T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL VE HİPERBOLİK UZAYDA BERTRAND EĞRİLERİ

Burcu ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2016

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL VE HİPERBOLİK UZAYDA BERTRAND EĞRİLERİ

Burcu ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd. Doç. Dr. Mahmut MAK

KIRŞEHİR 2016

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Prof.Dr.Levent KULA

Üye:
Yrd.Doç.Dr. Mahmut MAK

Üye:
Yrd.Doç.Dr. Ümit TOKEŞER

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

28./06/2016

Prof. Dr. Levent KULA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik, davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Burcu ŞAHİN

KÜRESEL VE HİPERBOLİK UZAYDA BERTRAND EĞRİLERİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Burcu ŞAHİN

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran 2016

ÖZET

Bu tez, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, öncelikle farklı ambiant uzaylarda Bertrand eğri kavramı ile ilgili yapılan çalışmaların literatür bilgisi verildi. Sonra tezin amacına yönelik olarak, sırasıyla Öklid uzayında, küresel uzayda, Minkowski uzayında ve hiperbolik uzayda eğriler teorisi ile ilgili ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremlere yer verildi. İkinci bölümde, küresel uzayda Bertrand eğri kavramı ile ilgili mevcut tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, dört boyutlu Öklid uzayında (1,3)-Bertrand eğri tanımı verildi. Sonra, bu eğriler ile küresel uzaydaki Bertrand eğriler arasındaki ilişkiler ile ilgili teoremler ifade edildi. Dördüncü bölümde, hiperbolik uzayda Bertrand eğri kavramı ile ilgili mevcut tanım ve teoremler ayrıntılı olarak incelendi. Tezin orijinal kısmı olan son bölümde, dört boyutlu Minkowski uzayında dejenere olmayan özel Frenet eğrilerinin, (1,3)-normal düzleminin causal karakterine göre (1,3)-Bertrand eğri tanımı verildi. Sonra, hiperbolik uzaydaki sabit olmayan eğrilikli düzlemsel olmayan bir Bertrand eğrinin, dört boyutlu Minkowski uzayında timelike (1,3)-Bertrand eğri olma koşulu verildi. İlk defa bu tezde, dört boyutlu Minkowski uzayındaki spacelike veya timelike (1,3)-Bertrand eğrisinden, hiperbolik uzayda Bertrand eğri elde etme metotları verildi ve bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkiler elde edildi. Son olarak hiperbolik uzaydaki bir helisin, Bertrand eğri olduğu ile ilgili bir örnek verilip kendisinin ve Bertrand eğri çiftinin hiperbolik uzayın Poincaré yuvar modelindeki görüntüleri çizildi.

Anahtar Kelimeler: Minkowski Uzay, Küresel Uzay, Hiperbolik Uzay, Bertrand Eğrileri, (1,3)-Bertrand Eğrileri, Helis.
Sayfa Adedi: 66
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mahmut MAK

BERTRAND CURVES IN SPHERICAL AND HYPERBOLIC SPACE

(Master of Science Thesis)

Burcu ŞAHİN

Ahi Evran University
Institute of Science

June 2016

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the literature survey about the concept of Bertrand curves in different ambient spaces is given. Then, we give needed fundamental definitions and theorems on curves theory in Euclidean, Minkowski, spherical and hyperbolic space, respectively. In the second section, the existing definitions and theorems about the concept of Bertrand curve in the spherical space. In the third section, we study the notion of (1,3)-Bertrand curve and its specifications in four-dimensional Euclidean space. Moreover, the theorems about relationships between these curves are given. In the fourth section, we review in detail the existing definitions and theorems about the concept of Bertrand curves in hyperbolic space. In the last part which is the original part of the thesis, we define (1,3)-Bertrand curve according to the causal character of (1,3)-normal plane of non-degenerate special Frenet curves in four-dimensional Minkowski space. Then, we give the needed condition that is the timelike (1,3)-Bertrand curve in four-dimensional Minkowski space for a non-planar Bertrand curve with non-constant curvature in hyperbolic space. However, we give methods of obtaining Bertrand curve in hyperbolic space by the spacelike or timelike (1,3)-Bertrand curve in four-dimensional Minkowski space and obtain relations between curvatures of these curves for the first time in this thesis. Finally, we show that a helix is also a Bertrand curve in hyperbolic space and draw images of the curve and its Bertrand mate in Poincaré ball model of hyperbolic space as an example.

Keywords: Minkowski Space, Spherical Space, Hyperbolic Space, Bertrand Curves, Helix, (1,3)-Bertrand Curves.
Number of Pages: 66
Thesis Advisor: Asst. Prof. Mahmut MAK

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgilerini benimle paylaşan değerli zamanını ayıran her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mahmut MAK'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Bilgi ve tecrübeleriyle bana destek olan sevgili hocam Prof. Dr. Levent KULA'ya teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme en derin duygularımla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^4$	4-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n_1$	Minkowski n-uzay
$\mathbb{R}^4_1$	Minkowski 4-uzay
$\mathbb{S}^n$	Küresel n-uzay
$\mathbb{S}^3$	Küresel uzay
$\mathbb{H}^n$	Hiperbolik n-uzay
$\mathbb{H}^3$	Hiperbolik Uzay
$\mathbb{B}^n$	Hiperbolik uzayın Poincaré yuvar modeli
T	Eğrinin teğet vektörü
N	Eğrinin normal vektörü
B	Eğrinin binormal vektörü
$\langle , \rangle$	Öklid iç çarpımı
$\langle , \rangle_*$	Skalar çarpım
$\Vert . \Vert$	Öklid normu
$\Vert . \Vert_*$	Lorentz normu
$\times$	Vektörel çarpım
$\wedge$	Lorentz vektörel çarpım
d	Öklid metriği
d_{S^n}	Küresel metrik
$d_{\mathbb{H}^n}$	Hiperbolik metrik
κ	Eğrilik fonksiyonu
κ_h	Hiperbolik eğrilik fonksiyonu
κ_i	Eğrinin i-yinci eğrilik fonksiyonu
τ	Burulma fonksiyonu
τ_h	Hiperbolik burulma fonksiyonu

1. GİRİŞ

İlk defa 19.yy ortalarında (1845) Saint-Venant, $\mathbb{R}^3$ üç boyutlu Öklid uzayında ayni asli normallere sahip ikinci bir eğrinin var olup olmadığı sorusuna yanıt aramıştır. Bu soruya 1850 de Bertrand tarafından "Aynı asli normallere sahip ikinci bir eğri vardır gerek ve yeter koşul verilen eğrinin, eğrilik ve burulması arasında sabit katsayılı lineer bir ilişki vardır." yanıtı verildi. Böylece bu tür eğri çiftleri, Bertrand eğriler(eşlenik eğriler) olarak adlandırıldı. Bertrand eğriler pek çok matematikçi tarafından ilgi görmüştür.

Öncelikle bu tür eğrilerin $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklid uzayındaki genelleştirmeleri araştırılmıştır. Özellikle Pears, $\mathbb{R}^n$ $(n > 3)$ de Bertrand eğri çifti oluşturma fikrini tekrar ele aldı ve Bertrand eğrilerin, $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^3$ alt uzayına ait olması gerektiğini gösterdi [22]. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ de bu genelleştirme fikri; [19] da Matsuda ve Yorozu, [1] de Aminov, [13] de Görgülü ve Özdamar, daha yeni olarak da [8] de Cheng ve Lin tarafından ele alınmıştır.

Ayrıca, Öklid uzayının haricinde farklı ambiant uzaylarda da Bertrand eğriler ve özellikleri pek çok yazar tarafından incelenmiştir. Örneğin, $\mathbb{R}^3_1$ üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında [10, 2, 3], Riemann-Otsuki uzayında [27] , $\mathbb{G}_3$ Galile uzayında [21] ve $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ yarı-Öklidyen uzayında [12] de çalışılmıştır. Bu çalışmalar haricinde, düzlemsel olmayan uzay formlarında da Bertrand eğri kavramı tekrar ele alınmıştır [17, 18, 9].

Bu tezde amacımız, $\mathbb{H}^3$ hiperbolik uzayındaki Bertrand eğri ile $\mathbb{R}^4_1$ dört-boyutlu Minkowski uzayındaki $(1,3)$-Bertrand eğri arasındaki ilişkileri elde etmektir. Bu anlamda öncelikle motivasyon amaçlı olarak, tezin birinci bölümünde eğriler teorisinde ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremlere yer verildi. Tezin ikinci ve üçüncü bölümünde, [17] de ifade edilen $\mathbb{S}^3$ küresel uzayındaki Bertrand eğri ve $\mathbb{R}^4$ dört-boyutlu Öklid uzayındaki $(1,3)$-Bertrand eğri kavramları verilip bu eğriler ile ilgili teoremler ve sonuçlar ayrıntılı olarak incelendi. Riemann veya Lorentz anlamda uzay formları bakış açısıyla $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3_1$, $\mathbb{S}^3$ ve $\mathbb{H}^3$ uzaylarındaki Bertrand eğri kavramları, ortak notasyonda birleştirilip ilgili tanım ve teoremler [18] de verilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde de, [18] de verilen $\mathbb{H}^3$ uzayındaki Bertrand eğri ve özellikleri ile ilgili teoremler tekrar ele alınıp detaylı ispatları yapılmıştır. Tezin orjinal kısmı olan son bölümde, öncelikle $\mathbb{R}_1^4$ de dejenere olmayan özel Frenet eğrilerinin, (1,3)-normal düzleminin causal karakterine göre (1,3)-Bertrand eğri tanımı verildi. Sonra, hiperbolik uzaydaki sabit olmayan eğrilikli düzlemsel olmayan bir Bertrand eğrinin, dört boyutlu Minkowski uzayında timelike (1,3)-Bertrand eğri olma koşulu verildi. İlk defa bu tezde, dört boyutlu Minkowski uzayındaki spacelike veya timelike (1,3)-Bertrand eğrisinden, hiperbolik uzayda Bertrand eğri elde etme metotları verildi ve bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkiler elde edildi. Son olarak hiperbolik uzaydaki bir helisin, Bertrand eğri olduğu ile ilgili bir örnek verilip kendisinin ve Bertrand eğri çiftinin hiperbolik uzayın Poincaré yuvar modelindeki görüntüleri çizildi.

1.1. Öklid Uzayında Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, Öklid uzayında Bertrand eğri kavramıyla ilgili gerekli olan temel tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 1.1. $\mathbb{R}^n$ de her bir $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektörleri için

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlı iç çarpıma, Öklid iç çarpımı denir [14].

Tanım 1.2. $\mathbb{R}^n$ de her $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektörü için

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlı norma, Öklid normu denir [14].

Tanım 1.3. $\mathbb{R}^n$ de her bir $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektörleri için

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \, , \ d(x, y) = \|y - x\|$$

olarak tanımlanan metriğe, Öklid metriği denir [14].

Tanım 1.4. Öklid metriği ile verilen $(\mathbb{R}^n, d)$ ikilisine, n-boyutlu Öklid uzayı denir ve kısaca $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir [14].

Tanım 1.5. $\mathbb{R}^4$ de standart ortonormal baz $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olmak üzere $x, y, z, w \in \mathbb{R}^4$ vektörleri için,

$$x \times y \times z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

vektörüne, $\mathbb{R}^4$ de x, y ve z vektörlerinin vektörel çarpması denir ve

$$< x \times y \times z, w >= \det(x, y, z, w)$$

olarak ifade edilir [5].

Tanım 1.6. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her bir $p \in \mathbb{R}^n$ noktasında f fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya düzgün fonksiyondur denir. $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ile gösterilir [24].

Tanım 1.7. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi = (f_1, f_2, ..., f_m)$ olsun. f_i fonksiyonları düzgün fonksiyonlar ise φ fonksiyonuda düzgündür denir [24].

Tanım 1.8. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi = (f_1, f_2, ..., f_m)$ düzgün fonksiyon olsun. Her bir $v_q \in T_q(\mathbb{R}^n)$ tanjant(teğet) vektörü için

$$\varphi_{*q}(v_q) = (v_q[f_1], v_q[f_2], ..., v_q[f_m])_{\varphi(q)}$$

eşitliğiyle tanımlı

$$\varphi_{*q} : T_q(\mathbb{R}^n) \to T_{\varphi(q)}(\mathbb{R}^n)$$

fonksiyonuna, φ fonksiyonunun q noktasındaki türev dönüşümü denir [24].

Tanım 1.9. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere

$$\begin{aligned} &\alpha : I \to \mathbb{R}^n \\ &\quad t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

biçiminde verilen düzgün bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ de bir eğri denir [24].

Tanım 1.10. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n,\ \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ biçiminde verilen bir eğri olsun. Bu durumda T_tI teğet uzayının standart bazı $\left\{\frac{d}{dx}\big|_t\right\}$ olmak üzere $\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx}\big|_t\right)$ tanjant vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir ve bu tanjant vektör

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \ldots, \alpha_n'(t))_{\alpha(t)}$$

ile gösterilir [24].

Tanım 1.11. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler(düzenli) eğri denir [24].

Tanım 1.12. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu(skalar hız fonksiyonu), $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da α nın $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir. Eğer

$$\|\alpha'(t)\| = 1,\ \forall t \in I$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri ve bu halde $t \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir [14].

Tanım 1.13. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere,

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına α eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay-uzunluğu denir [14].

Tanım 1.14. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Bu durumda

$$\psi = \left\{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\right\}$$

sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > 1$ için $\forall \alpha^{(k)} \in Sp(\psi)$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \ldots V_r\}$ ortonormal sistemine, α eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $\alpha(t) = p$ için $\{V_1(p), V_2(p), \ldots, V_r(p)\}$ ye ise p noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Burada her bir V_i $(1 \leq i \leq r)$ ye Serret-Frenet vektörü denir [14].

Tanım 1.15. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \kappa_i : I &\to \mathbb{R} \\ s &\to \kappa_i(s) = \langle V_i{}'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı κ_i fonksiyonuna α eğrisinin i-inci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $\kappa_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında α nın i-inci eğriliği denir [14].

Teorem 1.16. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisinin yay parametresi s olsun. Bu durumda α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i-inci eğriliği $\kappa_i(s)$ ve Serret-Frenet n-ayaklısı(Serret-Frenet çatısı) da $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_n(s)\}$ ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} V_1{}'(s) &= \kappa_1(s) V_2(s) \\ V_i{}'(s) &= -\kappa_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + \kappa_i(s) V_{i+1}(s),\ 1 < i < n-1 \\ V_n{}'(s) &= -\kappa_{n-1}(s) V_{n-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

bağıntıları sağlanır [14].

Tanım 1.17. (1.1) formüllerine, Serret-Frenet formülleri denir ve bu formüllerin matris formu

$$\begin{bmatrix} V_1{}' \\ V_2{}' \\ V_3{}' \\ . \\ . \\ . \\ . \\ V_n{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & & & . & & & & . \\ . & & & & . & & & . \\ . & & & & & . & & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & -\kappa_{n-2} & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ V_n \end{bmatrix}$$

olarak verilir [14].

Tanım 1.18. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ ve $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ birim hızlı eğrilerinin yay parametreleri sırasıyla, s ve s^* olsun. Bu durumda $s, s^* \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$, $\beta(s^*) \in \mathbb{R}^n$ noktalarında α ve β nın

$$\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_n(s)\}, \{V_1^*(s^*), V_2^*(s^*), \ldots, V_n^*(s^*)\}$$

Serret-Frenet n-ayaklıları verildiğinde her $s, s^* \in I$ için

$$\{V_2(s), V_2^*(s^*)\}$$

lineer bağımlı ise α ya bir Bertrand eğri ve (α, β) ikilisine de bir Bertrand eğri çifti denir [14].

Teorem 1.19. (α, β) Bertrand eğri çiftinin yay parametreleri sırasıyla, s ve s^* olsun. O zaman

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = sabit$$

dir [14].

İspat α nın yay parametresi s, β nın yay parametresi s^* ile gösterilmek üzere Bertrand eğri çifti tanımından

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s)V_2(s) \tag{1.2}$$

yazılabilir. Burada $\alpha(s)$, $\beta(s^*)$ noktalarındaki Serret-Frenet n-ayaklıları sırasıyla

$$\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_n(s)\}, \{V_1^*(s^*), V_2^*(s^*), \ldots, V_n^*(s^*)\}$$

ile gösterilmiş olsun. Bu durumda (1.2) eşitliğinde her iki tarafın s e göre diferensiyeli alınıp Serret-Frenet formülleri uygulanırsa,

$$\frac{ds^*}{ds}V_1{}^*(s^*) = (1 - \lambda(s)\kappa_1(s))V_1(s) + \lambda'(s)V_2(s) + \lambda(s)\kappa_2(s)V_3(s) \tag{1.3}$$

elde edilir. $\{V_2(s), V_2^*(s^*)\}$ lineer bağımlı olup

$$\langle V_2(s), V_1^*(s^*)\rangle = 0$$

dır. (1.3) eşitliğinin her iki tarafını $V_2(s)$ ile iç çarpıma tabi tutup bir önceki eşitlikte kullanılırsa

$$\lambda'(s) = 0, \ \forall s \in I$$

bulunur. O halde $\lambda(s) = \lambda$ sabiti için (1.2) eşitliğinden

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = |\lambda|, \ \forall s \in I$$

elde edilir. ■

Teorem 1.20. $\mathbb{R}^n$ de Bertrand eğrilerinin tanjant vektörleri arasındaki açı sabittir [11].

İspat Bertrand eğri tanımından $V_1{}^* \perp V_2$ olup $V_1{}^* \in Sp\{V_1, V_3, V_4, \ldots V_n\}$ dir. O halde

$$V_1{}^* = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq 2)}}^{n} \mu_i V_i$$

ve buradan $\langle V_1{}^*, V_1 \rangle = \mu_1$ yazılabilir. Son eşitlikte her iki tarafın s ye göre türevi alınıp (1.1) formülleri uygulanırsa

$$\frac{dV_1{}^*}{ds} = \frac{d\mu_1}{ds} V_1 + (\mu_1 \kappa_1 - \mu_3 \kappa_3) V_2 + \ldots \tag{1.4}$$

dır. Teorem 1.16. dan $\frac{dV_1{}^*}{ds^*} = \kappa_1{}^* V_2{}^*$ olup Bertrand eğri tanımından $\frac{dV_1{}^*}{ds^*}, V_2^*$ ve V_2 ye paraleldir. Dolayısıyla $\frac{dV_1{}^*}{ds^*}$ ile V_2 nin aynı doğrultuda olmaları için $(\mu_1 \kappa_1 - \mu_3 \kappa_3) V_2 \neq 0$ ve diğer tüm katsayılar sıfır olmalıdır. Buradan da

$$\frac{d\mu_1}{ds} = 0 \Rightarrow \mu_1 = sabit$$

olur. Böylece μ_1 sabit olmak üzere V_1 ile V_1^* arasındaki açı θ ise

$$\cos(\theta) = \frac{\langle V_1, V_1{}^* \rangle}{\|V_1\| \, \|V_1{}^*\|} = \mu_1$$

olur. ■

Teorem 1.21. $\mathbb{R}^3$ de α eğrisinin eğriliği κ ve burulması τ olsun. O zaman

$$(\alpha, \beta) \text{ Bertrand eğri çiftidir.} \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda\kappa + \mu\tau = 1$$

[14].

İspat $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında α ve β nın Frenet 3-ayaklıları sırasıyla;

$$\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\} \ , \ \{V_1^*(s^*), V_2^*(s^*), V_3^*(s^*)\}$$

olsun. Buna göre $V_1^*(s^*)$ ile $V_1(s)$ arasındaki açı θ olmak üzere

$$V_1{}^*(s) = \cos(\theta) V_1(s) + \sin(\theta) V_3(s) \tag{1.5}$$

yazılabilir. (1.5) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{ds^*}{ds}\kappa^*(s)V_2^*(s) &= \frac{d\cos(\theta)}{ds}V_1(s) + \cos(\theta)\left(\kappa(s)V_2(s)\right) + \frac{d\sin(\theta)}{ds}V_3(s) + \sin(\theta)\left(-\tau(s)V_2(s)\right) \\
&= \left(\kappa(s)\cos(\theta) - \tau\sin(\theta)\right)V_2(s) + \frac{d\cos(\theta)}{ds}V_1(s) + \frac{d\sin(\theta)}{ds}V_3(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 1.20. den $\theta = \textit{sabit}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre (1.5) eşitliği ve

$$\beta'(s) = \frac{ds^*}{ds}V_1{}^*(s) = (1 - \lambda\kappa(s))V_1(s) + \lambda\tau(s)V_3(s)$$

eşitliğinden

$$\cos(\theta)V_1(s) + \sin(\theta)V_3(s) = (1 - \lambda\kappa(s))V_1(s) + \lambda\tau(s)V_3(s)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1 - \lambda\kappa(s)}{\cos(\theta)} = \frac{\lambda\tau(s)}{\sin(\theta)}$$

elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \lambda\kappa(s)}{\lambda\tau(s)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1 - \lambda\kappa(s)}{\lambda\tau(s)} = \cot(\theta) \\
&\Rightarrow \quad 1 - \lambda\kappa(s) - \lambda\tau(s)\cot(\theta) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda\kappa(s) + \lambda\cot(\theta)\tau(s) = 1 \\
&\overset{(\mu=\lambda\cot(\theta))}{\Rightarrow} \quad \lambda\kappa(s) + \mu\tau(s) = 1
\end{aligned}$$

olup teoremin gereklilik kısmı ispatlanmış olur. Teoremin yeterlilik kısmının ispatı da işlemlerde tersten gidilerek kolayca gösterilir. O halde ispat tamamdır. ■

Tanım 1.22. $\mathbb{R}^n$ de bir M hiperyüzeyinin şekil operatörü S ve birim normali N olsun. O zaman $\mathbb{R}^n$ nin Riemann konneksiyonu ∇ ile gösterilmek üzere $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle S(X), Y\rangle N \tag{1.6}$$

şeklinde tanımlı $\overline{\nabla}$ operatörüne M üzerinde Gauss anlamında kovaryant türev operatörü denir ve (1.6) denklemine de M üzerinde Gauss denklemi denir [14].

1.2. Küresel Uzayda Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, küresel uzayda Bertrand eğri kavramıyla ilgili ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremleri verilecektir.

Tanım 1.23. $\mathbb{R}^{n+1}$ de

$$\mathbb{S}^n(r) = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2,\ r > 0\}$$

olarak verilen kümeye, *r yarıçaplı ve n-boyutlu küre* denir. Burada özel olarak $r = 1$ için $\mathbb{S}^n(1)$ kümesi kısaca $\mathbb{S}^n$ ile gösterilir ve bu kümeye *n-boyutlu birim küre* denir [17].

Tanım 1.24. $x, y \in \mathbb{S}^n$ vektörleri arasındaki Öklidyen açı $\theta(x, y)$ olsun. O zaman x ve y arasındaki küresel metrik

$$d_{S^n}(x, y) = \theta(x, y)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$0 \leq \theta(x, y) \leq \pi$$

olup θ bir reel sayıdır. Özel olarak

$$d_{S^n}(x, y) = \pi \Leftrightarrow y = -x$$

önermesini sağlayan x ve y vektörlerine $\mathbb{S}^n$ de antipodal denir [23].

Tanım 1.25. d_{S^n} küresel metriği ile verilen $\mathbb{S}^n$ ye, *küresel n-uzay* denir [23].

Tanım 1.26. $\mathbb{R}^{n+1}$ de 2-boyutlu altvektör uzayı ile $\mathbb{S}^n$ hiperküresinin arakesitine, $\mathbb{S}^n$ nin bir büyük çemberi(great circle) denir [23].

Teorem 1.27. $b - a < \pi$ olmak üzere $\alpha : [a, b] \to \mathbb{S}^n$ bir eğri olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.
i. α eğrisi bir geodezik yaydır.
ii. $x, y \in \mathbb{S}^n$ vektörleri ortoganaldir öyle ki

$$\alpha(t) = (\cos(t - a))x + (\sin(t - a))y$$

iii. α eğrisi, $\alpha'' + \alpha = 0$ diferensiyel denklemini sağlar [23].

Teorem 1.28. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^n$ fonksiyonu bir geodezikdir gerek ve yeter şart $x, y \in \mathbb{S}^n$ ortoganal vektörler öyle ki

$$\gamma(t) = \cos(t)x + \sin(t)y$$

formundadır [23].

Sonuç 1.29. $\mathbb{S}^n$ nin büyük çemberleri(great circle) onun geodezikleridir [23].

Şimdi $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{S}^3(r)$ nin Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla, ∇^0 ve $\overline{\nabla}$ olsun. O zaman $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3(r))$ ve T, α nın teğet vektörü olmak üzere $\mathbb{S}^3(r)$ de α eğrisi için Gauss denklemi

$$\nabla^0_T X = \overline{\nabla}_T X - \frac{1}{r^2}\langle X, T\rangle \alpha \tag{1.7}$$

olarak verilir[14].

Uyarı 1.30. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ dönüşümü için $(d\alpha)_t : T_t I \to T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^3$ türev dönüşümü birebirdir gerek ve yeter şart $\alpha = \alpha(t)$ eğrisi, $\mathbb{S}^3$ küresine daldırılmış (immersed) eğri olur.

Tanım 1.31. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık alt cümle olmak üzere

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^3(r)$$

birim hızlı daldırılmış küresel uzay eğrisinin yay parametresi s olsun. O zaman $\mathbb{S}^3(r)$ de $\alpha(s)$ noktasındaki α nın teğet vektörü

$$T(s) = \alpha'(s)$$

ve $\left\|\overline{\nabla}_{T(s)}T(s)\right\| \neq 0$ olmak üzere, α nın normal vektörü

$$N(s) = \frac{\overline{\nabla}_{T(s)}T(s)}{\left\|\overline{\nabla}_{T(s)}T(s)\right\|}$$

ve α nın binormal vektörü

$$B(s) = \alpha(s) \times T(s) \times N(s)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca burada, α'nın eğrilik fonksiyonu

$$\kappa : I \to \mathbb{R}\,,\ \kappa(s) = \left\| \overline{\nabla}_{T(s)} T(s) \right\|$$

ve α'nın burulma fonksiyonu

$$\tau : I \to \mathbb{R}\,,\ \tau(s) = \langle \overline{\nabla}_{T(s)} N(s), B(s) \rangle$$

olarak verilir [17].

Uyarı 1.32. Burada $\left\| \overline{\nabla}_{T(s)} T(s) \right\| = 0$ olması hali α eğrisinin, $\mathbb{S}^3(r)$ de bir geodezik olmasına karşılık gelir.

Şimdi α eğrisinin, $\mathbb{S}^3(r)$ de α boyunca Serret-Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. O zaman α nın Serret-Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_T T &= \kappa N \\ \overline{\nabla}_T N &= -\kappa T + \tau B \\ \overline{\nabla}_T B &= -\tau N \end{aligned} \tag{1.8}$$

olarak verilir. Ayrıca (1.7) ve (1.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \nabla^0_T T &= \kappa N - \frac{1}{r^2}\alpha \\ \nabla^0_T N &= -\kappa T + \tau B \\ \nabla^0_T B &= -\tau N \end{aligned} \tag{1.9}$$

olduğu kolayca görülür ve burada $\{\alpha, T, N, B\}$, α eğrisinin $\mathbb{S}^3(r)$ de α boyunca Sabban çatısı olarak adlandırılır.

1.3. Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.33. V bir reel vektör uzayı olmak üzere $g : V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümüne bilineer ve simetrik ise g dönüşümü V üzerinde bir bilineer form denir [20].

Tanım 1.34. V reel vektör uzayı üzerinde $g : V \times V \to \mathbb{R}$ simetrik bilineer form ve $v \in V$ olsun. O zaman, her $u \in V$ için $g(u, v) = 0$ olması $v = 0$ olmasını gerektiriyorsa g dönüşümüne non-dejenere form denir [20].

Tanım 1.35. V vektör uzayının bir alt vektör uzayı W olsun. O zaman bir $g : V \times V \to \mathbb{R}$ simetrik bilineer formundan elde edilen $g_W : W \times W \to \mathbb{R}$ kısıtlaması negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt vektör uzayının boyutuna g nin indeksi denir. Eğer indeks ν ise $0 \leq \nu \leq boyV$ dir. Ayrıca V nin indeksi üzerinde tanımlı olan g nin indeksi olarak tanımlanır [20].

Tanım 1.36. V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı simetrik , bilineer, non-dejenere forma bir skalar çarpım denir. Bu çarpım ile birlikte V vektör uzayına da skalar çarpım uzayı denir [20].

Tanım 1.37. V skalar çarpım uzayının indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir [20].

Tanım 1.38. $\mathbb{R}^n$, n boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere her bir $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle x, y \rangle_* = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$$

skalar çarpımı ile verilen $(\mathbb{R}^n, \langle \, , \rangle_*)$ ikilisine Minkowski n-uzay denir ve $\mathbb{R}^n_1$ ile gösterilir [23].

Tanım 1.39. $\mathbb{R}^n_1$ uzayında bir $x \in \mathbb{R}^n_1$ vektörü için
i. $\langle x, x \rangle_* > 0$ veya $x = 0$ ise x bir spacelike vektör,
ii. $\langle x, x \rangle_* < 0$ ise x bir timelike vektör,
iii. $\langle x, x \rangle_* = 0$ ise x bir null(lightlike) vektör,
olarak adladırılır [23].

Tanım 1.40. $\mathbb{R}^n_1$ uzayındaki her $x \in \mathbb{R}^n_1$ vektörü için

$$\|x\|_* = \sqrt{|\langle x, x \rangle_*|}$$

olarak tanımlanan norma, Lorentz normu denir [23].

Tanım 1.41. $\mathbb{R}_1^n$ uzayındaki spacelike olmayan vektör $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun. O zaman $x_1 > 0\,(x_1 < 0)$ ise x vektörüne pozitif (negatif) vektör denir [23].

Teorem 1.42. $\mathbb{R}_1^n$ uzayında Lorentz ortogonal iki vektör x ve y olsun. Bu durumda x timelike vektör ise y spacelike vektördür [23].

Teorem 1.43. W, V Lorentz uzayının bir altuzayı olsun. Bu durumda,
i. W timelike altuzaydır $\Leftrightarrow$ W bir timelike vektöre sahiptir,
ii. W spacelike altuzaydır $\Leftrightarrow$ W nın sıfırdan farklı her vektörü spacelike vektördür,
iii. diğer durumlarda ise W lightlike altuzaydır [23].

Teorem 1.44. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ de pozitif(negatif) timelike vektörler x ve y olsun. O zaman $\langle x, y\rangle_* \leq \|x\|_* \|y\|_*$ ve eşitlik durumunda x ve y lineer bağımlıdır [23].

Tanım 1.45. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ de pozitif(negatif) timelike vektörler x ve y olsun. O zaman

$$\langle x, y\rangle_* = -\|x\|_* \|y\|_* \cosh(\eta(x, y))$$

şartını sağlayan negatif olmayan bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır. Bu sayıya x ve y arasındaki Lorentziyen timelike açı denir [23].

Tanım 1.46. $\mathbb{R}_1^4$ ün pseudo-ortonormal bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olmak üzere herhangi $x, y, z \in \mathbb{R}_1^4$ vektörleri için

$$x \wedge y \wedge z = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

vektörüne x, y, z ye pseudo-ortogonal vektör denir ve herhangi $w \in \mathbb{R}_1^4$ için

$$\langle w, x \wedge y \wedge z\rangle_* = \det(w, x, y, z)$$

olarak ifade edilir [15].

Tanım 1.47. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^4$ bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin her $s \in I$ için hız vektörü $\alpha'(s)$ sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise α eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır [20].

Tanım 1.48. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^4$ bir eğri olsun.
i. α null bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_* = 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine pseudo yay parametresi ile paremetrelendirilmiştir denir.
ii. α null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_* = \pm 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine yay uzunluğu parametresi ile paremetrelendirilmiştir denir [6].

Şimdi $\mathbb{R}_1^4$ de bir α eğrisi için T, N_1, N_2, N_3 sırasıyla, α eğrisinin teğet vektör alanı, birinci (asli) normal vektör alanı, ikinci normal vektör alanı ve üçüncü normal vektör alanını göstermek üzere $i = 1, 2, 3, 4$ için $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = -1$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle_* &= \varepsilon_1 \\ \langle N_i, N_j \rangle_* &= \varepsilon_{i+1} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \langle T, N_i \rangle_* &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlansın. O zaman $\mathbb{R}_1^4$ de spacelike veya timelike bir α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ve eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olacak şekilde Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1{}' \\ N_2{}' \\ N_3{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa_1 & 0 & \varepsilon_3 \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \kappa_2 & 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 \kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

olarak verilir [16].

1.4. Hiperbolik Uzayda Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.49. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ uzayında

$$\mathbb{H}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_* = -1 \ , \ x_1 \geq 1 \right\}$$

altcümlesine n-boyutlu hiperbolik uzayın hiperboloidal (Minkowski) modeli denir [7].

Tanım 1.50. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ uzayında

$$\mathbb{B}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 < 1 \;\;,\;\; x_1 = 0 \right\}$$

alt cümlesine n-boyutlu hiperbolik uzayın Poincaré yuvar modeli denir [7].

Tanım 1.51. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ uzayında,

$$\mathbb{S}_1^n = \left\{ x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_* = 1 \right\}$$

alt cümlesine n-boyutlu de-Sitter uzayı denir [20].

Tanım 1.52. $\mathbb{H}^n$ de x ve y arasındaki Lorentziyen timelike açı $\eta(x, y)$ olsun. x ve y arasındaki hiperbolik uzaklık fonksiyonu

$$d_{\mathbb{H}^n}(x, y) = \eta(x, y)$$

dir [23].

Teorem 1.53. $d_{\mathbb{H}^n}$ hiperbolik uzaklık fonksiyonu, $\mathbb{H}^n$ de bir metriktir [23].

Tanım 1.54. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ in 2-boyutlu timelike altvektör uzayı ile $\mathbb{H}^n$ nin arakesitine $\mathbb{H}^n$ nin bir hiperbolik doğrusu denir [23].

Tanım 1.55. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ de x ve y vektörleri Lorentz ortonormaldir gerek ve yeter şart

$$\langle x, x \rangle_* = -1 \,,\; \langle y, y \rangle_* = 1 \,,\; \langle x, y \rangle_* = 0$$

eşitlikleri sağlanır [23].

Teorem 1.56. $\alpha : [a, b] \to \mathbb{H}^n$ bir eğri olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.
i. α bir geodezik yaydır,
ii. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ de x ve y vektörleri Lorentz ortonormal olmak üzere

$$\alpha(t) = \cosh(t - a)x + \sinh(t - a)y,$$

iii. α eğrisi $\alpha'' - \alpha = 0$ diferensiyel denklemini sağlar [23].

Teorem 1.57. $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ fonksiyonu bir geodezikdir gerek ve yeter şart x ve y vektörleri Lorentz ortonormal olmak üzere

$$\lambda(t) = \cosh(t)x + \sinh(t)y$$

dir[23].

Şimdi $\mathbb{R}_1^4$ ve $\mathbb{H}^3$ ün Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla,$\widetilde{\widetilde{\nabla}}$ ve $\widetilde{\nabla}$ olsun. O zaman $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^3)$ ve T, α nın teğet vektörü olmak üzere $\mathbb{H}^3$ de α eğrisi için Gauss denklemi

$$\widetilde{\widetilde{\nabla}}_T X = \widetilde{\nabla}_T X + \langle X, T \rangle_* \alpha \tag{1.11}$$

dır.

Uyarı 1.58. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4$ dönüşümü için $(d\alpha)_t : T_t I \to T_{\alpha(t)}\mathbb{H}^3$ türev dönüşümü birebirdir gerek ve yeter şart $\alpha = \alpha(t)$ eğrisi, $\mathbb{H}^3$ hiperbolik uzayında daldırılmış (immersed) eğri olur.

Tanım 1.59. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık alt cümle olmak üzere

$$\alpha : I \to \mathbb{H}^3$$

birim hızlı daldırılmış hiperbolik uzay eğrisinin yay parametrei s olsun. Bu durumda $\mathbb{H}^3$ de $\alpha(s)$ noktasındaki α nın teğet vektörü

$$T(s) = \alpha'(s)$$

ve $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_* \neq -1$ şartı ile birlikte, $\mathbb{H}^3$ de α nın birim normal vektörü

$$N(s) = \frac{\alpha''(s) - \alpha(s)}{\|\alpha''(s) - \alpha(s)\|_*}$$

ve $\mathbb{H}^3$ de α nın binormal vektörü

$$B(s) = \alpha(s) \wedge T(s) \wedge N(s)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca burada, α nın hiperbolik eğrilik fonksiyonu

$$\kappa_h : I \to \mathbb{R}\ ,\ \kappa_h(s) = \|\alpha''(s) - \alpha(s)\|_*$$

ve α nın hiperbolik burulma fonksiyonu,

$$\tau_h : I \to \mathbb{R}\,, \tau_h(s) = \frac{-\det\left(\alpha(s), \alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right)}{\left(\kappa_h(s)\right)^2}$$

olarak verilir [15].

Uyarı 1.60. Burada $\left\|\widetilde{\nabla}_{T(s)}T(s)\right\|_* = 0$ olması hali α eğrisinin, $\mathbb{H}^3$ de bir geodezik olmasına karşılık gelir. Ayrıca (1.11) den

$$\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{T(s)}T(s) = \alpha''(s) - \alpha(s)$$

olup

$$\left\|\widetilde{\nabla}_{T(s)}T(s)\right\|_* = 0 \Leftrightarrow \langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle_* = -1$$

eşitliği kolayca görülür.

Şimdi α eğrisinin, $\mathbb{H}^3$ de α boyunca Serret-Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. O zaman α nın Serret-Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_T T &= \kappa_h N \\ \widetilde{\nabla}_T N &= -\kappa_h T + \tau_h B \\ \widetilde{\nabla}_T B &= -\tau_h N \end{aligned} \tag{1.12}$$

olarak verilir. Ayrıca (1.11) ve (1.12) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{\nabla}}_T T &= \kappa_h N + \alpha \\ \widetilde{\widetilde{\nabla}}_T N &= -\kappa_h T + \tau_h B \\ \widetilde{\widetilde{\nabla}}_T B &= -\tau_h N \end{aligned} \tag{1.13}$$

olduğu kolayca görülür. Burada $\mathbb{R}^4_1$ de bir pseudo-ortonormal baz olan $\{\alpha, T, N, B\}$,

$$\det(\alpha, T, N, B) = -1 \tag{1.14}$$

ve

$$\begin{cases} T \wedge N \wedge B = \alpha \\ N \wedge B \wedge \alpha = T \\ B \wedge \alpha \wedge T = -N \\ \alpha \wedge T \wedge N = B \end{cases} \tag{1.15}$$

özelliklerini sağlayan α eğrisinin $\mathbb{H}^3$ deki α boyunca Sabban çatısı olarak adlandırılır.

2. Küresel Uzayda Bertrand Eğriler

Tanım 2.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^3(r)$ bir immersed eğri ve $\mathbb{S}^3(r)$ de α eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. O zaman $\mathbb{S}^3(r)$ de $\alpha(t)$ başlangıç noktalı

$$\gamma_t^{\alpha}(u) = \cos\left(\frac{u}{r}\right)\alpha(t) + r\sin\left(\frac{u}{r}\right)N(t), \ u \in \mathbb{R}, \ t \in I \tag{2.1}$$

geodezik eğrisine $\mathbb{S}^3(r)$ de asli normal geodezik denir [17].

Tanım 2.2. Sıfırdan farklı geodezik eğriliğe sahip $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^3(r)$ immersed eğrisi ve $\beta : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^3(r)$ immersed eğrisi verilsin. O zaman α ve β eğrileri arasında birebir karşılık getiren bir $\sigma : I \to J$, $\sigma(t) \in J$ dönüşümü var öyle ki her iki eğri karşılıklı noktalarında ortak asli normal geodezik eğriye sahip ise α eğrisine, $\mathbb{S}^3(r)$ de bir Bertrand eğri ve β eğrisine de $\mathbb{S}^3(r)$ de α nın Bertrand eğri çifti denir [17].

Uyarı 2.3. Bundan sonra genelliği bozmadan, $r = 1$ için $\mathbb{S}^3(1) = \mathbb{S}^3$ küresel uzayı olsun. Ayrıca α ve β eğrileri $\mathbb{S}^3$ de birim hızlı (yay parametresi ile parametrelendirilmiş) immersed eğriler olsun.

Şimdi $\alpha : I \to \mathbb{S}^3$ ve $\beta : J \to \mathbb{S}^3$ sırasıyla, s ve σ yay parametreli birim hızlı eğriler ve β, $\mathbb{S}^3$ de α nın Bertrand eğri çifti olsun. O zaman α ve β nın $\mathbb{S}^3$ de Serret-Frenet çatıları sırasıyla,

$$\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}, \ \{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$$

olmak üzere bir $a(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu var öyle ki Tanım 2.2. den

$$\beta(\sigma(s)) = \cos(a(s))\alpha(s) + \sin(a(s))N_\alpha(s) \tag{2.2}$$

yazılabilir.

Önerme 2.4. $\alpha(s)$ ve $\beta(\sigma(s))$, $\mathbb{S}^3$ de Bertrand eğri çifti olsun. O zaman aşağıdakiler vardır.
i. $a(s)$ fonksiyonu sabittir.
ii. $d_{S^3}\left(\alpha(s), \beta(\sigma(s))\right)$ küresel uzaklık fonksiyonu sabittir.

iii. α ve β nın karşılıklı noktalarında teğet vektörler($\mathbb{R}^4$ de vektör olarak) arasındaki açı sabittir.
iv. α ve β nın karşılıklı noktalarında binormal vektörler ($\mathbb{R}^4$ de vektör olarak) arasındaki açı sabittir [17].

İspat i. (2.1) eşitliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_s^\alpha}{du}|_{u=0} &= \frac{d}{du}\left(\cos(u)\alpha(s)+\sin(u)N_\alpha(s)\right)|_{u=0}\\ &= \left(-\sin(u)\alpha\left(s\right)+\cos(u)N_\alpha\left(s\right)\right)|_{u=0}\\ &= N_\alpha\left(s\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ve

$$\frac{d\gamma_s^\alpha}{du}|_{u=a(s)} = \left(-\sin\left(a\left(s\right)\right)\alpha\left(s\right)+\cos\left(a\left(s\right)\right)N_\alpha\left(s\right)\right) \tag{2.4}$$

elde edilir. Ayrıca α ve β karşılıklı noktalarında ortak asli normal geodeziklere sahip olduğundan (2.3) ve (2.4) den

$$\frac{d\gamma_s^\alpha}{du}|_{u=a(s)} = N_\beta(\sigma(s)) \tag{2.5}$$

olur. Şimdi (2.4) ve (2.5) eşitliklerini kullanarak;

$$N_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) = \left(-\sin\left(a\left(s\right)\right)\alpha\left(s\right)+\cos\left(a\left(s\right)\right)N_\alpha\left(s\right)\right) \tag{2.6}$$

bulunur. Diğer taraftan β eğrisinin, β boyunca Frenet çatısı $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ ise (2.2) denkleminin $\mathbb{R}^4$ de s ye göre türevinin alınmasıyla

$$\begin{aligned}\frac{d\beta\left(\sigma\left(s\right)\right)}{ds} &= -a'\left(s\right)\sin\left(a\left(s\right)\right)\alpha\left(s\right)+\cos\left(a\left(s\right)\right)\alpha'\left(s\right)\\ &\quad +a'\left(s\right)\cos\left(a\left(s\right)\right)N_\alpha\left(s\right)+\sin\left(a\left(s\right)\right)N'_\alpha\left(s\right)\\ &= -a'\left(s\right)\sin\left(a\left(s\right)\right)\alpha\left(s\right)+\cos\left(a\left(s\right)\right)T\left(s\right)+a'\left(s\right)\cos\left(a\left(s\right)\right)N_\alpha\left(s\right)\\ &\quad +\sin\left(a\left(s\right)\right)\left(-\kappa_\alpha\left(s\right)T_\alpha\left(s\right)+\tau_\alpha\left(s\right)B_\alpha\left(s\right)\right)\\ &= -a'\left(s\right)\sin\left(a\left(s\right)\right)\alpha\left(s\right)+\left[\cos\left(a\left(s\right)\right)-\kappa_\alpha\left(s\right)\sin\left(a\left(s\right)\right)\right]T_\alpha\left(s\right)\\ &\quad +a'\left(s\right)\cos\left(a\left(s\right)\right)N_\alpha\left(s\right)+\tau_\alpha\left(s\right)\sin\left(a\left(s\right)\right)B_\alpha\left(s\right)\end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{d\beta\left(\sigma\left(s\right)\right)}{ds} = \frac{d\beta}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \sigma'\left(s\right)T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) \tag{2.8}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece (2.6) ve (2.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)), N_\beta(\sigma(s))\rangle &= \langle -a'(s)\sin(a(s))\alpha(s) + [\cos(a(s)) - \kappa_\alpha(s)\sin(a(s))]\, T_\alpha(s) \\
&\quad + a'(s)\cos(a(s))N_\alpha(s) + \tau_\alpha(s)\sin(a(s))B_\alpha(s), \\
&\quad - \sin(a(s))\,\alpha(s) + \cos(a(s))\,N_\alpha(s)\rangle \\
&= a'(s)\sin^2(a(s))\underbrace{\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle}_{1} \\
&\quad + a'(s)\cos^2(a(s))\underbrace{\langle N_\alpha(s), N_\alpha(s)\rangle}_{1} \\
&= a'(s)\left[\sin^2(a(s)) + \cos^2(a(s))\right] \\
&= a'(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.8) eşitliğinden

$$a'(s) = \left\langle \frac{d\beta(\sigma(s))}{ds}, N_\beta(\sigma(s))\right\rangle = \sigma'(s)\langle T_\beta(\sigma(s)), N_\beta(\sigma(s))\rangle = 0 \tag{2.9}$$

olur. Böylece $a(s)$ sabit bir fonksiyondur.

ii. (2.2) den

$$\beta(\sigma(s)) = \cos(a(s))\alpha(s) + \sin(a(s))N_\alpha(s) \tag{2.10}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned}
d_{S^3}(\alpha(s), \beta(\sigma(s))) &= \theta(\alpha(s), \beta(\sigma(s))) \\
&= \arccos\langle \alpha(s), \beta(\sigma(s))\rangle \\
&= \arccos(\cos(a(s))) \\
&= a(s)
\end{aligned}$$

olduğundan (i) şıkkından istenilen elde edilir.

iii.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle T_\alpha(s), T_\beta(\sigma(s))\rangle &= \langle \kappa_\alpha(s)\, N_\alpha(s) - \alpha(s), T_\beta(\sigma(s))\rangle \\
&\quad + \sigma'(s)\langle T_\alpha(s), \kappa_\beta(\sigma(s))\, N_\beta(\sigma(s)) - \beta(\sigma(s))\rangle
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Diğer yandan (2.7) ve (2.8) eşitlikleri kullanılarak

$$T_\beta(\sigma(s)) = \frac{1}{\sigma'(s)}(\cos(\mathrm{a}) - \kappa_\alpha(s)\sin(\mathrm{a}))\, T_\alpha(s) + \tau_\alpha(s)\sin(\mathrm{a})B_\alpha(s) \tag{2.12}$$

elde edilir. Böylece (2.2), (2.6) ve (2.12) eşitlikleri (2.11) de yerine konulursa

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left\langle T_\alpha\left(s\right), T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right)\right\rangle &= \left\langle \kappa_\alpha N_\alpha - \alpha, \frac{1}{\sigma'}\left(\cos(a) - \kappa_\alpha \sin(a)\right) T_\alpha + \tau_\alpha \sin(a) B_\alpha \right\rangle \\ &+ \sigma' \left\langle T_\alpha, \kappa_\beta\left(-\sin\left(a\right)\alpha + \cos\left(a\right) N_\alpha\right) - \left(\cos\left(\mathrm{a}\right)\alpha + \sin\left(a\right) N_\alpha\right)\right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Yani c bir keyfi sabit olmak üzere

$$\cos\left(\theta\left(T_\alpha(s), T_\beta(\sigma(s))\right)\right) = c$$

olduğu görülür.
iv. (2.12) den T_β, $S_p\{T_\alpha, B_\alpha\}$ düzleminde yatar. Dolayısıyla

$$T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) = \lambda_1 T_\alpha\left(s\right) + \lambda_2 B_\alpha\left(s\right), \ \lambda_i \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. T_α ve B_α arasındaki açı θ ise bu açı (iii) den sabittir. O zaman,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left\langle T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right), T_\alpha\left(s\right)\right\rangle = \cos(\theta) \\ \lambda_2 &= \left\langle T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right), B_\alpha\left(s\right)\right\rangle = \cos(\varphi) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \sin(\theta)\end{aligned} \tag{2.13}$$

olduğu görülür. O halde

$$T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) = \cos(\theta) T_\alpha\left(s\right) + \sin(\theta) B_\alpha\left(s\right). \tag{2.14}$$

Ayrıca β nın binormal vektörü

$$B_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) = \beta\left(\sigma\left(s\right)\right) \times T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) \times N_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) \tag{2.15}$$

olduğundan

$$B_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) = \mu_1 T_\alpha\left(s\right) + \mu_2 N_\alpha\left(s\right) + \mu_3 B_\alpha\left(s\right)$$

olacak şekilde $\mu_i \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Buna göre (2.2), (2.6) ve (2.14) kullanılarak

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \left\langle B_\beta(\sigma(s)), T_\alpha\left(s\right)\right\rangle = -\sin(\theta) \\ \mu_2 &= \left\langle B_\beta(\sigma(s)), N_\alpha\left(s\right)\right\rangle = 0 \\ \mu_3 &= \left\langle B_\beta(\sigma(s)), B_\alpha\left(s\right)\right\rangle = \cos(\theta)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani $B_\beta(\sigma(s)) \in S_p\left\{T_\alpha(s), B_\alpha(s)\right\}$ olup

$$B_\beta(\sigma(s)) = -\sin(\theta)\,T_\alpha(s) + \cos(\theta)\,B_\alpha(s) \tag{2.16}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left\langle B_\alpha(s), B_\beta(\sigma(s))\right\rangle &= \frac{d}{ds}\left\langle B_\alpha(s), \sin(\theta)T_\alpha(s) + \cos(\theta)B_\alpha(s)\right\rangle \\
&= \left\langle B_\alpha{}'(s), \sin(\theta)T_\alpha(s) + \cos(\theta)B_\alpha(s)\right\rangle \\
&\quad + \left\langle B_\alpha(s) - \sin(\theta)T_\alpha(s) + \cos(\theta)B_\alpha{}'(s)\right\rangle \\
&= \left\langle -\tau_\alpha N_\alpha(s), \sin(\theta)T_\alpha(s) + \cos(\theta)B_\alpha(s)\right\rangle \\
&\quad + \left\langle B_\alpha(s), -\sin(\theta)\left(\kappa_\alpha N_\alpha\right) + \cos(\theta)\left(-\tau_\alpha N_\alpha\right)\right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\left\langle B_\alpha(s), B_\beta\left(\sigma(s)\right)\right\rangle = sabit$$

olup istenen elde edilir. ■

Teorem 2.5. $\mathbb{S}^3$ de verilen α ve β Bertrand eğri çiftinin eğrilik ve burulması sırasıyla, $\kappa_\alpha, \tau_\alpha$ ve κ_β, τ_β olsun. O zaman a ve θ iki sabit olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur [17].

i. $(\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha)\sin(\theta) = \sin(a)\cos(\theta)\tau_\alpha$,

ii. $(\cos(a) + \sin(a)\kappa_\beta)\sin(\theta) = \sin(a)\cos(\theta)\tau_\beta$,

iii. $(\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha)(\cos(a) + \sin(a)\kappa_\beta) = \cos^2(\theta)$,

iv. $\sin^2(a)\,\tau_\alpha\,\tau_\beta = \sin^2(\theta)$

İspat i. $\beta(\sigma(s))$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) = \frac{d\beta}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = T_\beta(\sigma(s))\sigma'(s)$$

olur ve (2.14) uygulanırsa

$$\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) = \sigma'(s)(\cos(\theta)T_\alpha(s) + \sin(\theta)B_\alpha(s)). \tag{2.17}$$

Diğer taraftan (2.2) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp Frenet denklemleri uygulanırsa $a(s) = a$ sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) &= \frac{d}{ds}(\cos(a)\alpha(s) + \sin(a)N_\alpha(s)) \\
&= (\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha(s))T_\alpha(s) + \sin(a)\tau_\alpha(s)B_\alpha(s).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Buna göre (2.17) ve (2.18) den

$$\sigma'(s)\cos(\theta) = \cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha(s) \tag{2.19}$$
$$\sigma'(s)\sin(\theta) = \sin(a)\tau_\alpha(s) \tag{2.20}$$

elde edilir. O halde (2.19) ve (2.20) den

$$(\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha(s))\sin(\theta) = \sin(a)\cos(\theta)\tau_\alpha(s)$$

olur ve istenilen eşitlik elde edilir.
ii. Hipotezden $s : J \to I,\ s = s(\sigma)$ dönüşümü vardır öyle ki $\alpha = \alpha(s(\sigma))$ Bertrand eğrisinin, $\mathbb{S}^3$ deki Saban çatısının elemanları, $\beta = \beta(\sigma)$ nın $\mathbb{S}^3$ deki Saban çatısının elemanları cinsinden ifade edilebilir. Yani

$$\alpha(s(\sigma)) = \cos(a)\beta(\sigma) - \sin(a)N_\beta(\sigma) \tag{2.21}$$
$$T_\alpha(s(\sigma)) = \cos(\theta)T_\beta(\sigma) - \sin(\theta)B_\beta(\sigma) \tag{2.22}$$
$$N_\alpha(s(\sigma)) = \sin(a)\beta(\sigma) + \cos(a)N_\beta(\sigma) \tag{2.23}$$
$$B_\alpha(s(\sigma)) = \sin(\theta)T_\beta(\sigma) + \cos(\theta)B_\beta(\sigma) \tag{2.24}$$

eşitlikleri yazılabilir. Şimdi (2.21) in σ ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} T_\alpha(s(\sigma))\,s'(\sigma) &= \cos(a)T_\beta(\sigma) - \sin(a)(-\kappa_\beta(\sigma)T_\beta(\sigma) + \tau_\beta(\sigma)B_\beta(\sigma) \\ &= [\cos(a) + \sin(a)\kappa_\beta(\sigma)]T_\beta(\sigma) - \sin(a)\tau_\beta(\sigma)B_\beta(\sigma) \end{aligned} \tag{2.25}$$

ve (2.22) den

$$(s'(\sigma))\,T_\alpha(s(\sigma)) = (s'(\sigma))\cos(\theta)T_\beta(\sigma) - (s'(\sigma))\sin(\theta)B_\beta(\sigma) \tag{2.26}$$

olur. (2.25) ve (2.26) dan

$$(s'(\sigma))\cos(\theta) = \cos(a) + \sin(a)\kappa_\beta(\sigma) \tag{2.27}$$
$$(s'(\sigma))\sin(\theta) = \sin(a)\tau_\beta(\sigma) \tag{2.28}$$

elde edilir. O halde buradan

$$(\cos(a) + \sin(a)\kappa_\beta)\sin(\theta) = \sin(a)\cos(\theta)\tau_\beta$$

bulunur.
iii. (2.19) ve (2.27) denklemleri ele alınırsa

$$\sigma'(s)\,(s'(\sigma))\cos^2(\theta) = (\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha(s))(\cos(a) + \sin(a)\kappa_\beta) \tag{2.29}$$

elde edilir. Buradan

$$(\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha)(\cos(a) + \sin(a)\kappa_\beta) = \cos^2(\theta)$$

olup istenilen eşitlik elde edilir.
iv. (2.20) ve (2.28) denklemlerini ele alırsak,

$$\sigma'(s)\,(s'(\sigma))\sin^2(\theta) = \sin^2(a)\tau_\alpha(\sigma)\tau_\beta(\sigma)$$

elde edilir. Buradan

$$\sin^2(\theta) = \sin^2(a)\tau_\alpha(\sigma)\tau_\beta(\sigma)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Böylece Teorem 2.5. (iv) den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.6. $\mathbb{S}^3$ de verilen α ve β Bertrand eğri çiftinin torsiyonları sırasıyla τ_α ve τ_β olsun. O zaman torsiyonların karşılıklı noktalarındaki çarpımı negatif olmayan bir sabittir.

Tanım 2.7. α, $\mathbb{S}^3$ de bir eğri olsun. O zaman α tam geodezik 2 boyutlu $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ küresinde(küresel düzlemde) yatıyorsa yani bütün noktalarında α nın torsiyonu sıfır ise α ya $\mathbb{S}^3$ de düzlemsel eğri denir [17].

Tanım 2.8. α, $\mathbb{S}^3$ de bir eğri olsun. O zaman α nın her noktasında burulması sıfırdan farklı ise α ya $\mathbb{S}^3$ de burulmalı(twisted) eğri denir [17].

Tanım 2.9. α, $\mathbb{S}^3$ de bir burulmalı eğri ($\tau \neq 0$) olsun. O zaman α nın eğrilik ve burulması sıfırdan farklı sabitler ise α ya $\mathbb{S}^3$ de bir helis denir [4].

Tanım 2.10. α, $\mathbb{S}^3$ de bir eğri ve $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ bir Killing vektör alanı olsun. O zaman V ve α arasındaki açı, α boyunca sıfırdan farklı sabit ve V, α boyunca sabit uzunluklu Killing vektör alanı oluyorsa α ya $\mathbb{S}^3$ de bir genel helis denir [4].

Yukarıdaki tanım gereğince; düzlemsel eğriler ve helisler, genel helislere bir örnektir. Gerçekten;

i. Genel helisin ekseni $V = B$ olsun. O zaman α bir düzlemsel eğridir.

ii. $\cot(\theta) = \frac{\tau^2-1}{\tau\kappa}$ için $V(s) = \cos(\theta)T(s) + \sin(\theta)B(s)$ ise α bir helistir.

Önerme 2.11. (Düzlemsel Bertrand Eğriler)

i. $\mathbb{S}^3$ de her düzlemsel eğri, bir Bertrand eğridir ve bu eğri sonsuz sayıda düzlemsel Bertrand eğri çiftine sahiptir.

ii. $\mathbb{S}^3$ de bir α Bertrand eğrisi, bir β düzlemsel Bertrand eğri çiftine sahip ise o zaman α da bir düzlemsel eğridir ve β ile aynı tam geodezik $\mathbb{S}^2$ küresinde yatar [17].

İspat i. α, $\mathbb{S}^3$ de bir düzlemsel eğri ve her $a \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{S}^3$ de bir β_a eğrisi

$$\beta_a(\sigma(s)) = \cos(a)\alpha(s) + \sin(a)N_\alpha(s) \tag{2.30}$$

olsun. O zaman her $a \in \mathbb{R}$ için β_α nın α nın Bertrand eğri çifti olduğunu göstermeliyiz.

Şimdi (2.30) da kovaryant türev alınıp ve Serret-Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma'(s)\,T_{\beta_a}(\sigma(s)) &= \frac{d(\cos(a)\alpha(s) + \sin(a)N_\alpha(s))}{ds} \\
&= \cos(a)\alpha'(s) + \sin(a)N'_\alpha(s) \\
&= \cos(a)T_\alpha(s) + \sin(a)(-\kappa_\alpha T_\alpha(s) + \tau_\alpha B_\alpha(s)) \\
&= (\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha)T_\alpha(s) + \sin(a)\tau_\alpha B_\alpha(s) \\
&\overset{\tau_\alpha=0}{=} \underbrace{(\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha(s))}_{\sigma'(s)}\ \underbrace{T_\alpha(s)}_{T_{\beta_a}(\sigma(s))}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$T_{\beta_a}(\sigma(s)) = T_\alpha(s) \tag{2.31}$$

$$\sigma'(s) = \cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha(s) \tag{2.32}$$

olur. (2.31) de kovaryant türev alınırsa

$$\begin{aligned}
(\kappa_\beta\sigma')N_\beta &= \kappa_\alpha N_\alpha - \alpha + \beta\sigma' \\
&= \kappa_\alpha N_\alpha - \alpha + (\cos^2(a) - \sin(a)\cos(a)\kappa_\alpha)\alpha + (\cos(a)\sin(a) - \sin^2(a)\kappa_\alpha)N_\alpha \\
&= \left((1-\sin^2(a))\kappa_\alpha + \cos(a)\sin(a)\right)N_\alpha + \left(-(1-\cos^2(a)) - \sin(a)\cos(a)\kappa_\alpha\right)\alpha \\
&= \left(\cos^2(a)\kappa_\alpha + \cos(a)\sin(a)\right)N_\alpha + \left(-\sin^2(a) - \sin(a)\cos(a)\kappa_\alpha\right)\alpha \\
&= \cos(a)\left(\cos(a)\kappa_\alpha + \sin(a)\right)N_\alpha - \sin(a)\left(\sin(a) + \cos(a)\kappa_\alpha\right)\alpha \\
&= \left(\cos(a)\kappa_\alpha + \sin(a)\right)\left(\cos(a)N_\alpha - \sin(a)\alpha\right)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

elde edilir. Buradan,

$$\kappa_\beta = \frac{\cos(a)\kappa_\alpha + \sin(a)}{\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha} \tag{2.34}$$

$$N_\beta = -\sin(a)\alpha + \cos(a)N_\alpha \tag{2.35}$$

bulunur. Ayrıca $\sigma = \sigma(s_0)$ olmak üzere β_a nın $\beta_a(\sigma_0)$ başlangıç noktalı asli normal geodeziği $\gamma = \gamma(u)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\gamma(u) &= \cos(u)\beta_a(\sigma_0) + \sin(u)N_{\beta_a}(\sigma_0) \\
&= \cos(u)(\cos(a)\alpha(s_0) + \sin(a)N_\alpha(s)) + \sin(u)(-\sin(a)\alpha(s_0) + \cos(a)N_\alpha(s_0)) \\
&= (\cos(u)\cos(a) - \sin(u)\sin(a))\alpha(s_0) + (\cos(u)\sin(a) + \sin(u)\cos(a)N_\alpha(s_0) \\
&= \cos(u+a)\alpha(s_0) + \sin(u+a)N_\alpha(s_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece γ, aynı zamanda α nın $\alpha(s_0)$ başlangıç noktalı asli normal geodeziği olur. Yani (α, β_a) bir Bertrand eğri çiftidir.

Şimdi (2.35) eşitliğinde kovaryant türev alınıp Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sigma'(s)\frac{d}{d\sigma}N_{\beta_a}(\sigma(s)) &= -\sin(a)T_\alpha(s) + \cos(a)(-\kappa_\alpha T_\alpha(s) + \tau_\alpha B_\alpha(s)) \\
&= -\left(\sin(a) + \cos(a)\kappa_\alpha(s)\right)T_\alpha(s)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Ayrıca

$$\frac{d}{d\sigma}N_{\beta_a}(\sigma(s)) = -\kappa_{\beta_a}(\sigma(s))T_{\beta_a}(\sigma(s)) + \tau_{\beta_a}(\sigma(s))B_{\beta_a}(\sigma(s)) \tag{2.37}$$

olup (2.36) ve (2.37) den

$$\sigma'(s)\left(-\kappa_{\beta_a}(\sigma(s))T_{\beta_a}(\sigma(s)) + \tau_{\beta_a}(\sigma(s))B_{\beta_a}(\sigma(s))\right) = -\left(\sin(a) + \cos(a)\kappa_\alpha(s)\right)T_\alpha(s)$$

elde edilir. Buna göre (2.31) ve (2.34) eşitliklerinin kullanılması ile

$$\tau_{\beta_a}(\sigma(s)) = 0.$$

ii. $\tau_{\beta_a} = 0$ olduğundan Teorem 2.5. (iv) den

$$\sin(\theta) = 0$$

elde ederiz(Böylece $\cos(\theta) = \pm 1$). Teorem 2.5. (i) den $\sin(a)\,\tau_\alpha = 0$ olmalıdır. Eğer $\sin(a) = 0$ ise $\alpha = \pm\beta$ dır ve bu yüzden 2 boyutlu tam geodezik küre üzerinde düzlemsel eğridir. Aksi halde $\tau_\alpha = 0$ olur ve benzer sonuca ulaşılır. ■

Barros, $\mathbb{S}^3$ de Lancret teoremini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.

Teorem 2.12. α, $\mathbb{S}^3$ de bir genel helistir gerek ve yeter şart
i. $\tau_\alpha \equiv 0$ ve α bir $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ de yatar.
ii. $\tau_\alpha \equiv b\kappa_\alpha \pm 1$, $b =$ sabit [4].

Şimdi bu teoremin benzer versiyonunun, $\mathbb{S}^3$ de Bertrand eğriler için ifadesini verelim.

Teorem 2.13. $\mathbb{S}^3$ de bir α eğrisi Bertrand eğridir gerek ve yeter şart
i. $\tau_\alpha \equiv 0$ ve α eğrisi bir iki boyutlu birim küre olan $\mathbb{S}^2$ (küresel düzlem) de yatar.
ii. $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ olacak biçimde $\lambda \neq 0$ ve μ sabitleri vardır [17].

İspat i. α, $\mathbb{S}^3$ de bir Bertrand eğrisi olsun. α, $\mathbb{S}^3$ de bir düzlemsel eğri ise Tanım 2.7. den istenilen elde edilir.
ii. α bir düzlemsel eğri değil ise Teorem 2.5. (i) den

$$(\cos(a) - \sin(a)\,\kappa_\alpha)\sin(\theta) = \sin(a)\cos(\theta)\tau_\alpha$$

ve Önerme 2.11. den $\sin(a) \neq 0$ olup böylece

$$\underbrace{\tan(a)}_{\lambda}\kappa_\alpha + \underbrace{\tan(a)\cot(\theta)}_{\mu}\tau_\alpha = 1 \tag{2.38}$$

elde edilir. O halde $\lambda = \tan(a)$ ve $\mu = \tan(a)\cot(\theta)$ sabitleri için $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ denklemi sağlanmış olur.

Diğer taraftan (i) den α, $\mathbb{S}^3$ de bir düzlemsel eğri olsun. O zaman Önerme 2.11. den α bir Bertrand eğridir. Ayrıca (ii) den (2.38) eşitliği vardır. O zaman, $\mathbb{S}^3$ de $\lambda = \tan(a)$ olmak üzere bir β eğrisi

$$\beta(s) = \cos(a)\,\alpha(s) + \sin(a)\,N_\alpha(s) \tag{2.39}$$

olarak tanımlanabilir. Şimdi (2.39) eşitliğinde her iki tarafın kovaryant türevini alınıp, Frenet denklemleri kullanırsa

$$\sigma'(s)T_\beta(\sigma(s)) = (\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha(s))T_\alpha(s) + (\sin(a)\tau_\alpha(s))B_\alpha(s) \tag{2.40}$$

ve buradan

$$\sigma'(s) = \sqrt{(\cos(a) - \sin(a)\,\kappa_\alpha(s))^2 + (\sin(a)\tau_\alpha(s))^2} \tag{2.41}$$

bulunur. Ayrıca (2.38) den

$$\sin(a)\kappa_\alpha(s) + \mu\cos(a)\tau_\alpha(s) = \cos(a) \tag{2.42}$$

olur. Şimdi (2.41) ve (2.42) eşitlikleri kullanılırsa

$$\sigma'(s) = \tau_\alpha\sqrt{\mu^2\cos^2(a) + \sin^2(a)} \tag{2.43}$$

bulunur. Buradan (2.42) ve (2.43), (2.40) da kullanılırsa

$$T_\beta(\sigma(s)) = \frac{\tau_\alpha(s)(\mu\cos(a))T_\alpha(s) + \tau_\alpha(s)\sin(a)B_\alpha(s)}{\tau_\alpha\sqrt{\mu^2\cos^2(a) + \sin^2(a)}} \tag{2.44}$$

elde edilir. (2.44) de tekrar her iki tarafın kovaryant türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\kappa_\beta\sigma')\,N_\beta = [-\sin(a)\alpha + \cos(a)N_\alpha]\,\frac{\cos(a)\,[-\sin(a)\tau_\alpha(1-\mu^2) + \mu\kappa_a]}{\sqrt{(\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha)^2 + (\sin(a)\tau_\alpha)^2}}$$

olur. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}\kappa_\beta &= \frac{\cos(a)\,[-\sin(a)\tau_\alpha(1-\mu^2) + \mu\kappa_a]}{(\cos(a) - \sin(a)\kappa_\alpha)^2 + (\sin(a)\tau_\alpha)^2}\\ N_\beta &= -\sin(a)\alpha + \cos(a)N_\alpha\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\sigma = \sigma(s_0)$ olmak üzere β nın $\beta(\sigma_0)$ başlangıç noktalı asli normal geodeziği $\gamma = \gamma(u)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\gamma(u) &= \cos(u)\beta(\sigma_0) + \sin(u)N_\beta(\sigma_0) \\
&= \cos(u)(\cos(a)\,\alpha(s_0) + \sin(a)\,N_\alpha(s_0)) + \sin(u)\,(-\sin(a)\,\alpha(s_0) + \cos(a)\,N_\alpha(s_0)) \\
&= (\cos(u)\,\cos(a) - \sin(u)\sin(a))\,\alpha(s_0) + (\cos(u)\sin(a) + \sin(u)\cos(a))N_\alpha(s_0) \\
&= \cos(u+a)\alpha(s_0) + \sin(u+a)N_\alpha(s_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece γ, aynı zamanda α nın $\alpha(s_0)$ başlangıç noktalı asli normal geodeziği olur. Yani (α, β) Bertrand eğri çiftidir. ∎

Önerme 2.14. α, $\mathbb{S}^3$ de bir burulmalı(twisted) eğri olsun. Aşağıdakiler denktir.
i. α bir helistir.
ii. α nın sonsuz Bertrand eğri çifti vardır.
iii. α nın iki tane Bertrand eğri çifti vardır [17].

İspat i. $\Rightarrow$ ii. κ_α ve τ_α sıfırdan farklı sabitler olsun. κ_α ve τ_α aralarında sonsuz sayıda sabit katsayılı lineer bir ilişki elde edilebir. Böylece her farklı lineer ilişki için Bertrand eğri çifti oluşturulabilir.
ii. $\Rightarrow$ iii. α nın sonsuz sayıda Bertrand eğri çifti varsa 2 tane Bertrand eğri çifti olduğu açıktır.
iii. $\Rightarrow$ i. α nın Bertrand eğri çiftleri β_1 ve β_2 olsun.$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \theta_1$ ve θ_2 farklı 4 sabiti için;

$$\begin{aligned}
\tan(a_1)\kappa_\alpha(s) + \tan(a_1)\cot(\theta_1)\tau_\alpha(s) &= 1 \\
\tan(a_2)\kappa_\alpha(s) + \tan(a_2)\cot(\theta_2)\tau_\alpha(s) &= 1
\end{aligned}$$

Burada $a_1 \neq a_2$ dir. Çünkü β_1 ve β_2 α nın birbirinden farklı iki Bertrand eğri çiftidir. Elde ettiğimiz bu denklemlerde kovaryant türev alarak;

$$\begin{aligned}
{\kappa_\alpha}'(s) + \cot(\theta_1){\tau_\alpha}'(s) &= 0 \\
{\kappa_\alpha}'(s) + \cot(\theta_2){\tau_\alpha}'(s) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $\theta_1 \neq \theta_2$ (çünkü $a_1 \neq a_2$) olduğundan ${\kappa_\alpha}'(s) = {\tau_\alpha}'(s) = 0$ dır. Yani α eğrisi, sabit eğrilik ve sabit torsiyona sahiptir. ∎

3. $\mathbb{R}^4$ de (1,3)-Bertrand Eğriler

Bu bölümde, $\mathbb{S}^3$ de Bertrand eğriler ile $\mathbb{R}^4$ de $(1,3)-$Bertrand eğriler arasındaki ilişkileri verelim.

Tanım 3.1. $\mathbb{R}^n$ de bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ birim hızlı regüler eğrinin yay parametresi s olmak üzere bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}\}$ ve eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}$ ile gösterilsin. O zaman $\forall s \in I$ için $\gamma(s)$ noktasından geçen $N_j(s)$ ve $N_k(s)$ Frenet vektörlerinin gerdiği düzleme, $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet $(j,k)-$normal düzlemi denir [19].

Tanım 3.2. $\mathbb{R}^n$ de $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ birim hızlı ve regüler eğri olsun. O zaman γ eğrisinin $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-2}$ eğrilikleri heryerde pozitif ve κ_{n-1} eğriliği sıfırdan farklı ise γ ya özel Frenet eğrisi denir. Özellikle tüm κ_i eğrilik fonksiyonları sabit ise γ eğrisi $\mathbb{R}^n$ de bir helisdir denir [19].

Tanım 3.3. $\mathbb{R}^4$ de $\gamma : I \to \mathbb{R}^4$ ve $\overline{\gamma} : \overline{I} \to \mathbb{R}^4$ birim hızlı özel Frenet eğrilerinin yay parametreleri sırasıyla s ve $\overline{s}$ olsun. Bu durumda γ ve $\overline{\gamma}$ nin karşılıklı noktalarındaki Frenet $(1,3)-$normal düzlemlerinde çakışacak şekilde bir $\varphi : I \to \overline{I}$ regüler diferensiyellenebilir dönüşüm varsa γ ya $\mathbb{R}^4$ de $(1,3)-$Bertrand eğri denir [19].

Şimdi $\mathbb{S}^3$ de bir $\alpha = \alpha(t)$ eğrisinin Serret-Frenet çatısı $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ ve $\mathbb{R}^4$ de

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} B_\alpha(s(u))du \tag{3.1}$$

olarak tanımlanan eğrinin Serret-Frenet çatısı $\{T^\gamma, N_1^\gamma, N_2^\gamma, N_3^\gamma\}$ olsun. Burada $s = s(t)$ olmak üzere $\alpha(s(t))$, α nın yeniden parametrelendirmesidir ve genelliği bozmadan $s'(t) > 0$ kabul edilebilir. Böylece $\gamma'(t) = B_\alpha(s(t))$ olup γ eğriside $\mathbb{R}^4$ de birim hızlı bir eğridir.

O halde α ve γ eğrisinin tanımından

$$T^\gamma(t) = B_\alpha(s(t)) \tag{3.2}$$

olup her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\kappa_1(t)N_1^\gamma(t) = -s'(t)\tau_\alpha(s(t))N_\alpha(s(t))$$

bulunur. Buradan,

$$\kappa_1(t) = \rho s'(t)\tau_\alpha(s(t)) > 0,\ \varepsilon = \pm 1 \tag{3.3}$$

$$N_1^\gamma(t) = -\rho N_\alpha(s(t)) \tag{3.4}$$

olup her iki tarafın türevi alınıp Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\kappa_2(t)N_2^\gamma(t) = \rho s'(t)\kappa_\alpha(s(t))T_\alpha(s(t))$$

dir. Buradan

$$\kappa_2(t) = s'(t)\kappa_\alpha(s(t)) > 0 \tag{3.5}$$

$$N_2^\gamma(t) = \rho T_\alpha(s(t)) \tag{3.6}$$

elde edilir. Son olarak benzer şekilde türevler alınıp Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\kappa_3(t)N_3^\gamma(t) = -\rho s'(t)\alpha(s(t)) \tag{3.7}$$

olur. Ayrıca

$$B_\alpha(s(t)) = \alpha(s(t)) \times T_\alpha(s(t)) \times N_\alpha(s(t)) \tag{3.8}$$

$$N_3^\gamma(t) = T^\gamma(t) \times N_1^\gamma(t) \times N_2^\gamma(t) \tag{3.9}$$

olup (3.8) ve Tanım 1.5. kullanılırsa

$$\det(\alpha(s(t)), T_\alpha(s(t)), N_\alpha(s(t)), B_\alpha(s(t))) = 1$$

elde edilir. Şimdi $B_\alpha(s(t)) \times N_\alpha(s(t)) \times T_\alpha(s(t)) = \delta\alpha(s(t))$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\delta &= \langle B_\alpha(s(t)) \times N_\alpha(s(t)) \times T_\alpha(s(t)), \alpha(s(t)\rangle \\ &= \det\left(B_\alpha(s(t)), N_\alpha(s(t)), T_\alpha(s(t)), \alpha(s(t)\right) \\ &= \det\left(\alpha(s(t), T_\alpha(s(t)), N_\alpha(s(t)), B_\alpha(s(t))\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

olduğundan

$$B_\alpha(s(t)) \times N_\alpha(s(t)) \times T_\alpha(s(t)) = \alpha(s(t) \tag{3.10}$$

elde edilir. Son olarak, (3.2), (3.4), (3.6) ve (3.10) eşitlikleri (3.9) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} N_3^\gamma(t) &= B_\alpha(s(t)) \times (-\rho N_\alpha(s(t))) \times (\rho T_\alpha(s(t))) \\ &= -\left(B_\alpha(s(t)) \times N_\alpha(s(t)) \times T_\alpha(s(t))\right) \\ &= -\alpha(s(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \kappa_3(t) &= \rho s'(t) \neq 0, \\ N_3^\gamma(t) &= -\alpha(s(t)) \end{aligned} \tag{3.11}$$

olmalıdır.

Önerme 3.4. $\alpha(t)$, $\mathbb{S}^3$ de sabit olmayan eğrilikli ve düzlemsel olmayan bir Bertrand eğri olsun. O zaman $\mathbb{R}^4$ de $\kappa_3(t) = \rho s'(t)$ eğrilikli birim hızlı bir

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} B_\alpha(s(u))du$$

$(1,3)-$Bertrand eğrisi vardır öyle ki $s = s(t)$ $(s'(t) > 0)$ regüler diferensiyellenebilir dönüşümdür [17].

İspat Teorem 2.13. den $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ dir, a ve b iki sabit reel sayı olmak üzere

$$\lambda\left[\rho a\left(\lambda\tau_\alpha - \mu\kappa_\alpha\right) + b\mu\right] > 0$$

ve $s'(t)$ fonksiyonu için

$$s'(t) = \frac{\lambda}{\rho a\left(\lambda\tau_\alpha - \mu\kappa_\alpha\right) + b\mu} > 0 \tag{3.12}$$

olsun. O zaman ([19], Teorem B) deki aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösterelim

$$a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s) \neq 0 \tag{3.13}$$

$$a\kappa_1(s) + c(a\kappa_2(s) - b\kappa_3) = 1 \tag{3.14}$$

$$c\kappa_1(s) - \kappa_2(s) = d\kappa_3(s) \tag{3.15}$$

$$(c^2-1)\kappa_1(s)\kappa_2(s) + c((\kappa_1(s))^2 - (\kappa_2)^2 - (\kappa_3)^2) \neq 0 \tag{3.16}$$

Şimdi (3.12) eşitliğini göz önüne alırsak

$$\lambda = \rho a s'(t)\,\lambda\tau_\alpha - \rho a s'(t)\,\mu\kappa_\alpha + \rho^2 b\mu s'(t) \tag{3.17}$$

olur ve burada (3.3),(3.5) ve (3.11) eşitlikleri kullanılırsa

$$\lambda = \kappa_1 a\lambda - \rho\mu\,(a\kappa_2 - b\kappa_3) \neq 0 \tag{3.18}$$

elde edilir.
i. (3.13) eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Bunun için (3.18) de aşağıdaki durumlar incelenebilir.
(I.durum) $a = 0$ ise (3.11) ve (3.18) den $b\kappa_3 \neq 0$ olmalıdır. Böylece

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0$$

elde edilir.
(II.durum) $a \neq 0$ için kabul edelim ki $a\kappa_2 - b\kappa_3 = 0$ olsun. O halde (3.18) den

$$\kappa_1 a = 1$$

olmalıdır. Ayrıca (2.38) ve (3.3) eşitlikleride kullanılırsa

$$(\rho s'(t)\tau_\alpha)\,a = \lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha$$

bulunur. Buradan $\lambda = 0$ ve $\mu = a\rho s'(t)$ olur. Bu da hipotez($\lambda \neq 0$ olmasıyla) ile çelişir. O halde kabul yanlış olup $a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0$ olmalıdır.Sonuç olarak I. ve II. durumdan

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0 \tag{3.19}$$

bulunur.
ii.(3.14) eşitliğinin sağlandığını gösterelim. (3.18) eşitliğinin her iki tarafı λ ile bölünürse ve $c = -\frac{\rho\mu}{\lambda}$ ise

$$a\kappa_1 + c\,(a\kappa_2 - b\kappa_3) = 1 \tag{3.20}$$

elde edilir.
iii. (3.15) eşitliğinin sağlandığını gösterelim. (3.3), (3.5), (3.11) ve (2.38) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mu\kappa_1 + \rho\lambda\kappa_2 = \kappa_3 \tag{3.21}$$

olduğu kolayca görülür. Buradan her iki tarafı $-\lambda$ ile bölersek ve $d = -\frac{\rho}{\lambda}$ ise

$$c\kappa_1 - \kappa_2 = d\kappa_3 \tag{3.22}$$

eşitliği elde edilir.
iv.(3.19), (3.20), (3.22) eşitliklerinde gerekli işlemler yapılırsa

$$(c^2-1)\kappa_1\kappa_2 + c({\kappa_1}^2 - {\kappa_2}^2 - {\kappa_3}^2) \neq 0 \tag{3.23}$$

elde edilir. ■

Uyarı 3.5. Özel olarak $s'(t) = \frac{\lambda}{\rho a(\lambda\tau_\alpha - \mu\kappa_\alpha) - b\mu} = 1$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^4$ de $\gamma(t) = \int\limits_{t_0}^{t} B_\alpha(s(u))du$ olarak tanımlı $(1,3)-$Bertrand eğrisinin üçüncü eğriliği $\kappa_3 = \pm 1$ olur. Bununla birlikte α, $\mathbb{S}^3$ de düzlemsel olmayan helis ise o zaman $\mathbb{R}^4$ de γ eğrisi de helisdir [17].

Örnek 3.6. $a, b \in \mathbb{R}^4$, $r > 1$ için $\gamma : I \to \mathbb{R}^4$

$$\gamma(s) = \left(a\cos\left(\frac{r}{\sqrt{r^2a^2+b^2}}s\right), a\sin\left(\frac{r}{\sqrt{r^2a^2+b^2}}s\right), b\cos\left(\frac{1}{\sqrt{r^2a^2+b^2}}s\right), b\sin\left(\frac{1}{\sqrt{r^2a^2+b^2}}s\right)\right) \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlı birim hızlı eğrinin eğrilikleri

$$\kappa_1(s) = \frac{\sqrt{r^4a^2+b}}{r^2a^2+b^2}, \kappa_2(s) = \frac{r\left(r^2-1\right)ab}{(r^2a^2+b^2)\sqrt{r^4a^2+b^2}}, \kappa_3(s) = \frac{r}{\sqrt{r^4a^2+b^2}} \tag{3.25}$$

olarak bulunur. Bu durumda $i = 1, 2, 3$ için κ_i ler sabit olduğundan γ, $\mathbb{R}^4$ de bir helisden başka birşey değildir [17].

Şimdi de $\mathbb{R}^4$ de $(1,3)-$Bertrand eğriden, $\mathbb{S}^3$ de bir Bertrand eğri elde etme metodunu verelim.

$\mathbb{R}^4$ de bir yay uzunluğu parametreli bir $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1^\gamma, N_2^\gamma, N_3^\gamma\}$ olmak üzere $\mathbb{S}^3$ deki σ yay parametreli bir eğri

$$\alpha(\sigma(s)) = T(s)$$

şeklinde tanımlansın. Burada her iki tarafın s parametresine göre kovaryant türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\sigma'(s)T_\alpha(\sigma(s)) = \kappa_1(s)N_1^\gamma(s)$$

ve buradan

$$\sigma'(s) = \rho_1\kappa_1(s) \tag{3.26}$$
$$T_\alpha(\sigma(s)) = \rho_1 N_1^\gamma(s) \tag{3.27}$$

bulunur ve (3.27) de tekrar s ye göre kovaryant türev alarak

$$\sigma'(s)\kappa_\alpha(\sigma(s))N_\alpha(\sigma(s)) = \rho_1\kappa_2(s)N_2^\gamma(s)$$

elde ederiz. Buradan

$$\sigma'(s)\kappa_\alpha(\sigma(s)) = \rho_2\kappa_2(s), \rho_2 = \pm 1 \tag{3.28}$$
$$N_\alpha(\sigma(s)) = \rho_1\rho_2 N_2^\gamma(s) \tag{3.29}$$

Son olarak (3.29) da s ye göre kovaryant türev alınarak

$$\sigma'(s)\tau_\alpha(\sigma(s))B_\alpha(\sigma(s)) = \rho_1\rho_2\kappa_3(s)N_3^\gamma(s) \tag{3.30}$$

elde edilir. Buradan

$$\sigma'(s)\tau_\alpha(\sigma(s)) = \rho_3\kappa_3(s) \tag{3.31}$$
$$B_\alpha(\sigma(s)) = \rho_1\rho_2\rho_3 N_3^\gamma(s) \tag{3.32}$$

ifadeleri elde edilir.

Şimdi de $\mathbb{S}^3$ de σ yay parametreli α eğrisi $\alpha(\sigma(s)) = N_3^\gamma(s)$ olarak tanımlansın. Burada her iki tarafın s ye göre kovaryant türevini alıp Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\sigma'(s)T_\alpha(\sigma(s)) = -\kappa_3 N_2^\gamma(s)$$

elde edilir ve buradan

$$\sigma'(s) = \rho_3\kappa_3, \rho_3 = \pm 1 \tag{3.33}$$
$$T_\alpha(\sigma(s)) = -\rho_3 N_2^\gamma(s) \tag{3.34}$$

(3.34) de tekrar s ye göre kovaryant türev alarak

$$\sigma'(s)\kappa_\alpha(\sigma(s))N_\alpha(\sigma(s)) = \rho_3\kappa_2 N_1^\gamma(s)$$

elde ederiz. Buradan

$$\sigma'(s)\kappa_\alpha(\sigma(s)) = \rho_2\kappa_2, \rho_2 = \pm 1 \tag{3.35}$$

$$N_\alpha(\sigma(s)) = \rho_2\rho_2 N_1^\gamma(s) \tag{3.36}$$

olur. Son olarak (3.36) da s ye göre türev alınarak

$$\sigma'(s)\,\tau_\alpha(\sigma(s))\,B_\alpha(\sigma(s)) = -\rho_2\rho_3\kappa_1(s)\,T(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\sigma'(s)\,\tau_\alpha(\sigma(s)) = \rho_1\kappa_1(s) \tag{3.37}$$

$$B_\alpha(\sigma(s)) = -\rho_1\rho_2\rho_3 T(s) \tag{3.38}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki önermeler elde edilir.

Önerme 3.7. $\gamma(s)$, $\mathbb{R}^4$ de yay uzunluğu parametreli ve sabit eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olan bir helis olsun. O zaman
i. $\mathbb{S}^3$ de $\alpha(s) = T(s)$ olarak tanımlı eğrinin eğriliği $\kappa_\alpha = \pm\frac{\kappa_2}{\kappa_1} > 0$ ve burulması $\tau_\alpha = \pm\frac{\kappa_3}{\kappa_1} \neq 0$ olan bir helistir.
ii. $\mathbb{S}^3$ de $\alpha(s) = N_3^\gamma(s)$ olarak tanımlı eğrinin eğriliği $\kappa_\alpha = \pm\frac{\kappa_2}{\kappa_3} > 0$ ve burulması $\tau_\alpha = \pm\frac{\kappa_1}{\kappa_3} \neq 0$ olan bir helistir [17].

İspat i. (3.26), (3.28) ve (3.31) eşitliklerinden ve ii. (3.33), (3.35) ve (3.37) eşitliklerinden elde edilir. ■

Önerme 3.8. $\gamma(s)$, $\mathbb{R}^4$ de yay uzunluğu parametreli ve Frenet çatısı $\{T, N_1^\gamma, N_2^\gamma, N_3^\gamma\}$ olan bir $(1,3)-$Bertrand eğri olsun. O zaman $\mathbb{S}^3$ de bir Bertrand eğri ya $\alpha(s) = T(s)$ ya da $\alpha(s) = N_3^\gamma(s)$ [17].

İspat $\gamma(s)$, $\mathbb{R}^4$ de $(1,3)-$Bertrand eğri ise O zaman ([19], Teorem B) den a, b, c, d sabit reel sayılar olmak üzere (3.19), (3.20), (3.22) ve (3.23) eşitlikleri sağlanır. Buradan $\kappa_2 > 0$ olup (3.22) eşitliğinden $c^2 + d^2 \neq 0$ ve

$$c\kappa_1 - d\kappa_3 = \kappa_2 > 0$$

elde edilir. Şimdi iki durumu inceleyelim :

i. $c \neq 0$ için $\alpha(s) = T(s)$ olsun. O halde (3.26), (3.28) ve (3.31) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \rho_1 \sigma' &= \kappa_1 \\ \rho_2 \sigma' \kappa_\alpha &= \kappa_2 \\ \rho_3 \sigma' \kappa_\alpha &= \kappa_3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler

$$c\kappa_1 - \kappa_2 = d\kappa_3$$

eşitliğinde kullanılırsa,

$$\rho_2 \kappa_\alpha + d\rho_3 \tau_\alpha = c\rho_1$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki taraf $c\rho_1$ ile bölünürse

$$\underbrace{\left(\frac{\rho_2}{c\rho_1}\right)}_{\lambda} \kappa_\alpha + \underbrace{\left(\frac{d\rho_3}{c\rho_1}\right)}_{\mu} \tau_\alpha = 1 \tag{3.39}$$

bulunur. Yani $\lambda = \frac{\rho_2}{c\rho_1}$ ve $\mu = \frac{d\rho_3}{c\rho_1}$ olacak şekilde $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ eşitliği elde edilir.

ii. $d \neq 0$ için $\alpha(s) = N_3^\gamma(s)$ alalım. O halde (3.33), (3.35) ve (3.37) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \rho_3 \sigma' &= \kappa_3 \\ \rho_2 \sigma' \kappa_\alpha &= \kappa_2 \\ \rho_1 \sigma' \tau_\alpha &= \kappa_1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler

$$c\kappa_1 - \kappa_2 = d\kappa_3$$

eşitliğinde kullanılırsa,

$$c\rho_1 \tau_\alpha - \rho_2 \kappa_\alpha = d\rho_3$$

elde edilir. Her iki tarafı $d\rho_3$ ile bölelim($d\rho_3 \neq 0$)

$$\underbrace{\left(\frac{-\rho_2}{d\rho_3}\right)}_{\lambda} \kappa_\alpha + \underbrace{\left(\frac{c\rho_1}{d\rho_3}\right)}_{\mu} \tau_\alpha = 1$$

elde edilir. Yani $\lambda = \frac{-\rho_2}{d\rho_3}$ ve $\mu = \frac{c\rho_1}{d\rho_3}$ olacak şekilde $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ eşitliği elde edilir.

■

Örnek 3.9. $\alpha : I \to \mathbb{S}^3$ birim hızlı eğrisinin parametrizasyonu

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s \right), \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s \right), \sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{6}} \right), \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{6}} \right) \right)$$

olarak verilsin. Gerekli hesaplamalardan sonra α eğrisinin $\mathbb{S}^3$ deki Frenet elemanları,

$$T_\alpha(s) = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \sin\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} s \right), \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} s \right), -\frac{1}{3} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{6}} \right), \frac{1}{3} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{6}} \right) \right)$$

$$N_\alpha(s) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} s \right), -\sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} s \right), \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{6}} \right), \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{6}} \right) \right)$$

$$B_\alpha(s) = \left(-\frac{1}{3} \sin\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} s \right), \frac{1}{3} \cos\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} s \right), \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{6}} \right), -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{6}} \right) \right)$$

ve eğrilikleri

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{5}{3\sqrt{2}}, \tau_\alpha(s) = -\frac{2}{3}$$

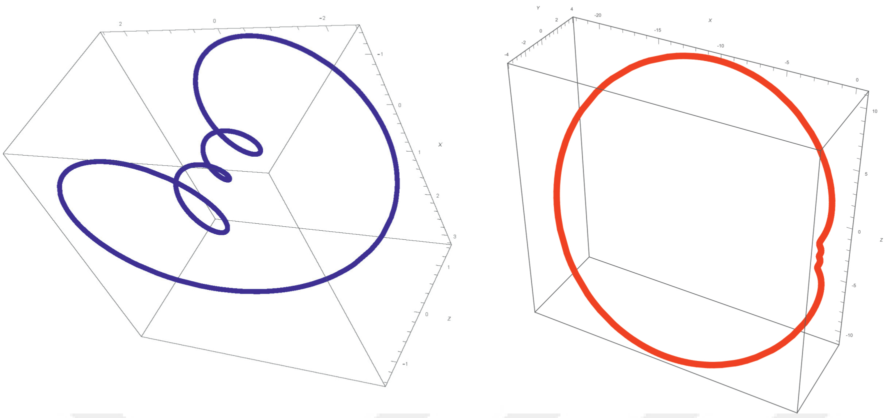
olarak bulunur. O halde α eğrisi $\mathbb{S}^3$ de bir helisdir. Ayrıca Önerme 2.14 den α eğrisi bir Bertrand eğri olup sonsuz tane Bertrand eğri çiftine sahiptir. Buna göre α eğrisine, $a = \frac{\pi}{4}$ kadar sabit küresel uzaklıktaki bir Bertrand eğri çiftinin parametrizasyonu

$$\beta(\sigma(s)) = \left(\frac{\left(-2+\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s \right), \frac{\left(-2+\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s \right), \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{6}} s \right), \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{6}} s \right) \right)$$

olarak verilir. Gerekli hesaplamalardan sonra β eğrisinin eğrilikleri de

$$\kappa_\beta(s) = \frac{5}{89}\left(17 + 10\sqrt{2}\right), \tau_\beta(s) = -\frac{8}{89}\left(17 + 10\sqrt{2}\right)$$

olarak bulunur. O halde α eğrisinin Bertrand eğri çifti olan β eğriside $\mathbb{S}^3$ de bir helisdir.



(a) (b)

Şekil 3.1: (a) α eğrisinin stereografik izdüşümü
(b) β eğrisinin stereografik izdüşümü

Bu eğrilerin $\mathbb{S}^3$ ün $\mathbb{R}^3$ uzayına stereografik izdüşümü altındaki görüntüleride Şekil 3.1 de ifade edilir.

4. Hiperbolik Uzayda Bertrand Eğriler

Tanım 4.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^3$ bir immersed eğri ve $\mathbb{H}^3$ de α eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. O zaman $\mathbb{H}^3$ de $\alpha(t)$ başlangıç noktalı

$$\gamma_t^{\alpha}(u) = \cosh(u)\alpha\left(t\right) + \sinh(u)N(t), \;\; u \in \mathbb{R}, \;\; t \in I \tag{4.1}$$

geodezik eğrisine $\mathbb{H}^3$ de asli normal geodezik denir [18].

Tanım 4.2. Sıfırdan farklı geodezik eğriliğe sahip $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^3$ immersed eğrisi ve $\beta : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^3$ immersed eğrisi verilsin. O zaman α ve β eğrileri arasında birebir karşılık getiren bir $\sigma : I \to J$, $\sigma\left(t\right) \in J$ dönüşümü var öyle ki her iki eğri karşılıklı noktalarında ortak asli normal geodezik eğriye sahip ise α eğrisine, $\mathbb{H}^3$ de bir Bertrand eğri ve β eğrisine de $\mathbb{H}^3$ de α nın Bertrand eğri çifti denir [18].

Uyarı 4.3. Bundan sonra genelliği bozmadan, α ve β eğrileri $\mathbb{H}^3$ de birim hızlı (yay parametresi ile parametrelendirilmiş) immersed eğriler kabul edilecek.

Şimdi $\alpha : I \to \mathbb{H}^3$ ve $\beta : J \to \mathbb{H}^3$ sırasıyla, s ve σ yay parametreli birim hızlı eğriler ve β, $\mathbb{H}^3$ de α nın Bertrand eğri çifti olsun. O zaman α ve β nın $\mathbb{H}^3$ de Serret-Frenet çatıları sırasıyla,

$$\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}, \; \{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$$

olmak üzere bir $a(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu var öyle ki Tanım 4.2. den

$$\beta(\sigma(s)) = \cosh(a(s))\alpha(s) + \sinh(a(s))N_\alpha(s) \tag{4.2}$$

yazılabilir.

Önerme 4.4. $\alpha(s)$ ve $\beta(\sigma(s))$, $\mathbb{H}^3$ de Bertrand eğri çifti olsun. O zaman aşağıdakiler vardır.
i. $a(s)$ fonksiyonu sabittir.
ii. $d_{H^3}\left(\alpha\left(s\right), \beta\left(\sigma\left(s\right)\right)\right)$ hiperbolik uzaklık fonksiyonu sabittir.
iii. α ve β nın karşılıklı noktalarında teğet vektörler($\mathbb{R}^4_1$ de vektör olarak) arasındaki açı sabittir.

iv. α ve β nın karşılıklı noktalarında binormal vektörler ($\mathbb{R}_1^4$ de vektör olarak) arasındaki açı sabittir [18].

İspat i. (4.1) denklemini kullanarak;

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\gamma_s^\alpha}{du}\right|_{u=0} &= \frac{d}{du}\left(\cosh(u)\alpha(s)+\sinh(u)N_\alpha(s)\right)\\ &= \left.\left(\sinh(u)\alpha(s)+\cosh(u)N_\alpha(s)\right)\right|_{u=0}\\ &= N_\alpha(s) \end{aligned}\tag{4.3}$$

ve

$$\left.\frac{d\gamma_s^\alpha}{du}\right|_{u=a(s)} = \sinh\left(a\left(s\right)\right)\alpha\left(s\right)+\cosh\left(a\left(s\right)\right)N_\alpha\left(s\right)\tag{4.4}$$

elde edilir. Ayrıca α ve β karşılıklı noktalarında ortak asli normal geodeziklere sahip olduğundan (4.3) ve (4.4) den

$$\left.\frac{d\gamma_s^\alpha}{du}\right|_{u=a(s)} = N_\beta\left(\sigma(s)\right)\tag{4.5}$$

olur. Şimdi (4.4) ve (4.5) eşitliklerini kullanarak;

$$N_\beta\left(\sigma(s)\right)=\sinh\left(a\left(s\right)\right)\alpha\left(s\right)+\cosh\left(a\left(s\right)\right)N_\alpha\left(s\right)\tag{4.6}$$

bulunur. Diğer taraftan β eğrisinin, β boyunca Frenet çatısı $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ ise (4.2) denkleminin $\mathbb{R}_1^4$ de s ye göre türevinin alınmasıyla

$$\begin{aligned}\frac{d\beta(\sigma(s))}{ds} &= \frac{d}{ds}\left[\cosh(a(s))\alpha(s)+\sinh(a(s))N_\alpha(s)\right]\\ &= a'(s)\sinh(a(s))\alpha(s)+\cosh(a(s))\alpha'(s)\\ &\quad +a'(s)\cosh(a(s))N_\alpha(s)+\sinh(a(s)){N'}_\alpha(s)\\ &= a'(s)\sinh(a(s))\alpha(s)+\cosh(a(s))T_\alpha(s)\\ &\quad +a'(s)\cosh(a(s))N_\alpha(s)+\sinh(a(s))(-\kappa_h T_\alpha(s)+\tau_h B_\alpha(s))\\ &= a'(s)\sinh(a(s))\alpha(s)+\left[\cosh(a(s))-\kappa_h\sinh(a(s))\right]T_\alpha(s)\\ &\quad +a'(s)\cosh(a(s))N_\alpha(s)+\tau_h\sinh(a(s))B_\alpha(s)\end{aligned}\tag{4.7}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{d\beta(\sigma(s))}{ds} = \frac{d\beta}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \sigma'(s)T_\beta(\sigma(s)) \tag{4.8}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece (4.6) ve (4.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{ds}\beta\left(\sigma\left(s\right)\right), N_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right)\rangle_* &= \langle a'\left(s\right)\sinh\left(a\left(s\right)\right)\alpha\left(s\right) + \left[\cos\left(a\left(s\right)\right) - \kappa_h^\alpha\left(s\right)\sinh\left(a\left(s\right)\right)\right]T_\alpha(s) \\
&\quad + a'\left(s\right)\cosh\left(a\left(s\right)\right)N_\alpha\left(s\right) + \tau_h^\alpha\left(s\right)\sinh\left(a\left(s\right)\right)B_\alpha\left(s\right), \\
&\quad \sinh\left(a\left(s\right)\right)\alpha\left(s\right) + \cosh\left(a\left(s\right)\right)N_\alpha\left(s\right)\rangle_* \\
&= a'\left(s\right)\sinh^2\left(a\left(s\right)\right)\underbrace{\langle\alpha\left(s\right), \alpha\left(s\right)\rangle_*}_{-1} \\
&\quad + a'\left(s\right)\cosh^2\left(a\left(s\right)\right)\underbrace{\langle N_\alpha\left(s\right), N_\alpha\left(s\right)\rangle_*}_{1} \\
&= a'\left(s\right)\left[-\sinh^2\left(a\left(s\right)\right) + \cosh^2\left(a\left(s\right)\right)\right] \\
&= a'\left(s\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $a(s)$ sabit bir fonksiyondur.

ii. (4.2) den

$$\beta(\sigma(s)) = \cosh(a(s))\alpha(s) + \sinh(a(s))N_\alpha(s) \tag{4.9}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{H}^3}\left(\alpha(s), \beta\left(\sigma(s)\right)\right) &= \eta\left(\alpha(s), \beta\left(\sigma(s)\right)\right) \\
&= \operatorname{arccosh}\left(-\langle\alpha(s), \beta\left(\sigma(s)\right)\rangle_*\right) \\
&= \operatorname{arccosh}\left(\cosh(a(s))\right) \\
&= a(s)
\end{aligned}$$

(i) den $a(s)$ sabit olduğundan istenilen elde edilir.

iii.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left\langle T_\alpha\left(s\right), T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right)\right\rangle_* &= \left\langle \kappa_h^\alpha\left(s\right)N_\alpha\left(s\right) + \alpha\left(s\right), T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right)\right\rangle_* \\
&\quad + \sigma'\left(s\right)\left\langle T_\alpha\left(s\right), \kappa_h^\beta\left(\sigma\left(s\right)\right)N_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) + \beta\left(\sigma\left(s\right)\right)\right\rangle_*
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Diğer yandan (4.7) ve (4.8) eşitlikleri ve (i) kullanılarak

$$T_\beta\left(\sigma\left(s\right)\right) = \frac{1}{\sigma'\left(s\right)}\left(\left(\cosh(\mathrm{a})\right) - \kappa_h^\alpha\left(s\right)\left(\sinh(\mathrm{a})\right)\right)T_\alpha\left(s\right) + \tau_h^\alpha(\sinh(\mathrm{a}))B_\alpha\left(s\right) \tag{4.11}$$

elde edilir. Böylece (4.2), (4.6) ve (4.11) eşitlikleri (4.10) da yerine konulursa

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left\langle T_{\alpha}(s), T_{\beta}(\sigma(s))\right\rangle_{*} &= \left\langle \kappa_h^{\alpha} N_{\alpha}(s)+\alpha(s), \frac{1}{\sigma'(s)}\left((\cosh(a))-\kappa_h^{\alpha}(\sinh(a))\right)T_{\alpha}(s)+\tau_h^{\alpha}\sinh(a)B_{\alpha}(s)\right\rangle_{*}\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Yani c bir keyfi sabit olmak üzere

$$\cos\left(\theta\left(T_{\alpha}(s), T_{\beta}(\sigma(s))\right)\right)=c$$

olduğu görülür.
iv. (4.11) den T_{β}, $S_p\{T_{\alpha}, B_{\alpha}\}$ düzleminde yatar. Dolayısıyla

$$T_{\beta}(\sigma(s))=\lambda_1 T_{\alpha}(s)+\lambda_2 B_{\alpha}(s),\ \lambda_i\in\mathbb{R}$$

yazılabilir. T_{α} ve B_{α} arasındaki açı θ ise bu açı (iii) den sabittir. O zaman,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left\langle T_{\beta}(\sigma(s)), T_{\alpha}(s)\right\rangle=\cos(\theta)\\ \lambda_2 &= \left\langle T_{\beta}(\sigma(s)), B_{\alpha}(s)\right\rangle\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ &= \sin(\theta)\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde

$$T_{\beta}(\sigma(s))=\cos(\theta)T_{\alpha}(s)+\sin(\theta)B_{\alpha}(s). \tag{4.12}$$

Ayrıca β nın binormal vektörü

$$B_{\beta}(\sigma(s))=\mu_1 T_{\alpha}(s)+\mu_2 N_{\alpha}(s)+\mu_3 B_{\alpha}(s)$$

olacak şekilde $\mu_i\in\mathbb{R}$ sayıları vardır. Buna göre (4.2), (4.6) ve (4.12) kullanılarak

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \left\langle B_{\beta}(\sigma(s)), T_{\alpha}(s)\right\rangle=-\sin(\theta)\\ \mu_2 &= \left\langle B_{\beta}(\sigma(s)), N_{\alpha}(s)\right\rangle=0\\ \mu_3 &= \left\langle B_{\beta}(\sigma(s)), B_{\alpha}(s)\right\rangle=\cos(\theta)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani $B_{\beta}(\sigma(s))\in S_p\{T_{\alpha}(s), B_{\alpha}(s)\}$ olup

$$B_{\beta}(\sigma(s))=-\sin(\theta)\,T_{\alpha}(s)+\cos(\theta)\,B_{\alpha}(s) \tag{4.13}$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left\langle B_\alpha(s), B_\beta(\sigma(s))\right\rangle_* &= \frac{d}{ds}\left\langle B_\alpha(s), -\sin(\theta)T_\alpha(s) + \cos(\theta)B_\alpha(s)\right\rangle_* \\
&= \left\langle B_\alpha{}'(s), -\sin(\theta)T_\alpha(s) + \cos(\theta)B_\alpha(s)\right\rangle_* \\
&\quad + \left\langle B_\alpha(s), -\sin(\theta)(\kappa_h^\alpha N_\alpha) + \cos(\theta)B_\alpha{}'(s)\right\rangle_* \\
&= \left\langle -\tau_h^\alpha N_\alpha(s), \sin(\theta)T_\alpha(s) + \cos(\theta)B_\alpha(s)\right\rangle_* \\
&\quad + \left\langle B_\alpha(s), -\sin(\theta)\left(\kappa_h^\alpha N_\alpha\right) + \cos(\theta)\left(-\tau_h^\alpha N_\alpha\right)\right\rangle_* \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ve buradan

$$
\left\langle B_\alpha(s), B_\beta(\sigma(s))\right\rangle_* = sabit
$$

olup istenen elde edilir. ■

Teorem 4.5. $\mathbb{H}^3$ de verilen α ve β Bertrand eğri çiftinin hiperbolik eğriliği ve hiperbolik burulması sırasıyla, $\kappa_h^\alpha, \tau_h^\alpha$ ve $\kappa_h^\beta, \tau_h^\beta$ olsun. O zaman a ve θ iki sabit olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur [18].

i. $(\cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^\alpha)\sin(\theta) = \sinh(a)\cos(\theta)\tau_h^\alpha$,

ii. $(\cosh(a) + \sinh(a)\kappa_h^\beta)\sin(\theta) = \sinh(a)\cos(\theta)\tau_h^\beta$,

iii. $(\cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^\alpha)(\cosh(a) + \sinh(a)\kappa_h^\beta) = \cos^2(\theta)$,

iv. $\sinh^2(a)\,\tau_h^\alpha\,\tau_h^\beta = \sin^2(\theta)$

İspat i. $\beta(\sigma(s))$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$
\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) = \frac{d\beta}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \sigma'(s)T_\beta(\sigma(s))
$$

olur ve (4.12) uygulanırsa

$$
\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) = \sigma'(s)(\cos(\theta)T_\alpha(s) + \sin(\theta)B_\alpha(s)) \tag{4.14}
$$

Diğer taraftan (4.2) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp Frenet denklemleri uygulanırsa $a(s) = a$ sabit olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) &= \frac{d}{ds}(\cosh(a)\alpha(s) + \sinh(a)N_\alpha(s)) \\
&= (\cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^\alpha(s))T_\alpha(s) + \sinh(a)\tau_h^\alpha(s)B_\alpha(s). \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Buna göre (4.14) ve (4.15) den

$$\sigma'(s)\cos(\theta) = \cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^\alpha(s) \tag{4.16}$$
$$\sigma'(s)\sin(\theta) = \sinh(a)\tau_h^\alpha(s) \tag{4.17}$$

elde edilir. O halde (4.16) ve (4.17) den

$$(\cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^\alpha(s))\sin(\theta) = \sinh(a)\cos(\theta)\tau_h^\alpha(s)$$

olur ve istenilen eşitlik elde edilir.
ii. Hipotezden $s : J \to I,\ s = s(\sigma)$ dönüşümü vardır öyle ki $\alpha = \alpha(s(\sigma))$ Bertrand eğrisinin, $\mathbb{H}^3$ deki Saban çatısının elemanları, $\beta = \beta(\sigma)$ nın $\mathbb{H}^3$ deki Saban çatısının elemanları cinsinden ifade edilebilir. Yani (4.2),(4.6),(4.14) ve (4.15) eşitliklerinden

$$\alpha(s(\sigma)) = \cosh(a)\beta(\sigma) - \sinh(a)N_\beta(\sigma) \tag{4.18}$$
$$T_\alpha(s(\sigma)) = \cos(\theta)T_\beta(\sigma) - \sin(\theta)B_\beta(\sigma) \tag{4.19}$$
$$N_\alpha(s(\sigma)) = \sinh(a)\beta(\sigma) + \cosh(a)N_\beta(\sigma) \tag{4.20}$$
$$B_\alpha(s(\sigma)) = \sin(\theta)T_\beta(\sigma) + \cos(\theta)B_\beta(\sigma) \tag{4.21}$$

eşitlikleri yazılabilir. Şimdi (4.18) in σ ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} s'(\sigma)T_\alpha(s(\sigma)) &= \cosh(a)T_\beta(\sigma) - \sinh(a)(-\kappa_h^\beta(\sigma)T_\beta(\sigma) + \tau_h^\beta(\sigma)B_\beta(\sigma)) \\ &= [\cosh(a) + \sinh(a)\kappa_h^\beta(\sigma)]T_\beta(\sigma) - \sinh(a)\tau_h^\beta(\sigma)B_\beta(\sigma) \end{aligned} \tag{4.22}$$

ve (4.19) dan

$$s'(\sigma)T_\alpha(s(\sigma)) = s'(\sigma)\left[\cos(\theta)T_\beta(\sigma)\right] - s'(\sigma)\left[\sin(\theta)B_\beta(\sigma)\right] \tag{4.23}$$

olur. (4.22) ve (4.23) den

$$s'(\sigma)\cos(\theta) = \cosh(a) + \sinh(a)\,\kappa_h^\beta(\sigma) \tag{4.24}$$
$$s'(\sigma)\sin(\theta) = \sinh(a)\,\tau_h^\beta(\sigma) \tag{4.25}$$

O halde buradan

$$\left(\cosh(a) + \sinh(a)\,\kappa_h^\beta(\sigma)\right)\sin(\theta) = \sinh(a)\,\cos(\theta)\,\tau_h^\beta(\sigma)$$

bulunur.
iii. (4.16) ve (4.24) denklemleri ele alınırsa

$$\sigma'(s)s'(\sigma)cos^2(\theta) = ((\cosh(a)) - \sinh(a)\,\kappa_h^{\alpha}(\sigma))\left(\cosh(a) + \sinh(a)\,\kappa_h^{\beta}(\sigma)\right) \quad (4.26)$$

elde edilir. Buradan

$$(\cosh(a) - \sinh(a)\,\kappa_h^{\alpha}(\sigma))\left(\cosh(a) + \sinh(a)\,\kappa_h^{\beta}(\sigma)\right) = cos^2(\theta)$$

olup istenen eşitlik elde edilir.
iv. (4.17) ve (4.25) denklemlerini ele alırsak;

$$\sigma'(s)s'(\sigma)\sin^2(\theta) = \sinh^2(a)\,\tau_h^{\alpha}\,\tau_h^{\beta}$$

elde edilir. Buradan

$$\sin^2(\theta) = \sinh^2(a)\,\tau_h^{\alpha}\,\tau_h^{\beta}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■
Böylece Teorem 4.5. (iv) den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6. $\mathbb{H}^3$ de verilen α ve β Bertrand eğri çiftinin karşılıklı noktalarındaki hiperbolik burulmalarının çarpımı negatif olmayan bir sabittir [18].

Tanım 4.7. α, $\mathbb{H}^3$ de bir eğri olsun. O zaman α tam geodezik 2 boyutlu $\mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{H}^3$ hiperbolik düzleminde yatıyorsa yani bütün noktalarında α nın hiperbolik burulması sıfır ise α ya $\mathbb{H}^3$ de düzlemsel eğri denir [4].

Tanım 4.8. α, $\mathbb{H}^3$ de bir eğri olsun. O zaman α nın her noktasında hiperbolik burulması sıfırdan farklı ise α ya $\mathbb{H}^3$ de burulmalı(twisted) eğri denir [4].

Tanım 4.9. α, $\mathbb{H}^3$ bir burulmalı eğri ($\tau_h^{\alpha} \neq 0$) olsun. O zaman α nın hiperbolik eğrilik ve hiperbolik burulması sıfırdan farklı sabitler ise α ya $\mathbb{H}^3$ de bir helis denir [4].

Tanım 4.10. α, $\mathbb{H}^3$ de bir eğri ve $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^3)$ bir Killing vektör alanı olsun. O zaman V ve α arasındaki açı, α boyunca sıfırdan farklı sabit ve V, α boyunca sabit uzunluklu Killing vektör alanı oluyorsa α ya $\mathbb{H}^3$ de bir genel helis denir [4].

Yukarıdaki tanım gereğince; düzlemsel eğriler ve helisler, genel helislere bir örnektir. Gerçekten;

i. Genel helisin ekseni $V = B$ olsun. O zaman α bir düzlemsel eğridir.

ii. $\cot(\theta) = \frac{\tau_h^2+1}{\tau_h \kappa_h}$ için $V(s) = \cos(\theta)\, T(s) + \sin(\theta)\, B(s)$ ise α bir helistir [4].

Önerme 4.11. i. $\mathbb{H}^3$ de her düzlemsel eğri bir Bertrand eğridir ve bu eğri sonsuz sayıda düzlemsel Bertrand eğri çiftine sahiptir.

ii. $\mathbb{H}^3$ de bir α Bertrand eğrisi, bir β düzlemsel Bertrand eğri çiftine sahip ise o zaman α da bir düzlemsel eğridir ve β ile aynı tam geodezik $\mathbb{H}^2$ hiperbolik düzleminde yatar [18].

İspat i. α, $\mathbb{H}^3$ de bir düzlemsel eğri ve her $a \in \mathbb{R}$ α ve β arasındaki sabit hiperbolik uzaklığı için $\mathbb{H}^3$ de bir β_a eğrisi

$$\beta_a(\sigma(s)) = \cosh(a)\, \alpha(s) + \sinh(a)\, N_\alpha(s) \tag{4.27}$$

olsun. O zaman her $a \in \mathbb{R}$ için β_a nın α nın Bertrand eğri çifti olduğunu göstermeliyiz.

Şimdi (4.27) de kovaryant türev alınıp, Serret-Frenet vektörleri uygulanırsa ve

$$\frac{d\beta_a(\sigma(s))}{ds} = \frac{d\beta_a}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \sigma'(s) T_{\beta_a}(\sigma(s)) \tag{4.28}$$

olduğunu gözönüne alırsak

$$\begin{aligned}
\sigma'(s) T_{\beta_a}(\sigma(s)) &= \frac{d\left[\cosh(a)\, \alpha(s) + \sinh(a)\, N_\alpha(s)\right]}{ds} \\
&= \cosh(a)\, T_\alpha(s) + \sinh(a)\left(-\kappa_h^\alpha T_\alpha(s) + \tau_h^\alpha B_\alpha(s)\right) \\
&= (\cosh(a)\ - \sinh(a)\, \kappa_h^\alpha) T_\alpha(s) + \sinh(a)\, \tau_h^\alpha B_\alpha(s) \\
&\overset{\tau_h^\alpha = 0}{=} \underbrace{(\cosh(a)\ - \sinh(a)\, \kappa_h^\alpha)}_{\sigma'(s)}\ \underbrace{T_\alpha(s)}_{T_{\beta_a}(\sigma(s))}
\end{aligned}$$

Buradan

$$T_{\beta_a}(\sigma(s)) = T_\alpha(s) \tag{4.29}$$

$$\sigma'(s) = \cosh(a)\ - \sinh(a)\, \kappa_h^\alpha \tag{4.30}$$

olur.(4.29) da kovaryant türev alınırsa

$$
\begin{aligned}
(\sigma' \kappa_h^{\beta}) N_{\beta_a} &= \kappa_h^{\alpha} N_\alpha + \alpha - \beta_a \sigma' \\
&= \kappa_h^{\alpha} N_\alpha + \alpha - \left(\cosh^2(a) - \cosh(a)\,\sinh(a)\,\kappa_h^{\alpha}\right)\,\alpha \\
&\quad - \left(\cosh(a)\,\sinh(a) - \sinh^2(a)\,\kappa_h^{\alpha}\right) N_\alpha \\
&= \left[(1+\sinh^2(a))\kappa_h^{\alpha} - \cosh(a)\,\sinh(a)\right] N_\alpha \\
&\quad + \left[(1-\cosh^2(a)) + \cosh(a)\,\sinh(a)\,\kappa_h^{\alpha}\right]\,\alpha \\
&= \left[\cosh^2(a)\,\kappa_h^{\alpha} - \cosh(a)\,\sinh(a)\right] N_\alpha \\
&\quad + \left[-\sinh^2(a) + \cosh(a)\,\sinh(a)\,\kappa_h^{\alpha}\right]\,\alpha \\
&= \cosh(a)\,(\cosh(a)\,\kappa_h^{\alpha} - \sinh(a))\,N_\alpha + \sinh(a)\,(-\sinh(a) + \cosh(a)\,\kappa_h^{\alpha})\,\alpha \\
&= (\cosh(a)\,\kappa_h^{\alpha} - \sinh(a))\,(\cosh(a) N_\alpha + \sinh(a)\,\alpha)
\end{aligned}
$$

Buradan,

$$
\begin{aligned}
\kappa_h^{\beta} &= \frac{\cosh(a)\,\kappa_h^{\alpha} - \sinh(a)}{\cosh(a)\ - \sinh(a)\,\kappa_h^{\alpha}} \\
N_{\beta_a}(\sigma(s)) &= \sinh(a)\,\alpha(s) + \cosh(a) N_\alpha(s)
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

bulunur. Ayrıca $\sigma = \sigma(s_0)$ olmak üzere β_a nın $\beta_a(\sigma_0)$ başlangıç noktalı asli normal geodeziği $\gamma = \gamma(u)$ ile gösterilirse

$$
\begin{aligned}
\gamma(u) &= \cosh(u)\beta_a(\sigma_0) + \sinh(u) N_{\beta_a}(\sigma_0) \\
&= \cosh(u)[\cosh(a)\alpha(s_0) + \sinh(a) N_\alpha(s_0)] + \sinh(u)[\sinh(a)\alpha(s_0) + \cosh(a) N_\alpha(s_0)] \\
&= [\cosh(u)\cosh(a) + \sinh(u)\sinh(a)]\alpha(s_0) + [\cosh(u)\sinh(a) + \sinh(u)\cosh(a)] N_\alpha(s_0) \\
&= \cosh(u+a)\alpha(s_0) + \sinh(u+a) N_\alpha(s_0)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece γ, aynı zamanda α nın $\alpha(s_0)$ başlangıç noktalı asli normal geodeziği olur. Yani (α, β_a) bir Bertrand eğri çiftidir.

Şimdi β_a eğrisinin $\mathbb{H}^3$ de düzlemsel olduğunu gösterelim. (4.31) eşitliğinde kovaryant türev alınıp Frenet denklemleri uygulanırsa;

$$
\begin{aligned}
\sigma'(s)\frac{d}{d\sigma} N_{\beta_a}(\sigma(s)) &= \sinh(a) T_\alpha(s) + \cosh(a)(-\kappa_h^{\alpha} T_\alpha(s) + \tau_h^{\alpha} B_\alpha(s)) \\
&= (\sinh(a) - \cosh(a)\kappa_h^{\alpha}(s))\,T_\alpha\,(s)
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Ayrıca

$$\frac{d}{d\sigma}N_{\beta_a}(\sigma(s)) = -\kappa_h^{\beta_a}(\sigma(s))T_{\beta_a}(\sigma(s)) + \tau_h^{\beta_a}(\sigma(s))B_{\beta_a}(\sigma(s)) \tag{4.33}$$

olup (4.32) ve (4.33) den

$$\sigma'(s)\left(-\kappa_h^{\beta_a}(\sigma(s))T_{\beta_a}(\sigma(s)) + \tau_h^{\beta_a}(\sigma(s))B_{\beta_a}(\sigma(s))\right) = (\sinh(a) - \cosh(a)\kappa_h^{\alpha}(s))\,T_\alpha(s)$$

elde edilir. Buna göre (4.29) ve (4.31) eşitliklerinin kullanılması ile

$$\tau_h^{\beta_a}(\sigma(s)) = 0.$$

ii. $\tau_h^{\beta_a} = 0$ olduğundan Teorem 4.5. (iv) den

$$\sin(\theta) = 0$$

elde ederiz(Böylece $\cos(\theta) = \pm 1$). Teorem 4.5. (i) den $\sinh(a)\tau_h^{\alpha} = 0$ olmalıdır. Eğer $\sinh(a) = 0$ ise $\alpha = \beta$ dır ve bu yüzden 2 boyutlu tam geodezik $\mathbb{H}^2$ hiperbolik düzlem üzerinde düzlemsel eğridir. Aksi halde $\tau_h^{\alpha} = 0$ olur ve benzer sonuca ulaşılır.
■

Teorem 4.12. α, $\mathbb{H}^3$ de bir genel helistir gerek ve yeter şart
i. $\tau_h^{\alpha} \equiv 0$ ve α bir $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ hiperbolik düzleminde yatar,
ii. α, $\mathbb{H}^3$ de bir helistir [4].

Teorem 4.13. $\mathbb{H}^3$ de bir α eğrisi Bertrand eğridir gerek ve yeter şart
i. $\tau_h^{\alpha} \equiv 0$ ve α eğrisi bir $\mathbb{H}^2$ hiperbolik düzlemin de yatar.
ii. $\lambda\kappa_h^{\alpha} + \mu\tau_h^{\alpha} = 1$ olacak biçimde $\lambda \neq 0$ ve μ sabitleri vardır [18].

İspat i. α, $\mathbb{H}^3$ de bir Bertrand eğri olsun. α, $\mathbb{H}^3$ de bir düzlemsel eğri ise Tanım 4.7. den istenilen elde edilir.
ii. α bir düzlemsel eğri değil ise Teorem 4.5. (i) den

$$[\cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^{\alpha}]\sin(\theta) = \sinh(a)\cos(\theta)\,\tau_h^{\alpha}$$

ve Önerme 4.11. den $\sinh(a) \neq 0$ olup böylece

$$\underbrace{\tanh(a)}_{\lambda}\kappa_h^{\alpha} + \underbrace{\tanh(a)\cot(\theta)}_{\mu}\tau_h^{\alpha} = 1 \tag{4.34}$$

elde edilir. O halde $\lambda = \tanh(a)$ ve $\mu = \tanh(a)\cot(\theta)$ sabitleri için $\lambda\kappa_h^\alpha + \mu\tau_h^\alpha = 1$ denklemi sağlanmış olur.

Diğer taraftan (i) den α, $\mathbb{H}^3$ de bir düzlemsel eğri olsun. O zaman Önerme 4.11. den α bir Bertrand eğridir. Ayrıca (ii) den (4.34) eşitliği vardır. O zaman, $\mathbb{H}^3$ de $\lambda = \tanh a$ olmak üzere bir β eğrisi

$$\beta(s) = \cosh(a)\,\alpha(s) + \sinh(a)\,N_\alpha(s) \tag{4.35}$$

olarak tanımlanabilir. Şimdi (4.35) eşitliğinde her iki tarafın kovaryant türevi alınıp, Frenet denklemleri kullanırsa

$$\sigma'(s)T_\beta(\sigma(s)) = (\cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^\alpha(s))T_\alpha(s) + (\sinh(a)\tau_h^\alpha(s))B_\alpha(s) \tag{4.36}$$

ve buradan

$$\sigma'(s) = \sqrt{(\cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^\alpha(s))^2 + (\sinh(a)\tau_h^\alpha(s))^2} \tag{4.37}$$

bulunur. Ayrıca (4.34) den

$$\sinh(a)\kappa_h^\alpha(s) + \mu\cosh(a)\tau_h^\alpha(s) = \cosh(a) \tag{4.38}$$

olur. Şimdi (4.37) ve (4.38) eşitlikleri kullanılırsa

$$\sigma'(s) = \tau_h^\alpha\sqrt{\mu^2\cosh^2(a) + \sinh^2(a)} \tag{4.39}$$

bulunur. Buradan (4.38) ve (4.39), (4.36) da kullanılırsa

$$T_\beta(\sigma(s)) = \frac{\tau_h^\alpha(s)(\mu\cosh(a))T_\alpha(s) + \tau_h^\alpha(s)\sinh(a)B_\alpha(s)}{\tau_h^\alpha\sqrt{\mu^2\cosh^2(a) + \sinh^2(a)}} \tag{4.40}$$

elde edilir. (4.40) da tekrar her iki tarafın kovaryant türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(\kappa_h^\beta\sigma'\right)N_\beta = [\sinh(a)\alpha + \cosh(a)N_\alpha]\,\frac{[-\cosh(a)\sinh(a)\tau_h^\alpha(1+\mu^2) + \mu\kappa_h^\alpha]}{\sqrt{(\cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^\alpha)^2 + (\sinh(a)\tau_h^\alpha)^2}}$$

olur. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}\kappa_h^\beta &= \frac{[-\cosh(a)\sinh(a)\tau_h^\alpha(1+\mu^2) + \mu\kappa_h^\alpha]}{\sqrt{(\cosh(a) - \sinh(a)\kappa_h^\alpha)^2 + (\sinh(a)\tau_h^\alpha)^2}}\\ N_\beta &= \sinh(a)\alpha + \cosh(a)N_\alpha\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\sigma = \sigma(s_0)$ olmak üzere β nın $\beta(\sigma_0)$ başlangıç noktalı asli normal geodeziği $\gamma = \gamma(u)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\gamma(u) &= \cosh(u)\beta(\sigma_0) + \sinh(u)N_\beta(\sigma_0) \\
&= \cosh(u)(\cosh(a)\,\alpha(s_0) + \sinh(a)\,N_\alpha(s_0)) + \sinh(u)\,(\sinh(a)\,\alpha(s_0) + \cosh(a)\,N_\alpha(s_0)) \\
&= (\cosh(u)\,\cosh(a) + \sinh(u)\sinh(a))\,\alpha(s_0) + (\cosh(u)\sinh(a) + \sinh(u)\cosh(a))N_\alpha(s_0) \\
&= \cosh(u+a)\,\alpha(s_0) + \sinh(u+a)N_\alpha(s_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece γ, aynı zamanda α nın $\alpha(s_0)$ başlangıç noktalı asli normal geodeziği olur. Yani (α, β) Bertrand eğri çiftidir. ■

Önerme 4.14. α, $\mathbb{H}^3$ de bir burulmalı(twisted) eğri olsun. Aşağıdakiler denktir.
i. α bir helistir.
ii. α nın sonsuz Bertrand eğri çifti vardır.
iii. α nın iki tane Bertrand eğri çifti vardır [18].

İspat i. $\Rightarrow$ ii. κ_h^α ve τ_h^α sıfırdan farklı sabitler olsun. κ_h^α ve τ_h^α aralarında sonsuz sayıda sabit katsayılı lineer bir ilişki elde edilebir. Böylece her farklı lineer ilişki için Bertrand eğri çifti oluşturulabilir.
ii. $\Rightarrow$ iii. α nın sonsuz sayıda Bertrand eğri çifti varsa 2 tane Bertrand eğri çifti olduğu açıktır.
iii. $\Rightarrow$ i. α nın Bertrand eğri çiftleri β_1 ve β_2 olsun.$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \theta_1$ ve θ_2 farklı 4 sabiti için;

$$\begin{aligned}
\tanh(a_1)\kappa_h^\alpha(s) + \tanh(a_1)\cot(\theta_1)\tau_h^\alpha(s) &= 1 \\
\tanh(a_2)\kappa_h^\alpha(s) + \tanh(a_2)\cot(\theta_2)\tau_h^\alpha(s) &= 1
\end{aligned}$$

Burada β_1 ve β_2 α nın birbirinden farklı iki Bertrand eğri çifti olduğundan $a_1 \neq a_2$ ve böylece $\theta_1 \neq \theta_2$ dir. Elde ettiğimiz bu denklemlerde kovaryant türev alarak;

$$\begin{aligned}
{\kappa_h^\alpha}'(s) + \cot(\theta_1){\tau_h^\alpha}'(s) &= 0 \\
{\kappa_h^\alpha}'(s) + \cot(\theta_2){\tau_h^\alpha}'(s) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde bu sistemin çözümünden ${\kappa_h^\alpha}'(s) = {\tau_h^\alpha}'(s) = 0$ dır. Yani α eğrisi, sabit hiperbolik eğrilik ve sabit hiperbolik torsiyona sahip olup α bir helistir. ■

5. $\mathbb{R}^4_1$ de (1,3)-Bertrand Eğriler

Bu bölümde, $\mathbb{R}^4_1$ de dejenere olmayan (spacelike veya timelike), $S_p\{N_1, N_3\}$ timelike veya spacelike normal düzlemli $(1,3)$-Bertrand eğriler tanımlandı. Ayrıca bu eğrilerin, $\mathbb{H}^3$ deki Bertrand eğriler ile arasındaki ilişkiler verildi.

Tanım 5.1. $\mathbb{R}^n_1$ de bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^n_1$ dejenere olmayan birim hızlı regüler eğrinin yay parametresi s olmak üzere bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N_1^\gamma, N_2^\gamma, \ldots, N_{n-1}^\gamma\}$ ve eğrilikleri $\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}\}$ ile gösterilsin. O zaman $\forall s \in I$ için $\gamma(s)$ noktasından geçen $N_j(s)$ ve $N_k(s)$ Frenet vektörlerinin gerdiği düzlem spacelike(timelike) ise bu düzleme $\gamma(s)$ noktasındaki spacelike(timelike) Frenet (j,k)-normal düzlemi denir.

Tanım 5.2. $\mathbb{R}^n_1$ de bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^n_1$ dejenere olmayan birim hızlı ve regüler eğri olsun. O zaman γ eğrisinin $\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-2}\}$ eğrilikleri her yerde pozitif ve κ_{n-1} eğriliği sıfırdan farklı ise γ ya dejenere olmayan özel Frenet eğrisi denir.

Tanım 5.3. $\mathbb{R}^4_1$ de $\gamma : I \to \mathbb{R}^4_1$ ve $\bar{\gamma} : \bar{I} \to \mathbb{R}^4_1$ dejenere olmayan özel Frenet eğrilerinin yay parametreleri sırasıyla s ve $\bar{s}$ olsun. Bu durumda γ ve $\bar{\gamma}$ nın karşılıklı noktalarındaki timelike(spacelike) Frenet (1,3)-normal düzlemlerinde çakışacak şekilde bir $\varphi : I \to \bar{I}$ regüler diferensiyellenebilir dönüşüm varsa γ ya $\mathbb{R}^4_1$ de timelike (spacelike) (1,3)-Bertrand eğri denir.

Teorem 5.4. $\mathbb{R}^4_1$ de $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4_1$ spacelike özel Frenet eğrisinin yay parametresi s ve eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olsun. O zaman γ bir timelike $(1,3)$-Bertrand eğridir gerek ve yeter şart $a, b, c, d \neq \pm 1$ reel sayıları ve $\forall s \in I$ için

$$a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s) \neq 0 \tag{5.1}$$

$$a\kappa_1(s) + c(a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s)) = 1 \tag{5.2}$$

$$c\kappa_1(s) - \kappa_2(s) = -d\kappa_3(s) \tag{5.3}$$

$$(c^2 - 1)\kappa_1(s)\kappa_2(s) + c(\kappa_1^2(s) - \kappa_2^2(s) + \kappa_3^2(s)) \neq 0 \tag{5.4}$$

eşitlikleri sağlanır [25].

Teorem 5.5. $\mathbb{R}^4_1$ de $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4_1$ spacelike veya timelike özel Frenet eğrisinin yay parametresi s ve eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olsun. O zaman γ bir spacelike $(1,3)$-Bertrand eğridir gerek ve yeter şart $a, b, c \neq \pm 1$, d reel sayıları ve $\forall s \in I$ için

$$a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s) \neq 0 \tag{5.5}$$

$$\varepsilon_1 a\kappa_1(s) + \varepsilon_3 c(a\kappa_2(s) - b\kappa_3(s)) = 1 \tag{5.6}$$

$$c\kappa_1(s) - \kappa_2(s) = d\kappa_3(s) \tag{5.7}$$

$$-(c^2+1)\kappa_1(s)\kappa_2(s) + c(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s) + \kappa_3^2(s)) \neq 0 \tag{5.8}$$

eşitlikleri sağlanır [26].

Şimdi $\mathbb{H}^3$ de bir $\alpha = \alpha(t)$ eğrisinin Serret-Frenet çatısı $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ ve $\mathbb{R}_1^4$ de

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} B_\alpha(s(u))du \tag{5.9}$$

olarak tanımlanan bir $\gamma = \gamma(t)$ eğrisinin Serret-Frenet çatısı da $\{T^\gamma, N_1^\gamma, N_2^\gamma, N_3^\gamma\}$ olsun.

Uyarı 5.6. $\mathbb{H}^3$ de bir α eğrisinin binormal vektörü B_α spacelike olup (5.9) eşitliğinden T^γ da spacelike vektör olmalıdır. Dolayısıyla tanım gereğince γ, $\mathbb{R}_1^4$ de bir spacelike eğri olmak zorundadır.

Şimdi $s = s(t)$ olmak üzere $\alpha(s(t))$, α nın yeniden parametrelendirmesidir ve genelliği bozmadan $s'(t) > 0$ kabul edilebilir. Böylece $\gamma'(t) = B_\alpha(s(t))$ olup γ eğrisi de $\mathbb{R}_1^4$ de birim hızlı bir eğridir. O halde (5.9) dan

$$T^\gamma(t) = B_\alpha(s(t)) \tag{5.10}$$

olup her iki tarafın kovaryant türevi alınırsa (1.10) ve (1.12) den

$$\varepsilon_2 \kappa_1(t) N_1^\gamma(t) = -s'(t)\tau_h^\alpha(s(t))N_\alpha(s(t))$$

bulunur. Buradan

$$\kappa_1(t) = \rho\, s'(t)\, \tau_h^\alpha(s(t)) > 0\,,\ \rho = \pm 1 \tag{5.11}$$

$$\varepsilon_2 N_1^\gamma(t) = -\rho N_\alpha(s(t)) \tag{5.12}$$

olup (5.12) nin her iki tarafının kovaryant türevi alınırsa

$$-\varepsilon_2\varepsilon_1\kappa_1 T^\gamma + \varepsilon_2\varepsilon_3\kappa_2 N_2^\gamma = \rho\, s'\kappa_h^\alpha T_\alpha - \underbrace{\rho\, s'\tau_h^\alpha}_{\kappa_1}\underbrace{B_\alpha}_{T^\gamma} \tag{5.13}$$

bulunur. Ayrıca γ eğrisi spacelike olduğundan $\varepsilon_1 = 1$ olup (5.13) den $\varepsilon_2 = 1$ olmak zorundadır. O halde

$$\varepsilon_3\kappa_2 N_2^\gamma = \rho s'\kappa_h^\alpha T_\alpha$$

elde edilir. Buradan

$$\kappa_2 = s'\kappa_h^\alpha \tag{5.14}$$

$$\varepsilon_3\, N_2^\gamma = \rho\, T_\alpha \tag{5.15}$$

olup (5.15) in her iki tarafının kovaryant türevi alınırsa

$$\rho\,\varepsilon_3\,\kappa_2\, N_\alpha - \kappa_3\, N_3^\gamma = \rho\,\kappa_2 N_\alpha + \rho\, s'\,\alpha$$

eşitliğinden $\varepsilon_3 = 1$ olmalıdır. O halde

$$-\kappa_3\, N_3^\gamma = \rho\, s'\,\alpha$$

bulunur. Ayrıca

$$B_\alpha(s(t)) = \alpha(s(t)) \wedge T_\alpha(s(t)) \wedge N_\alpha(s(t)) \tag{5.16}$$

$$N_3^\gamma(t) = T_\gamma(t) \wedge N_1^\gamma(t) \wedge N_2^\gamma \tag{5.17}$$

olup (1.14) den

$$\det(\alpha(s(t)), T_\alpha(s(t)), N_\alpha(s(t)), B_\alpha(s(t))) = -1$$

eşitliği vardır. Şimdi $B_\alpha(s(t)) \wedge N_\alpha(s(t)) \wedge T_\alpha(s(t)) = \delta\,\alpha$ kabulü ile

$$\begin{aligned} -\delta &= \langle \alpha(s(t)), B_\alpha(s(t)), N_\alpha(s(t)), T_\alpha(s(t))\rangle \\ &= \det(\alpha(s(t)), B_\alpha(s(t)), N_\alpha(s(t)), T_\alpha(s(t))) \\ &= -\det(\alpha(s(t)), T_\alpha(s(t)), N_\alpha(s(t)), B_\alpha(s(t))) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$B_\alpha(s(t)) \wedge N_\alpha(s(t)) \wedge T_\alpha(s(t)) = -\alpha(s(t)) \tag{5.18}$$

elde edilir. Son olarak (5.10), (5.12), (5.15) ve (5.18) eşitlikleri (5.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} N_3^{\gamma}(t) &= B_\alpha(s(t)) \wedge (-\rho N_\alpha(s(t))) \wedge (\rho\, T_\alpha(s(t))) \\ &= -(B_\alpha(s(t)) \wedge N_\alpha(s(t)) \wedge T_\alpha(s(t))) \\ &= \alpha(s(t)) \end{aligned} \tag{5.19}$$

bulunur. Böylece

$$\kappa_3(t) = -\rho\, s'(t) \neq 0 \tag{5.20}$$

$$N_3^{\gamma}(t) = \alpha(s(t)) \tag{5.21}$$

olmalıdır.

Önerme 5.7. $\alpha(t)$, $\mathbb{H}^3$ de sabit olmayan eğrilikli ve düzlemsel olmayan bir Bertrand eğri olsun. O zaman $\mathbb{R}_1^4$ de $\kappa_3(t) = -\rho s'(t)$ eğrilikli bir

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} B_\alpha(s(u))du$$

birim hızlı spacelike eğrisi, timelike $(1,3)$-Bertrand eğri olacak şekilde $s = s(t)$ $(s'(t) > 0)$ regüler diferensiyellenebilir dönüşümü vardır.

İspat Teorem 4.13. den $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ için $\lambda\, \kappa_h^{\alpha}(s) + \mu\tau_h^{\alpha}(s) = 1$ dir. a ve b iki sabit reel sayı olmak üzere

$$\lambda[\rho\, a(\lambda\tau_h^{\alpha} - \mu\kappa_h^{\alpha}) - b\,\mu] > 0$$

ve $s'(t) > 0$ fonksiyonu için

$$s'(t) = \frac{\lambda}{\rho a(\lambda\tau_h^{\alpha} - \mu\kappa_h^{\alpha}) - b\mu} > 0 \tag{5.22}$$

olsun. Şimdi Teorem 5.4. deki (5.1), (5.2), (5.3) ve (5.4) eşitliklerinin sağlandığını gösterelim. O zaman (5.22) eşitliğini kullanarak,

$$\lambda = \rho\, as'(t)\tau_h^{\alpha} - \rho as'(t)\mu\kappa_h^{\alpha} - \rho^2 b\mu s'(t)$$

olur ve burada (5.11), (5.14) ve (5.20) eşitlikleri kullanılırsa

$$\lambda = \kappa_1 a\lambda - \rho\mu(a\kappa_2 - b\kappa_3) \neq 0 \tag{5.23}$$

elde edilir.
(i) $a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için (5.23) de aşağıdaki durumlar incelenebilir.
I.Durum : $a = 0$ ise (5.20) ve (5.23) den $b\kappa_3 \neq 0$ olmalıdır. Böylece

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0$$

elde edilir.
II.Durum : $a \neq 0$ ise $a\kappa_2 - b\kappa_3 = 0$ olsun. O halde (5.23) den

$$\kappa_1 \, a = 1$$

olmalıdır. Burada (5.11) eşitliği kullanılırsa

$$(\rho s' \tau_h^\alpha)a = \lambda\kappa_h^\alpha + \mu\tau_h^\alpha$$

bulunur. O halde $\lambda = 0$ ve $\mu = a\rho s'(t)$ olur. Bu ise $\lambda \neq 0$ olmasıyla çelişir. Yani

$$a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0$$

olmalıdır. Sonuç olarak I. ve II. durumdan $a\kappa_2 - b\kappa_3 \neq 0$ dır.
(ii) $a\kappa_1 + c(a\kappa_2 - b\kappa_3) = 1$ olduğunu gösterelim. (5.23) eşitliğinin her iki tarafı λ ile bölünürse $c = -\frac{\rho\mu}{\lambda}$ alınırsa

$$a\kappa_1 + c(a\kappa_2 - b\kappa_3) = 1$$

olur.
(iii) $c\kappa_1(s) - \kappa_2(s) = -d\kappa_3(s)$ olduğunu gösterelim. (5.11), (5.14) ve (5.20) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} c\kappa_1(s) - \kappa_2(s) &= (-\frac{\rho\mu}{\lambda})(\rho s' \tau_h^\alpha) - (s'\kappa_h^\alpha) \\ &= (-\frac{\rho}{\lambda})(s'\rho)(\mu\tau_h^\alpha + \lambda\kappa_h^\alpha) \\ &= (-\frac{\rho}{\lambda})(-\kappa_3) \\ &= -d\kappa_3 \end{aligned}$$

olup $d = -\frac{\rho}{\lambda}$ olacak şekilde elde edilir.
(iv) $(c^2-1)\kappa_1(s)\kappa_2(s)+c(\kappa_1^2(s)-\kappa_2^2(s)+\kappa_3^2(s)) \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. $c = -\frac{\rho\mu}{\lambda}$, (5.11), (5.14) ve (5.20) eşitliklerini kullanırsak;

$$(c^2-1)\kappa_1(s)\kappa_2(s) + c(\kappa_1^2(s) - \kappa_2^2(s) + \kappa_3^2(s)) = \rho(s')^2[\frac{\mu\kappa_h^\alpha - \lambda\tau_h^\alpha - \lambda\mu}{\lambda^2}]$$

Buradan kabul edelim ki

$$\rho(s')^2[\frac{\mu\kappa_h^\alpha - \lambda\tau_h^\alpha - \lambda\mu}{\lambda^2}] = 0$$

olsun. O halde $\mu\kappa_h^\alpha - \lambda\tau_h^\alpha - \lambda\mu = 0$ olmalıdır. Buradan

$$\mu\kappa_h^\alpha - \lambda\tau_h^\alpha = \lambda\mu$$

eşitliğinin her iki tarafı $\lambda\mu$ ile bölünürse;

$$(\frac{1}{\lambda})\kappa_h^\alpha + (-\frac{1}{\mu})\tau_h^\alpha = 1$$

Buradan $\lambda\kappa_h^\alpha + \mu\tau_h^\alpha = 1$ eşitliğinden $-\frac{1}{\mu} = \mu$ olmalıdır. Bu ise $\mu^2 = -1$ olmasıyla çelişir. O halde $\mu\kappa_h^\alpha - \lambda\tau_h^\alpha - \lambda\mu \neq 0$ dır. Böylece istenen elde edilir. ■

Şimdi $\mathbb{R}_1^4$ de $(1,3)$-Bertrand eğriden $\mathbb{H}^3$ de bir Bertrand eğri elde etme metodunu verelim.

İlk olarak, $\mathbb{R}_1^4$ de bir yay uzunluğu parametreli $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T^\gamma, N_1^\gamma, N_2^\gamma, N_3^\gamma\}$ olmak üzere $\mathbb{H}^3$ de σ yay parametreli bir eğri

$$\alpha(\sigma(s)) = T^\gamma(s) \tag{5.24}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman γ eğrisi timelike bir eğri olmalıdır. O halde (5.24) eşitliğinin her iki yanının kovaryant türevi alınırsa

$$\sigma'(s)T_\alpha(\sigma(s)) = \kappa_1(s)N_1^\gamma(s)$$

olur ve buradan

$$\sigma'(s) = \rho_1\kappa_1(s) \tag{5.25}$$

$$T_\alpha(\sigma(s)) = \rho_1 N_1^\gamma(s) \tag{5.26}$$

bulunur. (5.26) eşitliğinin her iki yanının kovaryant türevi alınıp sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sigma'(s)\kappa_h^\alpha(\sigma(s))N_\alpha(\sigma(s)) = \rho_1\kappa_2(s)N_2^\gamma(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\sigma'(s)\kappa_h^\alpha(\sigma(s)) = \rho_2\kappa_2(s) \tag{5.27}$$

$$N_\alpha(\sigma(s)) = \rho_2\rho_1 N_2^\gamma(s) \tag{5.28}$$

olur. Şimdi (5.28) in her iki yanının kovaryant türevini alınırsa

$$\sigma'\tau_h^\alpha B_\alpha = \rho_2\rho_1\kappa_3 N_3^\gamma$$

bulunur ve buradan

$$\sigma'(s)\tau_h^\alpha = \rho_3\kappa_3 \tag{5.29}$$

$$B_\alpha = \rho_3\rho_2\rho_1 N_3^\gamma \tag{5.30}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $\det(\alpha, T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha) = -1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\det(T_\gamma, \rho_1 N_1^\gamma, \rho_1\rho_2 N_2^\gamma, \rho_1\rho_2\rho_3 N_3^\gamma) = -1$$

olup

$$\rho_1 = -\rho_3 \tag{5.31}$$

olmalıdır.

Şimdi de $\mathbb{H}^3$ de σ yay parametreli α eğrisi

$$\alpha(\sigma(s)) = N_3^\gamma(s) \tag{5.32}$$

olarak tanımlansın. O halde N_3^γ timelike olup T^γ spacelike olmalıdır. Dolayısıyla γ spacelike eğridir. Böylece (1.10) da $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = -1$ olmalıdır. Buradan (5.32) nin s ye göre kovaryant türevi alınırsa

$$\sigma'(s)T_\alpha(\sigma(s)) = -\kappa_3 N_2^\gamma$$

elde edilir. O halde

$$\sigma'(s) = \rho_3\kappa_3 \tag{5.33}$$

$$T_\alpha(\sigma(s)) = -\rho_3 N_2^\gamma(s) \tag{5.34}$$

ve (5.34) ün s ye göre kovaryant türevi alınıp gerekli işlemler uygulanırsa,

$$\sigma' \kappa_h^\alpha N_\alpha = \rho_3 \kappa_2 N_1^\gamma$$

bulunur. Buradan

$$\sigma' \kappa_h^\alpha = \rho_2 \kappa_2 \tag{5.35}$$

$$N_\alpha = \rho_2 \rho_3 N_1^\gamma \tag{5.36}$$

yazılabilir. Buna göre (5.36) nın s ye göre kovaryant türevi alınırsa;

$$\sigma' \tau_h^\alpha B_\alpha = -\rho_2\, \rho_3\, \kappa_1 T^\gamma$$

elde edilir. O halde

$$\sigma' \tau_h^\alpha = \rho_1\, \kappa_1 \tag{5.37}$$

$$B_\alpha = -\rho_1\, \rho_2\, \rho_3 T_\gamma \tag{5.38}$$

bulunur. Ayrıca $\det(\alpha, T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha) = -1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\det(N_3^\gamma, -\rho_3 N_2^\gamma, \rho_2\rho_3 N_1^\gamma, -\rho_1\rho_2\rho_3 T_\gamma) = -1$$

olup

$$\rho_1 = -\rho_3 \tag{5.39}$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 5.8. $\gamma(s)$, $\mathbb{R}_1^4$ de yay uzunluğu parametreli ve sabit eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olan bir helis olsun. O zaman
i. $\mathbb{H}^3$ de $\alpha(s) = T_\gamma(s)$ olarak tanımlı eğri, hiperbolik eğriliği $\kappa_h^\alpha = \pm\frac{\kappa_2}{\kappa_1} > 0$ ve hiperbolik burulması $\tau_h^\alpha = -\frac{\kappa_3}{\kappa_1} \neq 0$ olan bir helistir.
ii. $\mathbb{H}^3$ de $\alpha(s) = N_3^\gamma(s)$ olarak tanımlı eğri, hiperbolik eğriliği $\kappa_h^\alpha = \pm\frac{\kappa_2}{\kappa_3} > 0$ ve hiperbolik burulması $\tau_h^\alpha = -\frac{\kappa_1}{\kappa_3} \neq 0$ olan bir helistir.

İspat
i. α eğrisinin, (5.25) ve (5.27) den hiperbolik eğriliğinin $\kappa_h^\alpha = \pm\frac{\kappa_2}{\kappa_1} > 0$ ve (5.29) dan hiperbolik burulmasının $\tau_h^\alpha = -\frac{\kappa_3}{\kappa_1} \neq 0$ olduğu açıktır.
ii. α eğrisinin, (5.33) ve (5.35) den hiperbolik eğriliğinin $\kappa_h^\alpha = \pm\frac{\kappa_2}{\kappa_3} > 0$ ve (5.37) den hiperbolik burulmasının $\tau_h^\alpha = -\frac{\kappa_1}{\kappa_3} \neq 0$ olduğu açıktır. ■

Önerme 5.9. $\gamma(s)$, $\mathbb{R}^4_1$ de yay uzunluğu parametreli ve Frenet çatısı $\{T^\gamma, N_1^\gamma, N_2^\gamma, N_3^\gamma\}$ olan bir spacelike $(1,3)$-Bertrand eğri olsun. O zaman $\mathbb{H}^3$ de $\alpha(s) = T^\gamma(s)$ olarak tanımlı eğri bir Bertrand eğridir.

İspat $\gamma(s)$, $\mathbb{R}^4_1$ de spacelike $(1,3)$-Bertrand eğri ise O zaman a, b, c, d sabit reel sayılar olmak üzere Teorem 5.5. deki (5.5), (5.6), (5.7) ve (5.8) denklemleri sağlanır. Burada $\kappa_2 > 0$ olup (5.7) eşitliğinden

$$c^2 + d^2 \neq 0$$

ve

$$c\kappa_1(s) - d\kappa_3(s) = \kappa_2(s) > 0$$

elde edilir. Şimdi $c \neq 0$ için $\alpha(s) = T^\gamma(s)$ olsun. O halde (5.25), (5.27) ve (5.29) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \rho_1\sigma' &= \kappa_1 \\ \rho_2\sigma'\kappa_h^\alpha &= \kappa_2 \\ \rho_3\sigma'\tau_h^\alpha &= \kappa_3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler, (5.7) de yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa;

$$\rho_2\kappa_h^\alpha + d\rho_3\tau_h^\alpha = c\rho_1$$

elde edilir ve her iki taraf $c\rho_1$ ile bölünürse

$$\underbrace{\left(\frac{\rho_2}{c\rho_1}\right)}_{\lambda}\kappa_h^\alpha + \underbrace{\left(\frac{d\rho_3}{c\rho_1}\right)}_{\mu}\tau_h^\alpha = 1$$

bulunur. Yani $\lambda = \frac{\rho_2}{c\rho_1}$ ve $\mu = \frac{d\rho_3}{c\rho_1}$ olacak şekilde $\lambda\kappa_h^\alpha + \mu\tau_h^\alpha = 1$ eşitliği elde edilir. ■

Önerme 5.10. $\gamma(s)$, $\mathbb{R}^4_1$ de yay uzunluğu parametreli ve Frenet çatısı $\{T^\gamma, N_1^\gamma, N_2^\gamma, N_3^\gamma\}$ olan bir timelike $(1,3)$-Bertrand eğri olsun. O zaman $\mathbb{H}^3$ de $\alpha(s) = N_3^\gamma(s)$ olarak tanımlı eğri bir Bertrand eğridir.

İspat $\gamma(s)$, $\mathbb{R}^4_1$ de timelike $(1,3)$-Bertrand eğri ise O zaman a,b,c,d sabit reel sayılar olmak üzere Teorem 5.4. deki (5.1), (5.2), (5.3) ve (5.4) denklemleri sağlanır. Burada $\kappa_2 > 0$ olup (5.3) eşitliğinden ve

$$c^2 + d^2 \neq 0$$

ve

$$c\kappa_1(s) - d\kappa_3(s) = \kappa_2(s) > 0$$

elde edilir. Şimdi $d \neq 0$ için $\alpha(s) = N_3^{\gamma}(s)$ olsun. O halde (5.33), (5.35) ve (5.37) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \rho_3\sigma' &= \kappa_3 \\ \rho_2\sigma'\kappa_h^{\alpha} &= \kappa_2 \\ \rho_1\sigma'\tau_h^{\alpha} &= \kappa_1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler, (5.3) de yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa;

$$c\rho_1\tau_h^{\alpha} - \rho_2\kappa_h^{\alpha} = -d\rho_3$$

elde edilir ve her iki taraf $-d\rho_3$ ile bölünürse

$$\underbrace{\left(\frac{-\rho_2}{-d\rho_3}\right)}_{\lambda}\kappa_h^{\alpha} + \underbrace{\left(\frac{c\rho_1}{-d\rho_3}\right)}_{\mu}\tau_h^{\alpha} = 1$$

bulunur. Yani $\lambda = \frac{\rho_2}{d\rho_3}$ ve $\mu = -\frac{c\rho_1}{d\rho_3}$ olacak şekilde $\lambda\kappa_h^{\alpha} + \mu\tau_h^{\alpha} = 1$ eşitliği elde edilir. ■

Örnek 5.11. $\alpha : I \to \mathbb{H}^3$ birim hızlı eğrisinin parametrizasyonu

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{2}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \sqrt{2}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

olarak verilsin. Gerekli hesaplamalardan sonra α eğrisinin $\mathbb{H}^3$ deki Frenet elemanları,

$$\begin{aligned} T_\alpha(s) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ N_\alpha(s) &= \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\sqrt{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\sqrt{2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ B_\alpha(s) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) \end{aligned}$$

ve eğrilikleri

$$\kappa_h^{\alpha}(s) = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ \tau_h^{\alpha}(s) = -\frac{1}{3}$$

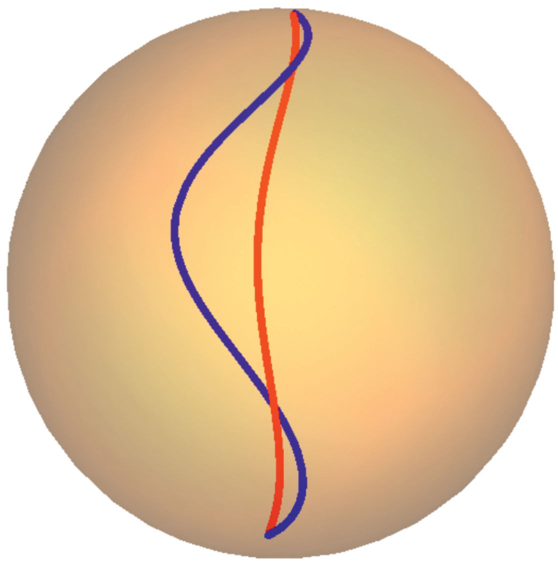
olarak bulunur. O halde α eğrisi $\mathbb{H}^3$ de bir helisdir. Ayrıca Önerme 4.14 den α eğrisi bir Bertrand eğri olup sonsuz tane Bertrand eğri çiftine sahiptir. Buna göre α eğrisine, $a = \ln(2)$ kadar sabit hiperbolik uzaklıktaki bir Bertrand eğri çiftinin parametrizasyonu

$$\beta(\sigma(s)) = \left(\frac{(-3+5\sqrt{2})}{4}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{(-3+5\sqrt{2})}{4}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{(5-3\sqrt{2})}{4}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{(5-3\sqrt{2})}{4}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

olur. Gerekli hesaplamalardan sonra β eğrisinin hiperbolik eğrilikleri de

$$\kappa_h^{\beta}(s) = \frac{1}{267}\left(-85+128\sqrt{2}\right),\ \tau_h^{\beta}(s) = -\frac{8}{267}\left(17+10\sqrt{2}\right)$$

olarak bulunur. O halde α eğrisinin Bertrand eğri çifti olan β eğriside $\mathbb{H}^3$ de bir helisdir ve bu eğrilerin hiperbolik uzayın Poincaré yuvar modelindeki izdüşümleri Şekil 5.1 de ifade edilir.



Şekil 5.1: α eğrisi (mavi renkli) ve β eğrisinin (kırmızı renkli) stereografik izdüşümleri

KAYNAKLAR

[1] Aminov, Y. A. *Differential Geometry and Topology of Curves*, Gordon and Breach Science Publishers, Singapore, **2000**.

[2] Balgetir, H. ; Bektaş, M. ; Ergut M. *Bertrand curves for nonnull curves in 3-dimensional Lorentzian space*, Hadronic Journal 27 **2004**, 229-236.

[3] Balgetir, H. ; Bektaş, M. ; Inoguchi, J.-I. *Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations*, Note di Matematica 23 **2004** 7-13.

[4] Barros, M. *General helices and a theorem of Lancret*, Proceedings of the American Mathematical Society, **1997**, 1503-1509.

[5] Bloom, W., M., *Linear Algebra and Geometry*, Cambridge University Press, London, **1979**.

[6] Bonnor, W. B., *Null curves in a Minkowski space-time*, Tensor 20, **1969**, 229-242.

[7] Cannon, J.W., Floyd, W.J.,Kenyon R., Parry, R.W., *Hyperbolic Geometry*, MSRI Publications, **1997**.

[8] Cheng, Y.-M. ; Lin, C.-C. *On the generalized bertrand curves in Euclidean N-spaces*, Note di Matematica, **2009**, 29(2),33-39.

[9] Choi, J. H. ; Kang, T. H. ; Kim, Y. H. *Bertrand curves in 3-dimensional space forms*, Applied Mathematics and Computation, **2012**, 219(3), 1040-1046.

[10] Ekmekçi, N. ; İlarslan, K. *On Bertrand curves and their characterization*, Differential Geometry-Dynamical System 3, **2001**, 17-24.

[11] Erdoğan, N., *Bertrand Eğri Çiftleri Üzerine Genelleştirmeler*, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, **1986**.

[12] Ersoy, S. ; Tosun, M. *Timelike Bertrand curves in semi-Euclidean space*, International Journal of Mathematics and Statistics, **2013**, 14(2), 78-89.

[13] Görgülü, A. ; Özdamar E.*A generalization of the Bertand curves as general inclined curves in E^n*, Communications of the Faculty of Sciences of the University of Ankara, Series A1: Mathematics and Statistics **1986**, 35 (1-2), 53-60.

[14] Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri 1.Cilt (4.Baskı)*, Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara, **2000**.

[15] Izumiya, S. ; Pei, D. ; Takahashi, M., *Curves and Surfaces in Hyperbolic Space*, Banach Center Publ., Geometric singularity theory, **2004**, 65:107-123.

[16] İlarslan, K. ; Nesovic, E. *Spacelike and timelike normal curves in Minkowski space-time*, Publ. Inst. Math. Belgrade, 85(99), 111-118, **2009**.

[17] Lucas, P. ; Ortega-Yagües, J. A. *Bertrand curves in the three-dimensional sphere*, Journal of Geometry and Physics, **2012** 62(9), 1903-1914.

[18] Lucas, P. ; Ortega-Yagües, J. A. *Bertrand curves in non flat 3 dimensional(Riemannian Or Lorentzian) space forms*, Bull. Korean Math. Soc. 50, **2013**.

[19] Matsuda, H. ; Yorozu, S. *Notes on Bertrand curves*, Yokohama Math. J. **2003**, no. 1-2, 41-58.

[20] O'Neill, B., *Semi Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, **1983**.

[21] Öztekin, H.B. *Weakened Bertrand curves in the Galilean space G_3*, Journal of Advanced Mathematical Studies, 2(2) **2009**.

[22] Pears, L.R. *Bertrand curves in Riemannian space*, J.London Math. Soc. **1935**, 180-183.

[23] Ratcliffe, J.G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds(second edition)*, Springer **2006**.

[24] Sabuncuoğlu, A. *Diferensiyel Geometri (4.Baskı)*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, **2010**.

[25] Uçum, A., Keçilioğlu, O., İlarslan, K. *Generalized Bertrand curves with timelike (1, 3)-normal plane in Minkowski space-time*, Kuwait Journal of Science, 42(3) **2015**.

[26] Uçum, A., Keçilioğlu, O., İlarslan, K. *Generalized Bertrand Curves with Spacelike (1, 3)-normal olane in Minkowski Space-Time*, Turkish Journal of Mathematics, 40(3) **2016**.

[27] Yılmaz, M.Y. ; Bektaş, M. *General properties of Bertrand curves in Riemann Otsuki space*, Nonlinear Analysis 69 **2008**, 3225-3231.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	Şahin, Burcu
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	:	14.09.1992 İzmir
e-mail	:	burcusahin05@gmail.com

Eğitim

Lise	:	Namık Kemal Lisesi
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi

Yabancı Dil	:	İngilizce