



T.C.
KIRSEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



SONLU BOYUTLU LİE CEBİRLERİ İLE İLİŞKİLİ OLAN KOMBİNATORİYAL YAPILAR ÜZERİNDE İŞLEMLER

SELDA KAÇAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRSEHİR

2024



T.C.
KIRSEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



SONLU BOYUTLU LİE CEBİRLERİ İLE İLİŞKİLİ OLAN KOMBİNATORİYAL YAPILAR ÜZERİNDE İŞLEMLER

SELDA KAÇAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
DOÇ. DR. NİL MANSUROĞLU

KIRSEHİR
2024

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŐMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değerşiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 05/01/2024

Öğrenci
Selda KAÇAK

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	II
TEŞEKKÜR	III
ÖZET	IV
ABSTARCT	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
2.1. Cebir	3
2.2. Lie Cebiri	4
2.3. Lie Cebirlerinin Yapı Sabitleri	7
3. MATERYAL VE METOT	9
3.1. Graf ve Graf Çeşitleri	9
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	21
4.1. Kombinatoryal Yapıları Lie Cebirleriyle İlişkilendirme	21
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	29
5.1. Lie Cebirleri İle İlişkili Olan Kombinatoryal Yapılar Üzerinde İşlemler	29
5.1.1. Düğüm Birleştirme	29
5.1.2. Lie Cebirleri ve Birleştirme İle İlgili Digraflar	29
5.1.3. Lie Cebirleri ve Birleştirme İle İlişkili Tam Üçgenler	30
5.1.4. Lie Cebirleriyle İlişkili Olarak Hat Ekleme, Silme ve Daraltma	32
6. KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	37

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başlamama vesile olup bu süreç boyunca bana göstermiş olduğu sabır ve ilgi ile birlikte varlığından cesaret aldığım değerli danışman hocam Doç.Dr. Nil MANSUROĞLU'na sonsuz teşekkür ederim. Őu an hayatımızda olmasa bile desteğini hala hissettiğim rahmetli babam Reis KAÇAK'a tercihlerimde desteğini esirgemediği için minnettarım. Son olarak hayatıma renk katan sevgili kardeşlerim, annem ve bana her zaman anne sevgisini hissettiren halama da teşekkür ederim.

Ocak / 2024

Selda KAÇAK

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONLU BOYUTLU LİE CEBİRLERİ İLE İLİŞKİLİ OLAN KOMBİNATORİYAL YAPILAR ÜZERİNDE İŞLEMLER

Selda KAÇAK

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç. Dr. Nil MANSUROĞLU

Yıl: 2024 Sayfa: 37

Jüri: Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Doç. Dr. Nil MANSUROĞLU

Dr. Öğr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM

Tezin amacı sonlu boyutlu Lie cebirleri ile ilişkili olan ve olmayan kombinatoriyal yapıları belirleyip bu kombinatoriyal yapılar ve üzerlerinde yapılan işlemlerin sonuçlarının araştırılmasıdır. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, grafların tarihçesine ve tezin içeriğine yer verilmiştir. İkinci bölümde, Lie cebirleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, graf teorisi için gerekli olan tanım, teorem ve şekillere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, Lie cebirlerinin kombinatoriyal yapılarla ilişkisi incelenip Lie cebirleriyle ilişkili olan ve olmayan konfigürasyonlar araştırılmıştır. Son olarak beşinci bölümde, daha önce incelemiş olduğumuz kombinatoriyal yapıların üzerinde yapılan değişiklikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lie cebir, Graf, İyi yönlendirilmiş, Kombinatoriyal yapı, Konfigürasyon

ABSTARCT

MSc THESIS

**OPERATIONS ON COMBINATORIAL STRUCTURES ASSOCIATED WITH
LIE ALGEBRAS OF FINITE DIMENSION**

Selda KAÇAK

**KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nil MANSUROĞLU

Year: 2024 Pages: 37

Juries: Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Assoc. Prof. Dr. Nil MANSUROĞLU

Assist. Prof. Dr. Gonca KIZILASLAN YILDIRIM

The aim of the thesis is to identify combinatorial structures that are and are not related to finite-dimensional Lie algebras and to investigate the results of operations performed on these combinatorial structures. The thesis consists of five chapters. In the first chapter, the history of graphs and the content of the thesis are given. In the second chapter, basic definitions and theorems about Lie algebras are given. In the third chapter, the definitions, theorems and figures necessary for graph theory are given. In the fourth chapter, the relationship of Lie algebras with combinatorial structures is examined and configurations that are and are not related to Lie algebras are investigated. Finally, in the fifth chapter, the changes made to the combinatorial structures we have previously examined are examined.

Key Words: Lie algebra, Graph, Well oriented, Combinatorial structure, Configuration

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 3.1. Graf örneği	9
Şekil 3.2. Birbirine izomorfik graflar	10
Şekil 3.3. Komşu düğüm içeren graf	10
Şekil 3.4. İkiz düğüm içeren graf	10
Şekil 3.5. Çevrim içeren graf örneği	11
Şekil 3.6. Paralel hat içeren graf örneği	11
Şekil 3.7. Derece için graf örneği	11
Şekil 3.8. Ayrık düğümlü graf örneği	12
Şekil 3.9. Tamamlanmış graf örneği	12
Şekil 3.10. Basit graf örneği	13
Şekil 3.11. Basit olmayan graf örneği	13
Şekil 3.12. Çoklu graf örneği	13
Şekil 3.13. Pseudo graf örneği	14
Şekil 3.14. Yönlü graf örneği	14
Şekil 3.15. Çoklu yönlü graf örneği	14
Şekil 3.16. Havuz	15
Şekil 3.17. Kaynak	15
Şekil 3.18. Havuzdan kaynağa dönüşen graf	15
Şekil 3.19. Ağırlıklı graf örneği	16
Şekil 3.20. Üç boyutlu graf örneği	16
Şekil 3.21. Düzlemsel graf örneği	17
Şekil 3.22. Düzlemsel olmayan graf örneği	17
Şekil 3.23. Dokuz bölgeli graf örneği	17
Şekil 3.24. Graf üzerinde yol	18
Şekil 3.25. Graf üzerinde döngü	18

Şekil 3.26. Ağaç örneği	19
Şekil 3.27. Çember graf örneği	19
Şekil 4.1. i den j ye yönlendirilmiş hat.	21
Şekil 4.2. j den i ye yönlendirilmiş hat.	21
Şekil 4.3. Ortak hat bulunduran üçgenler	22
Şekil 4.4. Tam üçgen	22
Şekil 4.5. Yasaklı konfigürasyonlar	22
Şekil 4.6. Lie cebirleriyle ilişkili üç düğümün digrafları	25
Şekil 4.7. Çift hat.	26
Şekil 4.8. Çift hat içeren konfigürasyonlar	28
Şekil 5.1. Havuz ile birleştirme	31
Şekil 5.2. Kaynak ile birleştirme	31
Şekil 5.3. İki üçgenin birleşimi	33
Şekil 5.4. Hatların eklenmesi	33
Şekil 5.5. Hat silme	34

1. GİRİŞ

Lie cebirleri, 1870 yıllarında Marius Sophus Lie tarafından sonsuz küçük dönüşüm kavramını incelemek için tanımlandıktan sonra 1880 li yıllarda Wilhelm Killing tarafından bağımsız olarak keşfedildi. Lie cebirleri, 20. yüzyılın en gözde konularından birisi olup aynı zamanda matematiğin, diferansiyel geometri, temsil teorisi, harmonik analiz gibi birçok alanında uygulamalara sahiptir.

Çizge teorisi olarak adlandırılan graf teorisi, grafları inceleyen matematik dalıdır. Temeli 1736 da Leonhard Euler tarafından "Königsberg'in yedi köprüsü" isimli makalesi ile atıldı. O yıllarda Königsberg'de bulunan Pregel nehri, Kneiphof adasının iki tarafından akmakta olup üzerinde yedi farklı köprü bulundurmaktaydı. Bölge halkı, her bir köprüden bir kez geçmek şartı ile tüm kıyıları dolaşip başlangıç noktasına dönmenin mümkün olup olmadığını merak etmekteydi. Leonhard Euler bu karmaşıklığı gidermek için köprüyü çizgilerden ve noktalardan oluşan bir yapıya dönüştürdü. Sonradan graf adını alan bu yapı Königsberg halkının bu yolu bulamamakta haklı olduklarını, yani böyle bir yol olmadığını göstermekteydi. Euler, bu gezinin mümkün olabilmesi için her noktada buluşan çizgilerin toplam sayısının çift olması gerektiğini bulmuştu. Ancak her bir noktada buluşan bu çizgilerin toplamı tek sayılardan oluşmaktaydı.

Graf teorisinin uygulamaları modern hayatın karmaşık ve geniş kapsamlı birçok probleminin çözümü ve matematiğin yapısal ilişkilerini incelemek için kullanılmaktadır. Bu uygulamalar; ekonomi, yönetim bilimi, bilgisayar bilimi, satış pazarlama, bilgi iletimi, taşıma planlaması gibi alanları kapsamaktadır. Graf teorisi problemleri tanımlama ve yapısal olarak ilişkileri belirlemede de faydalıdır.

Bu çalışma toplam beş bölümden oluşmakta olup her bölümün içeriği aşağıdaki şekilde özetlendi.

İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlerden söz edildi.

Üçüncü bölümde, graf ve graf çeşitlerinden bahsedilip bu grafların temel özellikleri graf şekilleri ile desteklenerek verildi.

Dördüncü bölümde, Lie cebirlerinin kombinatoryal yapılarla ilişkileri verilip Lie cebirleriyle ilişkili olan ve olmayan konfigürasyonlar araştırıldı.

Son bölümde ise graflar üzerinde yapılan değişiklikler ele alınmıştır. Grafa bir hat ekleyip veya graftan bir hat çıkarmanın veya graftaki düğümleri birleştirmenin graf üzerindeki etkisi incelenip bu değişikliklerin sonuçları araştırıldı.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölüm diğer bölümlerde gerekli olan tanım ve teoremleri içermektedir. Bölüm boyunca (Bloh, 1971; Erdmann & Wildon, 2006; Jacobson, 1963; Mansuroğlu, 2022; Varadarajan, 2013) kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.1. Cebir

Tanım 2.1. A, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve

$$m : A \times A \rightarrow A, (x, y) \mapsto m(x, y)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ ve $\lambda, \mu \in F$ için

(i) $m(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda m(x_1, y) + \mu m(x_2, y)$

(ii) $m(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda m(x, y_1) + \mu m(x, y_2)$

koşullarının sağlandığı duruma bilineerlik özelliği denir.

Uyarı 2.2. Tez boyunca $m(x, y)$ kısaca xy ile ifade edilecektir.

Tanım 2.3. A, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $(x, y) \mapsto xy$ şeklinde tanımlanan $m : A \times A \rightarrow A$ dönüşümü bilineerlik koşulunu sağlıyorsa A ya cebir denir ve (A, m) ile gösterilir.

Örnek 2.4. V , bir F -vektör uzayı olsun. Her $v, w \in V$ için

$$m : V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto 0$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda V sıfır çarpımıyla bir cebir olur.

Tanım 2.5. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer her $x, y, z \in A$ için

$$x(yz) = (xy)z$$

eşitliği sağlanıyor ise A ya birleşmeli (asosyatif) cebir denir.

Tanım 2.6. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$$xy = yx$$

eşitliği sağlanıyor ise A ya değişmeli (komütatif) cebir denir.

Tanım 2.7. A, F cismi üzerinde bir cebir ve B, A nın alt vektör uzayı olsun. Her $x, y \in B$ için $xy \in B$ ise B ye A nın bir alt cebiri denir.

Tanım 2.8. A, F cismi üzerinde bir cebir ve B, A nın alt vektör uzayı olsun. Her $x \in A$ ve $y \in B$ için $xy, yx \in B$ ise B ye A nın bir ideali denir.

Tanım 2.9. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Her $x \in A$ için

$$x^2 = xx = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise A ya anti-komütatif denir.

Uyarı 2.10. A, F cismi üzerinde anti-komütatif bir cebir olsun. Her $x, y \in A$ için

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= 0 \\ (x + y)(x + y) &= 0 \\ \underbrace{xx}_0 + xy + yx + \underbrace{yy}_0 &= 0 \\ xy + yx &= 0 \\ xy &= -yx \end{aligned}$$

elde edilir. Yani A anti-komütatif cebir iken her $x, y \in A$ için $xy = -yx$ tir. Fakat karşıtı doğru olmayabilir. $xy = -yx$ eşitliğinde y yerine x alınarak $x^2 = -x^2$ eşitliği sağlanır ve $2x^2 = 0$ sonucuna ulaşılır. Eğer cismin karakteristiği ikiden farklı ise $x^2 = 0$ olacağından A anti-komütatif bir cebirdir, ancak cismin karakteristiğinin iki olması durumunda $x^2 \neq 0$ olabileceğinden dolayı A anti-komütatif bir cebir olmayabilir.

Tez boyunca F cisminin karakteristiği ikiden farklı kabul edilecektir.

Tanım 2.11. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Her $x, y, z \in A$ için

$$J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise A cebiri Jacobi özdeşliğini sağlar denir.

2.2. Lie Cebiri

Tanım 2.12. L, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer L cebiri için

(L1) her $x \in L$ için $x^2 = xx = 0$ (anti-komütatif)

(L2) her $x, y, z \in L$ için $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ (Jacobi özdeşliği)

koşullarının sağlanması durumunda L ye Lie cebiri denir.

Uyarı 2.13. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Her $x, y, z \in L$ için Jacobi özdeşliği ve anti-komütatiflikten yararlanarak

$$\begin{aligned}(xy)z + (yz)x + (zx)y &= 0 \\ (xy)z &= - (yz)x - (zx)y \\ (xy)z &= x(yz) + y(zx)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$(xy)z \neq x(yz)$$

olduğu görülür. Bu durum Lie cebirinin birleşmeli olmadığı anlamına gelir.

Tanım 2.14. A, F cismi üzerinde birleşmeli bir cebir olsun. A üzerinde

$$\begin{aligned}[,] : A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\mapsto [x, y] = xy - yx\end{aligned}$$

şeklinde yeni bir çarpım tanımlansın. Bu çarpıma Lie çarpımı denir. Ayrıca A cebiri bu çarpımla birlikte bir Lie cebiri yapısı oluşturur.

Tanım 2.15. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve K, L nin bir alt vektör uzayı olsun. Her $x, y \in K$ için $[x, y] \in K$ ise K ya L nin bir Lie alt cebiri denir.

Tanım 2.16. A , bir n -kare matris olmak üzere, köşegen üzerindeki elemanların toplamına A nın izi denir ve $tr A$ ile gösterilir.

Tanım 2.17. F cismi üzerindeki tüm $n \times n$ tipindeki kare matrislerinden oluşan

$$M_n(F) = \{A = [a_{ij}]_{n \times n} \mid a_{ij} \in F\}$$

vektör uzayı matrislerde bilinen çarpma işlemi ile birlikte birleşmeli cebirdir ve Tanım 2.14. ten yararlanarak $(M_n(F), [,])$ ikilisinin bir Lie cebiri olduğu görülür. Bu cebire matris Lie cebiri denir ve $gl(n, F)$ ile gösterilir.

Tanım 2.18. $sl(n, F) = \{A \in gl(n, F) \mid tr A = 0\}$ şeklinde tanımlanan küme $gl(n, F)$ nin bir alt uzayıdır. Ayrıca bu alt uzay $gl(n, F)$ nin bir Lie alt cebiridir. Bu alt cebir özel lineer Lie cebiri olarak adlandırılır.

Tanım 2.19. D, F cismi üzerinde $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. Esas köşegenin altındaki bütün elemanlar sıfır, yani $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise $D = [d_{ij}]$ kare matrise üst üçgensel matris denir. Bütün üst üçgensel matrislerden oluşan küme $M_n(F)$ vektör uzayının bir alt uzayıdır ve $b(n, F)$ ile gösterilir.

Tanım 2.20. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve I, L nin bir alt vektör uzayı olsun. Her $x \in L$ ve $y \in I$ için $[x, y] \in I$ oluyorsa I ya L nin bir ideali denir.

Uyarı 2.21. Bir Lie cebirinin her ideali bir alt cebirdir, fakat her alt cebiri bir ideal değildir.

Örnek 2.22. $b(n, F), gl(n, F)$ nin bir alt cebiridir, fakat $n \geq 2$ için ideal değildir.

Lemma 2.23. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve I ile J, L nin idealleri olsun. Bu durumda

$$[I, J] = \text{Span}\{[x, y] \mid \forall x \in I, y \in J\}$$

çarpım uzayı L nin bir idealidir.

Tanım 2.24. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun.

$$C(L) = \{x \in L \mid \forall y \in L \text{ için } [x, y] = 0\}$$

alt uzayına L nin merkezi denir.

Tanım 2.25. L_1 ve L_2, F cismi üzerinde iki Lie cebiri olsun. Eğer

$$\varphi : L_1 \rightarrow L_2$$

lineer dönüşümü her $x, y \in L_1$ için

$$[x, y] \mapsto \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

eşitliği sağlanıyor ise φ ye Lie cebir homomorfizmi denir. Ayrıca φ dönüşümü birebir ise monomorfizm, örten ise epimorfizm, hem birebir hem de örten ise φ dönüşümüne Lie izomorfizmi denir ve $L_1 \cong L_2$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.26. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Her $i \geq 1$ için L^i, L nin ideali ve $L^{i+1} \subset L^i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L^1 &= L \\ L^2 &= [L^1, L] = [L, L] \\ L^3 &= [L^2, L] \\ &\vdots \\ L^{i+1} &= [L^i, L] \end{aligned}$$

L nin ideallerinin azalan bir zinciri

$$L = L^1 \supset L^2 \supset \dots \supset L^i \supset L^{i+1} \supset \dots$$

elde edilir. Bu şekilde elde edilen zincire L nin alt merkezi serisi denir.

Eğer bir $k > 0$ tamsayısı için $L^k = 0$ ise L ye nilpotent Lie cebiri denir. $c > 0$ tamsayısı için eğer $L^c \neq 0$ ve $L^{c+1} = 0$ ise c ye L nin nilpotentlik sınıfı denir.

Tanım 2.27. L , F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Her $i \geq 0$ için $L^{(i)}$, L nin ideali ve $L^{(i+1)} \subset L^{(i)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= L \\ L^{(1)} &= [L, L] \\ L^{(2)} &= [L^{(1)}, L^{(1)}] \\ L^{(3)} &= [L^{(2)}, L^{(2)}] \\ &\vdots \\ L^{(i+1)} &= [L^{(i)}, L^{(i)}] \end{aligned}$$

L nin azalan bir zinciri

$$L = L^{(0)} \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \dots \supset L^{(i)} \supset L^{(i+1)} \supset \dots$$

elde edilir. Bu zincire L nin türetilmiş serisi denir.

Eğer bir $k > 0$ tamsayısı için $L^{(k)} = 0$ ise L ye çözülebilir Lie cebiri denir.

Lemma 2.28. L , F cismi üzerinde bir nilpotent Lie cebiri olsun. O zaman L çözülebilirdir.

2.3. Lie Cebirlerinin Yapı Sabitleri

Tanım 2.29. L , bazı $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olan F cismi üzerinde tanımlanan bir Lie cebiri olsun. $1 \leq i, j \leq n$ için

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k$$

olacak şekilde $c_{ij}^k \in F$ sabitlerine L Lie cebirinin B bazına göre yapı sabitleri denir.

Lemma 2.30. L , F cismi üzerinde bazı $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olan bir cebir olsun. O halde

- (i) $x_i x_i = 0$
- (ii) $x_i x_j = -x_j x_i$
- (iii) $(x_i x_j) x_k + (x_j x_k) x_i + (x_k x_i) x_j = 0$

koşullarının sağlanması için gerek ve yeter şart L nin bir Lie cebiri olmasıdır.

Lemma 2.31. L, F cismi üzerinde bazı $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olan ve bu baza göre yapı sabitleri c_{ij}^k olan bir cebir olsun. O halde L nin bir Lie cebiri olması için gerek ve yeter şart

(i) $c_{ii}^k = 0$

(ii) $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$

(iii) $\sum_{l=1}^n (c_{il}^m c_{jk}^l + c_{jl}^m c_{ki}^l + c_{kl}^m c_{ij}^l) = 0$

koşullarının sağlanmasıdır.

3. MATERYAL VE METOT

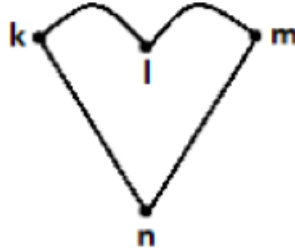
Bu bölümde (Brouwer ve ark., 1989; Diestel, 2017; Harary, 1969; Karaş, n.d.; Paauwe, 2007) kaynaklarından yararlanılarak graf ve graf çeşitleri hakkında tanım ve örneklere yer verilmiştir.

3.1. Graf ve Graf Çeşitleri

Tanım 3.1. Düğüm olarak adlandırılan noktalardan ve bu düğümleri birleştiren hatlardan oluşan ayrıca geometrik veya konumsal bilgi vermeyip, sadece düğümler arasındaki ilişkiyi gösteren bu ağ yapısına graf denir.

Bu çalışma boyunca graftaki düğümler kümesi için V ve hatlar kümesi için ise E harfleri kullanılacaktır.

Örnek 3.2. Şekil 3.1. de düğümler kümesi $V = \{k, l, m, n\}$ ve bu düğümleri birleştiren hatlar kümesi $E = \{(k, l), (m, l), (n, k), (m, n)\}$ olan graf örneği verilmiştir.



Şekil 3.1. Graf örneği

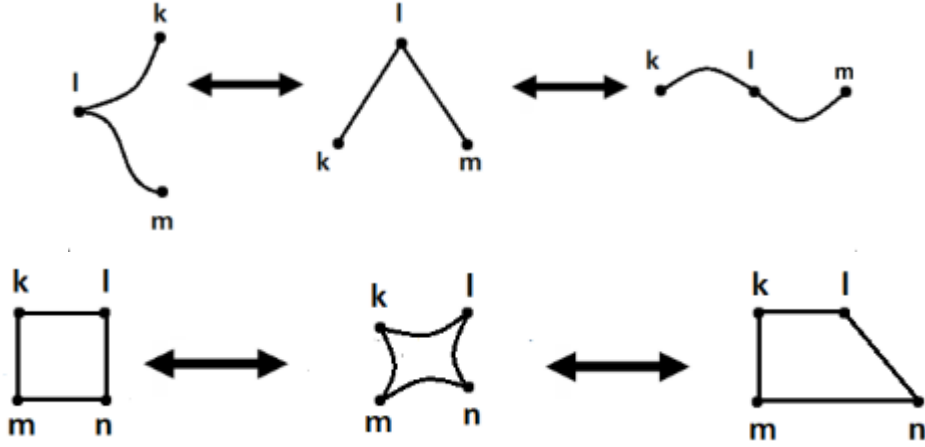
Uyarı 3.3. Düğümlerin konumunun ve bu düğümleri birleştiren hatların doğrusal ya da eğrisel oluşunun bir önemi yoktur. Hatlar düğümler arasındaki ilişkiyi simgelemektedir. Bu durum bizi bağlantılara zarar vermeden birbirine dönüştürülebilen iki grafın izomorfik olduğu sonucuna ulaştırır.

Örnek 3.4. Şekil 3.2. de bağlantılara zarar verilmeden birbirine dönüştürülen graflara yer verilmiştir.

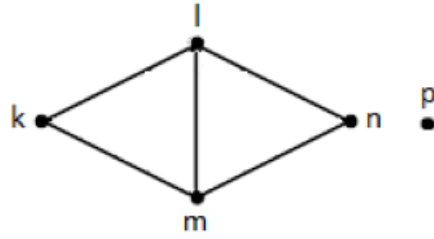
Tanım 3.5. Hat kullanarak birbirine bağlanan düğümlere komşu düğümler denir. Burada başlangıç ve bitiş düğümlerine hattın uç düğümleri denir. Bir k düğümüne komşu olan düğümler kümesi $N(k) = \{l \in V \mid (k, l) \in E\}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.6. Şekil 3.3. te verilen graf örneğinde k ve l düğümleri birbirine komşu düğümler iken k ile n veya m ile p düğümleri arasında bir hat bağlantısı olmadığı için komşu düğüm değillerdir.

Tanım 3.7. $G = (V, E)$ ikilisi bir graf olmak üzere, $k, l \in V$ düğümleri aynı komşuluğa sahiplerse yani $N(k) = N(l)$ ise bu tür düğümlere ikiz düğümler denir.

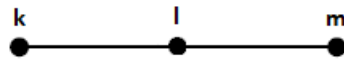


Şekil 3.2. Birbirine izomorfik graflar



Şekil 3.3. Komşu düğüm içeren graf

Örnek 3.8. Şekil 3.4. te k ve m düğümlerinin komşu düğümleri aynı olduğu için bu düğümler ikiz düğümlerdir.



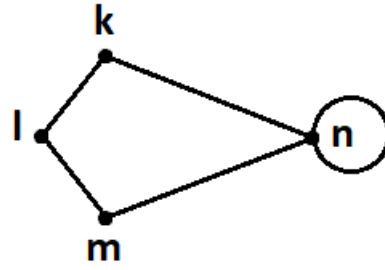
Şekil 3.4. İkiz düğüm içeren graf

Tanım 3.9. Herhangi bir hattın başlangıç ve bitiş noktası aynı düğüm ise bu duruma çevrim denir.

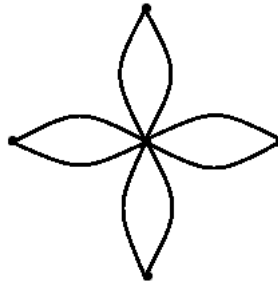
Örnek 3.10. Şekil 3.5. te verilen grafta n düğümü başlangıç ve bitiş noktası aynı olan hat bulundurduğu için çevrime bir örnektir.

Tanım 3.11. Bir grafta birden fazla başlangıç ve bitiş düğümü aynı olan birbirinden farklı hat varsa bu hatlara paralel hat denir.

Örnek 3.12. Şekil 3.6. da verilen grafta iki düğüm arasında birbirinden farklı birden fazla hat bulunduğu için paralel hatta örnektir.



Şekil 3.5. Çevrim içeren graf örneği



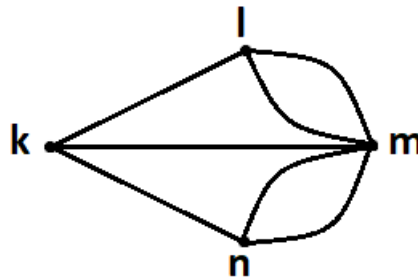
Şekil 3.6. Paralel hat içeren graf örneği

Tanım 3.13. Düğümünden çıkan hat sayısına düğümün derecesi denir. Düğümde çevrim oluşturan bir hat varsa bu düğümün derecesine iki kez katılır. Bir u düğümünün derecesi $\delta(u)$ ile ifade edilir. Ayrıca derecesi en büyük olan düğüm grafın derecesini belirler.

Örnek 3.14. Şekil 3.7. de verilen graf örneğinde düğümlerin derecesi

$$\delta(k) = 3, \delta(l) = 3, \delta(n) = 3, \delta(m) = 5$$

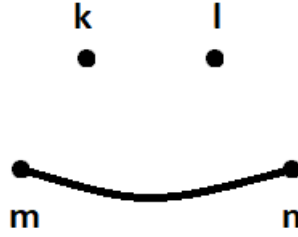
tir. Buradan en büyük dereceye sahip olan düğüm $\delta(m)$ olduğu için grafın derecesi 5 tir.



Şekil 3.7. Derece için graf örneği

Tanım 3.15. Kendisinden başka bir düğümle bağlantısı olmayan ve derecesi sıfır olan düğüme ayrık düğüm denir. E hatlar kümesi ve V düğümler kümesi olmak üzere E kümesinden V kümesinin elemanlarını elde edebilmek için grafta ayrık düğümün olmaması gerekir.

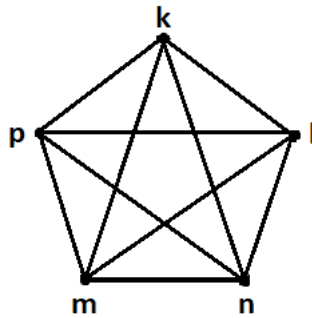
Örnek 3.16. Şekil 3.8. de verilen grafta k ve l düğümlerinin başka düğümlerle bağlantısı olmadığı için ayrık düğüme örnektir.



Şekil 3.8. Ayrık düğümlü graf örneği

Tanım 3.17. Bir graf bulundurabileceği tüm hatlara sahip ise yani graftaki her düğümün diğer tüm düğümlerle arasında bir hat mevcut ise bu tür graflara tamamlanmış graf denir. Tamamlanmış graflarda düğümlerin derecesi birbirine eşittir ve toplam düğüm sayısının bir eksiği kadardır. n düğümlü tamamlanmış grafın hat sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ dir.

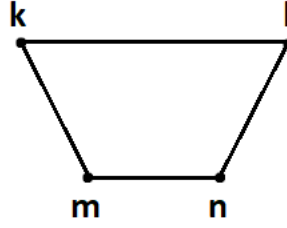
Örnek 3.18. Şekil 3.9. da verilen graf örneğinde 5 düğüm için düğümlerin derecesinin 4 olduğu görülmektedir. Ayrıca hat sayısı $\frac{5(5-1)}{2} = 10$ bulunur.



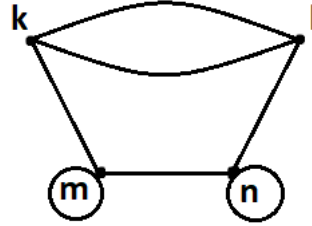
Şekil 3.9. Tamamlanmış graf örneği

Tanım 3.19. Çevrim içermeyen ve paralel hat bulundurmeyen graflara basit graf denir.

Örnek 3.20. Şekil 3.10. ve Şekil 3.11. de basit ve basit olmayan graflara örnek verilmiştir.



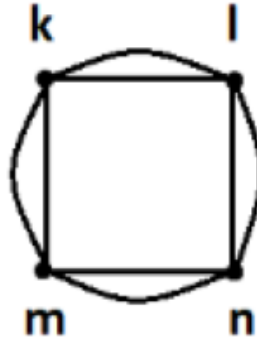
Şekil 3.10. Basit graf örneği



Şekil 3.11. Basit olmayan graf örneği

Tanım 3.21. Düğümler arasında birden fazla hat varsa (paralel hat) bu tür graflara çoklu (multi) graf denir. Çoklu graflar çevrim içermeyen graflardır.

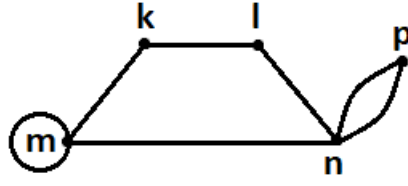
Örnek 3.22. Şekil 3.12. de verilen graf örneğinde düğümler arasında birden fazla hat bulunması çoklu grafi verir.



Şekil 3.12. Çoklu graf örneği

Tanım 3.23. Hem çevrim hem de paralel hat bulunduran graflara genel (pseudo) graf denir.

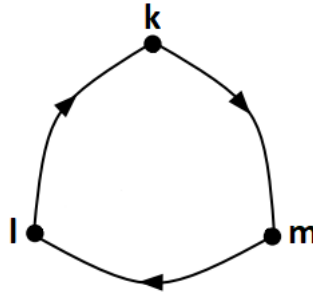
Örnek 3.24. Şekil 3.13. de verilen graf n ile p düğümleri arasında paralel hat bulundurduğu ve aynı zamanda m düğümünde çevrim oluşturan bir hatta sahip olduğu için genel (pseudo) grafa örnektir.



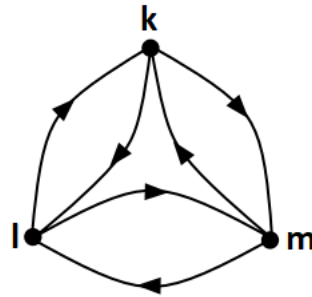
Şekil 3.13. Pseudo graf örneği

Tanım 3.25. Bir grafa yön belirtilmişse yani iki düğüm arasındaki hattın başlangıç ve bitiş düğümü biliniyorsa bu tür graflara yönlü graf (digraf) denir. Eğer farklı yönlerde iki ayrı hat kullanılırsa bu tür graflara çoklu yönlü graf denir. Ayrıca graftaki bütün hatlar aynı yapıya sahip olmalıdır, yani ya hepsi yönlüdür ya da değildir.

Örnek 3.26. Şekil 3.14. ve 3.15. de yönlü ve çoklu yönlü graf için örnekler verilmiştir.



Şekil 3.14. Yönlü graf örneği



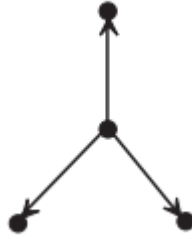
Şekil 3.15. Çoklu yönlü graf örneği

Tanım 3.27. $G = (V, E)$ ikilisi bir graf olmak üzere yönlü bir grafa tüm yönlü hatlar tarafından ulaşılan düğüme havuz denir. Ayrıca tüm yönlü hatların çıkış düğümüne de kaynak denir.

Örnek 3.28. Aşağıda verilen graflar için Şekil 3.16. da tüm yönlü hatların bir düğümde toplanması havuza örnektir. Ayrıca Şekil 3.17. de bu yönlü hatların tek bir düğümde çıkması ise kaynağa örnektir.



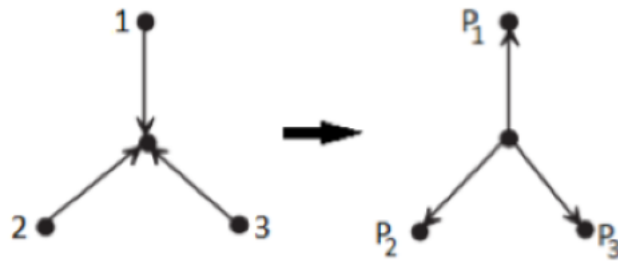
Şekil 3.16. Havuz



Şekil 3.17. Kaynak

Tanım 3.29. Bir grafta $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere P_n ye hatların yön değiştirmesi sonucu kaynakları havuzlar ile değiştiren n düğümlerinin bir digrafı denir.

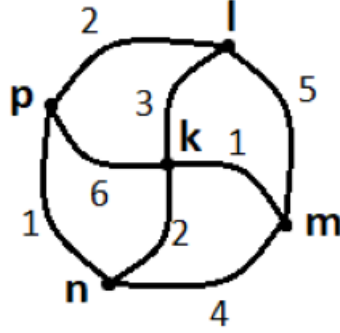
Örnek 3.30. Şekil 3.18. de havuzdan kaynağa dönüşen graf örneği verilmiştir.



Şekil 3.18. Havuzdan kaynağa dönüşen graf

Tanım 3.31. Her bir hatta bir değer verilmiş graflara ağırlıklı graf denir. Burada dikkat edilmesi gereken durum hatların hepsinin aynı değeri almamasıdır. Graftaki bütün hatların ağırlıklarının toplamı o grafin toplam ağırlığını verir.

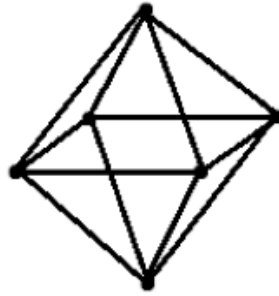
Örnek 3.32. Şekil 3.19. da verilen graf örneğinde her bir hat için, hepsi aynı olmayacak şekilde değerler verilmiştir.



Şekil 3.19. Ağırlıklı graf örneği

Tanım 3.33. Üç boyutlu uzayda ele alınan graflara üç boyutlu graf denir.

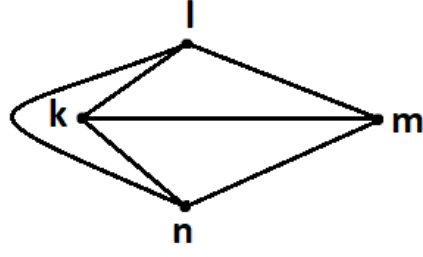
Örnek 3.34. Şekil 3.20. de düzgün sekiz yüzlü olarak adlandırılan üç boyutlu graf örneği verilmiştir.



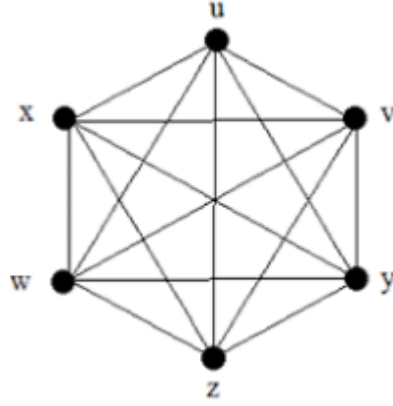
Şekil 3.20. Üç boyutlu graf örneği

Tanım 3.35. Hatların birbirini kesmediği graflara düzlemsel graf denir.

Örnek 3.36. Şekil 3.21. de düğümleri birleştiren hatlar birbirini kesmezken Şekil 3.22. de düğümler arasındaki hatlar kesişmektedir. Ayrıca Şekil 3.22. için hatların birbirini kesmediği izomorf bir graf çizilemez.



Şekil 3.21. Düzlemsel graf örneği

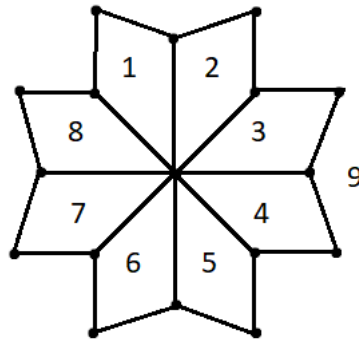


Şekil 3.22. Düzlemsel olmayan graf örneği

Uyarı 3.37. Üç boyutlu uzayda, düzlemsel olmayan grafların çizimi hatların birbirini kesmeyeceği şekilde yapılabilir.

Tanım 3.38. Düzlemsel bir grafta bölge sayısı b , hat sayısı k ve düğüm sayısı n olmak üzere, $b - k + n = 2$ eşitliğine Euler Formülü denir.

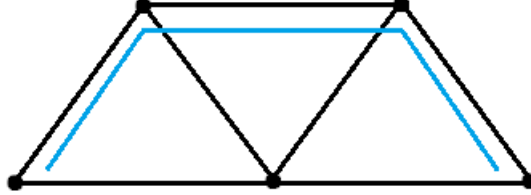
Örnek 3.39. Şekil 3.23. te verilen graf örneğinde düğüm sayısı 17 ve hat sayısı 24 olmak üzere, bölge sayısı Euler Formülünden $b - 24 + 17 = 2$ ve buradan $b = 9$ bulunur.



Şekil 3.23. Dokuz bölgeli graf örneği

Tanım 3.40. Düğümler arası geçişlerde izlenecek düğümlerin tamamı bir yol oluşturur. Basit graflarda yolun uzunluğu, üzerinden geçilen hat sayısına eşittir. Ağırlıklı graflarda ise yol uzunluğu, her bir hattın aldığı değerlerin toplamına eşittir. Basit grafta uzunluğu n olan bir yolun n tane ardışık hattı ve $n + 1$ tane de düğümü vardır.

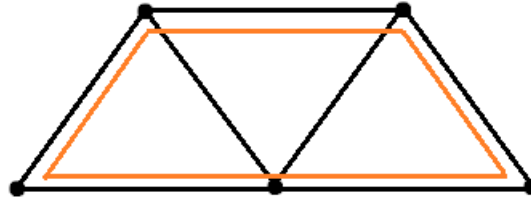
Örnek 3.41. Şekil 3.24. te graf üzerinde yol örneği verilmiştir.



Şekil 3.24. Graf üzerinde yol

Tanım 3.42. Bir hat aynı düğümden iki kez geçmiyorsa ve başladığı düğüme tekrar dönüyorsa bu hatta döngü denir. Bir graftaki hat sayısı düğüm sayısına eşitse ya da fazlaysa, o graf en az bir döngü içeriyor demektir. Uzunluğu n olan bir döngüde n tane düğüm vardır.

Örnek 3.43. Şekil 3.25. te graf üzerinde döngü örneği verilmiştir.



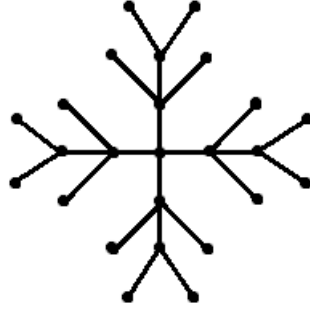
Şekil 3.25. Graf üzerinde döngü

Tanım 3.44. İçinde döngü bulundurmeyen grafa ağaç adı verilir. Ağaca bir hat eklendiği zaman düğümler arası bağlantı kurulacağı için döngü oluşur. Ağaçtaki hat sayısı düğüm sayısının bir eksiği kadardır.

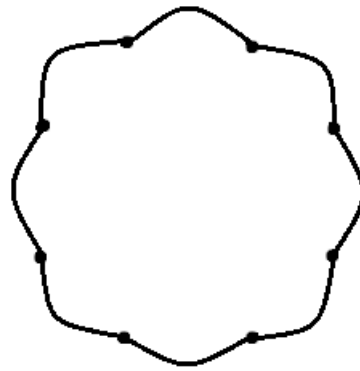
Örnek 3.45. Şekil 3.26. da verilen graf örneğinde düğümler arasında döngü oluşturmayacak şekilde bir hat bağlantısı olduğu için ağaç yapısı oluşmaktadır.

Tanım 3.46. Derecesi 2 olacak şekilde 3 veya daha fazla düğümün oluşturduğu şekle çember graf denir.

Örnek 3.47. Şekil 3.27. de 8 düğümlü çember graf örneği verilmiştir.



Şekil 3.26. Ağaç örneği



Şekil 3.27. Çember graf örneği

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Kombinatoryal Yapıları Lie Cebirleriyle İlişkilendirme

Bu bölümde (Blokh, 1965; Carriazo ve ark., 2004; Ceballos, Nunez, & Tenorio, 2012; Gross & Yellen, 2018) kaynaklarından faydalanılarak Lie cebirleri ile kombinatoryal yapılar arasındaki ilişki incelenmiştir.

Tanım 4.1. L , n -boyutlu ve bazı $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ olan bir Lie cebiri olsun. O halde $1 \leq i, j \leq n$ için

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$$

olarak ifade edilir.

B bazına bağlı olarak aşağıdaki yöntem ile bir kombinatoryal yapı ilişkilendirilebilir.

(a) $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her $e_i \in B$ için düğüm olarak adlandırılan i köşesi çizilir.

(b) $i \leq j \leq k$ olacak şekilde verilen üç düğüm için Şekil 4.4. teki ijk üçgenini çizilebilmek için gerek ve yeter şart

$$(c_{ij}^k, c_{jk}^i, c_{ik}^j) \neq (0, 0, 0)$$

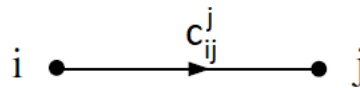
olmasıdır. Ayrıca ij, jk ve ik hatları sırasıyla c_{ij}^k, c_{jk}^i ve c_{ik}^j ağırlıklarına sahiptir.

(b1) Ağırlığı sıfır olan hatlar için kesik çizgiler (hayalet hat) kullanılır.

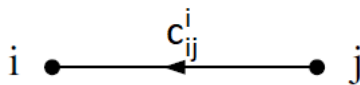
(b2) $1 \leq i < j < k < l \leq n$ olacak şekilde iki ijk ve ijl üçgeni $c_{ij}^k = c_{ij}^l$ eşitliğini sağlıyor ise her iki üçgen tarafından paylaşılan i ve j düğümleri arasında Şekil 4.3. teki gibi ortak bir hat çizilir.

(c) $1 \leq i < j \leq n$ ve $c_{ij}^i \neq 0$ ($c_{ij}^j \neq 0$) olacak şekilde i ve j düğümleri verildiği zaman j den i ye Şekil 4.2. deki gibi (i den j ye Şekil 4.1. deki gibi) yönlendirilmiş bir hat çizilir.

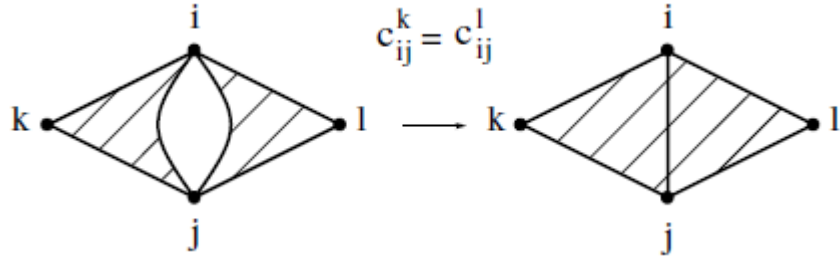
Sonuç olarak, seçilen baza bağlı olarak her Lie cebiri bir kombinatoryal yapıyla ilişkilidir. Ayrık düğüm bulunması durumunda karşılık gelen baz elemanı L Lie cebirinin merkezindedir.



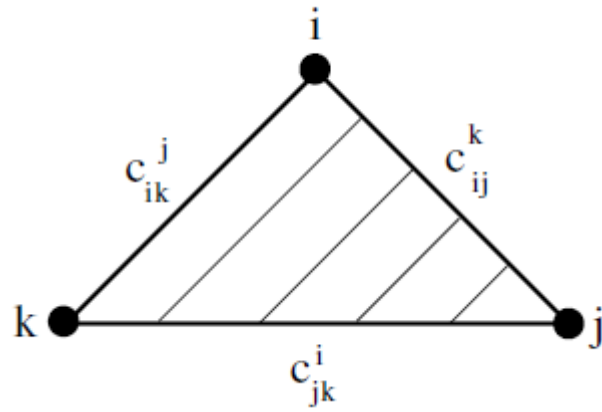
Şekil 4.1. i den j ye yönlendirilmiş hat



Şekil 4.2. j den i ye yönlendirilmiş hat

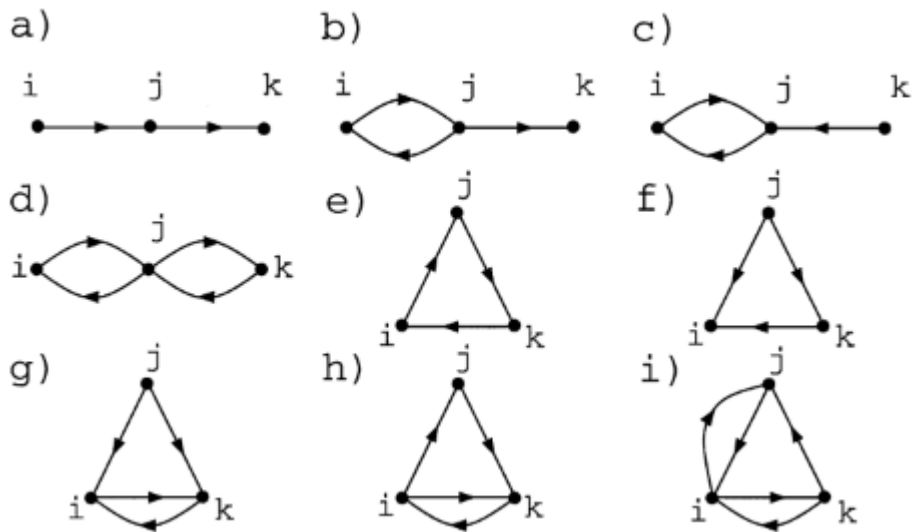


Şekil 4.3. Ortak hat bulunduran üçgenler



Şekil 4.4. Tam üçgen

Lemma 4.2. L, G digrafı ile ilişkili bir Lie cebiri olsun. O halde Şekil 4.5. te gösterilen konfigürasyonlar, herhangi üç farklı i, j, k düğümü için (hatların ağırlıklarından bağımsız olarak) yasaktır.



Şekil 4.5. Yasaklı konfigürasyonlar

İspat. Bu tür konfigürasyonlardan biri için $J(e_i, e_j, e_k) \neq 0$ olduğu kontrol edilebileceğinden dolayı bu durum bir çelişki oluşturacaktır. Yani a) ve b) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^j e_j$ ve $[e_j, e_k] = c_{jk}^k e_k$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^j e_j, e_k] + [c_{jk}^k e_k, e_i] + [0, e_j] \\ &= c_{ij}^j [e_j, e_k] + c_{jk}^k [e_k, e_i] \\ &= c_{ij}^j c_{jk}^k e_k \end{aligned}$$

elde edilir. c) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^i e_i$ ve $[e_j, e_k] = c_{jk}^j e_j$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^i e_i, e_k] + [c_{jk}^j e_j, e_i] + [0, e_j] \\ &= c_{jk}^j [e_j, e_i] \\ &= -c_{jk}^j c_{ij}^i e_i \end{aligned}$$

elde edilir. d) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^j e_j + c_{ij}^i e_i$ ve $[e_j, e_k] = c_{jk}^k e_k + c_{jk}^j e_j$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^j e_j + c_{ij}^i e_i, e_k] + [c_{jk}^k e_k + c_{jk}^j e_j, e_i] + [0, e_j] \\ &= c_{ij}^j [e_j, e_k] + c_{ij}^i [e_i, e_k] + c_{jk}^k [e_k, e_i] + c_{jk}^j [e_j, e_i] \\ &= c_{ij}^j c_{jk}^k e_k + c_{ij}^i c_{jk}^j e_j - c_{jk}^k c_{ij}^i e_j - c_{jk}^j c_{ij}^i e_i \\ &= c_{ij}^j c_{jk}^k e_k - c_{jk}^j c_{ij}^i e_i \end{aligned}$$

elde edilir. e) ve h) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^j e_j$, $[e_j, e_k] = c_{jk}^k e_k$ ve $[e_i, e_k] = c_{ik}^i e_i$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^j e_j, e_k] + [c_{jk}^k e_k, e_i] + [-c_{ik}^i e_i, e_j] \\ &= c_{ij}^j [e_j, e_k] + c_{jk}^k [e_k, e_i] - c_{ik}^i [e_i, e_j] \\ &= c_{ij}^j c_{jk}^k e_k - c_{jk}^k c_{ik}^i e_i - c_{ik}^i c_{ij}^j e_j \end{aligned}$$

elde edilir. f) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^i e_i$, $[e_j, e_k] = c_{jk}^k e_k$, $[e_i, e_k] = c_{ik}^i e_i$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^i e_i, e_k] + [c_{jk}^k e_k, e_i] + [-c_{ik}^i e_i, e_j] \\ &= c_{ij}^i [e_i, e_k] + c_{jk}^k [e_k, e_i] - c_{ik}^i [e_i, e_j] \\ &= c_{ij}^i c_{ik}^i e_i - c_{jk}^k c_{ik}^i e_i - c_{ik}^i c_{ij}^i e_i \\ &= -c_{jk}^k c_{ik}^i e_i \end{aligned}$$

elde edilir. g) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^i e_i$, $[e_j, e_k] = c_{jk}^k e_k$, $[e_i, e_k] = c_{ik}^k e_k + c_{ik}^i e_i$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^i e_i, e_k] + [c_{jk}^k e_k, e_i] + [-c_{ik}^k e_k, e_j - c_{ik}^i e_i, e_j] \\
&= c_{ij}^i [e_i, e_k] + c_{jk}^k [e_k, e_i] - c_{ik}^k [e_k, e_j] - c_{ik}^i [e_i, e_j] \\
&= c_{ij}^i c_{ik}^k e_k + c_{ij}^i c_{ik}^i e_i - c_{jk}^k c_{ik}^k e_k - c_{jk}^k c_{ik}^i e_i + c_{ik}^k c_{jk}^k e_k - c_{ik}^i c_{ij}^i e_i \\
&= c_{ij}^i c_{ik}^k e_k - c_{jk}^k c_{ik}^i e_i
\end{aligned}$$

elde edilir. i) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^j e_j + c_{ij}^i e_i$, $[e_j, e_k] = c_{jk}^j e_j$, $[e_i, e_k] = c_{ik}^i e_i + c_{ik}^k e_k$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^j e_j, e_k + c_{ij}^i e_i, e_k] + [c_{jk}^j e_j, e_i] + [-c_{ik}^i e_i, e_j - c_{ik}^k e_k, e_j] \\
&= c_{ij}^j [e_j, e_k] + c_{ij}^i [e_i, e_k] + c_{jk}^j [e_j, e_i] - c_{ik}^i [e_i, e_j] - c_{ik}^k [e_k, e_j] \\
&= c_{ij}^j c_{jk}^j e_j + c_{ij}^i c_{ik}^i e_i + c_{ij}^i c_{ik}^k e_k - c_{jk}^j c_{ij}^j e_j \\
&\quad - c_{jk}^j c_{ij}^i e_i - c_{ik}^i c_{ij}^j e_j - c_{ik}^i c_{ij}^i e_i + c_{ik}^k c_{jk}^j e_j \\
&= -c_{jk}^j c_{ij}^i e_i + (c_{ik}^k c_{jk}^j - c_{ik}^i c_{ij}^j) e_j + c_{ij}^i c_{ik}^k e_k
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle üç boyutlu Lie cebirleriyle ilişkili üç düğümlü digrafın yalnızca dört türü vardır. Elde edilen bu sonuçlar sayesinde ilişkili Lie cebirlerinin izomorf olduğu Şekil 4.6. daki sınıflara ulaşılır. 1) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^j e_j$ ve $[e_j, e_k] = c_{jk}^j e_j$ olduğundan

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^j e_j, e_k] + [c_{jk}^j e_j, e_i] + [0, e_j] \\
&= c_{ij}^j [e_j, e_k] + c_{jk}^j [e_j, e_i] + 0 \\
&= c_{ij}^j c_{jk}^j e_j - c_{jk}^j c_{ij}^j e_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. 2) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^i e_i$ ve $[e_j, e_k] = c_{jk}^k e_k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^i e_i, e_k] + [c_{jk}^k e_k, e_i] + [0, e_j] \\
&= c_{ij}^i [e_i, e_k] + c_{jk}^k [e_k, e_i] + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. 3) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^j e_j$, $[e_j, e_k] = c_{jk}^j e_j$ ve $[e_i, e_k] = c_{ik}^k e_k + c_{ik}^i e_i$ olduğundan

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^j e_j, e_k] + [c_{jk}^j e_j, e_i] + [-c_{ik}^k e_k, e_j - c_{ik}^i e_i, e_j] \\
&= c_{ij}^j [e_j, e_k] + c_{jk}^j [e_j, e_i] - c_{ik}^k [e_k, e_j] - c_{ik}^i [e_i, e_j] \\
&= c_{ij}^j c_{jk}^j e_j - c_{jk}^j c_{ij}^j e_j + c_{ik}^k c_{jk}^j e_j - c_{ik}^i c_{ij}^j e_j \\
&= (c_{ik}^k c_{jk}^j - c_{ik}^i c_{ij}^j) e_j
\end{aligned}$$

elde edilir. 4) için $[e_i, e_j] = c_{ij}^i e_i + c_{ij}^j e_j$, $[e_j, e_k] = c_{jk}^j e_j + c_{jk}^k e_k$, $[e_i, e_k] = c_{ik}^i e_i + c_{ik}^k e_k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 J(e_i, e_j, e_k) &= [c_{ij}^i e_i, e_k + c_{ij}^j e_j, e_k] + [c_{jk}^j e_j, e_i + c_{jk}^k e_k, e_i] + [-c_{ik}^i e_i, e_j - c_{ik}^k e_k, e_j] \\
 &= c_{ij}^i [e_i, e_k] + c_{ij}^j [e_j, e_k] + c_{jk}^j [e_j, e_i] + c_{jk}^k [e_k, e_i] - c_{ik}^i [e_i, e_j] - c_{ik}^k [e_k, e_j] \\
 &= c_{ij}^i c_{ik}^i e_i + c_{ij}^j c_{ik}^k e_k + c_{ij}^j c_{jk}^j e_j + c_{ij}^j c_{jk}^k e_k - c_{jk}^j c_{ij}^i e_i - c_{jk}^k c_{ij}^j e_j \\
 &\quad - c_{jk}^k c_{ik}^i e_i - c_{jk}^j c_{ik}^k e_k - c_{ik}^i c_{ij}^j e_i - c_{ik}^k c_{ij}^j e_j + c_{ik}^i c_{jk}^j e_j + c_{ik}^k c_{jk}^k e_k \\
 &= -(c_{jk}^j c_{ij}^i + c_{jk}^k c_{ik}^i) e_i + (c_{ik}^k c_{jk}^j - c_{ik}^i c_{ij}^j) e_j + (c_{ij}^j c_{ik}^k + c_{ij}^i c_{jk}^k) e_k
 \end{aligned}$$

elde edilir.

1) ve 2) durumlarında, $J(e_i, e_j, e_k) = 0$ eşitliği her zaman sağlandığından dolayı hatların ağırlıkları keyfi olabilir. Bununla birlikte 3), 4) durumları için aynı Jacobi özdeşliği, bu ağırlıklar için

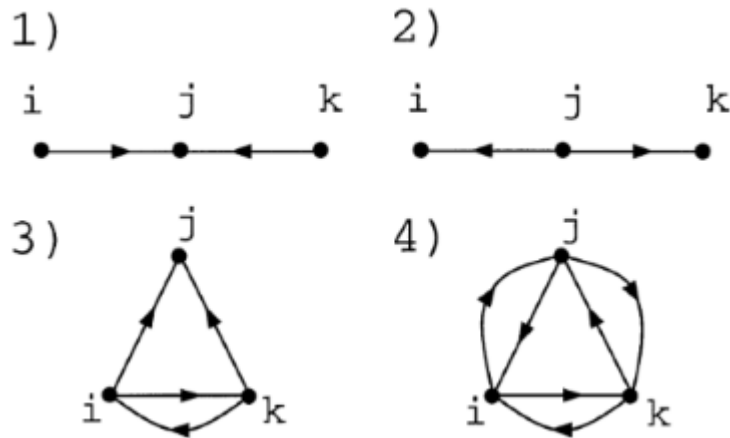
3)

$$c_{ik}^k c_{jk}^j - c_{ik}^i c_{ij}^j = 0$$

4)

$$\begin{aligned}
 c_{ij}^i c_{jk}^j + c_{ik}^i c_{jk}^k &= 0 \\
 c_{ik}^k c_{jk}^j - c_{ik}^i c_{ij}^j &= 0 \\
 c_{ij}^j c_{jk}^k + c_{ij}^i c_{ik}^k &= 0
 \end{aligned}$$

koşullarını sağlar. ■



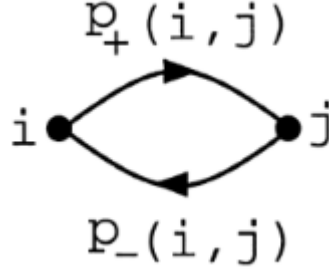
Şekil 4.6. Lie cebirleriyle ilişkili üç düğümün digrafları

Teorem 4.3. G , 3-döngüsüz bir Lie cebiri ile ilişkili digraf olsun. O zaman G

(i) tek bir çift hat veya

(ii) çift hattı olmayan iyi yönlendirilmiş bir digraftır.

Ayrıca (i) veya (ii) yi sağlayan herhangi bir digraf, bir Lie cebiri ile ilişkilidir.



Şekil 4.7. Çift hat

İspat. G , bir Lie cebiriyle ilişkili üç döngü içermeyen bir graf olsun. O halde V, F cismi üzerinde bazı $\{e_1, e_2\}$ olan iki boyutlu vektör uzayı olsun. $p_-(1, 2), p_+(1, 2)$ Şekil 4.7. de gösterilen ağırlıklar olmak üzere Lie çarpımı

$$[e_1, e_2] = p_-(1, 2)e_1 + p_+(1, 2)e_2$$

şeklinde tanımlansın. Bu çarpım V ye G ile ilişkili bir Lie cebir yapısı sağlar.

Son olarak $G, 1, 2, \dots, n$ düğümleri ile (ii) koşulunu sağlayan bir graf olsun. V, F cismi üzerinde bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olan n -boyutlu vektör uzayı olsun. O halde $[e_i, e_j]$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

i, j düğümleri G de bitişik değilse

$$[e_i, e_j] = 0$$

olur. Diğer durumda

i içeri giren bir düğüm ise $p(i, j)$, G de j den i ye kadar olan hatların ağırlığı olmak üzere

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} p(i, j)e_i, & i < j \\ -p(i, j)e_i, & i > j \end{cases}$$

olur.

i dışarı çıkan bir düğüm ise $p(i, j)$, G de i den j ye kadar olan hatların ağırlığı olmak üzere

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} p(i, j)e_j, & i < j \\ -p(i, j)e_j, & i > j \end{cases}$$

olur. Yukarıdaki tanımlar ve lineer genişlemeler V de bir çarpım sağlar. Bu çarpım çarpık simetriktir, çünkü herhangi iki bitişik düğüm verildiğinde, bunlardan biri içeri giren

tepe noktası, diğeri ise dışarı çıkan tepe noktasıdır. Bu durumda G iyi yönlendirilmiş olduğundan dolayı üç döngü içermez. Böylece $i < j < k$ ile birlikte üç temel e_i, e_j, e_k vektörü verildiğinde ilgili i, j, k düğümleri aşağıdaki durumlardan birindedir.

(i) Birbirlerine bitişik değillerdir. O zaman $J(e_i, e_j, e_k) = 0$ olur.

(ii) Bunlardan ikisi bitişiktir, ancak üçüncüsü diğerlerinin hiçbirine bitişik değildir. O halde $J(e_i, e_j, e_k) = 0$ olur.

(iii) Bunlardan biri, örneğin j , diğer ikisine bitişik olsun. j içeri giren bir düğüm ise bu üç düğüm Şekil 4.6 daki konfigürasyon (1) i verir. O halde

$$[e_i, e_j] = p(i, j)e_j$$

$$[e_j, e_k] = p(j, k)e_j$$

$$[e_i, e_k] = 0$$

için

$$[[e_i, e_j], e_k] = p(i, j)[e_j, e_k] = p(i, j)p(j, k)e_j$$

$$[[e_j, e_k], e_i] = p(j, k)[e_j, e_i] = -p(j, k)p(i, j)e_j$$

$$[[e_k, e_i], e_j] = 0$$

dır. Böylece $J(e_i, e_j, e_k) = 0$ elde edilir.

j dışarı çıkan bir düğüm ise Şekil 4.6. daki konfigürasyon (2) yi verir. Benzer şekilde ispatlanır. Bu çarpım V nin, G ile ilişkili bir Lie cebir yapısı veren Lie çarpım olduğu anlamına gelir. ■

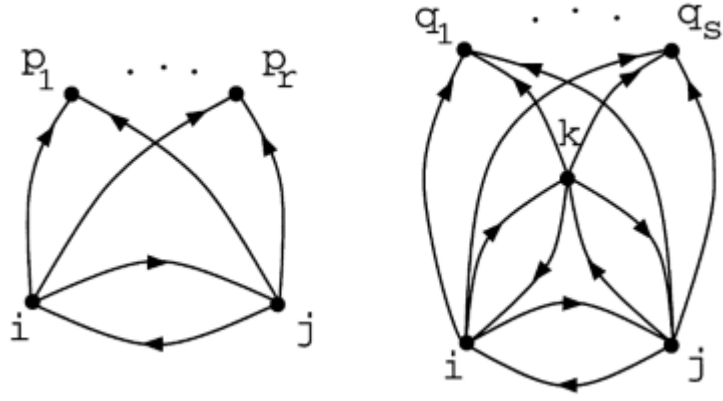
Teorem 4.4. G , üç döngü içeren bir digraf olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise G , bir Lie cebiri ile ilişkilidir.

(i) G nin çift hatları üç döngü üzerindedir ve çift hattı olmayan üç döngü yoktur.

(ii) Çift hatların uçlarındaki bitişik düğümler, karşılıklı olarak bitişik değildir. Ayrıca Şekil 4.8 deki konfigürasyonlardan birinde görünürler.

(iii) G den çift hatları kaldırarak elde edilen alt graf Teorem 4.3. ün (ii) koşulunu sağlar.

İspat. (i) koşulu, Şekil 4.6 daki izin verilen konfigürasyonlardan kaynaklanmaktadır. Öte yandan i, j bir hattın uç noktalarını gösterebilir ve p başka bir tepe noktası olsun. p , i veya j ye bitişik ise, diğerine de bitişik olmalıdır, çünkü $J(e_i, e_j, e_k) = 0$ dır. Ayrıca q , i ve j nin başka bir komşu düğümüdür. Çünkü $J(e_i, e_p, e_q) = J(e_j, e_p, e_q) = 0$, p ve q karşılıklı olarak bitişik olamaz. Şekil 4.6 daki izin verilen konfigürasyonlar dikkate alındığında, koşul (ii) geçerlidir. Son olarak, G de çift hatları çıkarmanın Lie cebiri ile ilişkili bir alt grafi verdiğini kontrol etmek kolaydır. Bu nedenle Teorem 4.3. ün (ii) koşulunu sağlar. ■



Şekil 4.8. Çift hat içeren konfigürasyonlar

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Lie Cebirleri İle İlişkili Olan Kombinatoryal Yapılar Üzerinde İşlemler

Bu bölüm boyunca graflar üzerinde yapılan değişiklikler ele alınacaktır. Graftaki düğümleri birleştirmenin veya grafa bir hat ekleyip çıkarmanın veya hatları daraltmanın graf üzerindeki etkisi incelenecektir. Bölüm boyunca (Caceres ve ark., 2013; Ceballos, Nunez, & Tenorio, 2012; Hamelink, 1969) kaynaklarından yararlanılmıştır.

5.1.1. Düğüm Birleştirme

İki kombinatoryal yapının birleştirilmesi, her iki konfigürasyonda bir tepe düğümü belirleyerek iki yapının yapıştırılmasından oluşur. Bu işlem sonucunda oluşan yeni yapı, Lie cebiri ile olan ilişkisini korur.

5.1.2. Lie Cebirleri ve Birleştirme İle İlgili Digraflar

İlk olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilerek, Lie cebirleri ile ilişkili olan digraflar incelenmeye başlanılacaktır.

Önerme 5.1. G , Lie cebirleri ile ilişkili olmayan digraf olsun. O halde düğüm birleştirme kullanılarak G den elde edilen her digraf Lie cebirleri ile ilişkili değildir.

İspat. G' , düğüm birleştirme uygulanarak G den elde edilen bir digraf olsun. G ve G' nün düğümlerinin sayısı sırasıyla $n < m$ olmak üzere n ve m dir. G grafi ile ilişkili, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazı için L , G grafi ile ilişkili bir Lie cebiri değildir. O halde $1 \leq i < j < k \leq n$ olacak şekilde $J(e_i, e_j, e_k) \neq 0$ vardır. $L \subset L'$ olacak şekilde L', G digrafi ile ilişkili vektör uzayı olmak üzere bu Jacobi özdeşliği yeterli değildir. ■

Önerme 5.2. G ve G' sırasıyla L ve L' Lie cebirleri ile ilişkili iki digraf olsun. G' nün bir düğümü izole edilerek G ve G' nün birleşimi ele alınsın. O halde \bar{L} , G' nün $G' - \{v\}$ alt grafiyle ilişkili Lie cebiri olmak üzere $L \oplus \bar{L}$ toplamı tarafından verilen birleştirme ile ilişkili tek bir Lie cebiri vardır.

İspat. G' nün düğümü olan v ayrık bir düğüm ise, o zaman $e_v \in L \cap L'$ ve $e_v \in Z(L')$ olur. Bu nedenle L' nün sıfır olmayan Lie çarpımları $G' - \{v\}$ ile ilişkili L' nün \bar{L} alt cebirine karşılık gelen Lie çarpımlarıdır. L ve L' elemanları arasındaki Lie çarpımları sıfır olduğundan dolayı her $e_i \in L$ ve $e_k \in \bar{L}$ için $J(e_v, e_i, e_k) = 0$ sağlanır. ■

Önerme 5.3. G ve G' , Lie cebirleriyle ilişkili iki digraf olsun. Ayrık olmayan bir düğüm ile birleştirme ele alınacaktır. Böylece aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i) G , yönelimli 2-döngü ise bu birleştirme ile hiçbir Lie cebiri ilişkilendirilmez.
- (ii) G , 3-döngü içeriyorsa o zaman birleştirmenin bir Lie cebiri ile ilişkili olabilmesi için gerek ve yeter şart G ve G' de birleştirme tepe düğümü bir havuzdur. Ayrıca ya G ve G' aynı tipteki digraflardır ya da G' bir P_n digrafıdır.
- (iii) G ve G' , 3-döngü veya 2-döngü içermiyorsa birleştirmenin bir Lie cebiri ile ilişkili

olabilmesi için gerek ve yeter şart birleştirme tepe düğümünün hem G de hem de G' de aynı tipte olmasıdır.

İspat. (i) G , yönelimli 2-döngü olduğu için iki boyutlu bir Lie cebiri ile ilişkilidir. Birleştirme ayrık olmayan bir tepe düğümü ile yapılırsa Şekil 4.5 teki b), c) veya d) konfigürasyonları elde edilir.

(ii) Bu durum için bir önceki durumdan farklı olarak yönlendirilmiş 2-döngünün düğümleri ile birleşimi düşünülemez. Birleşimin G deki ikiz havuz tarafından oluşturulduğu kabul edilir. Eğer tepe düğümü aynı zamanda G de bir havuz ise birleştirmenin bir Lie cebiri ile ilişkili olduğunu kanıtlamak kolaydır.

(iii) G ve G' digraflarının tipolojisi Teorem 4.3. e dayanmaktadır. Birleştirme her iki digrafta da aynı tipte bir tepe düğümü ile oluştuğu kabul edilir. O halde elde edilen digraf P_n tipinde olmalıdır ve bundan dolayı Lie cebiri ile ilişkilendirilir. Aksi takdirde her bir digrafta farklı düğüm tipleri göz önünde bulundurulursa, Lemma 4.2. deki yasaklanmış a) konfigürasyonu elde edilir. ■

5.1.3. Lie Cebirleri ve Birleştirme İle İlişkili Tam Üçgenler

Önerme 5.2. ye benzer bir yöntem kullanarak Lie cebirleriyle ilişkili tam üçgenlerin birleşimi incelenecektir.

Lemma 5.4. Lie cebirleriyle ilişkili olan G ve T , sırasıyla bir digraf ve bir üçgen yapı olsun. O zaman L ve \bar{L} sırasıyla T ve $G - \{v\}$ ile bağlantılı Lie cebirleri olmak üzere, G ve T nin ayrık bir v tepe düğümü tarafından birleştirilmesi Lie cebir $L \oplus \bar{L}$ ile ilişkilendirilir.

Önerme 5.5. Bir tam üçgenin ve bir digrafın ayrık olmayan bir k düğümü tarafından birleşiminin bir Lie cebiri ile ilişkilendirilebilmesi için gerek ve yeter şart k nin bir havuz ve tam üçgende k nin karşı hattının hayalet olmasıdır.

İspat. İki olası durum Şekil 5.1. ve Şekil 5.2. de gösterilmektedir, ancak hatlar hayalet veya dolu olabilir. İlk olarak Şekil 5.1. deki yapının $c_{kl}^k \neq 0$ olmak üzere Lie çarpımları

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, [e_i, e_k] = c_{ik}^j e_j, [e_j, e_k] = c_{jk}^i e_i, [e_k, e_l] = c_{kl}^k e_k$$

olup aşağıdaki Jacobi özdeşlikleri elde edilir.

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_l) &= [[e_i, e_j], e_l] + [[e_j, e_l], e_i] + [[e_l, e_i], e_j] = 0 \\ &= [c_{ij}^k e_k, e_l] = 0 \\ &= c_{ij}^k c_{kl}^k e_k = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(e_i, e_k, e_l) &= [[e_i, e_k], e_l] + [[e_k, e_l], e_i] + [[e_l, e_i], e_k] = 0 \\ &= [c_{ik}^j e_j, e_l] + [c_{kl}^k e_k, e_i] = 0 \\ &= -c_{kl}^k c_{ik}^j e_j = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(e_j, e_k, e_l) &= [[e_j, e_k], e_l] + [[e_k, e_l], e_j] + [[e_l, e_j], e_k] = 0 \\
&= [c_{jk}^i e_i, e_l] + [c_{kl}^k e_k, e_j] = 0 \\
&= -c_{kl}^k c_{jk}^i e_i = 0
\end{aligned}$$

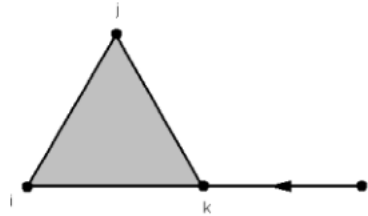
dır. Bu özdeşliklerden $c_{kl}^k \neq 0$ olduğundan $c_{ij}^k = c_{jk}^i = c_{ik}^j = 0$ elde edilir. Bu üçgenin dolu olması gerçeğiyle çelişir. Bu durumda Şekil 5.2. deki ij hattının hayalet olduğu gösterilecektir, bunun için $c_{kl}^l \neq 0$ olmak üzere sıfır olmayan Lie çarpımları

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, [e_i, e_k] = c_{ik}^j e_j, [e_j, e_k] = c_{jk}^i e_i, [e_k, e_l] = c_{kl}^l e_l$$

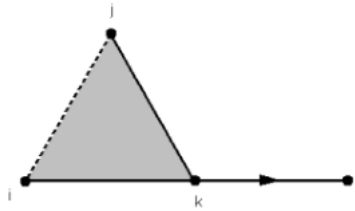
olup Jacobi özdeşliği

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_l) &= [[e_i, e_j], e_l] + [[e_j, e_l], e_i] + [[e_l, e_i], e_j] \\
&= [c_{ij}^k e_k, e_l] \\
&= c_{ij}^k c_{kl}^l e_l = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece birleşmenin tepe düğümünün karşı hattı $c_{ij}^k e_l = 0$ olduğundan dolayı hayalettir. ■



Şekil 5.1. Havuz ile birleştirme



Şekil 5.2. Kaynak ile birleştirme

Önerme 5.6. Aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyor ise iki tam üçgenin bir tepe düğümü tarafından birleştirilmesi bir Lie cebiri ile ilişkilendirilir.

(i) Birleştirme tepe düğümü yalnızca hayalet hatlarla oluşur ve karşı hatları doludur.

(ii) Birleştirme tepe düğümü ile ilişkili olmayan hatlar hayalettir.

İspat. İki tam üçgen ijk ve klm nin birleşimi için sıfır olmayan Lie çarpımları

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, [e_i, e_k] = c_{ik}^j e_j, [e_j, e_k] = c_{jk}^i e_i$$

$$[e_k, e_l] = c_{kl}^m e_m, [e_k, e_m] = c_{km}^l e_l, [e_l, e_m] = c_{lm}^k e_k$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki Jacobi özdeşlikleri

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_l) &= [[e_i, e_j], e_l] + [[e_j, e_l], e_i] + [[e_l, e_i], e_j] = 0 \\ &= [c_{ij}^k e_k, e_l] = 0 \\ &= c_{ij}^k c_{kl}^m e_m = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(e_i, e_l, e_m) &= [[e_i, e_l], e_m] + [[e_l, e_m], e_i] + [[e_m, e_i], e_l] = 0 \\ &= [c_{lm}^k e_k, e_i] = 0 \\ &= -c_{lm}^k c_{ik}^j e_j = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_m) &= [[e_i, e_j], e_m] + [[e_j, e_m], e_i] + [[e_m, e_i], e_j] = 0 \\ &= [c_{ij}^k e_k, e_m] = 0 \\ &= c_{ij}^k c_{km}^l e_l = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(e_j, e_l, e_m) &= [[e_j, e_l], e_m] + [[e_l, e_m], e_j] + [[e_m, e_j], e_l] = 0 \\ &= [c_{lm}^k e_k, e_j] = 0 \\ &= -c_{lm}^k c_{jk}^i e_i = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\{c_{ij}^k = c_{lm}^k = 0, (c_{ik}^j, c_{jk}^i) \neq (0, 0), (c_{kl}^m, c_{km}^l) \neq (0, 0)\}$$

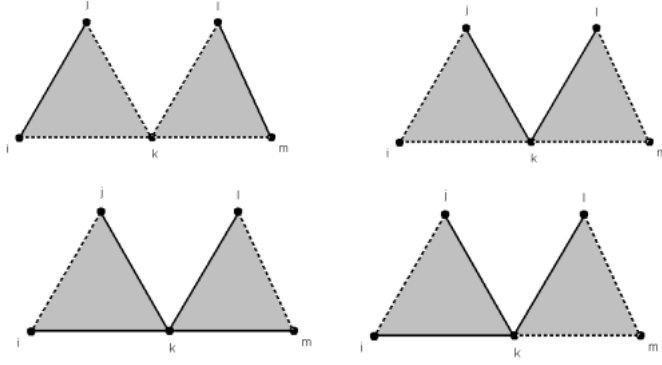
ve

$$\{c_{km}^l = c_{kl}^m = c_{ik}^j = c_{jk}^i = 0, c_{lm}^k \neq 0, c_{ij}^k \neq 0\}$$

olur. Şekil 5.3. te tüm olası birleştirmeler gösterilmiştir. ■

5.1.4. Lie Cebirleriyle İlişkili Olarak Hat Ekleme, Silme ve Daraltma

Bu alt bölümde bir digraf üzerinde hat eklenmesi incelenecektir. Öncelikle bir G digrafı ve G nin bitişik olmayan i ve j düğümü ele alınsın. Daha sonra, G ye her iki düğümü birleştiren yeni bir hat eklensin. Bu ek hat eklendikten sonra, G den yeni bir digraf elde edilir ve doğal olarak bu yeni digrafın bir Lie cebiri ile ilişkilendirilip ilişkilendirilemeyeceğini araştırırken aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.



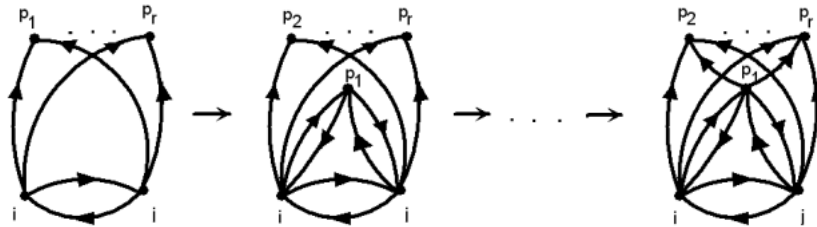
Şekil 5.3. İki üçgenin birleşimi

Önerme 5.7. Eğer G , Teorem 4.3. teki konfigürasyondan oluşan bir digraf ise o zaman G den hat ekleme ile elde edilen her digraf Lie cebirleriyle ilişkili değildir.

İspat. Yönlendirilmiş 2-döngüde hat eklemenin mümkün olmadığı unutulmamalıdır. P_n digrafı varsa ve yeni bir hat eklenirse, Lemma 4.2. deki yasaklanan b) ve c) konfigürasyonları elde edilir. ■

Önerme 5.8. G , Teorem 4.4. teki r tane ikiz düğümlü ilk konfigürasyona karşılık gelen bir digraf olsun. O zaman bir Lie cebiri ile ilişkili digraf elde etmek için $r + 1$ tane hat eklenmelidir. Ayrıca, elde edilen digraf Teorem 4.4. teki ikinci konfigürasyona karşılık gelir.

İspat. İki ikiz düğüm arasında yeni bir hat eklenirse, Lemma 4.2. deki yasaklanmış a) veya i) konfigürasyonları elde edilir. Benzer şekilde, $2 < k < r + 1$ olmak üzere k tane hat eklenirse, Lemma 4.2. deki yasaklanmış b), f), g) veya i) konfigürasyonları görülür. $r + 1$ tane hattın eklenmesi durumunda Şekil 5.4. te belirtilen yöntem dikkate alınır. ■



Şekil 5.4. Hatların eklenmesi

Önerme 5.9. G , Teorem 4.4. teki ikiz düğümlü ikinci konfigürasyona karşılık gelen bir digraf olsun. O halde bir Lie cebiri ile ilişkili digraf elde etmek için en az $s(s + 2)$ tane hat eklenmelidir.

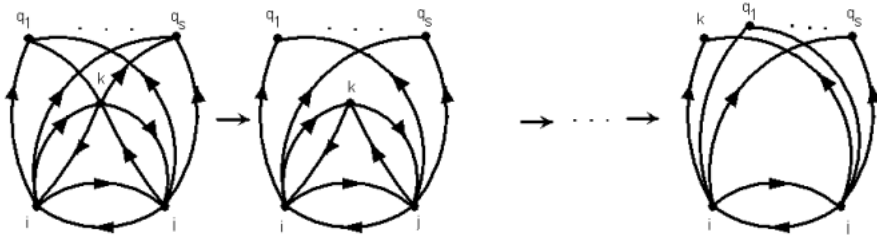
İspat. G ye f) ve i) yasaklı konfigürasyonları görüleceği için tek bir hat eklenemez. Bu nedenle ikiz tepe düğümü ile yönlendirilmiş 2-döngüye ait ikinci bir tepe arasına hatlar eklenmelidir. Ayrıca b) ve i) konfigürasyonlarından kaçınmak için her ikiz tepe düğümünü yönlendirilmiş 2-döngüden her tepe düğümüne bağlayan yeni bir hat eklenmesi gerekir.

■

Aşağıdaki önerme belirli bir digraf türü için hat silme adı verilen işlemle ilgilidir.

Önerme 5.10. G , Teorem 4.4. teki ikiz düğümlü ikinci konfigürasyona karşılık gelen bir digraf olsun. Daha sonra $s + 2$ tane hattın silinmesiyle Teorem 4.4. teki konfigürasyona karşılık gelen bir digraf elde edilebilir.

İspat. Yalnızca Şekil 5.5. teki belirtilen yöntem dikkate alınmalıdır. ■



Şekil 5.5. Hat silme

Son olarak bu alt bölümü, P_n digrafının Lie cebirleriyle ilişkili alt graflar üretmesi için hat daralması hakkında bir önermeyle sonuçlandırıyoruz.

Önerme 5.11. P_n , digrafının bir alt grafinin Lie cebiri ile ilişkilendirilebilmesi için uç düğümlere denk gelen hatların ardışık olarak daralması gerekir.

İspat. Bir tane bitişik düğümü olan hat ile daralma uygulanırsa P_{n-1} digrafları elde edilir. Farklı bir hat ile yapılması durumunda Lemma 4.2. de yasaklanan a) konfigürasyonu elde edilir. ■

6. KAYNAKLAR

- Bloh, A. M. (1971). A certain generalization of the concept of lie algebras. *Algebra and Number Theory Moskow. Gos. Ped. Inst U 'cen.*, 375, 9–20.
- Blokh, A. Y. (1965). A generalization of the concept of a lie algebra. *Russian Academy of Sciences*, 165(3), 471–473.
- Brouwer, A. E., Cohen, A. M., & Neumaier, A. (1989). *Distance regular graphs*. Springer-Verlag Berlin etc.
- Caceres, J. G., Ceballos, M. G., Nunez, J. V., & Puertas, M. G. (2013). Graph operations and lie algebras. *Int. Journal of Computer Mathematics*, 90(10), 2092–2104.
- Carriazo, A., Fernandez, L., & Valdes, J. (2004). Combinatorial structures associated with lie algebras of finite dimension. *Linear Algebra and its Applications*, 389(1), 43–61.
- Ceballos, M., Nunez, J., & Tenorio, A. F. (2012). Study of lie algebras by using combinatorial structures. *Linear Algebra Appl*, 436(2), 349–363.
- Ceballos, M., Nunez, J., & Tenorio, A. (2012). Combinatorial structures and lie algebras of upper triangular matrices. *Applied Mathematics Letters*, 25(3), 514–519.
- Diestel, R. (2017). *Graph theory*. New York: Springer.
- Erdmann, K., & Wildon, M. (2006). Introduction to lie algebras. *Springer Undergraduate Mathematics Series*, 122.
- Gross, J., & Yellen, J. (2018). Graph theory and its applications. *Champan ve Hall/CRC*.
- Hamelink, R. (1969). Graph theory and lie algebra. *Springer*, 149–153.
- Harary, F. (1969). Graph theory. *Addison Wesley*.
- Jacobson, N. (1963). *Lie algebras*. Dover Books on Mathematics.
- Karaş, İ. (n.d.). *Graf teorisi ve algoritmaları*. https://web.karabuk.edu.tr/ismail.karas/759/Sunu1_esas.pdf (accessed: 17.01.2023).
- Mansuroğlu, N. (2022). Fundamentals of lie algebras. *Gece Kitaplığı*.
- Paauwe, A. (2007). Distance regular graphs.
- Varadarajan, V. (2013). Lie groups, lie algebras and their representations. *New York: Springer*, 102.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Selda KAÇAK
Uyruğu:	T.C.
ORCID Numarası:	0000-0003-1831-0819

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte:	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2021
Yüksek Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü:	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2024

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler
Uluslararası Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler
Ulusal Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler
Ulusal Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler Nil Mansuroğlu, Selda Kaçak, 2023, Sonlu Boyutlu Lie Cebirleri İle İlişkili Kombinatorial Yapılar Üzerinde İşlemler, 35. Ulusal Matematik Sempozyumu.