *Operators in general Morrey-type spaces and applications, (OMSTA 2017), 10-13 July 2017, Kırşehir, Türkiye,* https://omtsa.ahievran.edu.tr/ 4. Akbulut A. and Çelik S. (2022). Morrey-type estimates for Calderón-Zygmund operators related to Schrödinger operators on the Heisenberg group, *8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applicstions, 24-26 August 2022, Bakü, Azarbaijan, 8(1), 57.*

Makaleler ve Bildiriler
Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler 1. Guliyev, S.V., Akbulut, A., Çelik, S. and Omarova, M. N. (2018). Fractional integral associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces, *Journal of Mathematical Inequalities,* 12(3), 789-805, doi:10.7153/jmi-2018-12-60. **Uluslararası Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler** 1. Akbulut, A. and Çelik, S. (2018). Marcinkiewicz integral associated with Schrödinger operator on generalized Morrey spaces, *MADEA-8 "Mathematical Analysis, Differential eqnarrays And Applications", dedicated to the 80th birthday of Academician, Professor A. M. Samoilenko, Issık-Kul (Cholpon-Ata, Kyrgyz Republic).* 2. Aydemir, E., Çelik, S. and Toslak, F. (2017). Estimating The Number Of Having Meal According To Weather By Artificial neural Networks, *International Conference on Research in Education and Science (ICRES2017), 18-21 May , 2017, Ephesus-Kusadasi, Turkey.*