T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SPLICED DİZİLER VE TOPLANABİLME METOTLARI

Sevcan DEMİRKALE

DOKTORA TEZİ

KIRŞEHİR
2024

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SPLICED DİZİLER VE TOPLANABİLME METOTLARI

SEVCAN DEMİRKALE

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
PROF. DR. EMRE TAŞ

KIRŞEHİR
2024

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 30/05/2024

Öğrenci
Sevcan DEMİRKALE

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

TEŞEKKÜR

Doktora ders sürecinde kendisini tanıdığım günden bu yana gösterdiği sakin, sabırlı ve anlayışlı hali ile bana örnek olmasının yanı sıra bir bilim insanının nasıl çalışması gerektiğini tecrübeleriyle bana anlatan ve öğreten, her süreçte her zaman bana yardımcı olan ve desteğini hep hissettiğim değerli danışmanım Prof. Dr. Emre Taş'a büyük bir içtenlikle çok teşekkür ederim. Tezimin her aşamasında gerek sorularımla gerekse altı ayda bir yapılan doktora tez izleme komitesi sunumlarında, sempozyum sunumunda, tezin şekillenmesinde ve nihai hale gelmesinde büyük katkısı olan değerli hocam Prof. Dr. Tuğba Yurdakadim'e teşekkür ederim. Doktoraya başlamamda ve ders sürecinde bana hep destek veren, yardımcı olan ve hiç yalnız bırakmayan değerli hocam Prof. Dr. Yılmaz Altun'a teşekkür ederim. Hayatımın her alanında her zaman yanımda olan benim bu günlere ulaşmamda en büyük paya sahip olan ve beni her zaman destekleyen kıymetli aileme varlıklarıyla bana güç veren annem Zübeyde Kara ve babam Mehmet Kara'ya çok teşekkür ederim. Bu süreçte varlığıyla, desteğiyle, sabrıyla, fedakarlığıyla, yardımlarıyla her daim yanımda olan değerli eşim Fatih Demirkale'ye, bu zorlu süreçte onun zamanından aldığım anları olgunlukla karşılayan, sabreden güzel oğlum Taha Berk Demirkale ve minik oğlum Kerem Tuna Demirkale'ye sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Tezimi başta ailem olmak üzere özellikle eşim ve oğullarıma ithaf ediyorum.

Mayıs, 2024 Sevcan DEMİRKALE

ÖZET

DOKTORA TEZİ

SPLICED DİZİLER VE TOPLANABİLME METOTLARI

Sevcan DEMİRKALE

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman:	**Prof. Dr. Emre TAŞ**
	Yıl: 2024 Sayfa: 45
Jüri:	**Prof. Dr. Emre TAŞ**
	Prof. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN
	Prof. Dr. Tuğba YURDAKADİM
	Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ
	Dr. Öğr. Üyesi Turhan KARAMAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, önceki çalışmalardan bahsedilip temel tanım ve kavramlar hatırlatılmıştır.
Üçüncü bölümde, materyal ve metotlar hakkında bilgi verilmiştir.
Dördüncü bölüm, elde ettiğimiz yeni sonuçlara ayrılmıştır.
Beşinci bölüm ise, sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Spliced diziler, İstatiksel yakınsaklık, Topolojik uzay, Dağılımsal yakınsaklık, Yoğunluk, Çift diziler, Pringsheim yakınsaklık.

ABSTRACT

PhD THESIS

SPLICED SEQUENCES AND SUMMABILITY METHODS

Sevcan DEMİRKALE

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor:	**Prof. Dr. Emre TAŞ**
	Year: 2024 Pages: 45
Juries:	**Prof. Dr. Emre TAŞ**
	Prof. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN
	Prof. Dr. Tuğba YURDAKADİM
	Assoc. Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ
	Asst. Prof. Dr. Turhan KARAMAN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, previous studies are mentioned and basic definitions and concepts are reminded.

In the third chapter, information about materials and methods is given.

The fourth chapter is devoted to the new results we have obtained.

The fifth chapter is devoted to results and recommendations.

Keywords: Spliced sequences, Statistical convergence, Topological space, Convergence in distribution, Density, Double sequences, Pringsheim convergence.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\chi(A)$	: A matrisinin karakteristiği
$\delta_A(E)$	: E kümesinin A - yoğunluğu
$\delta_{P_p}(E)$	: E kümesinin P_p - yoğunluğu
$\partial(G)$	: G kümesinin sınırı
$A^{[K]}$	: K kümesine ilişkin satır alt matris
$\delta_A^{(n)}(E)$	: E kümesinin çift A - yoğunluğu

1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisi matematikte önemli bir yer tutmaktadır. Bu teorinin temel amacı ıraksak bir diziye bir limit karşılık getirmektir. Bu amaçla çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu bağlamda Osikiewicz [13] tarafından 2005 yılında splice dizi kavramı ortaya atılmıştır. Aslında splice dizi kavramı, sınırlı ıraksak bir diziyi toplayabilecek regüler bir matris olup olmadığına ilişkin yeni bir bakış açısı ortaya koymaktadır. Splice dizi kavramı, dizilerin elemanlarını belirli bir kurala göre kesip parçalara ayırarak yeni bir dizi oluşturma işlemidir. Bu işlem doğal sayıların parçalanışları yardımıyla oluşturulmaktadır. 2014 yılında Ünver ve arkadaşları[21] tarafından topolojik uzaylarda splice dizilerin $A-$dağılımsal yakınsaklığı çalışılmıştır. 2016 yılında Yurdakadim ve Ünver [24] tarafından splice dizi kavramının bir genişlemesi verilmiş olup toplanabilme matrisleri yardımıyla elde edilen dönüşüm dizisinin çekirdeğine ilişkin ve Lebesgue integrali yardımıyla splice dizilere ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. Diğer taraftan 2015 yılında Bartoszewicz ve arkadaşları[4] noktanın yoğunluğu kavramını tanımlayıp splice dizilerin matris toplanabilmesini incelemiştir. Bu bağlamda 2017, 2019 ve 2020 yıllarında Das ve arkadaşları[5], Bose ve arkadaşları[2], [3] tarafından çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca yakın zamanda splice diziler Yardımcı ve Gülfırat [23] tarafından çalışılmıştır.

Bu tezde topolojik uzaylarda kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık tanımlanarak elde edilen metot ile splice dizilerin toplanabilmesine ilişkin sonuçlar incelenmiş, matrisin regüler olmasını gerektirmeyen daha genel bir matris sınıfı için splice diziler hakkında bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca splice dizilerin tanımı ve bu yeni kavramın toplanabilirliği dört boyutlu matrisler kullanılarak verilmiş, toplanabilme teorisinde splice çift dizilerin geçerliliğini gösteren bazı örnekler verilmiş ve çift indisli diziler için noktanın yoğunluğu tanımlanarak bu yeni kavramın bazı özellikleri dört boyutlu matrisler kullanılarak verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Splice diziler kavramı ilk olarak Osikiewicz [13] tarafından sınırlı ıraksak bir diziyi toplayabilecek regüler bir matris olup olmadığına ilişkin yeni bir bakış açısı verebilmek amacıyla ortaya atılmış ve matris toplanabilme özellikleri incelenmiştir. Daha sonra Ünver ve arkadaşları [21] tarafından topolojik uzaylarda splice dizi kavramı tanıtılıp incelenmiştir. Bununla birlikte Yurdakadim ve Ünver [24], sınırlı olmayan dizileri kullanarak M^*-splice ve ∞^*-splice kavramını ortaya atıp daha genel sonuçlar elde etmiştir. Diğer taraftan Das ve Glab [4], noktanın yoğunluğu kavramını tanımlayarak splice dizi kavramını daha da genişletmiştir. Ardından noktanın yoğunluğuna ilişkin çeşitli çalışmalar yapılmıştır [2], [3], [5].

Bu bölümde, tezimiz ile ilgili literatürde bilinen çeşitli tanım ve kavramları hatırlatacağız.

2.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda tez boyunca kullanacağımız bazı temel tanım ve kavramları vereceğiz.

Tanım 2.1. $\mathbb{N}_0$, negatif olmayan tüm tam sayıların kümesi ve $E \subset \mathbb{N}_0$ olsun. $|.|$, kümenin eleman sayısını göstermek üzere

$$\delta(E) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |\{j \le n : j \in E\}|$$

limiti mevcut ise bu limite E kümesinin $doğal\ yoğunluğu$ adı verilir. Her $\epsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |\{j \le n : |x_j - L| \ge \epsilon\}| = 0$$

sağlanırsa yani her $\epsilon > 0$ için

$$E_\epsilon = \{j \in \mathbb{N}_0 : |x_j - L| \ge \epsilon\}$$

olmak üzere

$$\delta(\{j \le n : j \in E_\epsilon\}) = 0$$

ise $x = (x_j)$ dizisi L değerine $istatistiksel\ yakınsaktır$ denir [6, 8, 19].

Teorem 2.2. A matrisi toplanabilme matrisi olmak üzere $A = (a_{nj})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

$i)$ $\sup\limits_n \sum\limits_j |a_{nj}| < \infty$

$ii)$ $\lim\limits_n \sum\limits_j a_{nj} = 1$

$iii)$ Her $j \in \mathbb{N}_0$ için $a_j := \lim\limits_n a_{nj} = 0$

olmasıdır [1].

A matrisi negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. Bu durumda $K \subseteq \mathbb{N}_0$ kümesinin $A-$yoğunluğu limit mevcut olduğunda $\delta_A(K) := \lim_n \sum_{j \in K} a_{nj}$ ile verilir. Bir $x = (x_j)$ dizisi için her $\epsilon > 0$ için $\delta_A(E_\epsilon) = 0$ ise $A - istatistiksel$ yakınsaktır denir [7], [8].

$A = (a_{nj})$ matrisi toplanabilme matrisi olsun. Seriler yakınsak ve limit mevcut olduğunda

$$\chi(A) := \lim_n \sum_j a_{nj} - \sum_j a_j$$

olsun. Eğer A matrisi konservatif (yakınsak bir diziyi yine yakınsak bir diziye dönüştürüyor) ise $\chi(A)$ mevcuttur [1]. A matrisi bir toplanabilme matrisi ve $K = \{v_j\}$ kümesi $\mathbb{N}_0$ kümesinin bir sonsuz alt kümesi olsun. Bu durumda her $n, k \in \mathbb{N}_0$ için $b_{nk} = a_{n,v_k}$ olmak üzere $A^{[K]} = (b_{nk})$ matrisine A matrisinin bir sütun alt matrisi adı verilir.

Tanım 2.3. (p_n), $p_0 > 0$ olacak biçimde negatif olmayan bir reel dizi ve ayrıca

$$p(t) := \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j$$

kuvvet serisi $0 < R \leq \infty$ olacak biçimde R yakınsaklık yarıçapına sahip olsun.

$$C_p := \left\{ f : (-R, R) \to \mathbb{R} \mid \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} f(t) \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$C_{p_p} := \left\{ x = (x_k) \mid P_x(t) := \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j x_j \geq R \text{ yakınsaklık yarıçapına sahip ve } P_x \in C_p \right\}$$

kümelerini göz önüne alalım.

$$P_p - \lim x = \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j x_j$$

ile tanımlanan $P_p - \lim : C_{p_p} \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli bir kuvvet serisi metodudur ve x dizisine P_p -yakınsaktır denir [1].

Tanım 2.4. Bir P_p kuvvet serisi metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart her $j \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{0<t\to R^-} \frac{p_j t^j}{p(t)} = 0$$

olmasıdır [1].

Tanım 2.5. P_p bir regüler kuvvet serisi metodu ve $E \subset \mathbb{N}_0$ olsun.

$$\delta_{P_p}(E) := \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{j\in E} p_j t^j$$

limiti mevcut ise $\delta_{P_p}(E)$, E kümesinin $P_p - yoğunluğu$ olarak adlandırılır [22].

Tanım 2.6. $x = (x_j)$ reel bir dizi ve P_p regüler bir kuvvet serisi metodu olsun. Her $\epsilon > 0$ için

$$\lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{j\in E_\epsilon} p_j t^j = 0$$

oluyorsa x dizisi L değerine P_p- $istatistiksel\ yakınsaktır$ denir ve bu durum $st_{P_p} - \lim x = L$ ile gösterilir. Yani her $\epsilon > 0$ için $\delta_{P_p}(E_\epsilon) = 0$ demektir. [22].

Tanım 2.7. (X, τ) bir Hausdorff topolojik uzay ve $\sigma(\tau)$, (X, τ) Hausdorff topolojik uzayının alt kümelerinin bir sigma cebiri ve $F : \sigma(\tau) \to [0, 1]$ bir küme fonksiyonu olmak üzere $F(X) = 1$ ve $\sigma(\tau)$ içindeki ayrık $G_0, G_1, ...$kümeleri için

$$F\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} G_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} F(G_j)$$

gerçeklensin. Bu fonksiyona $\sigma(\tau)$ üzerinde bir $dağılım$ adı verilir [20].

Tanım 2.8. F, $\sigma(\tau)$ üzerinde bir dağılım ve $A = (a_{nj})$ satır toplamları 1 olacak biçimde negatif olmayan bir toplanabilme matrisi olsun. $x = (x_j)$, X içinde bir dizi olsun. $F(\partial G) = 0$ koşulunu sağlayan her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x_j\in G} a_{nj} = F(G)$$

limiti mevcut ise x dizisi, F dağılımına $A - dağılımsal\ yakınsaktır$ denir, burada ∂G, G kümesinin sınırını temsil etmektedir [20].

Tanım 2.9. M, sabit bir pozitif tam sayı olsun. $\mathbb{N}_0$ kümesinin bir $M-$parçalanışı her $i \neq j$ için $K_i \cap K_j = \varnothing$ ve $\bigcup_{i=0}^{M} K_i = \mathbb{N}_0$ olacak biçimde $i = 0, 1, ..., M$ için sonsuz $K_i = \{v_i(j)\}$ kümelerinden oluşur.

$\mathbb{N}_0$ kümesi üzerinde bir $\infty-$parçalanışı her $i \neq j$ için $K_i \cap K_j = \varnothing$ ve $\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i = \mathbb{N}_0$ olacak biçimde $i \in \mathbb{N}_0$ için sayılabilir sonsuz $K_i = \{v_i(j)\}$ kümelerinden oluşur [20].

Tanım 2.10. $\{K_i : i = 0, 1, ..., M\}$, $\mathbb{N}_0$ kümesinin sabit bir $M-$parçalanışı olsun. $i = 0, 1, ..., M$ için $x^{(i)} = (x_j^{(i)})$, $\lim_{j\to\infty} x_j^{(i)} = \alpha_i$ olacak biçimde X içinde bir dizi olsun. $k \in K_i$ ise bu durumda bazı j için $k = v_i(j)$ olur. $x_k = x_{v_i(j)} = x_j^{(i)}$ olacak biçimde $x = (x_k)$ dizisi tanımlansın. Bu durumda x dizisi, $\alpha_1, ..., \alpha_M$ limit noktalarına sahip $\{K_i : i = 0, 1, ..., M\}$ üzerinde bir $M - splice$ olarak adlandırılır [20].

Tanım 2.11. $\{K_i : i \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0$ kümesinin sabit bir $\infty-$parçalanışı ve $i \in \mathbb{N}_0$ için $x^{(i)} = (x_j^{(i)})$, $\lim_{j\to\infty} x_j^{(i)} = \alpha_i$ olacak biçimde X içinde bir dizi olsun. Eğer $k \in K_i$ ise bu durumda bazı j için $k = v_i(j)$ olur. $x_k = x_{v_i(j)} = x_j^{(i)}$ olacak biçimde $x = (x_k)$ dizisi tanımlansın. Bu durumda x dizisi, $\alpha_1, ..., \alpha_M, ...$ limit noktalarına sahip $\{K_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ üzerinde bir $\infty-splice$ olarak adlandırılır [20].

Önerme 2.12. $(X, \|.\|)$ bir Banach uzay, $A = (a_{nj})$ satır toplamları 1 olacak biçimde negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. $\{K_i = \{v_i(j)\} : i \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0$ kümesinin bir $\infty-$parçalanışı olsun. Eğer her $i \in \mathbb{N}_0$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut ve $\sum_{i=0}^{\infty} \delta_A(K_i) = 1$ ise $\{K_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ üzerindeki her sınırlı $\infty - splice$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_j a_{nj} = \int_X t dF \tag{2.1}$$

gerçeklenir. Burada $F, G \in \sigma(\tau)$ için

$$F(G) = \sum_{\alpha_i \in G} \delta_A(K_i)$$

biçiminde tanımlanan bir dağılımdır ve (2.1) denklemindeki integral Bochner integralidir [21].

Bütünlüğü koruyabilmek için Bochner integralinin tanımını vermek uygun olacaktır. $(H, \sum, \mu)$, $\sigma-$sonlu bir ölçü uzayı ve $(Y, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. $s : H \to Y$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $\alpha_i \in Y$ ve $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = H$ olmak üzere

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \alpha_i$$

biçiminde ifade edilebiliyorsa s fonksiyonuna $\sum -$basit fonksiyon adı verilir. Eğer her $i = 1, 2, ..., n$ için $\mu(E_i) < \infty$ oluyorsa s, $\sum -$basit fonksiyonuna, $\mu-$basit fonksiyon adı verilir.

s bir $\mu-$basit fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun Bochner integrali

$$(B)\int\limits_H s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\alpha_i \in Y$$

vektörüdür.

Şimdi de genel bir fonksiyonun Bochner integralini tanımlayalım.

$\sigma(\tau) := \sigma(\|.\|)$ sınıfı, norm topolojisinin ürettiği Borel $\sigma-$cebir olsun. $s : H \to Y$, $\sum - \sigma(\tau)$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} (B)\int\limits_H \|f - s_n\| \, d\mu = 0$$

olacak biçimde $\mu-$basit fonksiyonlarının bir (s_n) dizisi varsa f fonksiyonuna Bochner integrallenebilirdir denir ve

$$(B)\int\limits_H f d\mu = \lim_{n\to\infty} (B)\int\limits_H s_n d\mu$$

vektörüne f fonksiyonunun Bochner integrali denir [11].

Şimdi de dört boyutlu matrislere ilişkin temel kavramları verelim.

Tanım 2.13. Her $\epsilon > 0$ için her $j, k > N$ olduğunda $|x_{jk} - L| < \epsilon$ olacak biçimde $N \in \mathbb{N}_0$ mevcut ise bir $[x] = (x_{jk})$ çift dizisi L değerine Pringsheim yakınsaktır denir ve $P - \lim x = L$ ile gösterilir [16].

Tanım 2.14. Her $j, k \in \mathbb{N}$ için $|x_{j,k}| < H$ olacak biçimde bir pozitif H sayısı mevcut ise (x_{jk}) çift dizisi Pringsheim anlamında sınırlıdır. $[x]$ dizisinin normu $\|x\|_{\infty,(2)} = \sup\limits_{j,k} |x_{j,k}|$ şeklindedir [18].

Örnek 2.15. $x_{jk} = \begin{cases} k \ , & j = 1 \\ 0 \ , & diğer \ durumlarda \end{cases}$
biçiminde tanımlanan $x = (x_{jk})$ çift dizisi Pringsheim yakınsak olup Pringsheim sınırlı değildir.

Tanım 2.16. $A = \left(a_{jk}^{nm}\right)$, dört boyutlu bir toplanabilme matrisi ve $[x] = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun.

Her $m,n \in \mathbb{N}_0$ için

$$(Ax)_{nm} := \sum_{j,k} a_{jk}^{nm} x_{jk}$$

biçiminde tanımlanan $[Ax] := \{(Ax)_{nm}\}$ dizisi bir L değerine Pringsheim yakınsak ise $[x]$ dizisi L değerine $A-$toplanabilirdir denir [15].

Dört boyutlu bir A matrisi, her sınırlı Pringsheim yakınsak diziyi limitini koruyarak bir Pringsheim yakınsak diziye dönüştürüyorsa RH-regülerdir denir [18].

E, $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ kümesinin bir alt kümesi ve A, bir RH-regüler matris olsun.

$$P - \lim_{n,m} \sum_{(j,k)\in E} a_{jk}^{nm}$$

limiti mevcut ise E kümesi $A-$yoğunluğa sahiptir ve $\delta_A^{(2)}(E)$ ile gösterilir.

Diğer taraftan dört boyutlu Cesàro matrisi $(C,1,1) = \left(c_{jk}^{nm}\right)$,

$$c_{jk}^{nm} = \begin{cases} \frac{1}{nm} \ , \ j \leq n \ ve \ k \leq m \\ 0 \ \ , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır [21].

3. MATERYAL VE METOT

Osikiewicz [13] tarafından verilen sonuçlar regüler olmayan matris toplanabilme metodu kullanılarak genişletilmiştir. Ünver ve arkadaşları[21] tarafından verilen sonuçlar kuvvet serisi toplanabilme metodu kullanılarak topolojik uzaylarda genişletilmiştir. Bununla birlikte çift splice dizi kavramı tanımlanarak Osikiewicz tarafından verilen sonuçlar dört boyutlu matrisler için elde edilmiştir. Ayrıca dört boyutlu matrisler için noktanın yoğunluğu tanımlanıp [4] makalesinde verilen bazı sonuçlar dört boyutlu matrisler için de incelenmiştir.

4. BULGULAR TARTIŞMA

Bu bölümde literatürde daha önce elde edilmemiş orijinal sonuçlarımızı vereceğiz.

4.1. Topolojik Uzaylarda Splice Dizilerin P_p-İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda topolojik uzaylarda tanımlı splice dizilerin kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir.

Tanım 4.1. F, $\sigma(\tau)$ üzerinde bir dağılım ve $x=(x_j)$, X içinde bir dizi olsun. $F(\partial G)=0$ koşulunu sağlayan her $G\in\sigma(\tau)$ için

$$\lim_{0<t\to R^-}\frac{1}{p(t)}\sum_{x_j\in G}p_j t^j=F(G)$$

limiti mevcut ise x dizisi F dağılımına $P_p-dağılımsal\ yakınsaktır$ denir, burada ∂G, G kümesinin sınırını temsil etmektedir [20].

Teorem 4.2. X, bir Hausdorff topolojik uzay ve $\{K_i : i=0,1,...,M-1\}$, $\mathbb{N}_0$ kümesinin bir $M-$parçalanışı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

$a)$ Her $i=0,1,...,M-1$ için $\delta_{P_P}(K_i)$ mevcuttur.

$b)$ $\sum\limits_{i=0}^{M-1}s_i=1$ olacak biçimde $s_0,s_1,...,s_{M-1}$ mevcuttur ve $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{M-1}$ limit noktalarına sahip $\{K_i : i=0,1,...,M-1\}$ parçalanması üzerinde her $M-splice$ dizi $F:\sigma(\tau)\to[0,1]$ dağılımına $P_p-dağılımsal\ yakınsaktır$. Burada her $G\in\sigma(\tau)$ için

$$F(G)=\sum_{\substack{0\le i\le M-1\\ \alpha_i\in G}}s_i$$

biçimindedir.

$c)$ $\sum\limits_{i=0}^{M-1}s_i=1$ olacak biçimde $s_{0,}s_1,...,s_{M-1}\in[0,1]$ mevcuttur ve $x^{(i)}=(\alpha_i,\alpha_i,...)$ sabit bir dizi olacak biçimde $\{K_i : i=0,1,...,M-1\}$ üzerinde $x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(M-1)}$ dizilerinin $M-splice$ dizisi $F:\sigma(\tau)\to[0,1]$ dağılımına $P_p-dağılımsal\ yakınsaktır$. Burada her $G\in\sigma(\tau)$ için

$$F(G)=\sum_{\substack{0\le i\le M-1\\ \alpha_i\in G}}s_i$$

biçimindedir.

İspat. $a \implies b$: Her $i = 0,1,...,M-1$ için $\delta_{P_P}(K_i)$ mevcut $s_i = \delta_{P_P}(K_i)$ olsun. $\{K_i : i = 0,1,...,M-1\}$, $\mathbb{N}_0$ kümesinin bir $M-$parçalanması olduğundan

$$1 = \sum_{i=0}^{M-1} \delta_{P_P}(K_i) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i$$

olur. $F : \sigma(\tau) \to [0,1]$, her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$F(G) = \sum_{\substack{0 \le i \le M-1 \\ \alpha_i \in G}} s_i$$

biçiminde tanımlanan bir küme fonksiyonu olsun. F, $\sigma(\tau)$ üzerinde bir dağılımdır. X Hausdorff topolojik uzayında her $M - splice$ dizinin F dağılımına P_p-dağılımsal yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle burada kullanacağımız aşağıdaki kümeleri verelim. **D,** her $n \in \mathbb{N}_0$ için $0 < z_n < R$ ve $\lim_{n\to\infty} z_n = R$ olacak biçimde tüm reel değerli dizilerin kümesi olmak üzere

$$\mathbf{B} = \left\{ B(z) = (b_{nk}) : b_{nk} = \frac{1}{p(z_n)} p_j z_n^j \ , \ (z_n) \in D \right\}$$

$$p(t) := \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j$$

şeklinde tanımlanır. Her $i = 0,1,...,M-1$ için $\delta_{P_P}(K_i)$ yoğunluğunun varlığı, her $B(z) \in \mathbf{B}$ ve her $i = 0,1,...,M-1$ için $\delta_{B(z)}(K_i)$ yoğunluğunun varlığını ve $\delta_{P_P}(K_i)$ yoğunluğuna eşit olmasını gerektirir. [21] çalışmasındaki Teorem 1 gereğince her $i = 0,1,...,M-1$ için $s_i = \delta_{P_P}(K_i) = \delta_{B(z)}(K_i)$ olduğundan her $B(z) \in \mathbf{B}$ için ilgili x splice dizisi, F dağılımına $B(z)$-dağılımsal yakınsaktır. Burada her $B(z) \in \mathbf{B}$ için X, F dağılımına $B(z)$-dağılımsal yakınsak ise $F(\partial G) = 0$ olacak biçimdeki her $G \in \sigma(\tau)$ ve her $z \in \mathbf{D}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(z_n)} \sum_{x_j \in G} p_j z_n^j = F(G)$$

eşitliği sağlanır. Bu ise

$$\lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{x_j \in G} p_j t^j = F(G)$$

olmasını gerektirir. Böylece x, F dağılımına P_p-dağılımsal yakınsaktır.

$b \implies c$: Her $i = 0,1,...,M-1$ için $x^{(i)} = (\alpha_i, \alpha_i, ...)$ yakınsak olduğundan ispat kolaylıkla elde edilir.

$c \Longrightarrow a : \sum_{i=0}^{M-1} s_i = 1$ olacak biçimde $s_{0,} s_1, ..., s_{M-1} \in [0,1]$ mevcut olsun. $x^{(i)} = (\alpha_i, \alpha_i, ...)$ sabit bir dizi olmak üzere x dizisi, $\{K_i : i = 0, 1, ..., M-1\}$ üzerinde $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(M-1)}$ dizilerinin $M - splice$ dizisi $F : \sigma(\tau) \to [0,1]$ dağılımına $P_p - dağılımsal\ yakınsaktır.$ Bu durumda her $B(z) \in \mathbf{B}$ için x, F dağılımına $B(z)$-dağılımsal yakınsaktır. [21] çalışmasındaki Teorem 1 gereğince her $i = 0, 1, ..., M-1$ için ve her $B(z) \in \mathbf{B}$ için $\delta_{B(z)}(K_i)$ mevcut ve s_i değerine eşittir. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(z_n)} \sum_{x_j \in G} p_j z_n^j = F(G)$$

olmasını gerektirir. Böylece her $i = 0, 1, ..., M-1$ için

$$\delta_{P_P}(K_i) = \lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{x_j \in G} p_j t^j = s_i$$

eşitliği sağlanır ve ispat tamamlanır. ■

Sıradaki teorem bir sonsuz parçalanışın P_p-yoğunluğunun sigma toplanabilmesini ifade eder.

Teorem 4.3. X, bir Hausdorff topolojik uzay ve $\{K_i = \{v_i(j)\} : i \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0$ kümesinin bir $\infty-$parçalanışı olsun. Bu durumda her $i \in \mathbb{N}_0$ için $\delta_{P_P}(K_i)$ mevcut ve $\sum_{i=0}^{\infty} \delta_{P_P}(K_i) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{i=0}^{\infty} s_i = 1$ olacak biçimde her $i \in \mathbb{N}_0$ için $s_i \in [0,1]$ mevcuttur ve $\{K_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ üzerindeki $\alpha_0,\ \alpha_1, ...$ limit noktalarına sahip her $\infty - splice$ dizisi $F : \sigma(\tau) \to [0,1]$ dağılımına $P_p - dağılımsal\ yakınsaktır.$ Burada her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$F(G) = \sum_{\alpha_i \in G} s_i$$

biçimindedir.

İspat. Her $i \in \mathbb{N}_0$ için $\delta_{P_P}(K_i)$ mevcut olsun. Bu durumda her $i \in \mathbb{N}_0$ ve her $B(z) \in \mathbf{B}$ için $\delta_{B(z)}(K_i)$ mevcuttur ve $\delta_{P_P}(K_i)$ değerine eşittir. Böylece her $i \in \mathbb{N}_0$ ve her $B(z) \in \mathbf{B}$ için

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_{B(z)}(K_i) = 1$$

sağlanır. [21] çalışmasındaki Teorem 2 gereğince her $B(z) \in \mathbf{B}$ için $\{K_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ üzerindeki $\alpha_0,\ \alpha_1, ...$ limit noktalarına sahip her $\infty - splice$ dizisi $F : \sigma(\tau) \to [0,1]$ dağılımına

$B(z) - dağılımsal\ yakınsaktır$. Burada her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$F(G) = \sum_{\alpha_i \in G} \delta_{B(z)}(K_i) = \sum_{\alpha_i \in G} \delta_{P_P}(K_i)$$

biçimindedir. Yani $F(\partial G) = 0$ olacak biçimdeki her $G \in \sigma(\tau)$ ve her $z \in \mathbf{D}$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{p(z_n)} \sum_{x_j \in G} p_j z_n^j = F(G)$$

sağlanır. $F(\partial G) = 0$ olacak biçimdeki her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$\lim_{0<t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{x_j \in G} p_j t^j = F(G)$$

gerçeklenir. Bu ise x dizisinin F dağılımına $P_p - dağılımsal\ yakınsak$ olması anlamına gelir.

Tersine $i \in \mathbb{N}_0$ için $\sum_{i=0}^{\infty} s_i = 1$ olacak biçimde $s_i \in [0, 1]$ mevcut ve $\{K_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ üzerindeki $\alpha_0,\ \alpha_1, ...$ limit noktalarına sahip her $\infty - splice$ dizinin F dağılımına $P_p - dağılımsal\ yakınsak$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $F(\partial G) = 0$ olacak biçimdeki her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$\lim_{0<t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{x_j \in G} p_j t^j = F(G)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $F(\partial G) = 0$ olacak biçimdeki her $G \in \sigma(\tau)$ ve her $z \in \mathbf{D}$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{p(z_n)} \sum_{x_j \in G} p_j z_n^j = F(G) \tag{4.1}$$

elde edilir. [21] çalışmasındaki Teorem 2 gereğince ve (4.1) eşitliğinden her $B(z) \in \mathbf{B}$ ve her $i \in \mathbb{N}_0$ için $\delta_{B(z)}(K_i)$ mevcut ve $\sum_{i=0}^{\infty} s_i = 1$ olacak biçimde s_i değerine eşitttir. Böylece her $z \in \mathbf{D}$ ve her $i \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{p(z_n)} \sum_{j \in K_i} p_j z_n^j = s_i$$

gerçeklenir. Bu ise her $i \in \mathbb{N}_0$ için

$$\delta_{P_P}(K_i) = \lim_{0<t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{j \in K_i} p_j t^j = s_i$$

olmasını gerektirir. Bu nedenle her $i \in \mathbb{N}_0$ için $\delta_{P_P}(K_i)$ mevcuttur. ■

Teorem 4.4. $(X, \|.\|)$ bir Banach uzay ve $\{K_i = \{v_i(j)\} : i \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0$ kümesinin bir $\infty-$parçalanışı olsun. Eğer her $i \in \mathbb{N}_0$ için $\delta_{P_P}(K_i)$ mevcut ve $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\delta_{P_P}(K_i) = 1$ ise bu durumda her sınırlı $x = (x_j)$ $\infty-$splice dizisi için $\{K_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ üzerinde

$$\lim_{0<t\to R^-} \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j = \int_X t dF \tag{4.2}$$

gerçeklenir. Burada F, her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$F(G) = \sum_{\alpha_i \in G} \delta_{P_P}(K_i)$$

şeklinde tanımlanan bir dağılımdır ve (4.2) eşitliğindeki integral Bochner integralidir.

İspat. Her $i \in \mathbb{N}_0$ için $\delta_{P_P}(K_i)$ mevcut ve $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\delta_{P_P}(K_i) = 1$ olsun. Bu durumda her $B(z) \in \mathbf{B}$ ve her $i \in \mathbb{N}_0$ için $\delta_{B(z)}(K_i)$ mevcuttur ve $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\delta_{B(z)}(K_i) = 1$ olacak biçimde $\delta_{P_P}(K_i)$ değerine eşitttir. Bu durumda Önerme 2.12. gereğince $\{K_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ üzerindeki her sınırlı $\infty-$splice dizisi ve her $B(z) \in \mathbf{B}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(z_n)} \sum_{j=0}^{\infty} p_j z_n^j = \int_X t dF \tag{4.3}$$

elde ederiz. Burada F,

$$F(G) = \sum_{\alpha_i \in G} \delta_{B(z)}(K_i) = \sum_{\alpha_i \in G} \delta_{P_P}(K_i) \tag{4.4}$$

biçiminde tanımlanan bir dağılımdır. (4.3) ve (4.4) kullanılarak

$$\lim_{0<t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j = \int_X t dF$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

4.2. Negatif Olmayan Matrislerin Splice Dizilere Etkileri

Bu kısımda regüler ve negatif olmayan genel matris sınıfları yardımıyla splice dizilerin matris toplanabilme özellikleri incelenecektir. Burada matrisin regüler olma zorunluluğu yoktur. Yoğunluk kavramı regüler olmayan matrisler için de benzer şekilde verilebilir.

Bu bölümde $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini gözönüne alacağız. Temel sonuçlarımızda kullanacağımız sıradaki lemmayı verelim. Lemma'da $A^{[K]}$ sembolü satır alt matrisi temsil etmektedir [10].

Lemma 4.5. $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan bir toplanabilme matrisi olsun. $K := \{v_j\}$ kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir sonsuz alt kümesi ve $x = (x_k)$ dizisi sınırlı bir dizi olsun. Eğer $\delta_A(K)$ yoğunluğu mevcut ise bu durumda

$$\liminf_n (A^{[K]}x)_n \geq \delta_A(K) \liminf_n x_n \tag{4.5}$$

ve

$$\limsup_n (A^{[K]}x)_n \leq \delta_A(K) \limsup_n x_n \tag{4.6}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat. Her n, k için $a_{nk} \geq 0$ olduğundan her $n, k \in \mathbb{N}$ için $b_{nk} = a_{n,v_k}$ olmak üzere $b_k := \lim_n b_{nk} \geq 0$ olmasını gerektirir. Bu nedenle Teorem 4.6. gereğince

$$\begin{aligned}
\liminf_n (A^{[K]}x)_n &\geq \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k + \chi(A^{[K]}) \liminf_n x_n \\
&= \chi(A^{[K]}) \liminf_n x_n \\
&= (\lim_n \sum_k b_{nk} - \sum_k b_k) \liminf_n x_n \\
&= (\lim_n \sum_k a_{n,v_k}) \liminf_n x_n \\
&= (\lim_n \sum_{k \in K} a_{nk}) \liminf_n x_n \\
&= \delta_A(K) \liminf_n x_n
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.5) eşitsizliğinde x yerine $-x$ alınırsa (4.6) eşitsizliğinin ispatı da benzer şekilde yapılabilir. ■

Şimdi Rhoades tarafından verilen aşağıdaki teoremi hatırlatalım.

Teorem 4.6. $A = (a_{nk})$ matrisi $\chi(A)$ ifadesinin tanımlı olduğu bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer her $k \geq q$ için $a_{nk} \geq 0$ olacak biçimde bir q tamsayısı mevcut ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ serisi yakınsak olduğunda

$$\liminf_n (Ax)_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k + \chi(A) \liminf_n x_n$$

ve

$$\limsup_n (Ax)_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k + \chi(A) \limsup_n x_n$$

eşitsizlikleri gerçeklenir [17].

Bu kısım boyunca negatif olmayan $A = (a_{nk})$ matrisinin aşağıdaki koşulları sağladığını göz önüne alacağız:
$i)$ Her n, k için $a_{n,k} \geq 0$;
$ii)$ Her k için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$;
$iii)$ $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k} < \infty$.
Son koşul

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = T$$

anlamına gelmektedir. Bu durumda $D := \{K \in \mathbb{R} : \delta_A(K) > 0\}$ olacak biçimde

$$\sum_{K \in D} \delta_A(K) \leq T$$

eşitsizliğini elde ederiz.

4.2.1. Sonlu Splice Durumu

Bu kısımda negatif olmayan matris sınıfları için sonlu splice dizilerin matris toplanabilme özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.7. $\{K_i : i = 1, 2, ..., M\}$ kümesi, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sabit bir $M-$parçalanışı ve $i = 1, 2, ..., M$ için $x^{(i)} = (x_j^{(i)})$ dizisi sınırlı bir dizi olsun. Eğer $k \in K_i$ ise bu durumda bazı j için $k = v_i(j)$ gerçeklenir. $x = (x_k)$ dizisi $x_k = x_{v_i(j)} = x_j^{(i)}$ olarak tanımlansın. Bu durumda x dizisi $\{K_i : i = 1, 2, ..., M\}$ kümesi üzerinde bir $M^* - splice$ dizisidir [24].
[13] çalışmasında splice dizilerin $(M - splice)$ yakınsak dizilerden elde edildiğine ve her $M - splice$ dizisinin $M^* - splice$ dizisi olduğuna dikkat edelim. Ayrıca her $M^* - splice$ dizi sınırlıdır.
Sıradaki teorem x dizisinin A dönüşüm dizisi olan $Ax := \left\{ \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k \right)_n \right\}$ dizisinin çekirdeğine nasıl yaklaşacağımızı göstermektedir.

Teorem 4.8. A matrisi negatif olmayan bir toplanabilme matrisi ve $\{K_i = \{v_i(j)\} : i = 1, 2, ..., M\}$ kümesi $\mathbb{N}$ kümesinin bir $M-$parçalanması olsun. Her $i = 1, 2, ..., M$ için $\delta_A(K_i)$ yoğunluğu mevcut ise $\{K_i\}$ üzerindeki her $M^* - splice$ x dizisi için $\alpha_i = \liminf_j x_j^{(i)}$ ve $\beta_i = \limsup_j x_j^{(i)}$ olacak biçimde

$$\liminf_n (Ax)_n \geq \sum_{i=1}^{M} \delta_A(K_i)\alpha_i \tag{4.7}$$

ve

$$\limsup_n (Ax)_n \leq \sum_{i=1}^{M} \delta_A(K_i)\beta_i \tag{4.8}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.
İspat. Her $i = 1, 2, ..., M$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut ve x dizisi $\{K_i\}$ kümesi üzerinde bir $M^* - splice$ dizi olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için [13] çalışmasında olduğu gibi

$$\begin{aligned}
(Ax)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \\
&= \sum_{i=1}^{M}(\sum_{k\in K_i} a_{nk}x_k) \\
&= \sum_{i=1}^{M}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)}x_{v_i(j)}) \\
&= \sum_{i=1}^{M}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)}x_j^{(i)}) \\
&= \sum_{i=1}^{M}(A^{[K_i]}x^{(i)})_n
\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Böylece (4.9) ve Lemma 4.5. gereğince

$$\begin{aligned}
\liminf_n (Ax)_n &= \liminf_n \sum_{i=1}^{M}(A^{[K_i]}x^{(i)})_n \\
&\geq \sum_{i=1}^{M} \liminf_n (A^{[K_i]}x^{(i)})_n \\
&\geq \sum_{i=1}^{M} \delta_A(K_i)\alpha_i
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla (4.7) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır. (4.7) eşitsizliğinde x yerine $-x$ alınırsa (4.8) denkleminin ispatı da benzer şekilde yapılabilir.
Her $i = 1, 2, ..., M$ için $x^{(i)}$ yakınsak ise bu durumda her $i = 1, 2, ..., M$ için $\gamma_i := \alpha_i = \beta_i$ eşitliği gerçeklenir. Dolayısıyla Teorem 4.8., (Ax) dönüşüm dizisinin çekirdeğinin $\left[\sum_{i=1}^{M} \delta_A(K_i)\alpha_i, \sum_{i=1}^{M} \delta_A(K_i)\beta_i\right]$ aralığını aşamayacağını gösterir ve [13, 24] çalışmalarındaki benzer teoremleri genelleştirir. ■

4.2.2. Sonsuz Splice Durumu

Bu kısımda negatif olmayan matris sınıfları için sonsuz splice dizilerin matris toplanabilme özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.9. $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{N}$ kümesinin sabit bir $\infty-$parçalanışı ve $x^{(i)} = (x_j^{(i)})$ dizisi $i \in \mathbb{N}$ için sınırlı bir dizi olsun. $k \in K_i$ ise bu durumda bazı j için $k = v_i(j)$ gerçeklenir. $x_k = x_{v_i(j)} = x_j^{(i)}$ olacak biçimde $x = (x_k)$ dizisi tanımlansın. Bu durumda x dizisi $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ üzerinde bir $\infty^* - splice$ olarak adlandırılır [24].
[13] çalışmasında splice dizilerin $(\infty - splice)$ yakınsak dizilerden elde edildiğine ve her $\infty - splice$ dizisinin $\infty^* - splice$ dizisi olduğuna dikkat edelim. Ayrıca her $\infty^* - splice$ dizi sınırlı olmak zorunda değildir.
Sıradaki teorem bize (Ax) dönüşüm dizisinin çekirdeğinin tahminine olanak sağlar.

Teorem 4.10. A matrisi negatif olmayan bir toplanabilme matrisi ve $\{K_i = \{v_i(j)\} : i \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{N}$ kümesinin bir $\infty-$parçalanışı olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\delta_A(K_i)$ yoğunluğu mevcut ve $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) = T$ ise $\{K_i\}$ üzerindeki her sınırlı $\infty^* - splice$ x dizisi için $\alpha_i = \liminf_j x_j^{(i)}$ ve $\beta_i = \limsup_j x_j^{(i)}$ olacak biçimde

$$\liminf_n (Ax)_n \geq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\alpha_i \tag{4.10}$$

ve

$$\limsup_n (Ax)_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\beta_i \tag{4.11}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.
İspat. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) = T$ olacak biçimde $\delta_A(K_i)$ yoğunluğu mevcut ve x dizisi $\{K_i\}$ üzerinde bir $\infty^* - splice$ x dizisi olsun. Bu durumda [13] çalışmasında olduğu gibi

her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}(Ax)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{k\in K_i} a_{nk}x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)}x_{v_i(j)}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)}x_j^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}(A^{[K_i]}x^{(i)})_n \qquad (4.12)\end{aligned}$$

elde edilir. Her n için $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ve $g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonları $H := \sup_k |x_k|$ ve $e = (1, 1, ...)$ olacak biçimde

$$f_n(i) := (A^{[K_i]}x^{(i)})_n \text{ ve } g_n(i) := H(A^{[K_i]}e)_n$$

biçiminde tanımlanır. Şimdi μ sayma ölçüsü olsun. [13] çalışmasındaki Teorem 1.2 gereğince

$$\lim_n g_n(i) = H\delta_A(K_i)$$

ve

$$\lim_n \int_{\mathbb{N}} g_n(i)d\mu = \int_{\mathbb{N}} (\lim_n g_n(i))d\mu = HT > 0 \qquad (4.13)$$

eşitlikleri gerçeklenir. Ayrıca her $n, i \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(i)| \leq g_n(i)$$

eşitsizliği kolay bir şekilde gösterilebilir.

f_n ve g_n fonksiyonları μ sayma ölçüsüne göre ölçülebilir ve her n için $f_n+g_n \geq 0$ olduğundan

(4.13) ve Fatou Lemması kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} \liminf_n (f_n + g_n)(i)d\mu &\leq \liminf_n \int_{\mathbb{N}} (f_n + g_n)(i)d\mu \\
&= \liminf_n \left(\int_{\mathbb{N}} f_n(i)d\mu + \int_{\mathbb{N}} g_n(i)d\mu \right) \\
&= \liminf_n \int_{\mathbb{N}} f_n(i)d\mu + \lim_n \int_{\mathbb{N}} g_n(i)d\mu \\
&= \liminf_n \int_{\mathbb{N}} f_n(i)d\mu + H \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) \\
&= \liminf_n \int_{\mathbb{N}} f_n(i)d\mu + HT
\end{aligned} \tag{4.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan her i için (g_n) dizisi yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} \liminf_n (f_n + g_n)(i)d\mu &= \int_{\mathbb{N}} (\liminf_n f_n(i) + \lim_n g_n(i))d\mu \\
&= \int_{\mathbb{N}} \liminf_n f_n(i)d\mu + \int_{\mathbb{N}} \lim_n g_n(i)d\mu \\
&= \int_{\mathbb{N}} \liminf_n f_n(i)d\mu + H \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) \\
&= \int_{\mathbb{N}} \liminf_n f_n(i)d\mu + HT
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} \liminf_n f_n(i)d\mu &\leq \liminf_n \int_{\mathbb{N}} f_n(i)d\mu \\
&= \liminf_n \sum_{i=1}^{\infty} (A^{[K_i]} x^{(i)})_n \\
&= \liminf_n (Ax)_n
\end{aligned} \tag{4.16}$$

gerçeklenir. Lemma 4.5. gereğince

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{N}} \liminf_{n} f_n(i)d\mu &= \int\limits_{\mathbb{N}} \liminf_{n}(A^{[K_i]}x^{(i)})d\mu \\ &\geq \int\limits_{\mathbb{N}} \delta_A(K^{(i)})\alpha_i d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K^{(i)})\alpha_i \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.16) ve (4.17) ifadelerinden

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K^{(i)})\alpha_i \leq \liminf_{n}(Ax)_n$$

(4.10) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır. (4.10) eşitsizliğinde x değerinin yerine $-x$ alınırsa (4.11) eşitsizliğinin ispatı da kolayca görülebilir.
Her $i \in \mathbb{N}$ için $x^{(i)}$ yakınsak ise her $i \in \mathbb{N}$ için $\gamma_i := \alpha_i = \beta_i$ eşitliği gerçeklenir. Böylece Teorem 4.10., [13] çalışmasındaki Teorem 3.4'ü sağlar. Hatta bu teorem bize (Ax) dönüşüm dizisinin çekirdeğinin $\left[\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\beta_i\right]$ aralığını aşamayacağını gösterir. ■

4.3. Çift Splice Diziler

Bu bölümde dört boyutlu matrisler yardımıyla çift splice dizilerin toplanabilme özellikleri incelenecektir.

4.3.1. Sonlu Çift Splice Diziler Durumu

Bu kısımda dört boyutlu matrisleri kullanarak $M-$splice çift dizilerin toplanabilme özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 4.11. $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $i \neq s$ için $E_i \cap E_s = \varnothing$ ve $l = 1, 2, ..., M$ için $E_l = \{(v_l(j), \mu_l(k))\}_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir alt kümesi ise $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir $M-$parçalanışıdır.

Tanım 4.12. $\gamma^{(l)}$, $l = 1, 2, ..., M$ için $\gamma^{(l)} = (\gamma_{jk}^{(l)})_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}$ ve $P - \lim\limits_{j,k} \gamma_{jk}^{(l)} = \Gamma^{(l)}$ olacak biçimde bir Pringsheim yakınsak çift dizi olsun. $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ parçalanışı ile bazı j, k için $(r, s) = (v_l(j), \mu_l(k))$ olacak biçimde $(r, s) \in E_l$ ise $x_{rs=}x_{v_l(j),\mu_l(k)} = \gamma_{jk}^{(l)}$ olacak biçimde $[x] := (x_{rs})$ dizisi $\gamma^{(1)}, ..., \gamma^{(M)}$ dizilerinin bir $M-$splice çift dizisidir.

Teorem 4.13. A negatif olmayan RH-regüler bir matris ve $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ sabit bir $M-$parçalanış olsun. Her $l = 1, 2, ..., M$ için $\delta_A^{(2)}(E_l)$ mevcut ise A, $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ üzerinde splicing özelliğine sahiptir yani $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ üzerindeki her $M-$splice için

$$P-\lim_{n,m}(Ax)_{nm}=\sum_{l=1}^{M}\delta_A^{(2)}(E_l)\,\Gamma^{(l)}$$

gerçeklenir.

İspat. Her $l=1,2,...,M$ için $\delta_A^{(2)}(E_l)$ mevcut ve $[x]$ bir $M-$splice olsun. Buradan

$$\begin{aligned}(Ax)_{nm}&=\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{jk}^{nm}x_{jk}=\sum_{l=1}^{M}\left(\sum_{(j,k)\in E_l}a_{jk}^{nm}x_{jk}\right)\\&=\sum_{l=1}^{M}\left(\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{v_l(j),\mu_l(k)}^{nm}x_{v_l(j),\mu_l(k)}\right)\\&=\sum_{l=1}^{M}\left(\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{v_l(j),\mu_l(k)}^{nm}\gamma_{jk}^{(l)}\right)\\&=\sum_{l=1}^{M}\left(\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}b_{jk}^{nm}\gamma_{jk}^{(l)}\right).\end{aligned}$$

elde edilir. [15] makalesine göre $B=(b_{jk}^{nm})=\left(a_{v_l(j),\mu_l(k)}^{nm}\right)$ matrisinin, $\delta_A^{(2)}(E_l)$ çarpanıyla çarpımsal olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}P-\lim_{n,m}(Ax)_{nm}&=P-\lim_{n,m}\sum_{l=1}^{M}\left(\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{v_l(j),\mu_l(k)}^{nm}\gamma_{jk}^{(l)}\right)\\&=\sum_{l=1}^{M}\left(P-\lim_{n,m}\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{v_l(j),\mu_l(k)}^{nm}\gamma_{jk}^{(l)}\right)\\&=\sum_{l=1}^{M}\delta_A^{(2)}(E_l)\,\Gamma^{(l)}\end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir. Yani $[x]$ dizisi $\sum_{l=1}^{M}\delta_A^{(2)}(E_l)\,\Gamma^{(l)}$ toplamına $A-$toplanabilirdir. Bu nedenle A, $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ üzerinde splicing özelliğine sahiptir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.14. A, RH-regüler bir matris olsun. Herhangi bir $M\geq 2$ için bir $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ parçalanışı vardır öyle ki A, $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ üzerinde splicing özelliğine sahip değildir.

İspat. [14] makalesindeki Teorem 3.1 gereğince 0 ve 1'lerden oluşan, A-toplanamayan en az bir $[x]$ dizisinin var olduğu biliniyor. $M\geq 2$ için $E_1=\{(j,k): x_{jk}=1\}$ ve diğer

$E_2, E_3, ..., E_M$ ayrık, sonsuz ve

$$\bigcup_{l=2}^{M} E_l = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \backslash E_1$$

olacak biçimde $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ parçalanışını göz önüne alalım. $[x]$ dizisi $l = 1, 2, ..., M$ için $\gamma_{jk}^{(1)} = 1$ ve $\gamma_{jk}^{(l)} = 0$ dizilerinin $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ parçalanışı üzerinde bir $M - splice$ çift dizidir. Dolayısıyla $[x]$ dizisi A-toplanabilir olmadığından A, $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ üzerinde splicing özelliğine sahip değildir. ■

Dört boyutlu bir A matrisi 0 değerine Pringsheim yakınsak her sınırlı diziyi 0 değerine Pringsheim yakınsak sınırlı diziye dönüştürüyorsa sıfır limiti RH-koruyan matristir.

Aşağıdaki lemma ile sıfır limiti RH-koruyan dört boyutlu matris üzerinde bir gerçeği ifade ediyoruz.

Lemma 4.15. Dört boyutlu $A = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ matrisinin sıfır limiti koruması için gerek ve yeter koşul

(a) $P - \lim\limits_{n,m} a_{jk}^{nm} = 0$ her j,k,

(b) $\sum\limits_{j,k} \left|a_{jk}^{nm}\right|$ her n,m için Pringsheim limite sahip,

(c) $P - \lim\limits_{n,m} \sum\limits_{j} \left|a_{jk}^{nm}\right| = 0$ her k,

(d) $P - \lim\limits_{n,m} \sum\limits_{k} \left|a_{jk}^{nm}\right| = 0$ her j,

(e) Her n,m için $\sum\limits_{j,k} \left|a_{j,k}^{nm}\right| \leq H$

olacak biçimde n ve m sayılarının mevcut olmasıdır.

İspat. Yeterlilik: $[x] = (x_{jk})$ dizisi, 0 değerine sınırlı Pringsheim yakınsak bir dizi olsun. $(a) - (e)$ koşullarını kullanarak $[Ax]$ dizisinin ayrıca 0 değerine sınırlı Pringsheim yakınsak olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} |y_{nm}| &= \left| \sum_{j,k}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} x_{jk} \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1,k=1}^{p,q} a_{jk}^{nm} x_{jk} \right| + \left| \sum_{j=1,k=q+1}^{p,\infty} a_{jk}^{nm} x_{jk} \right| + \left| \sum_{j=p+1,k=1}^{\infty,q} a_{jk}^{nm} x_{jk} \right| + \left| \sum_{j=p+1,k=q+1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} x_{jk} \right| \end{aligned}$$

yazabiliriz. $\epsilon > 0$ için p ve q değerlerini çok büyük ve $j > p$, $k > q$ için $|x_{jk}| \leq \frac{\epsilon}{4H}$ bulabiliriz. Her j,k için $|x_{jk}|$ sayılarının en büyüğü L olsun. (a), (c), (d) koşullarını kullanarak $n \geq T$, $m \geq N$ olacak biçimde T ve N iki tam sayısı bulabiliriz.

$$\sum_{j=1,k=1}^{p,q} \left|a_{jk}^{nm}\right| < \frac{\epsilon}{4pqL}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{jk}^{nm}\right| < \frac{\epsilon}{4pL}, \quad (j = 1, 2, 3, ..., p)$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{jk}^{nm}\right| < \frac{\epsilon}{4qL}, \quad (k = 1, 2, 3, ..., q)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $n \geq T$, $m \geq N$ için

$$|y_{nm}| \leq \frac{\epsilon}{4Lpq}Lpq + \frac{\epsilon}{4Lp}Lp + \frac{\epsilon}{4Lq}Lq + \frac{\epsilon}{4H}H$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte

$$P - \lim_{n,m} y_{nm} = 0$$

anlamına gelir.

Gereklilik: (a) koşulunu görmek için bir (x_{nm}) dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$x_{nm} = \begin{cases} 1\ , & n = p \text{ ve } m = q \\ 0\ , & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Burada $y_{nm} = a_{pq}^{nm}$ sağlanır. Bundan dolayı (a) koşulu gerçeklenir.

(b) $\sum\limits_{m=1,n=1}^{\infty,\infty} u_{nm}$ serisi mutlak yakınsak değilse $P - \lim\limits_{n,m} s_{nm} = 0$ ve $\sum\limits_{n,m=1,1}^{\infty,\infty} u_{nm}s_{nm}$ serileri $+\infty$ değerine ıraksak olacak biçimde bir sınırlı çift s_{nm} dizisi seçilebilir. Bu sonucu kullanarak herhangi sabit n ve m seçilebilir ve $\sum\limits_{j,k} \left|a_{jk}^{nm}\right|$ serisinin ıraksak olduğunu varsayılabiliriz. Bu durumda $[x]$ dizisi sıfır limite sahip ve $\sum\limits_{j,k} a_{jk}^{nm}x_{jk}$ serisi ıraksak olacak biçimde bir sınırlı (x_{jk}) dizisi mevcuttur. Bu, hipotezimizle çelişir. Bu nedenle (b) koşulu sağlanır. (c), (d), (e) koşullarının ispatları, [18] makalesindeki Teorem 2 nin ispatı ile aynıdır. ■

Teorem 4.16. A sıfır limiti RH- koruyan dört boyutlu bir matris olsun. $\gamma \in c^{(2)} \backslash c_0^{(2)}$, L değerine $A-$toplanabilir sınırlı bir dizi ise A matrisi $P - \lim\limits_{j,k} \gamma_{jk} = \Gamma \neq 0$ olacak biçimde L/Γ çarpanıyla çarpımsaldır.

İspat. [15] makalesindeki Lemma 1 ve Teorem 4.13. gereğince A sıfır limiti RH- koruyan dört boyutlu bir matris olduğundan $L/\Gamma-$çarpımsal olduğunu göstermek için $P - \lim\limits_{n,m} \sum\limits_{j,k} a_{jk}^{nm} = L/\Gamma$ olduğunu göstermek yeterlidir. $P - \lim\limits_{j,k} \gamma_{jk} = \Gamma \neq 0$ olduğundan

(e_{jk}) dizisinin tüm terimleri 1 ve $P-\lim\limits_{j,k}\epsilon_{jk}=0$ olacak biçimde $\gamma_{jk}=\Gamma e_{jk}+\epsilon_{jk}$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda verilen bir m ve n için

$$\begin{aligned}(A\gamma)_{nm} &= \sum_{j,k} a_{jk}^{nm}\gamma_{jk} = \sum_{j,k} a_{jk}^{nm}\left(\Gamma e_{jk}+\epsilon_{jk}\right)\\ &= \Gamma\sum_{j,k} a_{jk}^{nm}e_{jk} + \sum_{j,k} a_{jk}^{nm}\epsilon_{jk}\end{aligned}$$

elde edilir. γ dizisi L değerine A-toplanabilir ve A sıfır limitleri koruduğundan

$$\begin{aligned}L = P-\lim_{n,m}(A\gamma)_{nm} &= \Gamma P-\lim_{n,m}\sum_{j,k} a_{jk}^{nm} + P-\lim_{n,m}\sum_{j,k} a_{jk}^{nm}\epsilon_{jk}\\ &= \Gamma P-\lim_{n,m}\sum_{j,k} a_{jk}^{nm}+0\end{aligned}$$

gerçeklenir. Yani A sıfır limitleri koruduğundan ve $P-\lim\limits_{n,m}(A\gamma)_{nm}=L$ olduğundan $P-\lim\limits_{n,m}\sum\limits_{j,k} a_{jk}^{nm}=\frac{L}{\Gamma}$ elde edilir. Bu nedenle A matrisi $\frac{L}{\Gamma}$ çarpanıyla çarpımsaldır. ■

Şimdi yeni bir sonuç vermek için aşağıdaki gösterimi kullanıyoruz. Dört boyutlu bir $A=\left(a_{jk}^{nm}\right)$ matrisini ve $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin bir $E=\{(v(r),\mu(s))\}_{r,s=1,1}^{\infty,\infty}$ alt kümesini göz önüne alalım. $b_{jk}^{nm}=a_{v(j),\mu(k)}^{nm}$ olmak üzere $A^{[E]}=\left(b_{jk}^{nm}\right)$ biçiminde tanımlansın. Bir $[x]$ çift dizisi için

$$\left(A^{[E]}x\right)_{nm} = \sum_{j,k} b_{jk}^{nm}x_{jk} = \sum_{j,k} a_{v(j),\mu(k)}^{nm}x_{jk}$$

yazılabilir.

Teorem 4.17. A negatif olmayan RH-regüler bir matris ve $E\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sonsuz bir küme olsun. $\delta_A^{(2)}(E)$ mevcut ise $A^{[E]}$, $\delta_A^{(2)}(E)$ çarpanıyla RH-çarpımsaldır. Tersine $A^{[E]}$, t sabitiyle çarpımsal ise $\delta_A^{(2)}(E)$ mevcut ve t sabitine eşittir.

İspat. Her m ve n için

$$\left(A^{[E]}e\right)_{nm} = \sum_{j,k} a_{v(j),\mu(k)}^{nm} = \sum_{(j,k)\in E} a_{jk}^{nm}$$

eşitliği yazılabilir. $\delta_A^{(2)}(E)$ mevcut ise Teorem 4.16. gereğince $A^{[E]}$, $\delta_A^{(2)}(E)$ çarpanıyla RH-çarpımsaldır. Tersine $A^{[E]}$, t çarpanıyla RH-çarpımsal ise bu durumda (e_{jk}) dizisinin tüm terimleri 1 olacak biçimde

$$t = P-\lim_{n,m}\left(A^{[E]}e\right) = P-\lim_{n,m}\sum_{(j,k)\in E} a_{jk}^{nm} = \delta_A^{(2)}(E)$$

elde edilir. ■

Teorem 4.18. $[x]$, $\{E_1, E_2\}$ üzerinde $\Gamma^{(1)} \neq \Gamma^{(2)}$ olacak biçimde $\gamma^{(1)}$ ve $\gamma^{(2)}$ dizilerinin bir $2 - splice$ sınırlı çift dizisi olsun. A, $[x]$ dizisini L değerine toplayan negatif olmayan RH-regüler bir matris ise

$$\delta_A^{(2)}(E_1) = \frac{\Gamma^{(2)} - L}{\Gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}} \text{ ve } \delta_A^{(2)}(E_2) = \frac{L - \Gamma^{(1)}}{\Gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}}$$

olacak biçimde $\delta_A^{(2)}(E_1)$ ve $\delta_A^{(2)}(E_2)$ sayıları mevcuttur.

İspat. $[x]$, $\{E_1, E_2\}$ üzerinde $\Gamma^{(1)} \neq \Gamma^{(2)}$ olmak üzere $[x]$ dizisi L değerine $A-$toplanabilir olacak biçimde $\gamma^{(1)}$ ve $\gamma^{(2)}$ dizilerinin bir $2 - splice$ sınırlı çift dizisi olsun. $A^{[E_l]} = \left(a^{nm}_{v_l(j),\mu_l(k)}\right)$ matrisi $E_l = \{(v_l(j), \mu_l(k)) : (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$, $(l = 1,2)$ olacak biçimde Lemma 4.15. nin koşullarını yerine getirir. Yani sıfır limitleri korur. Verilen herhangi n ve m için

$$\begin{aligned}
\left(A\left(x - \Gamma^{(1)}\right)\right)_{nm} &= \sum_{j,k} a^{nm}_{jk}\left(x_{jk} - \Gamma^{(1)}\right) \\
&= \sum_{j,k} a^{nm}_{v_1(j),\mu_1(k)}\left(\gamma^{(1)}_{jk} - \Gamma^{(1)}\right) + \sum_{j,k} a^{nm}_{v_2(j),\mu_2(k)}\left(\gamma^{(2)}_{jk} - \Gamma^{(1)}\right) \\
&= \left(A^{[E_1]}\left(\gamma^{(1)} - \Gamma^{(1)}\right)\right)_{nm} + \left(A^{[E_2]}\left(\gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}\right)\right)_{nm}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. $\gamma^{(1)} - \Gamma^{(1)} \in c_0^{(2)}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left(A^{[E_2]}\left(\gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}\right)\right)_{nm} &= \left(A\left(x - \Gamma^{(1)}\right)\right)_{nm} - \left(A^{[E_1]}\left(\gamma^{(1)} - \Gamma^{(1)}\right)\right)_{nm} \\
&= L - \Gamma^{(1)} + o(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}$, $L - \Gamma^{(1)}$ değerine $A^{[E_2]}$-toplanabilirdir. $\gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)} \in c^{(2)} \backslash c_0^{(2)}$ olduğundan, Lemma 4.15. gereğince $A^{[E_2]}$, $\left(L - \Gamma^{(1)}\right) / \left(\Gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}\right)$ çarpanıyla çarpımsaldır. Bu durumda Teorem 4.16. gereğince

$$\delta_A^{(2)}(E_2) = \frac{L - \Gamma^{(1)}}{\Gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}}$$

ve

$$\delta_A^{(2)}(E_1) = 1 - \delta_A^{(2)}(E_2) = 1 - \frac{L - \Gamma^{(1)}}{\Gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}} = \frac{\Gamma^{(2)} - L}{\Gamma^{(2)} - \Gamma^{(1)}}$$

gerçeklenir. ■

4.3.2. Sonsuz Çift Splice Diziler Durumu

Bu kısımda ∞-splice çift dizilerin toplanabilirlik özelliklerini dört boyutlu matrisleri kullanarak inceleyeceğiz. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin $\infty-par\text{ç}alan\imath\c{s}\imath$ Tanım 4.11. de benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 4.19. $\{E_l\}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin sabit bir $\infty-par\text{ç}alan\imath\c{s}\imath$ olsun. $l\in\mathbb{N}$ için $\gamma^{(l)}=\left(\gamma_{j,k}^{(l)}\right)_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}$, $P-\lim\limits_{j,k}\gamma_{j,k}^{(l)}=\Gamma^{(l)}$ olacak biçimde yakınsak çift dizi olsun. $\{E_l\}$ $\infty-par\text{ç}alan\imath\c{s}\imath$ üzerindeki $\gamma^{(l)}$, $l\in\mathbb{N}$ dizilerinin $\infty-splice$ dizisi olan $[x]$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$(r,s)\in E_l$ ise bazı $j,k\in\mathbb{N}$ için $(r,s)=(v_l(j),\mu_l(k))$ ve $x_{r,s}=x_{v_l(j),\mu_l(k)}:=\gamma_{j,k}^{(l)}$ biçimindedir.

Tanım 4.20. A bir $RH-reg\ddot{u}ler$ matris olsun ve sabit bir $\{E_l\}$ $\infty-par\text{ç}alan\imath\c{s}\imath$nı göz önüne alalım. A matrisi, $\{E_l\}$ $\infty-par\text{ç}alan\imath\c{s}\imath$ üzerindeki her sınırlı çift $\infty-splice$ dizilerini toplayabiliyorsa A, $\{E_l\}$ üzerinde splicing özelliğine sahiptir.

Teorem 4.21. A negatif olmayan $RH-reg\ddot{u}ler$ bir matris ve $\{E_l\}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin bir $\infty-par\text{ç}alan\imath\c{s}\imath$ olsun. Her $l\in\mathbb{N}$ için $\delta_A^{(2)}(E_l)$ mevcut ve $\sum\limits_l\delta_A^{(2)}(E_l)=1$ ise $\{E_l\}$ üzerindeki sınırlı $\infty-splice$ dizisi için

$$P-\lim_{n,m}(Ax)_{nm}=\sum_{l=1}^{\infty}\delta_A^{(2)}(E_l)\,\Gamma^{(l)}$$

olmak üzere $A,\{E_l\}$ üzerinde splicing özelliğine sahiptir.

İspat. Her $l\in\mathbb{N}$ için $\delta_A^{(2)}(E_l)$ mevcut, $\sum\limits_l\delta_A^{(2)}(E_l)=1$ ve $[x]$, $\{E_l\}$ üzerindeki sınırlı bir $\infty-splice$ dizi olsun. Bu durumda verilen n,m için $B=\left(b_{jk}^{nm}\right)=\left(a_{v_l(j),\,\mu_l(k)}^{nm}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(Ax)_{nm}&=\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{jk}^{nm}x_{jk}=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{(j,k)\in E_l}a_{jk}^{nm}x_{jk}\right)\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{v_l(j),\mu_l(k)}^{nm}x_{v_l(j),\,\mu_l(k)}\right)\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{v_l(j),\mu_l(k)}^{nm}\gamma_{j,k}^{(l)}\right)\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\left(B\gamma^{(l)}\right)_{nm}\end{aligned}$$

elde edilir. f_{nm} ve g_{nm} aşağıdaki gibi tanımlansın: $M = \|x\|_{\infty,(2)}$ ve $[e] = (e_{jk})$ dizisinin tüm terimleri 1 olacak biçimde $f_{nm} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere $f_{nm}(l) := \left(B\gamma^{(l)}\right)_{nm}$ ve $g_{nm} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere $g_{nm}(l) := M.(Be)_{nm}$ fonksiyonları tanımlansın. Her $l \in \mathbb{N}$ için $\delta_A^{(2)}(E_l)$ mevcut, $B = \left(b_{jk}^{nm}\right)$ matrisi $\delta_A^{(2)}(E_l)$ çarpanıyla çarpımsal olduğundan

$$f(l) := P - \lim_{n,m} f_{nm}(l) = P - \lim_{n,m} \left(B\gamma^{(l)}\right)_{nm} = \delta_A^{(2)}(E_l)\,\Gamma^{(l)}$$

ve

$$g(l) := P - \lim_{n,m} g_{nm}(l) = P - \lim_{n,m} M(Be)_{nm} = M\delta_A^{(2)}(E_l)$$

eşitlikleri sağlanır. μ sayma ölçüsü olmak üzere

$$\begin{aligned}
P - \lim_{n,m} \int_{\mathbb{N}} g_{nm}(l)\, d\mu &= P - \lim_{n,m} \sum_{l=1}^{\infty} M(Be)_{nm} \\
&= M.P - \lim_{n,m} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{(j,k)\in E_l} a_{jk}^{nm} \right) \\
&= M.P - \lim_{n,m} \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} \\
&= M.1 \\
&= M.\sum_{l=1}^{\infty} \delta_A^{(2)}(E_l) \\
&= \int_{\mathbb{N}} g(l)\, d\mu
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer bir ifade ile

$$P - \lim_{n,m} \int_{\mathbb{N}} g_{nm}(l)\, d\mu = \int_{\mathbb{N}} P - \lim_{n,m} g_{nm}(l)\, d\mu$$

olur. Ayrıca her n, m için

$$\begin{aligned}
|f_{nm}(l)| &= \left| \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{v_l(j),\mu_l(k)}^{nm} \gamma_{j,k}^{(l)} \right| \\
&\leq M \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{v_l(j),\mu_l(k)}^{nm} \\
&= M(Be)_{nm} = g_{nm}(l)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla iki değişkenli Lebesgue yakınsaklık teoremi gereğince

$$\begin{aligned}
P-\lim_{n,m}(Ax)_{nm} &= P-\lim_{n,m}\sum_{l=1}^{\infty}\left(B\gamma^{(l)}\right)_{nm}\\
&= \sum_{l=1}^{\infty}P-\lim_{n,m}\left(B\gamma^{(l)}\right)_{nm}\\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\delta_A^{(2)}(E_l)\,\Gamma^{(l)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $[x]$ dizisi $\sum_l \delta_A^{(2)}(E_l)\,\Gamma^{(l)}$ değerine $A-toplanabilirdir$ ve sonuç olarak A matrisi splicing özelliğine sahiptir. ■

Şimdi de bazı çift splice dizi örnekleri verelim.

Örnek 4.22. $\{E_1, E_2, E_3\}$ $3-$parçalanışı üzerinde $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}$ birbirlerinden farklı olmak üzere öyle bir 3-splice $[x]$ dizisi vardır ki bu dizi 0 değerine $(C,1,1)$-toplanabilirdir. Ancak $\delta^{(2)}(E_1)$, $\delta^{(2)}(E_2)$ ve $\delta^{(2)}(E_3)$ mevcut değildir.

Bunu görmek için ilk önce RH-regüler matrisin toplayamayacağı, terimleri 0 ve 1 sayılarından oluşan en az bir dizinin var olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla $E_1 := \{v_1(j), \mu_1(k)\}_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}$,$v_1(j)+1 < v_1(j+1)$ ve $\mu_1(k)+1 < \mu_1(k+1)$ olacak biçimde bir $E_1 \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ alt kümesi mevcuttur. Bu nedenle $\delta^{(2)}(E_1)$ mevcut değildir. $E_2 := \{v_2(j), \mu_2(k)\}_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}$ kümesi $v_2(j) = v_1(j)+1$ ve $\mu_2(k) = \mu_1(k)+1$, $\delta^{(2)}(E_2)$ olarak tanımlanırsa yine $\delta^{(2)}(E_2)$ mevcut değildir. $E_3 = (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\setminus(E_1\cup E_2)$, $\{E_1, E_2, E_3\}$ kümesi göz önüne alındığında $\{E_1, E_2, E_3\}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin bir $3-$parçalanışı olur. Eğer $\{E_1, E_2, E_3\}$ üzerinde $\gamma_{j,k}^{(1)} := 1$, $\gamma_{j,k}^{(2)} := -1$ ve $\gamma_{j,k}^{(3)} := 0$ olarak alınırsa elde edilen 3-splice $[x]$ dizisi 0 değerine $(C,1,1)$-toplanabilirdir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
((C,1,1)([x]))_{nm} &= \left|\frac{1}{nm}\sum_{\substack{(j,k)\in E_1\\ 1\le j\le n\\ 1\le k\le m}} x_{jk} + \frac{1}{nm}\sum_{\substack{(j,k)\in E_2\\ 1\le j\le n\\ 1\le k\le m}} x_{jk} + \frac{1}{nm}\sum_{\substack{(j,k)\in E_3\\ 1\le j\le n\\ 1\le k\le m}} x_{jk}\right|\\
&= \left|\frac{1}{nm}\sum_{\substack{j,k\\ v_1(j)\le n\\ \mu_1(k)\le m}} \gamma_{j,k}^{(1)} + \frac{1}{nm}\sum_{\substack{j,k\\ v_2(j)=v_1(j)+1\le n\\ \mu_2(k)=\mu_1(k)+1\le m}} \gamma_{j,k}^{(2)} + \frac{1}{nm}\sum_{\substack{j,k\\ v_3(j)\le n\\ \mu_3(k)\le m}} \gamma_{j,k}^{(3)}\right|
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{1}{nm} \sum_{\substack{j,k \\ v_1(j) \le n \\ \mu_1(k) \le m}} 1 - \frac{1}{nm} \sum_{\substack{j,k \\ v_1(j) \le n-1 \\ \mu_1(k) \le m-1}} 1 \right| \le \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \longrightarrow 0$$

gerçeklenir.

Örnek 4.23. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir ∞-parçalanışını aşağıdaki gibi göz önüne alalım.

$$E_l = \left\{ \left(2^{l-1} (2j-1), k \right) \right\}_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}, \; l \in \mathbb{N}.$$

Mursaleen ve arkadaşları[12] tarafından her l için

$$\delta^{(2)} (E_l) = P - \lim_{j,k} \frac{j.k}{2^{l-1} (2j-1).k} = \frac{1}{2^l}$$

olduğu gösterilmiştir. Bu nedenle $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \delta^{(2)} (E_l) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1$ elde edilir.

Örnek 4.24. Aşağıdaki $[x]$ çift dizisini göz önüne alalım.

$$x_{jk} = \begin{cases} \sqrt{\frac{3r+1}{r}} & , j = 3r-2, \; k \in \mathbb{N}, \\ \arctan r & , j = 3r-1, \; k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{2r} & , j = 3r, \; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bu dizi $\{E_1, E_2, E_3\}$ $3-$parçalanışı üzerindeki $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ dizilerinin bir 3-splice dizisi

$$\gamma_{jk}^{(1)} = \sqrt{\frac{3j+1}{j}}, \quad \gamma_{jk}^{(2)} = \arctan j, \quad \gamma_{jk}^{(3)} = \frac{1}{2j}$$

ve

$$E_1 = \{(3j-2, k)\}_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}, \quad E_2 = \{(3j-1, k)\}_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}, \quad E_3 = \{(3j, k)\}_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}$$

biçiminde ifade edilebilir.

$l = 1, 2, 3$ için $\delta^{(2)} (E_l) = \frac{1}{3}$ ve ayrıca $P - \lim\limits_{j,k} \gamma_{jk}^{(1)} = \sqrt{3}$, $P - \lim\limits_{j,k} \gamma_{jk}^{(2)} = \frac{\pi}{2}$, $P - \lim\limits_{j,k} \gamma_{jk}^{(3)} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. $[x]$ dizisinin $(C, 1, 1)$-toplanabilir olduğunu direkt görmek kolay değildir ancak Teorem 4.13. kullanılarak kolay bir şekilde

$$P-\lim_{n,m}\{(C,1,1)\,x\}_{nm}=\sum_{l=1}^{3}\delta^{(2)}\left(E_l\right).\Gamma^{(l)}=\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}.0=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right)$$

elde edilir.

4.4. Dört Boyutlu Matrisler İçin Noktanın Yoğunluğu

Bu bölümde dört boyutlu matrisler için noktanın yoğunluğu kavramını tanımlayıp özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 4.25. A RH-regüler negatif olmayan bir matris ve $E\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olsun.

$$\overline{\delta_A^{(2)}}\left(E\right)=\limsup_{n,m}\sum_{j,k\in E}a_{jk}^{nm}$$

ve

$$\underline{\delta_A^{(2)}}\left(E\right)=\liminf_{n,m}\sum_{j,k\in E}a_{jk}^{nm}$$

sırasıyla E kümesinin $A-$üst ve $A-$alt yoğunluğu olarak adlandırılır. $\overline{\delta_A^{(2)}}\left(E\right)=\underline{\delta_A^{(2)}}\left(E\right)$ ise E kümesinin $A-$yoğunluğu vardır denir ve $\delta_A^{(2)}(E)$ ile gösterilir. A yoğunluğunun tanımında $A=(C,1,1)$ alırsak, E kümesinin doğal yoğunluğu elde edilir. Bu da $\delta^{(2)}(E)$ ile gösterilir [21]. Şimdi $[x]$ çift indisli dizisi için noktanın yoğunluğunu tanımlayalım. $(x_{jk})\in l_\infty^{(2)}$ ve $y\in\mathbb{R}$ için

$$\overline{\delta_A^{(2)}}\left(y\right)=\lim_{\epsilon\to0^+}\overline{\delta_A^{(2)}}(\{(j,k):|x_{jk}-y|\leq\epsilon\})$$

ve

$$\underline{\delta_A^{(2)}}\left(y\right)=\lim_{\epsilon\to0^+}\underline{\delta_A^{(2)}}(\{(j,k):|x_{jk}-y|\leq\epsilon\})$$

olsun. Bu iki değer birbirine eşit ise y noktasının $A-$yoğunluğu vardır denir ve $\delta_A^{(2)}\left(y\right)$ ile gösterilir.

Teorem 4.26. Her $y\in\mathbb{R}$ için $\delta_A^{(2)}\left(y\right)$ mevcut olsun. Bu durumda $D=\{y\in\mathbb{R}:\delta_A^{(2)}\left(y\right)>0\}$ kümesi sayılabilirdir ve $\sum\limits_{y\in D}\delta_A^{(2)}\left(y\right)\leq1$ gerçeklenir.

İspat. (r_s), kesin monoton azalan ve 1 değerine yakınsak bir dizi olsun. Sabit $v \in \mathbb{N}$ için $D_v = \{y \in \mathbb{R} : \delta_A^{(2)}(y) \geq \frac{1}{v}\}$ olsun. $y_1, y_2, ..., y_l \in D_v$ farklı olsun. Bu durumda $\epsilon = \min\limits_{i \neq u} \frac{|y_i - y_u|}{3} > 0$ ise $E_l = \{(j,k) : |x_{jk} - y_l| \leq \epsilon\}$ kümeleri ikişerli ayrıktır ve $\delta_A^{(2)}(E_i) \geq \frac{1}{v}$ olur. A matrisi RH-regüler olduğundan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçebiliriz öyle ki sabit bir $\tau > 0$ için p sabitlenmiş olmak üzere $n, m \geq n_0$ ve her $i = 1, ...l$ için

$$\sum_{(j,k) \in E_i} a_{jk}^{nm} \geq \frac{1}{v} - \tau \text{ and } \sum_{(j,k)=(1,1)}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} \leq r_p$$

elde edilir. $E_1, E_2, ..., E_l$ ayrık olduğundan $n, m \geq n_0$ için

$$\sum_{(j,k) \in E_1 \cup E_2 \cup ... E_l} a_{jk}^{nm} = \sum_{\mu=1}^{l} \sum_{(j,k) \in E_\mu} a_{jk}^{nm} \geq \frac{l}{v} - l\tau$$

olur. Dolayısıyla $r_s \geq \frac{l(1-v\tau)}{v}$, yani $\frac{vr_s}{1-v\tau} \geq l$ gerçeklenir. Böylece D_v sonlu olmak zorundadır. O halde

$$\sum_{y \in D_v} \delta_A^{(2)}(y) \leq r_s$$

elde edilir. $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset ...$ ve $D = \bigcup\limits_{v=1}^{\infty} D_v$ olduğundan

$$\sum_{y \in D} \delta_A^{(2)}(y) = \lim_{v \to \infty} \sum_{y \in D_v} \delta_A^{(2)}(y) \leq r_s$$

bulunur. Bu her r_s için doğru ve $r_s \to 1$ olduğundan $\sum\limits_{y \in D} \delta_A^{(2)}(y) \leq 1$ elde edilir. Açıkça D sayılabilir olmak zorundadır. ■

Teorem 4.27. A, 4 boyutlu Cesàro matrisi olmak üzere herhangi $\epsilon > 0$ ve herhangi $y \in [0,1]$ için $\overline{\delta_A^{(2)}}(\{(j,k) : |x_{jk} - y| \leq \epsilon\}) = \overline{d^{(2)}}(\{(j,k) : |x_{jk} - y| \leq \epsilon\}) = 1$ olacak biçimde sınırlı bir (x_{jk}) dizisi vardır.

İspat. (x_{jk}), limit noktaları kümesi $[0,1]$ olacak biçimde bir dizi olsun. Böyle bir dizi $[0,1]$ aralığındaki tüm rasyonel sayıların aynı satır ve aynı sütunda olmamak üzere sonsuz kez tekrarlanmasıyla elde edilebilir. ■

Teorem 4.28. (x_{jk}) sınırlı bir dizi, $\delta_A^{(2)}(y)$ her $y \in \mathbb{R}$ için mevcut ve $\sum\limits_{y \in D} \delta_A^{(2)}(y) = 1$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n,m \to \infty} (Ax)_{nm} = \sum_{y \in D} \delta_A^{(2)}(y)\, y$$

gerçeklenir.

İspat. (x_{jk}) sınırlı olduğundan her $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $|x_{jk}| \leq M$ olacak biçimde $M > 0$ vardır. $D = \{y_i\}_i$ ve y_i ler farklı olsun. $\epsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{r} \delta_A^{(2)}(y_i) > 1-\epsilon$ ve $\left| \sum_{i=r+1}^{\infty} \delta_A^{(2)}(y_i) . y_i \right| < \epsilon$ olacak biçimde $r \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. $\frac{\min_{1 \leq i \neq u \leq r} |y_i - y_u|}{3} > \frac{1}{N}$ ve $E_i = \{(j,k) : |x_{jk} - y_i| < \frac{1}{N}\}$ kümeleri $i = 1, ..., r$ için

$$\delta_A^{(2)}(y_i) - \frac{\epsilon}{r(M+1)} \leq \underline{\delta_A^{(2)}}(E_i) \leq \overline{\delta_A^{(2)}}(E_i) \leq \delta_A^{(2)}(y_i) + \frac{\epsilon}{r(M+1)}$$

olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ vardır. $E_1, E_2, ..., E_r$ ikişerli ayrıktır. Şimdi bir $N_0 \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki her $n, m \geq N_0$ ve $i = 1, ...r$ için

$$\underline{\delta_A^{(2)}}(E_i) - \frac{1}{N} < \sum_{(j,k) \in E_i} a_{jk}^{nm} < \overline{\delta_A^{(2)}}(E_i) + \frac{1}{N}$$

olsun. Dolayısıyla

$$\delta_A^{(2)}(y_i) - \frac{1}{N} - \frac{\epsilon}{r(M+1)} < \sum_{(j,k) \in E_i} a_{jk}^{nm} < \delta_A^{(2)}(y_i) + \frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{r(M+1)}$$

ve sonuç olarak her $n, m \geq N_0$ ve $i = 1, ...r$ için

$$\left| \sum_{(j,k) \in E_i} a_{jk}^{nm} - \delta_A^{(2)}(y_i) \right| < \frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{r(M+1)}$$

olur. Bu durumda her $n, m \geq N_0$ için

$$\begin{aligned}(Ax)_{nm} &= \sum_{j,k} a_{jk}^{nm} x_{jk} \\ &\leq \sum_{(j,k) \in E_1} a_{jk}^{nm}(y_1 + \frac{1}{N}) + ... + \sum_{(j,k) \in E_r} a_{jk}^{nm}(y_r + \frac{1}{N}) + \sum_{(j,k) \in (E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_r)^c} a_{jk}^{nm} M\end{aligned}$$

elde edilir. A RH-regüler olduğundan $n, m \geq N_1$ için

$$\sum_{j,k} a_{jk}^{nm} < 1 + \epsilon$$

olacak biçimde bir $N_1 \geq N_0$ seçebiliriz. Buradan

$$1 + \epsilon > \sum_{j,k} a_{jk}^{nm} = \sum_{(j,k) \in E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_r} a_{jk}^{nm} + \sum_{(j,k) \in (E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_r)^c} a_{jk}^{nm} \tag{4.18}$$

olup diğer taraftan

$$\sum_{(j,k)\in E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_r} a_{jk}^{nm} = \sum_{\mu=1}^{r}\sum_{(j,k)\in E_\mu} a_{jk}^{nm} > \sum_{\mu=1}^{r}\delta_A^{(2)}(y_\mu) - \frac{r}{N} - \frac{\epsilon}{M+1} \tag{4.19}$$

$$> 1 - \frac{r}{N} - (1+\frac{1}{M+1})\epsilon \tag{4.20}$$

elde edilir. $n, m \geq N_1$ için (4.18) and (4.19) ifadelerinden

$$\sum_{k\in(E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_r)^c} a_{jk}^{nm} < (1+\epsilon) - (1 - \frac{r}{N} - (1+\frac{1}{M+1})\epsilon \tag{4.21}$$

$$= \frac{r}{N} + (2+\frac{1}{M+1})\epsilon$$

olur. Sonuç olarak $n, m \geq N_1$ için

$$(Ax)_{nm} \leq \sum_{(j,k)\in E_1} a_{jk}^{nm}(y_1+\frac{1}{N}) + \ldots + \sum_{(j,k)\in E_r} a_{jk}^{nm}(y_r+\frac{1}{N}) + \frac{Mr}{N} + (2+\frac{1}{M+1})M\epsilon$$

ve benzer şekilde

$$(Ax)_{nm} \geq \sum_{(j,k)\in E_1} a_{jk}^{nm}(y_1-\frac{1}{N}) + \ldots + \sum_{(j,k)\in E_r} a_{jk}^{nm}(y_r-\frac{1}{N}) - \frac{Mr}{N} - (2+\frac{1}{M+1})M\epsilon$$

olur. Dolayısıyla

$$(Ax)_{nm} - \sum_{\mu=1}^{r}\sum_{(j,k)\in E_\mu} a_{jk}^{nm}(y_\mu+\frac{1}{N}) \leq \frac{Mr}{N} + (2+\frac{1}{M+1})M\epsilon \tag{4.22}$$

ve

$$(Ax)_{nm} - \sum_{\mu=1}^{r}\sum_{(j,k)\in E_\mu} a_{jk}^{nm}(y_\mu-\frac{1}{N}) \geq -\frac{Mr}{N} - (2+\frac{1}{M+1})M\epsilon$$

elde edilir. Böylece (4.18) ve (4.22) kullanılarak $n, m \geq N_1$ için

$$\begin{aligned}
&(Ax)_{nm} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta_A^{(2)}(y_\mu)\, y_\mu = (Ax)_{nm} - \sum_{\mu=1}^{r} \delta_A^{(2)}(y_\mu)\, y_\mu - \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_A^{(2)}(y_\mu)\, y_\mu \\
&\leq (Ax)_{nm} - \sum_{\mu=1}^{r} \delta_A^{(2)}(y_\mu)\, y_\mu + \left| \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_A^{(2)}(y_\mu)\, y_\mu \right| \leq (Ax)_{nm} - \sum_{\mu=1}^{r} \delta_A^{(2)}(y_\mu)\, y + \epsilon \\
&= \sum_{\mu=1}^{r} ((\sum_{(j,k)\in E_\mu} a_{jk}^{nm} - \delta_A^{(2)}(y_\mu))(y_\mu + \frac{1}{N})) + \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{r} \delta_A^{(2)}(y_\mu) + \frac{Mr}{N} + (2M + \frac{M}{M+1} + 1)\epsilon \\
&\leq \sum_{\mu=1}^{r} (\left| \sum_{(j,k)\in E_\mu} a_{jk}^{nm} - \delta_A^{(2)}(y_\mu) \right| (|y_\mu| + \frac{1}{N})) + \frac{1}{N} + \frac{Mr}{N} + (2M + \frac{M}{M+1} + 1)\epsilon \\
&\leq r(\frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{r(M+1)})(M + 1 + \frac{1}{N}) + \frac{1}{N} + \frac{Mr}{N} + (2M + \frac{M}{M+1} + 1)\epsilon
\end{aligned}$$

olup $n, m \geq N_1$ için

$$(Ax)_{nm} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta_A^{(2)}(y_\mu)\, y_\mu \geq -r(\frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{r(M+1)})(M+1+\frac{1}{N}) - \frac{1}{N} - \frac{Mr}{N} - (2M + \frac{M}{M+1} + 1)\epsilon$$

elde edilir. N yeterince büyük seçilebildiğinden her $\epsilon > 0$ için

$$\left| (Ax)_{nm} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta_A^{(2)}(y_\mu)\, y_\mu \right| \leq (2M + \frac{M}{M+1} + 2)\epsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n,m} (Ax)_{nm} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta_A^{(2)}(y_\mu)\, y_\mu$$

olur. ■

Teorem 4.29. (x_{jk}), $\{E_i\}$ parçalanışı üzerinde bir splice dizi, $y_i = \sum_{\substack{(j,k)\in E_i \\ j,k\to\infty}} x_{jk}$, her bir i için $\delta_A^{(2)}(E_i)$ mevcut ve $\sum_i \delta_A^{(2)}(E_i) = 1$ olsun. Bu durumda her $y \in \mathbb{R}$ için $\delta_A^{(2)}(y)$ mevcut ve $\delta_A^{(2)}(y_i) = \delta_A^{(2)}(E_i)$ gerçeklenir. Diğer bir ifade ile Osikiewicz [13] tarafından verilen teoremin çift diziler için olan versiyonu yukarıdaki teoremin koşullarını gerçekler.

İspat. $\epsilon > 0$ olsun. $\sum_{i=1}^{N} \delta_A^{(2)}(E_i) > 1 - \epsilon$ olacak şekilde N bulabiliriz. $\delta > 0$ olsun öyle ki $i = 1, 2, ..., N$ için $(y_i - \delta,\ y_i + \delta)$ aralıkları ikişerli ayrık olacak biçimde $\delta \geq 0$ alalım. $\{(j,k) : x_{jk} \in (y_i - \delta,\ y_i + \delta)\} \backslash E_i$ kümesi en fazla sonlu adette satır ve sütun içerir.

Dolayısıyla

$$\delta_A^{(2)}(\{(j,k) : x_{jk} \in (y_i - \delta, y_i + \delta)\}) \supset \delta_A^{(2)}(E_i)$$

olup

$$\underline{\delta_A^{(2)}}(y_i) \geq \delta_A^{(2)}(E_i)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\overline{\delta_A^{(2)}}(y_i) &= \lim_{\eta \to 0^+} \overline{\delta_A^{(2)}}(\{(j,k) : x_{jk} \in (y_i - \eta, y_i + \eta)\}) \\
&= 1 - \lim_{\eta \to 0^+} \underline{\delta_A^{(2)}}(\{(j,k) : x_{jk} \in (y_i - \eta, y_i + \eta)\}) \\
&\leq 1 - \underline{\delta_A^{(2)}}(\{(j,k) : x_{jk} \in (y_i - \eta, y_i + \eta)\}) \\
&\leq 1 - \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq i}}^{N} \delta_A^{(2)}(E_v) < \delta_A^{(2)}(E_i) + \epsilon
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\delta_A^{(2)}(y_i) = \delta_A^{(2)}(E_i)$ bulunur. y, $\{y_i\}$ kümesine ait değil ise her $\epsilon > 0$ için $\sum\limits_{i=1}^{N} \delta_A^{(2)}(E_i) > 1 - \epsilon$ olacak biçimde bir N bulabiliriz. δ, y ile $\{y_1, ..., y_N\}$ kümesi arasındaki uzaklık olsun. Bu durumda $\overline{\delta_A^{(2)}}(\{(j,k) : |x_{jk} - y| < \frac{\delta}{2}\}) < \epsilon$ ve sonuç olarak $\delta_A^{(2)}(y) = 0$ elde edilir. ∎

Teorem 4.30. (x_{jk}) sınırlı bir dizi olsun. $\overline{\delta_A^{(2)}}(y) = 1$ ise y, $(Ax)_{nm}$ dizisinin bir limit noktasıdır.

İspat. (x_{jk}) sınırlı bir dizi olduğundan her $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $|x_{jk}| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır. y, $\overline{\delta_A^{(2)}}(y) = 1$ olacak biçimde bir reel sayı $N \in \mathbb{N}$ ve $E_N = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - y| < \frac{1}{N}\}$ olsun. Bu durumda öyle bir $n_N, m_N \geq N$ vardır ki

$$\sum_{(j,k) \in E_N} a_{jk}^{n_N m_N} > \overline{\delta_A^{(2)}}(E_N) - \frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$$

olur ve ayrıca A, RH-regüler olduğundan

$$\sum_{(j,k)=(1,1)}^{\infty,\infty} a_{jk}^{n_N m_N} < 1 + \frac{1}{N}$$

elde edilir. $(j,k) \in E_N$

$$y - \frac{1}{N} < x_{jk} < y + \frac{1}{N}$$

ve $(j,k) \notin E_N$

$$-M \leq x_{jk} \leq M$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{(j,k)\in E_N} a_{jk}^{n_N m_N}(y - \frac{1}{N}) - \sum_{(j,k)\notin E_N} a_{jk}^{n_N m_N} M &\leq \sum_{(j,k)=(1,1)}^{\infty,\infty} a_{jk}^{n_N m_N} x_{jk} \\ &\leq \sum_{(j,k)\in E_N} a_{jk}^{n_N m_N}(y + \frac{1}{N}) + \sum_{k\notin E_N} a_{jk}^{n_N m_N} M\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}y(\sum_{(j,k)=(1,1)}^{\infty,\infty} a_{jk}^{n_N m_N} - 1) - \sum_{(j,k)\in E_N} a_{jk}^{n_N m_N} \frac{1}{N} - \sum_{(j,k)\notin E_N} a_{jk}^{n_N m_N}(M+y) &\leq \sum_{(j,k)=(1,1)}^{\infty,\infty} a_{jk}^{n_N m_N} x_{jk} - y \\ \leq \sum_{(j,k)\in E_N} a_{jk}^{n_N m_N} \frac{1}{N} + \sum_{(j,k)\notin E_N} a_{jk}^{n_N m_N}(M-y) + y(\sum_{(j,k)=(1,1)}^{\infty,\infty} a_{jk}^{n_N m_N} - 1)\end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\left|\sum_{(j,k)=(1,1)}^{\infty,\infty} a_{jk}^{n_N m_N} x_{jk} - y\right| \leq \left|\sum_{(j,k)\in E_N} a_{jk}^{n_N m_N} \frac{1}{N}\right| + \left|\sum_{(j,k)\notin E_N} a_{jk}^{n_N m_N}(M+|y|)\right| + \frac{|y|}{N}$$

olur.

$$\begin{aligned}\sum_{(j,k)\notin E_N} a_{jk}^{n_N m_N} &= \sum_{(j,k)=(1,1)}^{\infty,\infty} a_{jk}^{n_N m_N} - \sum_{(j,k)\notin E_N} a_{jk}^{n_N m_N} \\ &< 1 + \frac{1}{N} - (1 - \frac{1}{N}) = \frac{2}{N}\end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
|(Ax)_{n_N m_N} - y| &= \left| \sum_{(j,k)=(1,1)}^{\infty,\infty} a_{jk}^{n_N m_N} x_{jk} - y \right| \\
&\leq (\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2}) + \sum_{(j,k)\notin E_N} a_{jk}^{n_N m_N} (M + |y|) + \frac{|y|}{N} \\
&\leq \frac{2}{N}(M + |y|) + \frac{|y| + 1}{N} + \frac{1}{N^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan y, $\{(Ax)_{nm}\}$ çift indisli dizisinin bir limit noktasıdır. ■

Teorem 4.31. (x_{jk}) sınırlı bir dizi ve y, z $(y \neq z)$, $\overline{\delta_A^{(2)}}(y) = \overline{\delta_A^{(2)}}(z) = 1$ olacak biçimde verilsin. Bu durumda $\{(Ax)_{nm}\}$ çift indisli dizisinin limiti mevcut değildir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak ispat kolaylıkla elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Osikiewicz [13] tarafından verilen sonuçlar regüler olmayan matris toplanabilme metodu kullanılarak genişletilmiştir. Ünver ve arkadaşları tarafından verilen sonuçlar kuvvet serisi toplanabilme metodu kullanılarak topolojik uzaylarda genişletilmiştir. Bununla birlikte çift splice dizi kavramı tanımlanarak Osikiewicz tarafından verilen sonuçlar dört boyutlu matrisler için elde edilmiştir. Ayrıca dört boyutlu matrisler için noktanın yoğunluğu tanımlanıp [4] makalesinde verilen bazı sonuçlar dört boyutlu matrisler için de incelenmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1]. Boos, J., (2000). Classical and Modern Methods in Summability, *Oxford univ. Press,* UK.

[2]. Bose, K., and Sengupta, S. (2019). A note on spliced sequences and A-density of points with respect to a non-negative matrix, *Kyungpook Math. J.*, 59, 47-63.

[3]. Bose, K., Das, P. and Sengupta, S. (2020). On spliced sequences and the density of points with respect to a matrix constructed by using a weight function, *Ukrainian Mathematical Journal*, 71, 1359-1374.

[4]. Bartoszewicz, A., Das, P. and Głab, S. (2015). On matrix summability of spliced sequences and A-density, *Linear Algebra Appl.,* 487, 22-42.

[5]. Das, P., Bose, K. and Sengupta, S. (2017). On I_A-density of points and some of its consequences, *Filomat,* 31 , 6585-6595.

[6]. Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique, *In Colloquium mathematicae,* 2, 241-244.

[7]. Freedman, A. and Sember, J. (1981). Densities and summability, *Pacific Journal of Mathematics,* 95, 293-305.

[8]. Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence, *Analysis,* 5, 301-314.

[9]. Hamilton, H. J. (1936). Transformations of multiple sequences, *Duke Mathematical Journal,* 2, 29-60.

[10]. Kolk, E. (1993).Matrix summability of statistically convergent sequences, *Analysis,* 13, 77-84.

[11]. Mikusinski, J. (1978). The Bochner integral, *Elsevier*.

[12]. Mursaleen, E. and Osama, H. H. (2003). Statistical convergence of double sequences, *J. Math. Anal. Appl.*, 288, 223-231.

[13]. Osikiewicz, J.A. (2005). Summability of spliced sequences, *Rocky Mountain J. Math.,* 35, 977-996.

[14]. Patterson, R. F. (2000). Analogues of some fundamental theorems of summability theory, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 23, 1-9.

[15]. Patterson, R. and Lemma, M. (2008). Four dimensional matrix characterization of double oscillation via RH-conservative and RH-multiplicative matrices, *Cent. Eur. J. Math.,* 6, 581-594.

[16]. Pringsheim, A. (1900). On the theory of doubly infinite sequences of numbers, *Math. Ann.*, 53, 289-321.

[17]. Rhoades, B. E. (1960). Some properties of totally coregular matrices, *Illinois Journal of Mathematics,* 4, 518-525.

[18]. Robinson, G. M. (1926). Divergent double sequences and series, *Transactions of the American Mathematical Society,* 28, 50-73.

[19]. Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca,* 30, 139-150.

[20]. Unver, M. (2015). Abel summability in topological spaces, *Monatshefte für Mathematik,* 178, 633-643.

[21]. Unver, M., Khan, M. and Orhan, C. (2014). A-distributional summability in topological spaces,*Positivity,* 18, 131-145.

[22]. Unver, M. and Orhan, C. (2019). Statistical convergence with respect to power series methods and applications to approximation theory, *Numerical Functional Analysis and Optimization,* 40, 535-547.

[23]. Yardımcı, Ş. and Gülfirat, M. (2023). Spliced sequences and summability with a rate, *Positivity,* 27, 17.

[24]. Yurdakadim, T. and Ünver, M. (2016). Some results concerning the summability of spliced sequences, *Turk. J. Math.,* 40, 1134-1143.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	Sevcan DEMİRKALE
Uyruğu :	T.C.
Orcid Numarası:	0000-0003-0739-5044

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölüm	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2010

Yüksek Lisans	
Üniversite	Erzincan Üniversitesi
Fakülte	Fen Bilimleri Enstitüsü
Bölüm	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Yılı	2016

Doktora	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Bilimleri Enstitüsü
Bölüm	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Yılı	2024

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Demirkale S. and Taş E. (2023). Statistical Convergence of Spliced Sequences in Terms of Power Series on Topological Spaces. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 11, 104-111.
Taş E. and Demirkale S. (2023). Results on the Summability of Spliced Sequences by Using Nonnegative Matrices *Academic Researches in Mathematics and Science*,Özgür Publications. DOI: https://doi.org/10.58830/ozgur.pub132 . License: CC-BY-NC 4.0.
Demirkale S. (2022). Effects of Non-negative Matrix in the Summability of Spliced Sequences. *5th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications*, 11-14 May 2022, İstanbul, Türkiye.