



T.C.  
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI



# AĞIRLIKLIL SOBOLEV-POINCARÉ TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Rışvan TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR

2025



T.C.  
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI



# AĞIRLIKLIL SOBOLEV-POINCARÉ TIPLI EŞİTSİZLİKLER

Rışvan TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Turhan KARAMAN

KIRŞEHİR

2025

**KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŐMASI**  
**ETİK BEYANI**

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

23/05/2025  
Öğrenci  
Rışvan TEKİN

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
<b>İÇİNDEKİLER DİZİNİ</b> . . . . .	I
<b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .	II
<b>ÖZET</b> . . . . .	III
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	IV
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> . . . . .	V
<b>1. GİRİŞ</b> . . . . .	1
<b>2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR</b> . . . . .	3
<b>3. MATERYAL VE METOT</b> . . . . .	9
<b>4. BULGULAR VE TARTIŞMA</b> . . . . .	11
4.1. Ağırlıklı Eşitsizlikler . . . . .	11
4.1.1. $A_p$ Koşulu . . . . .	11
4.1.2. Ters Hölder Eşitsizliği ve Maksimal Operatörün Sınırlılığı . . . . .	16
4.1.3. Riesz Potansiyeli için Ağırlıklı Eşitsizlikler . . . . .	21
4.2. Ağırlıklı Sobolev-Poincaré Eşitsizliği . . . . .	26
4.2.1. Eliptik Denklemlerin Çözümlerinin Hölder Sürekliliği . . . . .	33
4.2.2. Dejenere Eliptik Denklemlerin Çözümlerinin Hölder Sürekliliği . . . . .	35
4.3. Parabolik Ağırlıklı Sobolev-Poincaré Tipli Eşitsizlikler . . . . .	41
4.3.1. Parabolik Denklemler . . . . .	41
4.3.2. Parabolik $\mathcal{A}_p$ Sınıfı . . . . .	44
4.3.3. Parabolik Denklemlerin Çözümleri İçin Ağırlıklı Sobolev-Poincaré Tipli Eşitsizlikler . . . . .	47
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> . . . . .	51
<b>6. KAYNAKLAR</b> . . . . .	53
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> . . . . .	59

## **TEŞEKKÜR**

Tez alıŐmamn planlama, yürütme ve uygulama aŐamalarında desteğini esirgemeyen danıŐmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Turhan KARAMAN'a destek ve katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin alıŐma sürecinde yardımını esirgemeyen eŐim Mukaddes TEKİN'e, manevi desteklerinden dolayı oğullarım Ramazan ve Hami TEKİN'e sonsuz teşekkür ederim.

Mayıs, 2025

Rışvan TEKİN

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## AĞIRLIKLIL SOBOLEV-POINCARÉ TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Rııvan TEKİN

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Turhan KARAMAN

Yıl: 2025 Sayfa: 59

Jüri: Dr. Öğr. Üyesi Turhan KARAMAN

Prof. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Doç. Dr. Sevgi Esen ALMALI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci Bölüm’de tezin içerdiği konular hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci Bölüm’de tezde kullanılacak temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü Bölüm’de tezde kullanılan materyal ve metotlardan bahsedilmiştir. Dördüncü Bölüm’ün ilk kısmında  $A_p$  Muckenhoupt koşulu tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca maksimal operatör ve Riesz potansiyeli için ağırlıklı eşitsizlikler incelenmiştir. İkinci kısımda ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliği incelenmiştir. Daha sonra eliptik ve dejenere eliptik denklemlerin çözümlerinin Hölder sürekliliği incelenmiştir. Üçüncü kısımda parabolik denklemlerin çözümleri için ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliği incelenmiştir. Beşinci Bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır. Altıncı Bölümde ise kaynaklara yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Ağırlıklı eşitsizlikler, dejenere eliptik denklemler, ağırlıklı Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlikler, parabolik ağırlıklı Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlikler

**ABSTRACT**

**MSc THESIS**

**WEIGHTED SOBOLEV-POINCARÉ TYPE INEQUALITIES**

**RıŖvan TEKİN**

**KIRŖEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY  
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**Supervisor: Asst. Prof. Dr. Turhan KARAMAN**

**Year: 2025 Pages: 59**

**Juries: Asst. Prof. Dr. Turhan KARAMAN**

**Prof. Dr. AyŖegül ÇETİNKAYA**

**Assoc. Prof. Dr. Sevgi Esen ALMALI**

This thesis consists of six chapters. In Chapter one, general information is provided about the topics covered in the thesis. Chapter two presents the fundamental concepts to be used throughout the thesis. In Chapter three, the materials and methods employed in the thesis are discussed. The first part of Chapter four introduces the definition of the  $A_p$  Muckenhoupt condition and some of its properties. Additionally, weighted inequalities for the maximal operator and the Riesz potential are examined. In the second part, the weighted Sobolev–Poincaré inequality is analyzed. Subsequently, the Hölder continuity of solutions to elliptic and degenerate elliptic equations is investigated. In the third part, the weighted Sobolev–Poincaré inequality is studied for solutions to parabolic equations. Chapter five is devoted to the conclusion. Finally, Chapter six includes the references.

**Keywords:** Weighted inequalities, degenerate elliptic equations, weighted Sobolev-Poincaré type inequalities, parabolic weighted Sobolev-Poincaré type inequalities

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$L^p$	:Lebesgue uzayı
$[w]_{A_p}$	: $w$ nın $A_p$ karakteristik sabiti
$A_p$	:Muckenhaupt ağırlık sınıfı
$W^{k,p}$	:Sobolev uzayı
$L^\infty$	:Sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$L^p(w)$	:Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$B_r$	:Açık yuvar
$M_\gamma$	:Kesirli maksimal operatörü
$\partial\Omega$	: $\Omega$ nın sınırı
$\overline{B_r}$	: $B_r$ yuvarının kapanışı
$Q_r$	:Parabolik küp
$M$	:Maksimal operatör
$m_*(E)$	: $E$ nin dış ölçüsü
$L$	:İkinci basamaktan kısmi diferansiyel operatör

<b>Kısaltmalar</b>	<b>Açıklama</b>
h.h.y.	:hemen her yerde

## 1. GİRİŞ

Fourier analizinin temel konularından biri olan ağırlıklar teorisi, kısmi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi pek çok uygulamaya sahiptir. Bu teoride  $A_p$  Muckenhoupt sınıfının önemli bir yeri vardır.

Katsayılarına bağlı olarak çeşitli singülerliklere sahip dejenere kısmi diferansiyel denklemlerde ağırlıklı Sobolev uzaylarında çalışmak gerekliliği doğal olarak ortaya çıkar ([57]). Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlikler, kısmi diferansiyel denklemler teorisinde kullanılan temel eşitsizliklerdir. Bu eşitsizliğin ağırlıklı biçimi E.B. Fabes, C.E. Kenig ve R.P. Serapioni tarafından elde edilmiştir:

$$\left( \frac{1}{w(B_r)} \int_{B_r} |f - f_{B_r, w}|^{pk} w dx \right)^{\frac{1}{pk}} \leq Cr \left( \frac{1}{w(B_r)} \int_{B_r} |Df|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bu eşitsizlik yardımıyla bir dejenere eliptik denklemin çözümünün Hölder sürekliliğini kanıtlamışlardır. Bu eşitsizlikle  $w$  ağırlığı  $A_p$ ,  $1 < p < \infty$ , sınıfındadır. Dejenere eliptik denklemlerin düzgünlük çalışmalarında ise  $w \in A_2$  olarak alınmıştır.  $A_2$  sınıfından olmayıp ta Hölder süreklilik sonuçlarının geçerli olduğu, quasi-konform dönüşümler yardımıyla tanımlanan ağırlıklarda ayrıca [20] de çalışılmıştır. Daha önceki çalışmalarda  $w$  ağırlığının sağladığı koşullar, çözümlerin Hölder sürekliliğini sağlamada yetersiz kalmıştır.

L. Dening, M. Lee ve J. Ok bir parabolik kısmi türevli denklemin çözümü için parabolik  $\mathcal{A}_p$  sınıfından ağırlıklar ile ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliğini ispatlamışlardır. Bu çalışmada daha önceki çalışmalardan farklı olarak ağırlıklar zaman değişkeninden bağımsız değildir.

Bu tezde yukarıda bahsedilen kavramlar araştırılmış ve konuların yeterince anlaşılabilmesi için gerekli bilgilere yer verilmeye çalışılmıştır.



## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölüm bazı temel kavramlara ayrılmıştır.

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$  ile tanımlanır.  $x$  in normu  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$  standart Öklid normu ile tanımlanır.  $x$  ve  $y$  noktaları arasındaki uzaklık  $|x - y|$  dir. Bir  $E$  kümesinin  $\mathbb{R}^n$  içindeki tümleyeni  $E^c$  ile gösterilir. Eğer  $E$  ve  $F$ ,  $\mathbb{R}^n$  nin iki alt kümesi ise,  $F$  nin  $E$  deki tümleyeni  $E \setminus F = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in E \text{ ve } x \notin F\}$  ile gösterilir.

$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  ve  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ ,  $u$  nun gradientini gösterecektir.  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$  ise  $\text{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^m u_{x_i}^i$  biçiminde tanımlanır.

Bir  $\alpha$  çoklu indeksi, bileşenleri negatif olmayan tamsayılar olan bir  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$   $n$ -vektördür. Ayrıca  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  olmak üzere  $f(x)$  sonsuz kez türevlenebilen fonksiyon ise  $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  biçiminde gösterilir.  $k \geq 2$  bir tamsayı iken  $|D^k u| = \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|$  biçiminde tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$  de  $x$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı açık yuvar  $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$  ile tanımlanır. Her  $x \in E$  için  $B_r(x) \subset E$  olacak şekilde bir  $r > 0$  var ise bir  $E \subset \mathbb{R}^n$  alt kümesi açıktır denir.  $B$  bir küme eğer tümleyeni açıksa kapalıdır. Bir  $E$  kümesi, sonlu yarıçaplı bir yuvar içinde yer alıyorsa sınırlıdır denir. Sınırlı bir küme aynı zamanda kapalıysa kompakttır. Bir  $E$  kümesinin sınırı  $\partial E$  ile gösterilir.  $\text{supp } u$ ,  $u$  nun desteğini belirtip  $u \neq 0$  biçimindeki noktalar kümesinin kapanışıdır.

$\mathbb{R}^n$  de kapalı bir  $R$  dikdörtgeni,  $R = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  biçimindedir. Bu tanımda bir dikdörtgenin kenarlarının koordinat eksenine paralel olduğuna dikkat edilmelidir.  $R$  dikdörtgeninin hacmi,  $|R|$  ile gösterilir, ve  $|R| = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$  olarak tanımlanır.  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , kenar uzunluğu  $\ell$  olan bir küp ise,  $|Q| = \ell^n$  olur.  $\lambda Q$ ,  $Q$  ile aynı merkezli ve kenar uzunluğu  $Q$  nun kenar uzunluğunun  $\lambda$  katı olan küpü ifade eder ([50]).

Eğer  $E$ ,  $\mathbb{R}^n$  nin herhangi bir alt kümesi ise,  $E$  nin dış ölçüsü  $m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$  ile tanımlanır, burada infimum tüm sayılabilir  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$  kapalı küplerinin örtüleri üzerinden alınmaktadır.  $0 \leq m_*(E) \leq \infty$  biçimindedir. Eğer herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için  $E \subset \mathcal{O}$  ve  $m_*(\mathcal{O} - E) \leq \varepsilon$  olacak şekilde bir açık  $\mathcal{O}$  kümesi var ise,  $\mathbb{R}^n$  nin bir  $E$  alt kümesi Lebesgue ölçülebilirdir yada basitçe ölçülebilirdir denir. Eğer  $E$  ölçülebilir ise,  $|E|$  Lebesgue ölçüsü (veya ölçüsü)  $|E| = m_*(E)$  ile tanımlanır ([50]).

$E$  ölçülebilir bir küme ve  $h \in \mathbb{R}^n$  ise,  $E + h = \{x + h : x \in E\}$  kümesi de ölçülebilirdir ve  $|E + h| = |E|$  sağlanır, yani  $\mathbb{R}^n$  de Lebesgue ölçüsü öteleme-değişmezdir. Aynı şekilde, Lebesgue ölçüsü göreceli genişleme-değişmezlik özelliğine de sahiptir:  $\delta > 0$

ve  $\delta E = \{\delta x : x \in E\}$  ise  $E$  ölçülebilir iken  $\delta E$  de ölçülebilirdir ve  $|\delta E| = \delta^d |E|$  olur. Lebesgue ölçüsü yansıma değişmezdir. Yani,  $E$  ölçülebilir ise  $-E = \{-x : x \in E\}$  de ölçülebilirdir ve  $|-E| = |E|$  dir ([50]).

$\mathbb{R}^n$  deki bir  $f$  fonksiyonu için  $-\infty \leq f(x) \leq \infty$  ise  $f$  ye genişletilmiş reel değerli, eğer her  $x$  için  $-\infty < f(x) < \infty$  ise sonlu değerlidir denir.  $\mathbb{R}^n$  nin ölçülebilir bir  $E$  alt kümesi üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonu için, eğer her  $\alpha \in \mathbb{R}$  için,  $f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{x \in E : f(x) < \alpha\}$  kümesi ölçülebilir ise  $f$  ye ölçülebilir bir fonksiyondur denir ([50]).

$k$ . mertebeye kadar sürekli türevleri olan fonksiyonların uzayı  $C^k(\Omega)$  ( $k=0,1,\dots$ ) ile (eğer  $k=0$  ise, sürekli fonksiyonların uzayı olacaktır); tüm  $C^k(\Omega)$  uzaylarının kesişimi olan  $\Omega$  da sonsuz türevlenebilir fonksiyonların uzayı  $C^\infty(\Omega)$  ile gösterilir.  $C^k(\bar{\Omega})$  ile,  $C^k(\Omega)$  da  $k$ . mertebeye kadar türevleri  $\partial\Omega$  sınırına kadar sürekli fonksiyonlara genişletilebilen fonksiyonların uzayı ve  $C^k(\bar{\Omega})$  nın alt uzayı olan  $C_0^k(\Omega)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) ile kompakt desteği  $\Omega$  da bulunan fonksiyonların uzayı gösterilecektir.  $C^k(\bar{\Omega})$  uzayları

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\beta u(x)|$$

normu ile Banach uzaylarıdır. Eğer  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sınırlı, açık olmak üzere  $\bar{\Omega}$  daki Hölder-sürekli fonksiyonların uzayı  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  ile gösterilir; yani

$$[u]_{0,\alpha} = \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

için sürekli fonksiyonların uzayıdır. Daha genel olarak,  $k$ . mertebeye kadar türevleri  $\bar{\Omega}$  da Hölder-sürekli fonksiyonların uzayı  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  ile gösterilir.  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  uzayları

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}} = \|u\|_{C^k} + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{0,\alpha}$$

normu ile Banach uzaylarıdır.  $\alpha = 1$  alındığında fonksiyon Lipschitz sürekli olarak adlandırılır.  $U$  sınırlı ve  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  açık olmak üzere her  $\bar{U} \subset \Omega$  için  $C^{k,\alpha}(\bar{U})$  ya ait fonksiyonların uzayı  $C^{k,\alpha}(\Omega)$  ile gösterilir ([23]).

**Tanım 2.1.**  $(X, \mu)$  bir ölçü uzayı olsun.  $L^p(X, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , ile

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normuna sahip  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonlarının uzayı gösterilecektir. Ayrıca,  $L^\infty(X, \mu)$  ile bir  $C > 0$  için  $\mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0$  olacak şekildeki fonksiyon uzayı gösterilecektir.  $L^\infty(X, \mu)$  uzayının normu bu özelliği sağlayan sabitlerin infimumudur.  $X$  yerine  $\mathbb{R}^n$  ve  $d\mu$

yerine  $dx$  Lebesgue ölçüsü alındığında  $L^p(\mathbb{R}^n)$  yazılır ([16]).  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$  uzayı  $u^i \in L^p(\Omega)$  olmak üzere  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$  fonksiyonlarından oluşur ([23]).

**Tanım 2.2.**  $(X, \mu)$  ve  $(Y, \nu)$  ölçü uzayları olsunlar.  $T, L^p(X, \mu)$  uzayından  $Y$  den  $\mathbb{C}$  ye giden ölçülebilir fonksiyonların uzayının içine giden bir operatör olsun. Bu durumda

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left( \frac{C \|f\|_{L^p(X, \mu)}}{\lambda} \right)^q$$

ise  $T$  ye zayıf  $(p, q)$  tiplidir denir ([16]).

**Tanım 2.3.**  $L^p_{loc}(U)$  uzayı her bir  $U \subset \subset \Omega$  (yani  $\bar{U}, \Omega$  da içerilen kompakt bir kümedir) açık kümesi için  $L^p(U)$  ya ait olan fonksiyonların uzayıdır ([23]).

**Tanım 2.4.**  $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , ve  $\alpha$  çoklu indis olsun. Eğer her  $v_\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$  fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \varphi dx$$

olacak şekilde bir  $v_\alpha \in L^p_{loc}(\Omega)$  fonksiyonu varsa  $u$  nun bir zayıf (veya dağılımlar anlamında) türevi vardır denir.  $v_\alpha$  fonksiyonu genellikle  $D^\alpha u$  standart sembolü ile gösterilir ([23]).

**Tanım 2.5.**  $L^p(\Omega)$  daki  $k$ . mertebeye kadar zayıf türevlere sahip fonksiyonların Sobolev uzayı  $W^{k,p}(\Omega)$  ile gösterilir.  $W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır ([23]).

**Tanım 2.6.**  $W_0^{k,p}(\Omega)$  ile  $C_0^\infty(\Omega)$  nın  $W^{k,p}(\Omega)$  normundaki kapanışı gösterilir. Diğer bir deyişle, bir  $u$  fonksiyonu  $W_0^{k,p}(\Omega)$  ya aittir ancak ve ancak  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$  olacak şekilde bir  $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$  fonksiyonlarının bir dizisi vardır ([23]).

**Teorem 2.7.**  $\Omega, \mathbb{R}^n$  de Lipschitz-sürekliliğine sahip açık bir küme ve  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  olsun. O halde:

- (i)  $p < n$  ise  $p^* = \frac{np}{n-p}$  iken  $u \in L^{p^*}$  olur. Ayrıca  $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  sağlanır.
- (ii)  $p > n$  ise,  $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$  ve  $\|u\|_\alpha \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  sağlanır ([23]).

Aşağıda Rellich teoremi ifade edilmektedir.

**Teorem 2.8.**  $\Omega, \partial\Omega$  sınırı Lipschitz-sürekliliğine sahip olan  $\mathbb{R}^n$  de sınırlı açık bir küme,  $1 \leq p < n$  ve  $1 \leq q < p^* = \frac{np}{n-p}$  ise  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  gömmesi kompaktır ([23]).

$\mathbb{R}^n$  de merkezi olmayan Hardy-Littlewood maksimal operatörü

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

ile tanımlanır, burada supremum, verilen  $x$  noktasını içeren tüm  $Q$  küpleri (kenarları eksenlere paralel olan) üzerinden alınır. Bu tanımda  $Q$  yerine  $x$  i içeren  $B$  yuvarı alınırsa operatör  $M_B$  ile gösterilir. Bu tanımlarda  $x$ ,  $Q$  ve  $B$  nin merkezi ise sırasıyla  $M'$  ve  $M'_B$  gösterimleri kullanılır. Bu tanımların hepsi birbirleri ile noktasal olarak eşdeğerdir ([16]).

**Teorem 2.9.**  $f$ ,  $\mathbb{R}^n$  de tanımlı bir fonksiyon ise aşağıdaki sonuçlar sağlanır:

- (a)  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  ise  $Mf$  fonksiyonu h.h.y. sonludur.
- (b)  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ise, her  $\alpha > 0$  için

$$|\{x : Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx$$

sağlanır, burada  $C$ , sadece  $n$  boyutuna bağlı olan bir sabittir.

- (c)  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < p \leq \infty$ , ise bu durumda  $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ve  $\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  sağlanır, burada  $C$  sadece  $p$  ve  $n$  boyutuna bağlıdır ([48]).

**Tanım 2.10.**  $\mathbb{R}^n$  de verilen bir reel değerli  $f(x)$  fonksiyonu ve  $0 < \gamma < n$  için  $M_\gamma$  kesirli maksimal operatörü

$$M_\gamma f(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \int_Q |f(y)| dy$$

ile tanımlanır, burada supremum  $x$  merkezli bütün  $Q$  küpleri üzerinden alınmaktadır ([41]).

$0 < \alpha < n$  için Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

ile tanımlanır, burada  $\gamma(\alpha) = \pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) / \Gamma(n/2 - \alpha/2)$  biçimindedir ([48]).

**Teorem 2.11.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 \leq p < q < \infty$ ,  $1/q = 1/p - \alpha/n$  olsun.

- (a)  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ise, bu durumda  $I_\alpha f$  h.h.  $x$  için mutlak yakınsar.
- (b)  $p > 1$  ise,  $\|I_\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(p, q) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  sağlanır.
- (c)  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ise, her  $\lambda$  için  $|\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C(q)}{\lambda^q} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^q$  sağlanır ([48]).

**Tanım 2.12.** Ölçülebilir fonksiyonların bir vektör uzayından ölçülebilir fonksiyonların bir vektör uzayına tanımlı bir  $T$  operatörü için

$$|T(f_0 + f_1)(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|$$

$$|T(\lambda f)| = |\lambda| |Tf|, \lambda \in \mathbb{C}$$

sağlanıyor ise  $T$  ye bir alt lineer operatördür denir ( [16]).

Marcinkiewicz interpolasyon teoreminin ifadesi aşağıdaki gibidir:

**Teorem 2.13.**  $(X, \mu)$  ve  $(Y, \nu)$  ölçü uzayları olsun.  $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$  ve  $T, L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$  den,  $Y$  üzerinde ölçülebilir fonksiyonlara zayıf  $(p_0, p_0)$  ve zayıf  $(p_1, p_1)$  tipinde bir alt lineer operatör olsun. Bu durumda  $T, p_0 < p < p_1$  için güçlü  $(p, p)$  tiplidir ( [16]).

Vitali örtü lemması aşağıdaki gibidir:

**Lemma 2.14.** Sonlu yarıçaplara sahip yuvarların bir  $\{B_j\}$  ailesi  $\mathbb{R}^n$  nin ölçülebilir bir  $E$  alt kümesini örtsün. Bu durumda, bu aileden  $\sum_k |B_k| \geq 5^{-n} |E|$  olacak şekilde bir  $B_1, B_2, \dots, B_k, \dots$ , (sonlu veya sonsuz) ayırık alt dizisi seçilebilir ( [48]).

### 3. MATERYAL VE METOT

Bu tez hazırlanırken [20] deki sonuçlar kullanılarak ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliği ve bunun yardımıyla elde edilen dejenere eliptik denklemlerin çözümlerinin Hölder sürekliliği ifade edilmiştir. [13] de ki sonuçlar yardımıyla ise parabolik Sobolev-Poincaré eşitsizliği incelenmiştir. Bu sonuçların daha iyi anlaşılabilmesi için konulara temel oluşturacak ağırlıklı eşitsizlikler ve  $A_p$  sınıfı gibi kavramlar çoğunlukla [16] ve [25] kaynaklarından araştırılmıştır. Böylece veri toplama aracı olarak literatürde var olan makale ve kitaplar kullanılmıştır. Kullanılan kaynaklardan elde edilen verilerin analizinde matematiksel metotlar kullanılmıştır. Farklı kaynaklardan araştırılarak oluşturulan bu tezde, konuların bütünlük içerisinde aktarılmasına, sembollerin ve kavramların uyum içerisinde olmasına dikkat edilmiştir. Bu şekilde ilerlenen sürecin sonunda literatürdeki konuların anlaşılabilir olmasına yönelik matematiksel yöntemler benimsenmiştir.



## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda ağırlıklı eşitsizlikler, ikinci kısımda ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliği, üçüncü kısımda ise parabolik ağırlıklı Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlikler incelenmiştir.

### 4.1. Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu kısımda önemli bir ağırlık sınıfı olan  $A_p$  Muckenhoupt sınıfı geniş bir şekilde tanımlanmıştır. Daha sonra ters Hölder eşitsizliğinden hareketle maksimal operatörün sınırlılığı incelenmiştir. Son olarak ta  $A_\infty$  koşulu tanımlanıp Riesz potansiyeli için ağırlıklı eşitsizlikler incelenmiştir.

Ağırlıklı eşitsizlikler Fourier analizinde yer almakla birlikte çeşitli uygulamalarda da önemli bir yere sahiptir. Örnek olarak Laplace denklemi için sınır değer problemleri, ekstrapolasyon teorisi, vektör değerli eşitsizlikler ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler verilebilir. Bir diğer örnek olarak kısım 4.2.2. de incelendiği gibi dejenerel eliptik denklemlerin çözümlerinin regülerlik çalışmaları için ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizlikleri verilebilir.

1970'lerde B. Muckenhoupt'un Hardy-Littlewood maksimal operatörünün  $L_w^p(\mathbb{R}^n)$  uzayındaki sınırlılık çalışmasından elde ettiği pozitif  $w$  fonksiyonlarının karakterizasyonu ile ağırlıklı eşitsizliklerin önemi daha da artmıştır. Bu karakterizasyon,  $A_p$  sınıfının tanımlanmasına yol açmıştır ([25]).

#### 4.1.1. $A_p$ Koşulu

Bir ağırlık,  $\mathbb{R}^n$  de hemen her yerde  $(0, \infty)$  da değerler alan, negatif olmayan, yerel integrallenebilir bir fonksiyondur. Dolayısıyla,  $w$  bir ağırlıksa ve  $1/w$  yerel integrallenebilirse,  $1/w$  de bir ağırlıktır. Ölçülebilir  $E$  kümesi verildiğinde,  $E$  nin  $w$ -ölçüsünü tanımlamak için,

$$w(E) = \int_E w(x) dx$$

notasyonu kullanılır. Ağırlıklar yerel integrallenebilir fonksiyonlar olduğundan, bir yuvar içinde bulunan her  $E$  için  $w(E) < \infty$  olur. Ağırlıklı  $L^p$  uzayları, Lebesgue ölçüsünün yerine  $w dx$  ölçüsünün alınmasıyla elde edilir ve  $L_w^p(\mathbb{R}^n)$  veya sadece  $L^p(w)$  ile gösterilir [16, 25]. Bu kısımda kısalık açısından  $M_B$  yerine  $M$  gösterimi kullanılacaktır.

Her  $f \in L^p(w)$ ,  $1 < p < \infty$ , için

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx \leq C_p^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \quad (4.1)$$

sağlansın, burada  $Mf(x)^p = (Mf(x))^p$  dir. Bir  $B$  yuvarı için  $f\mathcal{X}_B$  fonksiyonuna (4.1) uygulanırsa; her  $x \in B$  için

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \leq M(f\mathcal{X}_B)(x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} w(B) \left( \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \right)^p &\leq \int_B M(f\mathcal{X}_B)(x)^p w(x) dx \\ &\leq C_p^p \int_B |f(x)|^p w(x) dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Böylece bütün  $B$  yuvarları ve bütün  $f$  fonksiyonları için

$$\left( \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \right)^p \leq \frac{C_p^p}{w(B)} \int_B |f(x)|^p w(x) dx \quad (4.3)$$

elde edilir. İlk olarak bütün  $B$  yuvarları için  $\inf_B w > 0$  olsun. Bu durumda  $f = w^{-\frac{1}{p-1}}$  alınırsa (4.3) ten

$$\sup_B \left( \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C_p^p \quad (4.4)$$

elde edilir. Eğer bazı  $B$  yuvarları için  $\inf_B w = 0$  ise (4.3) eşitsizliğinde  $f = (w + \varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}$  alınırsa her  $\varepsilon > 0$  için

$$\left( \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|B|} \int_B (w(x) + \varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^p \left( \frac{1}{|B|} \int_B \frac{w(x) dx}{(w(x) + \varepsilon)^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{-1} \leq C_p^p \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) deki son integralde  $w(x) dx$  yerine  $(w(x) + \varepsilon) dx$  alınırsa eşitsizliğin sol tarafı daha da küçülür. Böylece (4.5) den

$$\left( \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|B|} \int_B (w(x) + \varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C_p^p \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada  $\varepsilon \rightarrow 0$  iken Lebesgue monoton yakınsaklık teoreminden (4.4) elde edilir.

Böylece (4.1) i sağlayan her  $w$  ağırlığı ayrıca (4.4) koşulunu da sağlamak zorundadır.

Bu gerektirmenin tersi Teorem 4.15. de ifade edilmiştir.

Şimdi  $p = 1$  durumu göz önüne alınsın: Bir  $w$  ağırlığı ve bütün  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonları için

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) dx \quad (4.7)$$

zayıf (1,1) tipinde eşitsizlik sağlansın. Benzer yöntemlerle bu eşitsizlikten h.h.  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$Mw(x) \leq Cw(x) \quad (4.8)$$

koşuluna ulaşılır. (4.8),  $A_1$  koşulu olarak adlandırılır. Daha sonra (4.8) den (4.7) nin elde edileceği gösterilecektir. Önceki tüm iddialarda yuvarlar küpler ile değiştirilebileceğinden, aşağıdaki tanımlar küpler cinsinden verilecektir ( [25]).

**Tanım 4.1.** Eğer bir  $C$  sabiti ve h.h.  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$Mw(x) \leq Cw(x) \quad (4.9)$$

ise  $w(x) \geq 0$  fonksiyonuna bir  $A_1$  ağırlığı denir. Eğer  $w$  bir  $A_1$  ağırlığı ise

$$[w]_{A_1} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(t) dt \right) \|w^{-1}\|_{L^\infty(Q)} < \infty \quad (4.10)$$

ifadesine  $w$  nin  $A_1$  (Muckenhoupt) karakteristik sabiti denir.  $w \in A_1$  ağırlıkları  $\mathbb{R}^n$  deki bütün  $Q$  küpleri için

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(t) dt \leq [w]_{A_1} \operatorname{ess\,inf}_{y \in Q} w(y) \quad (4.11)$$

eşitsizliğini sağlar ( [25]).

**Uyarı 4.2.** Ayrıca

$$[w]_{A_1}^B = \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{|B|} \int_B w(t) dt \right) \|w^{-1}\|_{L^\infty(B)} \quad (4.12)$$

tanımlanabilir ( [25]).

$1 < p < \infty$  için  $A_p$  ağırlıklarının tanımı aşağıdadır:

**Tanım 4.3.**  $1 < p < \infty$  olsun. Eğer

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < \infty \quad (4.13)$$

ise,  $w$  ağırlığı  $A_p$  sınıfındadır denir. (4.13) deki ifadeye  $w$  nin  $A_p$  (Muckenhoupt) karakteristik sabiti denir ve  $[w]_{A_p}$  ile gösterilir ( [25]).

Bir  $w \in A_p$  ağırlığı öteleme ve genişleme değişmezdir ( [49]).

**Örnek 4.4.**  $-n < a \leq 0$  ise  $|x|^a \in A_1$  ve  $-n < a < n(p-1)$  ise  $|x|^a \in A_p$  dir. Bu aralık kesindir çünkü bu aralığın dışında  $|x|^a$  ve  $|x|^{-\frac{a}{p-1}}$  yerel integrallenebilir değildir ( [16]).

**Uyarı 4.5.** Tanım 4.1. ve 4.3.  $\mathbb{R}^n$  deki tüm küpler kümesi yerine  $\mathbb{R}^n$  deki tüm yuvarlar kümesi kullanılarak verilebilir. (4.13) de küpler, yuvarlar ile değiştirilerek  $[w]_{A_p}^B$  nin tanımlanmasıyla  $(v_n 2^{-n})^p \leq \frac{[w]_{A_p}}{[w]_{A_p}^B} \leq (n^{n/2} v_n 2^{-n})^p$  olduğu görülür ( [25]).

$A_p$  ağırlıklarının bazı temel özellikleri aşağıdaki önermede özetlenmektedir.

**Önerme 4.6.** Bir  $1 \leq p < \infty$  için  $w \in A_p$  olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

1.  $1 < p < \infty$  olduğunda,  $w^{-\frac{1}{p-1}}$  fonksiyonu  $[w^{-\frac{1}{p-1}}]_{A_{\frac{p}{p-1}}} = [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$  karakteristik sabiti ile  $A_{\frac{p}{p-1}}$  ye aittir. Bu nedenle  $w \in A_2$  ancak ve ancak  $w^{-1} \in A_2$  dir ve her iki ağırlık ta aynı  $A_2$  karakteristik sabitine sahiptir.
2. Tüm  $w \in A_p$  ler için  $[w]_{A_p} \geq 1$  dir. Eşitlik, ancak ve ancak  $w$  sabit ise geçerlidir.
3.  $A_p$  sınıfları  $p$  ye göre artandır; yani  $1 \leq p < q < \infty$  için  $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$  olur.
4. Eğer  $w \in A_1$  ise,  $\lim_{q \rightarrow 1+} [w]_{A_q} = [w]_{A_1}$  olur.
5.  $Q$  da h.h.y.  $|f| > 0$  olmak üzere

$$[w]_{A_p} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \sup_{f \in L_w^p(Q)} \left\{ \frac{(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)| dt)^p}{\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(t)|^p w(t) dt} \right\}$$

eşdeğer bir karakterizasyondur.

6.  $w(x)dx$  ölçüsü doublingdir: yani tüm  $\lambda > 1$  ler ve  $Q$  küpleri için  $w(\lambda Q) \leq \lambda^{np} [w]_{A_p} w(Q)$  olur ( [25]).

**İspat.**

1. Tanımdan

$$\begin{aligned} [w^{-\frac{1}{p-1}}]_{A_{\frac{p}{p-1}}} &= \sup_Q \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \left( w(x)^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{1-p} dx \right)^{\frac{p}{p-1}-1} \\ &= \sup_Q \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right)^{\frac{1}{p-1}} = [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

2. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{1}{p}} w(x)^{-\frac{1}{p}} dx \leq \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Eşitlik sadece bir  $C > 0$  için  $w(x)^{\frac{1}{p}} = Cw(x)^{-\frac{1}{p}}$  olduğunda sağlandığından  $w$  bir sabittir.

3.  $p = 1$  iken

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{q-1} \leq \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \|w^{-1}\|_{L^\infty(Q)}$$

ve  $p > 1$  iken Hölder eşitsizliğinden

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{q-1} \leq \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1}$$

olduğundan istenilen elde edilir.

4. Bir  $p_0 < \infty$  için  $f \in L^{p_0}$  ise  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$  gerçeği göz önüne alınsın ([24]).

(4.10) ve (4.13) dikkate alınırsa ispat görülür.

5. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \right)^p &= \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| w(x)^{\frac{1}{p}} w(x)^{-\frac{1}{p}} dx \right)^p \\ &\leq \left( \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \\ &\leq [w]_{A_p} \left( \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $p > 1$  iken

$$[w]_{A_p} \geq \frac{\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \right)^p}{\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx} \quad (4.15)$$

elde edilir.  $p = 1$  durumunda benzer eşitsizlik

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx &= \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| w(x) w(x)^{-1} dx \\ &\leq \left( \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x)| w(x) dx \right) \|w^{-1}\|_{L^\infty(Q)} \frac{w(Q)}{|Q|} \\ &\leq [w]_{A_1} \left( \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x)| w(x) dx \right) \end{aligned}$$

biçimindedir.

(4.3) eşitsizliğinde  $f = w^{-\frac{1}{p-1}}$  alınarak  $[w]_{A_p} \leq C_p^p$  elde edildiğinden  $Q$  da h.h.y.  $|f| > 0$  olmak üzere

$$[w]_{A_p} \leq \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \sup_{f \in L_w^p(Q)} \frac{\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \right)^p}{\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx}$$

elde edilir, bu ise ispatı tamamlar.

6. (4.15) de  $f = \mathcal{X}_Q$  ve  $Q$  yerine  $\lambda Q$  alındığında  $w(\lambda Q) \leq \lambda^{np} [w]_{A_p} w(Q)$  elde edilir. ■

#### 4.1.2. Ters Hölder Eşitsizliği ve Maksimal Operatörün Sınırlılığı

Bu kısımda önemli sonuçları olan ters Hölder eşitsizliği incelenecek olup, bunun yardımıyla maksimal operatörün sınırlılığına yer verilecektir.

**Tanım 4.7.**  $\mathbb{R}$  deki bir diyadik aralık  $m$  ve  $k$  tamsayılar olmak üzere  $[m2^{-k}, (m+1)2^{-k})$  biçimindedir.  $\mathbb{R}^n$  de bir diyadik küp, bazı  $m_1, \dots, m_n, k$  tamsayıları için

$$\prod_{j=1}^n [m_j 2^{-k}, (m_j + 1) 2^{-k})$$

biçiminde bir kümedir. Bu biçimdeki küplerin ailesi  $\mathcal{Q}_k$  ile gösterilirse diyadik küpler  $\bigcup_k \mathcal{Q}_k$  ailesinin bir elemanıdır ([24]).

Bu yapıdan aşağıdaki özellikler elde edilir:

- (1)  $x \in \mathbb{R}^n$  verildiğinde, her  $\mathcal{Q}_k$  ailesinde  $x$  i içeren tek bir küp vardır.
- (2) Herhangi iki diyadik küp ya ayrıktır ya da biri diğerini tamamen içerir.
- (3)  $\mathcal{Q}_k$  daki bir diyadik küp her  $\mathcal{Q}_i, i < k$  ailesinden bir tek küpte bulunur ve  $\mathcal{Q}_{k+1}$  in  $2^n$  diyadik kübünü içerir ([16]).

**Teorem 4.8.** Keyfi bir kapalı  $F \subset \mathbb{R}^n$  kümesi verilsin. Bu durumda

- (1)  $\bigcup_k \mathcal{Q}_k = F^c$ ,
- (2)  $\mathcal{Q}_k$  ikişerli olarak ayrıktır,
- (3)  $\text{diam}(\mathcal{Q}_k) \leq \text{dist}(\mathcal{Q}_k, F) \leq 4 \text{diam}(\mathcal{Q}_k)$

olacak şekilde kenarları eksenlere paralel olan kapalı küplerin bir  $\{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_k, \dots\}$  koleksiyonu vardır ([48]).

$\mathbb{R}^n$  nin bir ayrılışı olan Calderón-Zygmund ayrılışı aşağıda ifade edilmiştir:

**Teorem 4.9.** İntegrallenebilir ve negatif olmayan bir  $f$  fonksiyonu ve pozitif bir  $\lambda$  sayısı verildiğinde,

(i) hemen her  $x \notin \bigcup_j \mathcal{Q}_j$  için  $f(x) \leq \lambda$

(ii)  $\left| \bigcup_j \mathcal{Q}_j \right| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$

(iii)  $\lambda < \frac{1}{|\mathcal{Q}_j|} \int_{\mathcal{Q}_j} f \leq 2^n \lambda$

olacak şekilde ayrık dyadic küplerden oluşan bir  $\mathcal{Q}_j$  dizisi vardır ([16]).

**Lemma 4.10.** Bir  $1 \leq p < \infty$  için  $w \in A_p$  ve  $0 < \alpha < 1$  olsun. Bu durumda  $S$ ,  $|S| \leq \alpha|Q|$  koşulunu sağlayan  $Q$  küpünün ölçülebilir bir alt kümesi olmak üzere,  $w(S) \leq \beta w(Q)$  olacak şekilde bir  $\beta < 1$  vardır ([25]).

**İspat.** (4.15) eşitsizliğinde  $f = \chi_A$  alındığında

$$\left(\frac{|A|}{|Q|}\right)^p \leq [w]_{A_p} \frac{w(A)}{w(Q)}, \quad A \subset Q \quad (4.16)$$

elde edilir.  $S = Q \setminus A$  alınrsa

$$\left(1 - \frac{|S|}{|Q|}\right)^p \leq [w]_{A_p} \left(1 - \frac{w(S)}{w(Q)}\right) \quad (4.17)$$

elde edilir.  $0 < \alpha < 1$  iken  $\beta = 1 - \frac{(1-\alpha)^p}{[w]_{A_p}}$  alınrsa (4.17) den sonuç görülür. ■

$A_p$  ağırlıklarının temel sonuçlarından biri olan ters Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

**Teorem 4.11.** Bir  $1 \leq p < \infty$  için  $w \in A_p$  ise her  $Q$  kübü için

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(t)^{1+\gamma} dt\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w(t) dt \quad (4.18)$$

sağlanacak şekilde sadece  $n, p$  ve  $[w]_{A_p}$  ye bağlı olan  $C$  ve  $\gamma > 0$  sabitleri vardır ([16, 25]).

**İspat.** Bir  $Q$  kübü sabitlensin ve  $\alpha_0 = w(Q) / |Q|$  olsun. Ayrıca  $0 < \alpha < 1$  de sabitlensin.  $k \geq 0$  için  $\alpha_k = (2^n \alpha^{-1})^k \alpha_0$  alınarak bir artan  $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \dots$  skaler dizisi tanımlansın ve her bir  $k \geq 1$  için  $w$  ye  $\alpha_k$  yüksekliğinde bir Calderón-Zygmund ayrışması uygulansın. Bunun için  $R, Q$  nun dyadic alt küpleri olmak üzere

$$\frac{1}{|R|} \int_R w(x) dx > \alpha_k \quad (4.19)$$

seçim kriteri olsun.  $Q$  seçim kriterini karşılamadığı için seçilmemiştir.  $Q$  kübü eşitkenar uzunluğuna sahip  $2^n$  alt küplerden oluşacak şekilde bölünsün ve bu küpler arasından (4.19) u sağlayanları seçilsin. Seçilmemiş her alt küp eşit kenar uzunluğuna sahip  $2^n$  tane kübe bölünür ve bu şekilde sonsuza kadar devam edilir.  $Q$  nun seçilmiş tüm alt küplerinin koleksiyonu  $\{Q_{k,j}\}_j$  ile gösterilsin. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i)  $\alpha_k < \frac{1}{|Q_{k,j}|} \int_{Q_{k,j}} w(t) dt \leq 2^n \alpha_k$

(ii)  $U_k = \bigcup_j Q_{k,j}$  olmak üzere hemen her  $x \notin U_k$  için  $w(x) \leq \alpha_k$  sonucu elde edilir.

(iii) Her  $Q_{k+1,j}$  bir  $Q_{k,l}$  de yer alır.

$Q$  nun tek dyadic doğurunu, seçim yönteminde seçilmediği için (i) sağlanmaktadır. Hemen her  $x \notin U_k$  için kapanışlarının kesişimi tekil  $\{x\}$  olan azalan uzunluklarda seçilmemiş küplerin

bir dizisi mevcuttur. Böylece Lebesgue diferansiyelleme teoreminden (ii) elde edilir. Her  $Q_{k+1,j}$ ,  $Q$  nun (4.19) u sağlayan maksimal alt küpü olduğu için, (iii) sağlanır.  $w$  nin  $Q_{k+1,j}$  üzerindeki ortalaması da  $\alpha_k$  dan büyük olduğundan,  $Q_{k+1,j}$  nin bu özelliğe sahip bir maksimal küp içinde yer alması gerekir.

$Q_{k,l} \cap U_{k+1}$ ,  $\alpha_{k+1}$  yüksekliğindeki ayrılmışa ait  $Q_{k+1,j}$  lerin birleşimi olduğundan

$$\begin{aligned} 2^n \alpha_k &\geq \frac{1}{|Q_{k,l}|} \int_{Q_{k,l} \cap U_{k+1}} w(t) dt \\ &= \frac{1}{|Q_{k,l}|} \sum_j |Q_{k+1,j}| \frac{1}{|Q_{k+1,j}|} \int_{Q_{k+1,j}} w(t) dt \\ &> \frac{|Q_{k,l} \cap U_{k+1}|}{|Q_{k,l}|} \alpha_{k+1} = \frac{|Q_{k,l} \cap U_{k+1}|}{|Q_{k,l}|} 2^n \alpha^{-1} \alpha_k \end{aligned}$$

olur, buradan  $|Q_{k,l} \cap U_{k+1}| \leq \alpha |Q_{k,l}|$  elde edilir. Dolayısıyla Lemma 4.10. uygulanırsa  $w(Q_{k,l} \cap U_{k+1}) < \beta w(Q_{k,l})$  elde edilir, buradan tüm  $l$  ler üzerinden toplam alınır  $w(U_{k+1}) \leq \beta w(U_k)$  elde edilir. Bu eşitsizliğin iterasyonu ile  $w(U_k) \leq \beta^k w(U_0)$  olur. Benzer şekilde  $|U_k| \leq \alpha^k |U_0|$  sonucu elde edilir. Dolayısıyla  $|\bigcap_k U_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |U_k| = 0$  elde edilir, böylece  $Q = (Q \setminus U_0) \cup (\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k \setminus U_{k+1})$  modülü Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir küme olarak yazılabilir.  $Q \setminus U_k$  daki hemen her  $x$  için  $w(x) \leq \alpha_k$  elde edilir ve bu nedenle  $(2^n \alpha^{-1})^\gamma \beta < 1$  sağlanacak şekilde  $\gamma > 0$  in yeterince küçük seçilmesiyle

$$\begin{aligned} \int_Q w(t)^{1+\gamma} dt &= \int_{Q \setminus U_0} w(t)^\gamma w(t) dt + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{U_k \setminus U_{k+1}} w(t)^\gamma w(t) dt \\ &\leq \alpha_0^\gamma w(Q \setminus U_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1}^\gamma w(U_k) \\ &\leq \alpha_0^\gamma w(Q \setminus U_0) + \sum_{k=0}^{\infty} ((2^n \alpha^{-1})^{k+1} \alpha_0)^\gamma \beta^k w(U_0) \\ &\leq \alpha_0^\gamma \left( 1 + (2^n \alpha^{-1})^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} (2^n \alpha^{-1})^{\gamma k} \beta^k \right) w(Q) \\ &= \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(t) dt \right)^\gamma \left( 1 + \frac{(2^n \alpha^{-1})^\gamma}{1 - (2^n \alpha^{-1})^\gamma \beta} \right) \int_Q w(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$$C = 1 + \frac{(2^n \alpha^{-1})^\gamma}{1 - (2^n \alpha^{-1})^\gamma (1 - \frac{(1-\alpha)^p}{[w]_{A_p}})}$$

ile ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.12.** Bir  $1 \leq p < \infty$  için  $w \in A_p$  ise,  $w^{1+\gamma} \in A_p$  olacak şekilde  $[w]_{A_p}$ ,  $p$  ve  $n$  ye bağlı olan bir  $\gamma > 0$  sayısı vardır ([25]).

**İspat.**  $p = 1$  olduğunda, ters Hölder eşitsizliğinden  $Q$  kübündeki hemen her  $x$  için

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(t)^{1+\gamma} dt \leq \left( \frac{C}{|Q|} \int_Q w(t) dt \right)^{1+\gamma} \leq C^{1+\gamma} [w]_{A_1}^{1+\gamma} w(x)^{1+\gamma}$$

elde edilir. Bu nedenle  $w^{1+\gamma}$ , en fazla  $C^{1+\gamma} [w]_{A_1}^{1+\gamma}$  karakteristik sabitine sahip bir  $A_1$  ağırlığıdır (burada  $C$  Teorem 4.11. in sabitidir).  $p > 1$  olduğunda, ters Hölder eşitsizliği  $w \in A_p$  ve  $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{\frac{p}{p-1}}$  ağırlıkları için geçerlidir, yani

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(t)^{1+\gamma_1} dt \right)^{\frac{1}{1+\gamma_1}} &\leq \frac{C_1}{|Q|} \int_Q w(t) dt \\ \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(t)^{-\frac{1}{p-1}(1+\gamma_2)} dt \right)^{\frac{1}{1+\gamma_2}} &\leq \frac{C_2}{|Q|} \int_Q w(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \end{aligned}$$

olacak şekilde  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  ve  $C_1, C_2 > 0$  vardır.  $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2)$  alındığında, her iki eşitsizlik de  $\gamma_1, \gamma_2$  yerine  $\gamma$  ile sağlanır. Buradan  $w^{1+\gamma} \in A_p$  olur ve

$$[w^{1+\gamma}]_{A_p} \leq (C_1 C_2^{p-1})^{1+\gamma} [w]_{A_p}^{1+\gamma} \quad (4.20)$$

sağlanır. ■

**Sonuç 4.13.** Herhangi bir  $1 < p < \infty$  için  $w \in A_p$  ise  $q < p$  olmak üzere  $w \in A_q$  olacak şekilde bir  $q = q([w]_{A_p}, p, n)$  vardır ( [25]).

**İspat.** Verilen  $w \in A_p$  için,  $\gamma, C_1, C_2$  (4.20) eşitsizliğindeki gibi ve  $w^{1+\gamma} \in A_p$  olsun.  $0 < \delta < 1$  ve  $q = \delta p + 1 - \delta$  olmak üzere  $[w^\delta]_{A_q} \leq [w]_{A_p}^\delta$  eşitsizliğinde  $\delta = 1/(1 + \gamma)$  alınırsa  $q = (p + \gamma)/(1 + \gamma)$  olur. Böylece  $w \in A_q$  ve

$$[w]_{A_q} = [(w^{1+\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}]_{A_q} \leq [w^{1+\gamma}]_{A_p}^{\frac{1}{1+\gamma}} \leq C_1 C_2^{p-1} [w]_{A_p}$$

olur, burada son eşitsizlik (4.20) den elde edilir.  $1 < q = \frac{p+\gamma}{1+\gamma} < p$  olduğundan ispat tamamlanır. ■

**Teorem 4.14.**  $1 \leq p < \infty$  için  $w \in A_p$  ise

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx$$

zayıf  $(p, p)$  eşitsizliği sağlanır ( [16]).

**İspat.**  $f$  negatif olmasın ve  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  olsun. (Eğer  $f \in L^1(Mw)$  ise bu durumda  $f_j = f \chi_{B(0, j)}$  artarak  $f$  ye noktasal yakınsayan integrallenebilir fonksiyonların bir dizisidir.)  $\{Q_j\}$ ,  $f$  nin  $\lambda > 0$  yükseklikteki Calderón-Zygmund ayrılışı olsun ve  $x \notin \bigcup_j 2Q_j$  olarak sabitlensin,  $Q$ ,  $x$  merkezli herhangi bir küp olsun.  $2^{k-1} \leq \ell(Q) < 2^k$  olacak şekilde  $k \in \mathbb{Z}$

seçilsin. Bu durumda  $Q$ ,  $Q_k$  daki  $m \leq 2^n$  diyadik küple kesişir; bunlara  $R_1, R_2, \dots, R_m$  denilsin. Bu küplerin hiçbirisi  $Q_j$  lerin hiçbirinde yer almaz; çünkü aksi takdirde  $x \in \bigcup_j 2Q_j$  olurdu. Dolayısıyla  $f$  nin her bir  $R_i$  üzerindeki ortalaması en fazla  $\lambda$  dır ve buradan

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f = \frac{1}{|Q|} \sum_{i=1}^m \int_{Q \cap R_i} f \leq \sum_{i=1}^m \frac{2^{kn}}{|Q| |R_i|} \int_{R_i} f \leq 2^n m \lambda \leq 4^n \lambda$$

olur. Böylece  $\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > 4^n \lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j$  olduğu görülür ve böylece

$$\begin{aligned} \int_{\{x: M'f(x) > 4^n \lambda\}} w(x) dx &\leq \sum_j \int_{2Q_j} w(x) dx = \sum_j 2^n |Q_j| \frac{1}{|2Q_j|} \int_{2Q_j} w(x) dx \\ &\leq \frac{2^n}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f(y) \left( \frac{1}{|2Q_j|} \int_{2Q_j} w(x) dx \right) dy \\ &\leq \frac{2^n C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) M w(y) dy \end{aligned}$$

sağlanır.  $M$  ve  $M'$  eşdeğer olduğundan (4.9) eşitsizliğinden  $p = 1$  durumu elde edilir. Şimdi  $p > 1$  olsun.  $f \in L^p(w)$  sabitlensin ve genelliği kaybetmeksizin  $f$  negatif olmasın. Ayrıca  $f \in L^1$  olabilir; çünkü aksi takdirde  $f$ ,  $f \chi_{B(0,k)}$  ile değiştirilebilir ve sıradaki iddia sabitlerin  $k$  den bağımsız olduğunu verecektir. (Önceki iddianın  $f$  nin lokal integrallenebilir olduğunu gösterdiğine dikkat edilmelidir.)  $f(Q_j) = \int_{Q_j} f > 4^{-n} \lambda |Q_j|$  olacak şekilde ayırık  $\{Q_j\}$  küplerinden oluşan bir küme elde etmek için  $4^{-n} \lambda$  yükseklikte  $f$  nin Calderón-Zygmund ayrılışı oluşturulsun. Şimdi  $x \notin \bigcup_j 3Q_j$  olarak sabitlensin ve  $Q$ ,  $x$  i içeren herhangi bir küp olsun. Yukarıdaki düşünce ile  $f$  nin her bir  $R_i$  üzerindeki ortalaması en fazla  $4^{-n} \lambda$  dır ve buradan

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f = \frac{1}{|Q|} \sum_{i=1}^m \int_{Q \cap R_i} f \leq \sum_{i=1}^m \frac{2^{kn}}{|Q| |R_i|} \int_{R_i} f \leq 2^n m 4^{-n} \lambda \leq \lambda$$

olur. Böylece  $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \subset \bigcup_j 3Q_j$  elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) &\leq \sum_j w(3Q_j) \leq C 3^{np} \sum_j w(Q_j) \\ &\leq C 3^{np} \sum_j \left( \frac{|Q_j|}{f(Q_j)} \right)^p \int_{Q_j} |f|^p w \\ &\leq C 3^{np} \left( \frac{4^n}{\lambda} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w \end{aligned}$$

elde edilir, burada ikinci eşitsizlik (4.16) dan, üçüncüsü (4.15) den ve dördüncüsü Teorem 4.9.(iii) den elde edilmektedir. ■

Aşağıdaki teoremden maksimal operatörün  $L^p(w)$  sınırlılığı ifade edilmiştir.

**Teorem 4.15.**  $1 < p < \infty$  ve  $w \in A_p$  ise her  $f \in L^p(w)$  için

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx$$

sağlanır ([49]).

**İspat.** Sonuç 4.13. den bir  $q < p$  için  $w \in A_q$  olur ve Teorem 4.14. den  $M$  maksimal operatörü zayıf  $(q, q)$  tiplidir. Ayrıca (4.16) dan  $w(E) = 0$  ancak ve ancak  $|E| = 0$  olduğundan normların eşitliği ile  $L^\infty(w) = L^\infty$  olur. Böylece  $\|Mf\|_{L^\infty(w)} \leq \|f\|_{L^\infty(w)}$  elde edilir [16]. Böylece Teorem 2.13. den  $M, L^p(w)$  üzerinde sınırlıdır. ■

### 4.1.3. Riesz Potansiyeli için Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu kısımda  $A_\infty$  koşulu tanıtılıp Riesz potansiyeli için ağırlıklı eşitsizliklere yer verilecektir.

Verilen bir  $\varepsilon > 0$  için  $Q$  bir küp ve  $E \subset Q$  olmak üzere  $w(E) \leq \varepsilon w(Q)$  iken  $|E| \leq \delta |Q|$  sağlayan bir  $\delta > 0$  var ise  $w \in A_\infty$  dur denir ([41]).

$w \in A_p, 1 \leq p < \infty$  olsun.  $Q$  bir küp ve  $S \subset Q$  olsun. Bu durumda Hölder ve ters Hölder  $(1 + \varepsilon)$  üssü için eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} w(S) &= \int_Q \chi_S(x) w(x) dx \leq \left( \int_Q w(x)^{1+\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} |S|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \\ &= |Q|^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1+\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} |S|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \leq \left( \frac{|S|}{|Q|} \right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} w(Q) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece verilen bir  $Q$  küpü ve ölçülebilir bir  $S \subset Q$  için  $w \in A_p, 1 \leq p < \infty$ , olmak üzere

$$w(S) \leq \left( \frac{|S|}{|Q|} \right)^\delta w(Q) \quad (4.21)$$

olacak şekilde bir  $\delta > 0$  vardır. (4.21) koşulunu sağlayan bir  $w$  ağırlığı için  $w \in A_\infty$  dur denir ([16]), çünkü bu iki ifade birbirine eşdeğerdir ([38]). Ayrıca  $A_\infty = \bigcup_{p < \infty} A_p$  biçiminde ifade edilebilir ([16]).

**Lemma 4.16.**  $0 < \gamma < n, a > 0, d > 0, b \geq B$  ve  $f(x)$  negatif olmasın.  $Q$  bir noktasında  $I_\gamma f(x) \leq a$  olacak şekilde  $\mathbb{R}^n$  de bir küp ve  $E = \{x : I_\gamma f(x) > ab, M_\gamma f(x) \leq ad\} \subset Q$  ise bu durumda  $|E| \leq K |Q| [d/b]^{n/(n-\gamma)}$  sağlayan  $\gamma$  ve  $n$  ye bağlı  $B$  ve  $K$  sabitleri vardır ([41]).

**İspat.** İlk olarak

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 2Q \text{ da} \\ 0, & (2Q)^c \text{ da} \end{cases}$$

olsun.  $M_\gamma f(t) \leq ad$  olacak şekilde  $Q$  da bir  $t$  olsun; aksi takdirde sonuç açıktır. Teorem 2.11. a göre, herhangi pozitif  $a$  ve  $b$  için

$$|\{x : I_\gamma g(x) > ab/2\}| \leq C \left[ \frac{1}{ab} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right]^{n/(n-\gamma)} \quad (4.22)$$

sağlayan sadece  $n$  ve  $\gamma$  ya bağlı bir  $C$  sabiti vardır.  $P$ , merkezi  $t$ , kenarları  $Q$  ya paralel ve kenar uzunluğu da  $Q$  nun 3 katı uzunluğunda bir küp olsun.  $2Q \subset P$  olduğundan

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \leq \int_P f(y) dy \leq M_\gamma f(t) |P|^{(n-\gamma)/n} \leq ad |3Q|^{(n-\gamma)/n}$$

olur. Bu (4.22) de kullanılırsa

$$|\{x : I_\gamma g(x) > ab/2\}| \leq C 3^n |Q| [d/b]^{n/(n-\gamma)} \quad (4.23)$$

elde edilir. Şimdi  $s$ ,  $I_\gamma f(s) \leq a$  olacak şekilde,  $Q$  nun bir noktası olsun. Eğer  $x$ ,  $Q$  da ve  $y$ ,  $2Q$  da değilse,  $|s - y| \leq L|x - y|$  sağlayan  $n$  ye bağlı bir  $L > 1$  sabiti vardır. Bu nedenle,  $h = f - g$  olmak üzere  $Q$  daki  $x$  için

$$I_\gamma h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(y) dy}{|x - y|^{n-\gamma}} \leq L^{n-\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(y) dy}{|s - y|^{n-\gamma}} \leq L^n I_\gamma f(s) \leq L^n a$$

olur.  $B = 2L^n$  olsun. Bu durumda eğer  $b \geq B$  ise,  $Q$  daki tüm  $x$  ler için  $I_\gamma h(x) \leq ab/2$  olur ve buradan  $x \in E$  ise  $I_\gamma g(x) > ab/2$  sağlanır. Böylece  $E \subset \{x : I_\gamma g(x) > ab/2\}$  olur ve ispat (4.23) ile elde edilir. ■

**Teorem 4.17.**  $w \in A_\infty$ ,  $0 < q < \infty$  ve  $0 < \gamma < n$  olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\gamma f(x)|^q w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} M_\gamma f(x)^q w(x) dx$$

sağlayan  $f$  den bağımsız bir  $C$  vardır [41].

**İspat.**  $f(x)$  fonksiyonunu  $|f(x)|$  ile yer değiştirmek, sonuçların sadece sol taraflarını artırıp sağ taraflarını etkilemediğinden,  $f(x)$  in negatif olmadığı varsayılabilir. Ayrıca  $f(x)$  in yerel integrallenebilir olduğu da varsayılabilir; çünkü aksi durumda sonuçlar açıktır.  $w(x)$  in yerel integrallenebilirliği de varsayılabilir; aksi takdirde  $f(x)$  h.h.y. sıfır olmadıkça, sonuçların sağ tarafları sonsuzdur.

$f(x)$  kompakt desteğe sahip olsun. Teorem 4.8. den  $a > 0$  verildiğinde  $\{x : I_\gamma f(x) > a\} = \bigcup_j Q_j$  olur, burada her  $j$  için  $4Q_j$  nin bir noktasında  $I_\gamma f(x) \leq a$  dır ve  $Q_j$  küpleri ayrık iç kısımlara sahiptir.  $B$  ve  $K$ , Lemma 4.16. daki gibi ve  $b = \max(1, B)$  olsun.  $A_\infty$  tanımında  $\delta$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}b^{-q}$  a karşılık gelsin.  $\delta = K4^n [D/b]^{n/(n-\gamma)}$  olacak şekilde  $D$  seçilsin.  $0 < d \leq D$  ve  $E_j = \{x : I_\gamma f(x) > ab, M_\gamma f(x) \leq ad\} \subset Q_j$  olsun.

Lemma 4.16. ya göre,  $|E_j| \leq K|4Q_j|[d/b]^{n/(n-\gamma)} < \delta|Q_j|$  olur, dolayısıyla  $\delta$  nın tanımından,  $w(E_j) \leq \frac{1}{2}b^{-q}w(Q_j)$  olur.  $j$  ye göre toplam alınırsa

$$w(\{I_\gamma f > ab, M_\gamma f \leq ad\}) \leq \frac{1}{2}b^{-q}w(\{I_\gamma f > a\})$$

elde edilir. Buradan  $0 < d \leq D$  yi sağlayan herhangi bir  $d$  için

$$w(\{I_\gamma f > ab\}) \leq w(\{M_\gamma f > ad\}) + \frac{1}{2}b^{-q}w(\{I_\gamma f > a\}) \quad (4.24)$$

elde edilir. Şimdi  $Q$ ,  $Q$  nun dışındaki  $x$  için  $f(x) = 0$  olacak şekilde bir küp olsun.  $3Q$  nun dışında  $x$  verildiğinde,  $x_0$ ,  $Q$  da  $x$  e en yakın nokta olsun ve merkezi  $x$  olan ve kenarları  $Q$  ya paralel olan ve  $Q$  yu içeren en küçük küp  $P$  ise  $|P| \leq L|x - x_0|^n$  sağlayan  $n$  ye bağlı bir  $L > 1$  sabiti vardır. Ayrıca

$$I_\gamma f(x) \leq |x - x_0|^{\gamma-n} \int_Q f(y)dy \leq \frac{|P|^{(n-\gamma)/n}}{|x - x_0|^{n-\gamma}} M_\gamma f(x) \leq L M_\gamma f(x)$$

olur. Şimdi  $d = \min(D, 1/L)$  olsun, böylece

$$\{I_\gamma f > a\} \cap (3Q)^c \subset \{M_\gamma f > ad\} \quad (4.25)$$

olur. (4.24) ve (4.25) den

$$w(\{I_\gamma f > ab\}) \leq 2w(\{M_\gamma f > ad\}) + \frac{1}{2}b^{-q}w(\{I_\gamma f > a\} \cap 3Q)$$

olur. Buradan bir  $N > 0$  için

$$\begin{aligned} b^{-q} \int_0^{Nb} a^{q-1} w(\{I_\gamma f > a\}) da &\leq 2d^{-q} \int_0^{Nd} a^{q-1} w(\{M_\gamma f > a\}) da \\ &+ \frac{1}{2}b^{-q} \int_0^N a^{q-1} w(\{I_\gamma f > a\} \cap 3Q) da \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir.  $w$  yerel integrallenebilir olduğundan, (4.26) nın sağındaki 2. terim sonludur; ayrıca  $b \geq 1$  olduğundan,

$$\frac{1}{2}b^{-q} \int_0^{Nb} a^{q-1} w(\{I_\gamma f > a\}) da \leq 2d^{-q} \int_0^{Nd} a^{q-1} w(\{M_\gamma f > a\}) da \quad (4.27)$$

olur.  $N \rightarrow \infty$  iken (4.27) den

$$\frac{b^{-q}}{2q} \int_{\mathbb{R}^n} |I_\gamma f(x)|^q w(x) dx \leq \frac{2d^{-q}}{q} \int_{\mathbb{R}^n} M_\gamma f(x)^q w(x) dx \quad (4.28)$$

elde edilir. Kompakt desteğe sahip olmayan bir  $f(x)$  için (4.28) i ispat etmek için,

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq m \\ 0, & |x| > m \end{cases}$$

olsun. Bu durumda (4.28)  $f_m$  ye uygulanabilir;  $m \rightarrow \infty$  için monoton yakınsaklık teoremi kullanılırsa, genel  $f(x)$  için (4.28) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

**Lemma 4.18.**  $a_1, a_2 \in A$  iken  $R_{a_1} \subset R_{a_2}$  veya  $R_{a_2} \subset R_{a_1}$  olacak şekilde  $\mathbb{R}^n$  nin orjin merkezli açık (veya kapalı) aralıklarının bir koleksiyonu  $\{R_a\}_{a \in A}$  olsun.  $S$ ,  $\mathbb{R}^n$  nin sınırlı bir kümesi ve  $i : S \rightarrow A$ ,  $S$  den  $A$  indis kümesine herhangi bir dönüşüm ve  $R_x = x + R_{i(x)}$  olsun. Bu durumda; eğer  $R_k = x_k + R_{i(x_k)}$  ise

- (a)  $S \subset \bigcup R_k$
  - (b) her  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\{R_k\}$  kümelerinin en fazla  $\xi = \xi(n)$  tanesinde bulunur
  - (c)  $\{R_k\}$  dizisi  $\theta = \theta(n)$  ayrık ailelerine bölünebilir
- olacak şekilde bir  $\{x_k\} \subset S$  dizisi vardır ([12]).

**Teorem 4.19.** Eğer  $0 < \gamma < n$ ,  $1 < p < n/\gamma$ ,  $1/q = 1/p - \gamma/n$ ,  $w \in A_r$ ,  $r = 1 + \frac{q(p-1)}{p}$ , ise bu durumda

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |I_\gamma f(x)|^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{1/p}$$

olacak şekilde  $f$  den bağımsız bir  $C$  vardır ([41]).

**İspat.**  $R > 0$  sabitlensin. Bu durumda  $E_{\lambda,R} = \{x : M_\gamma f(x) > \lambda\} \cap B_R(0)$  daki her  $x$  için

$$|Q|^{-1+\gamma/n} \int_Q |f(x)| dx > \lambda \quad (4.29)$$

olacak şekilde  $x$  merkezli bir  $Q$  kübü vardır. Lemma 4.18. kullanılarak,  $E_{\lambda,R} \subset \bigcup Q_k$  olacak şekilde bu küplerden bir  $\{Q_k\}$  dizisi seçilebilir ve  $\mathbb{R}^n$  nin hiçbir noktası, bu küplerden  $\xi(n)$  den fazlasında yer almaz. Bu durumda  $p/q < 1$  olduğundan

$$\left( \int_{E_{\lambda,R}} w(x) dx \right)^{p/q} \leq \left( \sum_k \int_{Q_k} w(x) dx \right)^{p/q} \leq \sum_k \left( \int_{Q_k} w(x) dx \right)^{p/q}$$

elde edilir.  $Q_k$  (4.29) u sağlayan küpler olduğundan,

$$\left( \int_{E_{\lambda,R}} w(x) dx \right)^{p/q} \leq \sum_k \left( \int_{Q_k} w(x) dx \right)^{p/q} \left( \lambda^{-1} |Q_k|^{-1+\gamma/n} \int_{Q_k} |f(x)| dx \right)^p$$

elde edilir. Son integral üzerinde Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\left( \int_{E_{\lambda,R}} w(x) dx \right)^{p/q} \leq \frac{C}{\lambda^p} \sum_k \int_{Q_k} |f(x)|^p w(x)^{\frac{p}{q}} dx$$

elde edilir ve  $\mathbb{R}^n$  nin hiçbir noktası,  $Q_k$  küplerinin sabit bir sayısından daha fazlasında yer almadığından,

$$\left( \int_{E_{\lambda,R}} w(x) dx \right)^{1/q} \leq \frac{C}{\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{1/p}$$

elde edilir. Buradaki  $C$ ,  $R$  ye bağlı olmadığından, monoton yakınsaklık teoreminden

$$\left( \int_{\{x: M_\gamma f(x) > \lambda\}} w(x) dx \right)^{1/q} \leq \frac{C}{\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{1/p} \quad (4.30)$$

olduğu görülür. Sonuç 4.13. den  $w \in A_s$  olacak şekilde bir  $1 < s < r$  vardır. O halde  $1/q_1 = 1/p_1 - \gamma/n$ ,  $1 < p_1 < p$  ve  $s = 1 + \frac{q_1(p_1-1)}{p_1}$  olacak şekilde  $p_1$  ve  $q_1$  sayıları vardır. (4.30) eşitsizliğinden

$$\left( \int_{\{x: M_\gamma f(x) > \lambda\}} w(x) dx \right)^{p_1/q_1} \leq \frac{C}{\lambda^{p_1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1} w(x)^{p_1/q_1} dx \quad (4.31)$$

sağlanır. Şimdi  $Tg(x) = M_\gamma(g(x)w(x)^{\frac{\gamma}{n}})$  ile bir  $T$  alt lineer operatörü tanımlansın.  $f(x) = g(x)w(x)^{\gamma/n}$  ile (4.31)

$$\int_{\{x: Tg(x) > \lambda\}} w(x) dx \leq \frac{C}{\lambda^{q_1}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_1} w(x) dx \right)^{q_1/p_1} \quad (4.32)$$

biçiminde yazılabilir. Benzer şekilde  $p < p_2 < n/\gamma$  yı sağlayan bir  $p_2$  vardır. Bu durumda  $1/q_2 = 1/p_2 - \gamma/n$  ile tanımlanan  $q_2$  ile Hölder eşitsizliğinden  $t > r$  olduğu için  $t = 1 + \frac{q_2(p_2-1)}{p_2}$  ile  $w \in A_t$  olur. Bu durumda  $p_2$  ve  $q_2$  ile (4.31) doğru olur. (4.32) yi sağlamak için kullanılan yöntem

$$\int_{\{x: Tg(x) > \lambda\}} w(x) dx \leq \frac{C}{\lambda^{q_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_2} w(x) dx \right)^{q_2/p_2}$$

olduğunu göstermektedir. Marcinkiewicz interpolasyon teoreminden

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} Tg(x)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}$$

olur. Burada  $g(x) = f(x)w(x)^{-\gamma/n}$  alınmasıyla

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} M_\gamma f(x)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{1/p}$$

elde edilir.  $w \in A_\infty$  olduğundan Teorem 4.17. ile istenilen elde edilir. ■

## 4.2. Ağırlıklı Sobolev-Poincaré Eşitsizliği

Bu kısımda ilk olarak klasik Sobolev-Poincaré eşitsizliği ele alınmış, daha sonra ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliği verilmiştir. Son olarak ta eliptik ve dejenere eliptik denklemler üzerinde yapılan düzgünlük çalışmaları incelenmiştir.

İlk olarak Poincaré eşitsizliğini ifade edelim:

**Teorem 4.20.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega$  sınırı Lipschitz-süreklili olan sınırlı, bağlantılı, açık bir küme olsun. Her  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  için

$$\int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^p dx \leq C \int_{\Omega} |Du|^p dx, \quad (4.33)$$

olacak şekilde bir  $C(n, p, \Omega)$  sabiti vardır, burada  $u_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$  biçimindedir ([23]).

**İspat.** Eğer  $u$  ya bir sabit eklenirse (4.33) değişmediği için,  $u_{\Omega} = 0$  olduğu varsayılabilir. Eğer teorem yanlış olsaydı,  $(u_k)_{\Omega} = 0$  ile

$$\int_{\Omega} |u_k|^p dx = 1, \quad (4.34)$$

$$\int_{\Omega} |Du_k|^p dx \leq \frac{1}{k}$$

olacak şekilde bir  $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$  fonksiyon dizisi bulunabilirdi. Rellich teoremine göre bir alt dizi, (4.34) den  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$  olmak üzere bir  $u \in L^p(\Omega)$  ya yakınsar. Öte yandan  $\|Du_k\|_{L^p(\Omega)}$  dizisi sıfıra gider ve bu nedenle  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  ve  $Du = 0$  dır.  $\Omega$  bağlantılı olduğundan  $u$ ,  $\Omega$  da sabit olacaktır ve sıfır ortalamaya sahip olduğu için aynı şekilde  $u$  sıfır olacaktır. Bu durum  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$  gerçeğiyle çelişmektedir. ■

Önceki eşitsizlik ve Teorem 2.7. dan aşağıdaki Sobolev-Poincaré eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.21.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega$  sınırı Lipschitz-süreklili olan sınırlı, bağlantılı, açık bir küme olsun. Her  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  için, eğer  $p < n$  ise,  $p^* = \frac{np}{n-p}$  iken

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(n, p, \Omega) \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

elde edilir ([23]).

Tanım 2.10. da  $Q$  yerine  $B_r(x)$  alınarak  $0 < \gamma < n$  olmak üzere  $M_{\gamma}$  kesirli maksimal operatörü

$$M_{\gamma}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy$$

biçiminde ifade edilsin. Şimdi ağırlıklı Sobolev gömme teoremi için aşağıdaki lemmayı ifade edelim.

**Lemma 4.22.**  $f$  ölçülebilir ve bir  $B_R$  yuvarında desteğe sahip olsun.  $w \in A_p$ ,  $1 < p < \infty$ , ise bu durumda  $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$  olacak şekilde bütün  $k$  sayıları ve her  $f \in L_w^p(B_R)$  için

$$\left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} M_1 f(x)^{kp} w(x) dx \right)^{1/kp} \leq CR \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} \quad (4.35)$$

olacak şekilde  $C$  ve  $\delta > 0$  sabitleri vardır ([20]).

**İspat.**  $f$  negatif olmasın. Herhangi bir pozitif  $\lambda$  için  $E_\lambda = \{x \in B_R : M_1 f(x) > \lambda\}$  olsun. Her  $x \in E_\lambda$  için

$$\frac{1}{s(x)^{n-1}} \int_{B_{s(x)}(x)} f(y) dy > \lambda$$

olacak şekilde bir  $B_{s(x)}(x)$  yuvarı vardır.  $r \rightarrow \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B_r(x)} f(y) dy$  fonksiyonu  $r > 2R$  için azalan ve  $x \in B_R$  olduğundan her zaman  $s(x) < 2R$  olarak alınabilir. Lemma 2.14. den,  $E_\lambda \subset \bigcup_j B_{5s(x_j)}(x_j)$  olacak şekilde ayrık yuvarların bir  $B_j \equiv B_{s(x_j)}(x_j)$  dizisi seçilebilir, burada tüm  $B_j$  yuvarları  $B_{3R}$  de bulunur.  $w(B_{5s(x_j)}(x_j)) \leq Cw(B_j)$  (doubling koşulu) olduğundan her  $k \geq 1$  için

$$\begin{aligned} w(E_\lambda) &\leq C \sum_j w(B_j) \leq C \sum_j w(B_j) \frac{1}{\lambda^{pk} |B_j|^{(1-\frac{1}{n})pk}} \left( \int_{B_j} f \right)^{pk} \\ &\leq \frac{C}{\lambda^{pk}} \left[ \sum_j w(B_j)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{|B_j|^{(1-\frac{1}{n})p}} \left( \int_{B_j} f \right)^p \right]^k \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.15) eşitsizliğinden

$$w(E_\lambda)^{1/k} \leq \frac{C}{\lambda^p} \sum_j w(B_j)^{\frac{1}{k}-1} |B_j|^{\frac{p}{n}} \int_{B_j} f(x)^p w(x) dx$$

elde edilir. Sonuç 4.13. den  $w \in A_p$  olduğunda  $1 < q < p$  olacak şekilde bir  $q$  için  $w \in A_q$  olur. Buradan (ikinci eşitsizlik) ve (4.14) den (birinci eşitsizlik)

$$\left( \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} w^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{-(q-1)} \leq \frac{w(B_j)}{|B_j|} \leq C \left( \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} w^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{-(q-1)} \quad (4.36)$$

olur ve ilk eşitsizlikten

$$w(E_\lambda)^{1/k} \leq \frac{C}{\lambda^p} \sum_j |B_j|^{q(\frac{1}{k}-1)+\frac{p}{n}} \left( \int_{B_j} w^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{(q-1)(1-\frac{1}{k})} \int_{B_j} f(x)^p w(x) dx$$

elde edilir. Şimdi  $q(\frac{1}{k}-1)+\frac{p}{n} \geq 0$  olacak şekilde  $k$  seçilsin. Bu  $k \leq \frac{n}{n-\frac{p}{q}}$  koşuluna eşdeğerdir ve  $q < p$  olduğundan  $\delta > 0$  olmak üzere  $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$  elde edilir. Şimdi böyle seçilen bir  $k$  için

$$w(E_\lambda)^{1/k} \leq \frac{C}{\lambda^p} R^{nq(\frac{1}{k}-1)+p} \left( \int_{B_{3R}} w^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{(q-1)(1-1/k)} \int_{B_R} f(x)^p w(x) dx$$

elde edilir.  $w \in A_q$  olduğundan ve (4.36) daki ikinci eşitsizlikten

$$w(E_\lambda) \leq C \frac{R^{kp}}{\lambda^{kp} w(B_R)^{k-1}} \left( \int_{B_R} f(x)^p w(x) dx \right)^k$$

ve buradan da

$$w(E_\lambda)^{1/kp} \leq \frac{C}{\lambda} R w(B_R)^{\frac{1}{kp} - \frac{1}{p}} \left( \int_{B_R} f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \quad (4.37)$$

olduğundan  $M_1$  operatörü,  $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta_p$  iken  $L_w^p(B_R)$  den zayıf  $L_w^{pk}(B_R)$  ye sınırlıdır. Şimdi  $p, 1 < p < \infty$ , sabitlensin ve  $w \in A_p$  olsun. Bu durumda her  $q \geq p - \varepsilon_0$  için  $w \in A_q$  olacak şekilde  $\varepsilon_0 > 0$  vardır. Teorem 2.13. den  $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta_p, \delta_p > 0$ , için  $M_1, L_w^p(B_R)$  dan  $L_w^{pk}(B_R)$  ya sınırlıdır. Ayrıca (4.37) eşitsizliğinden ispat elde edilir. ■

**Uyarı 4.23.** Kısım 4.1 deki maksimal operatör için verilen gerek koşul benzer biçimde burada da geçerlidir: Negatif olmayan, yerel integrallenebilir bir  $w$  fonksiyonu, herhangi bir sabit  $k \geq 1$  ve tüm  $B_R$  yuvarları için (4.35) sağlansın. Herhangi bir  $B_R$  yuvarı ve  $f \geq 0$  için

$$M_1 f(x) \geq \frac{C}{R^{n-1}} \left( \int_{B_R} f \right) \chi_{B_R}(x)$$

olduğundan (4.35) den

$$w(B_R)^{1/p} \frac{1}{R^n} \int_{B_R} f \leq C \left( \int_{B_R} f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p}$$

olur, burada  $f = w^{-\frac{1}{p-1}}$  alınırsa  $w \in A_p$  elde edilir [20].

Aşağıdaki teoremde ağırlıklı gömme teoremi ifade edilmiştir.

**Teorem 4.24.**  $1 < p < \infty$  ve  $w \in A_p$  verildiğinde tüm  $B_R$  yuvarları, tüm  $u \in C_0^\infty(B_R)$  ve  $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$  yı sağlayan tüm  $k$  sayıları için,

$$\left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |u(x)|^{kp} w(x) dx \right)^{1/kp} \leq CR \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |Du(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} \quad (4.38)$$

olacak şekilde  $C$  ve  $\delta > 0$  sabitleri vardır ([20]).

**İspat.** İlk olarak

$$|u(x)| \leq C \int_{B_R} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \quad (4.39)$$

eşitsizliğinden ([52]) ve  $\gamma = 1$  için Teorem 4.17. den

$$\|u\|_{L_w^{kp}(B_R)} \leq C \|I_1(|Du|)\|_{L_w^{kp}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|M_1(|Du|)\|_{L_w^{kp}(\mathbb{R}^n)}$$

elde edilir.

$$\|M_1(|Du|)\|_{L_w^{kp}(\mathbb{R}^n)} \leq \|M_1(|Du|)\|_{L_w^{kp}(B_{2R})} + C \int_{B_R} |Du(y)| dy \left( \int_{|x|>R} w(x) |x|^{-(n-1)kp} dx \right)^{1/kp}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{|x|>R} |x|^{-(n-1)kp} w(x) dx &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_{2^j R} \setminus B_{2^{j-1} R}} |x|^{-(n-1)kp} w(x) dx \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (2^{j-1} R)^{-(n-1)kp} \int_{B_{2^j R} \setminus B_{2^{j-1} R}} w(x) dx \\ &= C \sum_{j=1}^{\infty} (2^j R)^{-(n-1)kp} w(B_{2^j R} \setminus B_{2^{j-1} R}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Önerme 4.6. dan  $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{\frac{p}{p-1}}$  olduğundan (4.21) den

$$\int_{B_R} w^{-\frac{1}{p-1}} dx \leq C 2^{-jn\eta} \int_{B_{2^j R}} w^{-\frac{1}{p-1}} dx$$

olacak şekilde bir  $\eta > 0$  sayısı vardır. Dolayısıyla

$$w(B_{2^j R}) \leq C |B_{2^j R}|^p \left( \int_{B_{2^j R}} w^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{-(p-1)} \leq C |B_{2^j R}|^p 2^{-jn\eta(p-1)} \left( \int_{B_R} w^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{-(p-1)}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{|x|>R} \frac{w(x)}{|x|^{(n-1)kp}} dx \leq C \left( \int_{B_R} w^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{-(p-1)} R^{np-(n-1)kp} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jp[n-(n-1)k-n\eta\frac{(p-1)}{p}]}$$

olur. Yukarıdaki serinin yakınsaması için  $k > \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{\eta(p-1)}{p} \right)$  olsun. Bu durumda (4.36) dan

$$\int_{|x|>R} \frac{w(x)}{|x|^{(n-1)kp}} dx \leq C w(B_R) R^{-(n-1)kp}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{w(B_R)^{1/kp}} \|u\|_{L_w^{kp}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{w(B_R)^{1/kp}} \|M_1(|Du|)\|_{L_w^{kp}(B_{2R})} + C R^{-(n-1)} \int_{B_R} |Du(y)| dy$$

elde edilir. Doubling koşulu ve Lemma 4.22. den  $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$  ve  $\delta > 0$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(B_R)^{kp}} \|M_1(|Du|)\|_{L_w^{kp}(B_{2R})} &\leq \frac{1}{w(B_{2R})^{kp}} \|M_1(|Du|)\|_{L_w^{kp}(B_{2R})} \\ &\leq C2R \left( \frac{1}{w(B_{2R})} \int_{B_{2R}} |Du(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq CR \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |Du(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.15) kullanılırsa

$$R^{-(n-1)} \int_{B_R} |Du(y)| dy \leq CR \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |Du(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}$$

elde edilir. Böylece  $\frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\eta(p-1)}{p}\right) < k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$  için teorem ispatlanır. Kalan  $k$  değerleri için ispat, Hölder eşitsizliğinden görülür. ■

$R, B_R \supset \Omega$  olacak şekilde yeterince büyük alınıp Teorem 4.24. uygulanırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 4.25.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de açık, sınırlı ve  $w \in A_p$ ,  $1 < p < \infty$ , ise her  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  ve  $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$  sağlayan her  $k$  için,

$$\|u\|_{L_w^{kp}(\Omega)} \leq C_\Omega \| |Du| \|_{L_w^p(\Omega)}$$

olacak şekilde  $C_\Omega$  ve  $\delta$  pozitif sabitleri vardır, burada  $C_\Omega$ , sadece  $n$  ye,  $A_p$  sabitine,  $p$  ye ve  $\Omega$  nın çapına bağlıdır ([20]).

**Uyarı 4.26.** Teorem 4.24. ün daha basit bir ispatı [6] da Chierenza ve Frasca tarafından şu şekilde verilmiştir: (4.39) dan

$$\left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |u(x)|^{kp} w(x) dx \right)^{1/kp} \leq \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} I_1(Du)(x)^{kp} w(x) dx \right)^{1/kp}$$

olur.

$$I_1(Du)(x) = \int_{|x-y| \leq \varepsilon} |Du(y)| |x-y|^{1-n} dy + \int_{|x-y| > \varepsilon} |Du(y)| |x-y|^{1-n} dy$$

yazılısın. [27] deki düşünce ile

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|\leq\varepsilon} |Du(y)||x-y|^{1-n} dy &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\varepsilon 2^{-k-1} \leq |x-y| \leq \varepsilon 2^{-k}} |Du(y)||x-y|^{1-n} dy \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon 2^{-k}) (\varepsilon 2^{-k})^{-n} \int_{|x-y| \leq \varepsilon 2^{-k}} |Du(y)| dy \\
&\leq C \varepsilon M(Du)(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \leq C \varepsilon M(Du)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  iken Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|>\varepsilon} |Du(y)||x-y|^{1-n} dy &= \int_{|x-y|>\varepsilon} |Du(y)| w(y)^{\frac{1}{p}} |x-y|^{1-n} w(y)^{-\frac{1}{p}} dy \\
&\leq C \|Du\|_{L_w^p(B_R)} \left( \int_{\{|x-y|>\varepsilon\} \cap B_R} |x-y|^{(1-n)p'} w(y)^{-1/(p-1)} dy \right)^{1/p'} \quad (4.40)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 4.13. den  $w \in A_q$  olacak şekilde bir  $1 < q < p$ ,  $n - p/q > 0$  olduğundan

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} |Du(y)||x-y|^{1-n} dy \leq C \varepsilon^{1-nq/p} \|Du\|_{L_w^p(B_R)} \left( \int_{B_R} w(y)^{-1/(q-1)} dy \right)^{(q-1)/p} \quad (4.41)$$

olur. (4.40) ve (4.41) den

$$I_1(Du)(x) \leq C \varepsilon M(Du)(x) + C \varepsilon^{1-nq/p} \|Du\|_{L_w^p(B_R)} \left( \int_{B_R} w(y)^{-1/(q-1)} dy \right)^{(q-1)/p} \quad (4.42)$$

olur.

$$I_1(Du)(x) \leq C M(Du)(x)^{1-p/nq} \|Du\|_{L_w^p(B_R)}^{p/nq} \left( \int_{B_R} w(y)^{-1/(q-1)} dy \right)^{(q-1)/nq}$$

elde etmek için (4.40) in sağ tarafı  $\varepsilon$  a göre minimize edilirse ve Teorem 4.15. kullanılırsa

$$\|I_1(Du)\|_{L_w^{pk}(B_R)} \leq C \|Du\|_{L_w^p(B_R)} \left( \int_{B_R} w(y)^{-1/(q-1)} dy \right)^{(q-1)/nq}$$

elde edilir, burada  $k = nq/(nq-p)$  dır. İspatı tamamlamak için her iki taraf  $[w(B_R)]^{(nq-p)/nq}$  ile bölünür ve  $A_q$  koşulu kullanılır.

**Lemma 4.27.**  $u$ ,  $\overline{B_R}$  üzerinde Lipschitz sürekli olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u(x) - u(y)| dy \leq C \int_{B_R} \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{n-1}} dz$$

sağlanır ([20, 52]).

**İspat.**  $u \in C^1(\overline{B_R})$  olarak alınabilir.

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(ty + (1-t)x) dt = \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) \cdot (y-x) dt$$

olduğundan

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u(x) - u(y)| dy \leq \frac{1}{|B_R|} \int_0^1 \int_{B_R} |Du(ty + (1-t)x)| |x-y| dy dt$$

elde edilir.  $z = ty + (1-t)x$  olsun.  $y, B_R$  üzerinde değiştikçe;  $z, B_{Rt}((1-t)x)$  yuvarında değişir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u(x) - u(y)| dy \leq \frac{1}{|B_R|} \int_0^1 \frac{1}{t^{n+1}} \int_{|z-(1-t)x| < Rt} |Du(z)| |z-x| dz dt$$

olur.  $x \in B_R$  için  $B_{Rt}((1-t)x) \subset B_R$  ve eğer  $|z - (1-t)x| < Rt$  ise  $|z - x| \leq 2Rt$  olur. Bۆylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u(x) - u(y)| dy &\leq \frac{1}{|B_R|} \int_0^1 \frac{1}{t^{n+1}} \int_{B_R \cap \{|z-x| < 2Rt\}} |Du(z)| |z-x| dz dt \\ &\leq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |Du(z)| |z-x| \left( \int_{|z-x| < 2Rt} \frac{dt}{t^{n+1}} \right) dz \\ &\leq C \int_{B_R} \frac{|Du(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz \end{aligned}$$

elde edilir. ■

$f_{B,w} = \frac{1}{w(B)} \int_B f(x)w(x)dx$  olsun. Aşağıda ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliği ifade edilmiştir.

**Teorem 4.28.**  $1 < p < \infty$  ve  $w \in A_p$  ise  $\overline{B_R}$  üzerinde tanımlı bۆtүн Lipschitz sۆrekli  $u$  fonksiyonları ve her  $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$  için,

$$\left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |u(x) - u_{B_R,w}|^{kp} w(x) dx \right)^{1/kp} \leq CR \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |Du(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}$$

sağlanır. Aynı sonuç  $u_{B_R,w}$  yerine  $u_{B_R}$  alınsa da geçerlidir ([20]).

**İspat.** Lemma 4.27. den

$$|u(x) - u_{B_R}| \leq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u(x) - u(y)| dy \leq C \int_{B_R} \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{n-1}} dz \quad (4.43)$$

sağlanır. Teorem 4.24. ۆn ispatında  $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$  iken

$$\frac{1}{w(B_R)^{1/kp}} \left\| \int_{B_R} \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{n-1}} dz \right\|_{L_w^{kp}(B_R)} \leq CR \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |Du(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} \quad (4.44)$$

olacak şekilde  $C$  ve  $\delta > 0$  in varlığı gösterildi. Böylece  $u_{B_R}$  için ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned} |u_{B_R} - u_{B_R,w}| &\leq \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |u(x) - \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u(y) dy| w(x) dx \\ &\leq \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |u(x) - \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u(y) dy|^p w(x) dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

olduğundan  $u_{B_R,w}$  için istenilen sonuç  $u_{B_R}$  için elde edilen sonuçtan görülür. ■

#### 4.2.1. Eliptik Denklemlerin Çözümlerinin Hölder Sürekliliği

Bu kısımda eliptik denklemlerin tanımına ve literatürde yer alan önemli sonuçlarına yer verilecektir.

$\Omega$ ,  $\mathbb{R}^n$  nin açık, sınırlı bir alt kümesi,  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  bilinmeyen ve  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  verilsin. Bu durumda

$$\begin{cases} Lu = f, & \Omega \text{ da} \\ u = 0, & \partial\Omega \text{ üzerinde} \end{cases} \quad (4.45)$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın, burada verilen  $a^{ij}$ ,  $b^i$ ,  $c$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) katsayı fonksiyonları için  $L$

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_i x_j}) + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad (4.46)$$

ya da

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad (4.47)$$

ikinci basamaktan kısmi diferansiyel operatördür.  $L$  nin (4.46) ile verilmesi durumunda  $Lu = f$  kısmi diferansiyel denkleminin divergence biçiminde olduğu, (4.47) ile verilmesi durumunda ise divergence biçiminde olmayan denklem olduğu söylenir. Eğer en yüksek dereceli  $a^{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) katsayıları  $C^1$  sınıftan fonksiyonlar ise (4.46) dan

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

divergence olmayan biçim elde edilir, burada  $\tilde{b}^i := b^i - \sum_{j=1}^n a_{x_j}^{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) dir. Böylece (4.46) ve (4.47) nin birbirleri cinsinden yazılabileceği görülür. Ancak  $L$  nin iki farklı gösterimini ayrı ayrı ele almanın avantajları vardır. Divergence biçimi kısmi integrasyona dayanan enerji yöntemleri için en doğal olanıken, divergence olmayan biçim maksimum prensibi teknikleri için en uygun olanıdır ([19]).

**Tanım 4.29.**  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  ( $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ ) olsun. Her  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  için

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} dx = 0$$

oluyorsa  $u$  ya  $Lu = 0$  denkleminin bir çözümü (yerel çözümü) denir ([29]).

**Tanım 4.30.** (4.46) ile tanımlanan divergence biçimli  $L$  eliptik operatörüne karşılık gelen  $B[\cdot, \cdot]$  bilinear formu  $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  için

$$B[u, v] = \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \right) dx$$

biçiminde tamamlanır ([19]).

$H$ ,  $\|\cdot\|$  normu ile bir Hilbert uzayını ve  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $H$  ile onun dualinin eşlemesini göstermek üzere aşağıdaki Lax-Milgram Teoremi'ni ifade edelim:

**Teorem 4.31.**  $u, v \in H$  olmak üzere  $B[\cdot, \cdot] : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear dönüşümü için  $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$  ve  $\beta \|u\|^2 \leq B[u, u]$  olacak şekilde  $\alpha, \beta > 0$  sabitleri bulunsun. Ayrıca  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H$  üzerinde sınırlı bir lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda her  $v \in H$  için  $B[u, v] = \langle f, v \rangle$  olacak şekilde bir tek  $u \in H$  vardır ([19]).

**Tanım 4.32.**  $L$  kısmi diferansiyel operatörü, h.h.  $x \in \Omega$  ve her  $\xi \in \mathbb{R}^n$  için

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2; \quad a^{ij} = a^{ji}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

olacak şekilde  $\lambda$  ve  $\Lambda$  pozitif sayıları var ise eliptik olarak adlandırılır ([19], [22]).

Dolayısıyla eliptiklik, her  $x \in \Omega$  noktası için  $A(x) = (a^{ij}(x))$  simetrik  $n \times n$  matrisinin pozitif tanımlı ve en küçük öz değer  $\geq \lambda$  olduğu anlamına gelir. Örnek olarak  $a^{ij} \equiv \delta_{ij}$ ,  $b^i \equiv 0$ ,  $c \equiv 0$  olarak alınırsa bu durumda  $L$  operatörü  $-\Delta$  olur, burada  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  Laplace operatörüdür. Aslında genel  $Lu = 0$  ikinci basamaktan eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri birçok açıdan harmonik fonksiyonlara benzerdir ([19]).

Her  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  için

$$\int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \right) dx = \int_U f v dx$$

sağlanıyorsa  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , (4.45) sınır değer probleminin bir zayıf çözümüdür denir ([19]).

E. De Giorgi ve J. Nash sırasıyla [11] ve [43] de  $a^{ij}(x)$  sınırlı ve ölçülebilir ve  $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$

olmak üzere

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = 0$$

lineer eliptik denklemlerin (zayıf) çözümlerinin yerel Hölder sürekliliğini elde etmişlerdir. J. Moser ise bu sonucu Harnack prensibi yardımıyla [39] da elde etmiştir. Bu sonuç De Giorgi-Nash-Moser teorisi olarak adlandırılmaktadır ve D. Hilbert'in 19. probleminin çözümüdür. Ancak lineerliğin ispatlarda bir etkisi yoktur. Bu durum, bu sonuçların

$$\begin{cases} a(x, u, Du) \cdot Du \geq \lambda |Du|^p - \varphi(x), \text{ h.h.y. } \Omega_T, p > 1 \\ |a(x, u, Du)| \leq \Lambda |Du|^{p-1} + \varphi(x), \\ |b(x, u, Du)| \leq \Lambda |Du|^{p-1} + \varphi(x), \end{cases}$$

yapısal koşulları ile

$$\begin{cases} u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega), p > 1 \\ \operatorname{div}a(x, u, Du) + b(x, u, Du) = 0, \Omega \text{ da} \end{cases} \quad (4.48)$$

quasilineer tipteki denklemlere genişletilmesine olanak sağlar, burada  $0 < \lambda \leq \Lambda$  verilen iki sabittir ve  $\varphi \in L_{loc}^{\infty}(\Omega)$  negatif değildir. Bir ilk örnek olarak,  $p > 1$  iken

$$\operatorname{div}|Du|^{p-2}Du = 0, \quad \Omega \text{ da}, \quad (4.49)$$

$p$ -Laplace denklemi ( $p = 2$  iken  $\Delta u = 0$  Laplace denkleminde indirgenir) alınabilir.  $a(x, u, Du)$  esas kısmı  $|Du|$  ya göre lineer olmayan bir büyümeye sahiptir. Böylece (4.49) daki denklem ya dejenere ya da singüler olabilir. (4.49) un eliptiklik modülü  $|Du|^{p-2}$  dir. Bu nedenle  $|Du| = 0$  olduğu noktalarda  $p > 2$  ise kısmi diferansiyel denklem dejenere,  $1 < p < 2$  ise singülerdir. O.A. Ladyzhenskaja ve N.N. Ural'tzeva ([34]), E. De Giorgi'nin yöntemlerini kullanarak, (4.48) in zayıf çözümlerinin Hölder sürekli olduğunu, J. Serrin ([46]) ve N. Trudinger ([55]) ise J. Moser'ın yöntemlerini izleyerek negatif olmayan çözümlerin Harnack ilkesini sağladığını kanıtlamıştır ([10]).

#### 4.2.2. Dejenere Eliptik Denklemlerin Çözümlerinin Hölder Sürekliliği

Bu kısımda dejenere eliptik denklemler tanıtılıp, bu denklemlerin çözümlerinin düzgünlük sonuçları ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliği yardımıyla incelenecektir.

Teorem 4.19. dan  $1 < p < n/m$  iken  $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  için

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q w dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D^m u|^p w^{1-\frac{mp}{n}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir, burada  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$  dir. Bu eşitsizlik  $w \in A_p$  olmak üzere

$$\|u\|_{V_w^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p w^{1 - \frac{|\alpha|p}{n}} dx \right)^{1/p}$$

normlu  $V_w^{m,p}(\Omega)$  Sobolev uzayına ait fonksiyonlar için sağlanır. Böylece  $w \in A_p$  olmak üzere  $w^{1 - \frac{mp}{n}}$  biçimindeki dejenerasyona sahip sınırsız bölgeler üzerindeki dejenere eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çalışmasında  $V_w^{m,p}(\Omega)$  uzayları kullanılabilir ( [57]).

Şimdi bir çeşit dejenere eliptik denklemin tanımı için aşağıdaki tanım verilsin.

**Tanım 4.33.** Bir  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$  dönüşümü, eğer birebir,  $f_i$  ler  $L_{loc}^n(\mathbb{R}^n)$  e ait dağılımsal türevlere sahip ve

$$\left( \sum_{i,j} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2} \leq C \left| \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right|^{\frac{1}{n}}$$

ise quasi-konform olarak adlandırılır ( [20]).

$\mathbf{F}'(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}$  Jacobian matrisi ve  $|\mathbf{F}'(x)| = |\det \mathbf{F}'(x)|$  olsun.  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbb{R}^n$  üzerinde quasi-konform bir dönüşüm ve  $v$ ,  $\operatorname{div}(\tilde{A}(y)Dv(y)) = 0$  denkleminin bir yerel çözümü olsun; burada  $\tilde{A}(y)$  matrisi simetriktir ve her  $y \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  ve  $y, \xi$  den bağımsız sabitlenmiş  $\lambda$  ve  $\Lambda$  pozitif sabitleri için

$$\Lambda |\xi|^2 \geq \tilde{A}(y)\xi \cdot \xi \geq \lambda |\xi|^2$$

eşitsizliğini sağlar.  $u = v \circ \mathbf{F}$  fonksiyonu (biçimsel olarak)

$$\operatorname{div}(A(x)Du(x)) = 0$$

denkleminin bir yerel çözümüdür, burada  $A(x) = |\mathbf{F}'(x)|(\mathbf{F}'(x)^{-1})^t \tilde{A}(\mathbf{F}(x))\mathbf{F}'(x)^{-1}$  (burada  $t$  matrisin transpozunu göstermektedir) biçimindedir. Dolayısıyla

$$\Lambda |\mathbf{F}'(x)| |\mathbf{F}'(x)^{-1} \xi|^2 \geq A(x)\xi \cdot \xi \geq \lambda |\mathbf{F}'(x)^{-1} \xi|^2$$

olur.  $\mathbf{F}$  quasi-konform olduğundan  $\mathbf{F}'(x)^t \mathbf{F}'(x)$  matrisinin  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$  özdeğerlerinin hepsi eşdeğerdir, yani her  $i, j$  ve  $x$  için  $\frac{1}{C} \leq \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_j(x)} \leq C$  olacak şekilde  $C > 0$  vardır. Bu da  $|\mathbf{F}'(x)\eta|^2$  ve  $|\mathbf{F}'(x)|^{2/n} |\eta|^2$  nin eşdeğer olduğunu gösterir.  $\eta = \mathbf{F}'(x)^{-1} \xi$  olarak alınırsa

$$\frac{\Lambda}{C} |\mathbf{F}'(x)|^{1-2/n} |\xi|^2 \geq A(x)\xi \cdot \xi \geq C\lambda |\mathbf{F}'(x)|^{1-2/n} |\xi|^2$$

sonucu elde edilir ( [20]).

De Giorgi-Nash teoremi ve Moser'in Harnack prensibi [5] ve [37] de temel olarak ele alınmıştır. Bu yaklaşım  $n > 2$  iken uygulanırsa,  $L$  operatörü artık eliptik değildir. Gerçekten,

$Lu = \text{div}(A(x)Du)$  olur, burada  $A$  matrisi simetriktir ve

$$\frac{1}{C}w(x)|\xi|^2 \leq A(x)\xi \leq Cw(x)|\xi|^2 \quad (4.50)$$

eşitsizliğini sağlar, burada  $w(x) = |\mathbf{F}'(x)|^{1-\frac{2}{n}}$  biçimindedir. Elbette,  $n > 2$  olduğunda  $w(x)$  sıfır veya sonsuz yada her ikisi de olabilir. Bu şekildeki klasik Dirichlet problemi ve (4.50) ile

$$Lu = \text{div}(A(x)Du) \quad (4.51)$$

biçimindeki denklemlerin negatif olmayan çözümlerinin davranışı [20] de E. Fabes, C. E. Kenig ve R. P. Serapioni tarafından incelenmiştir. Bu kısımda bu biçimdeki dejenere eliptik denklemlerin (zayıf) çözümlerinin yerel Hölder sürekliliği ve negatif olmayan zayıf çözümler için bir Harnack prensibi incelenecektir. Dejenere eliptik operatörü temsil etmek için  $\mathcal{L}$  sembolü kullanılacaktır.

De Giorgi-Nash sonuçlarının ve Moser'in Harnack eşitsizliğinin dejenere eliptik denklemlere genişletilmesi ([30], [42], [53], [54]) çalışmalarında yerel Hölder sürekliliği ispatlamak için  $w$  ağırlığının sağladığı koşul,  $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} < \frac{2}{n}$  olmak üzere  $\mathbb{R}^n$  deki tüm  $B$  yuvarları için

$$\left( \frac{1}{|B|} \int_B w^t \right)^{1/t} \left( \frac{1}{|B|} \int_B w^{-s} \right)^{1/s} \leq C$$

dir. [18] de, bir  $\Omega$  bölgesinde,  $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} < \frac{2}{n}$  ve  $w \in L^t(\Omega)$ ,  $\frac{1}{w} \in L^s(\Omega)$  için

$$\left( \frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left( \frac{1}{|B|} \int_B w^{-1} \right) \leq C$$

ise (4.51) in tüm negatif olmayan  $u$  çözümleri için,  $B \subset \Omega$  iken  $\max_B u \leq C_B \min_B u$  sağlandığı; ancak  $C_B$  sabitinin  $\Omega$  da bulunan sabitlenmiş bir yuvarda bulunan tüm  $B$  yuvarları için düzgün olarak alınamayacağı gösterilmiştir. Bu kısıtlamanın nedeni  $w$  nın sağladığı koşulun  $A_p$  sınıfının sağladığı genişleme değişmezlik özelliğine sahip olmamasıdır. Elde edilen Harnack prensibinin düzgün olmayışı, ondan yerel Hölder sürekliliğinin elde edilmesini imkansız kılmaktadır. Bu kısımdaki  $w \in A_2$  olduğunda elde edilen (4.51) dejenere eliptik denkleminin çözümünün yerel Hölder sürekliliği ve negatif olmayan çözümler için Harnack ilkesi [18], [30], [42], [53], [54] de karşılık gelen sonuçları genelleştirmektedir ([20]).

$A(x) = (a^{ij}(x))$ ,  $\mathbb{R}^n$  de tanımlı, en küçük öz değeri  $\lambda(x)$ , ve en büyük öz değeri  $\Lambda(x) \leq C\lambda(x)$  olan simetrik, negatif olmayan bir matris ve  $\lambda(x) = w(x)$  olsun. Bu kısımda  $w \in A_2$  olduğu varsayılacaktır.  $W_w^{1,2}(\Omega)$ ,  $C^\infty(\bar{\Omega})$  nın  $\int_\Omega |u|^2 w dx + \int_\Omega |Du|^2 w dx$  normu altındaki kapanışı ve  $W_{0,w}^{1,2}(\Omega)$ ,  $C_0^\infty(\Omega)$  nın  $\int_\Omega |Du|^2 w dx$  normu altındaki kapanışını gösterebilir.

Ayrıca her  $\Omega' \subset\subset \Omega$  için  $u \in W_w^{1,2}(\Omega')$  ise  $u \in W_{loc,w}^{1,2}(\Omega)$  ile gösterilsin. Bu durumda  $u \in W_w^{1,2}(\Omega)$  yada  $W_{loc,w}^{1,2}(\Omega)$  için  $\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}$  operatörü dikkate alınacaktır.

**Tanım 4.34.**  $\Omega$  üzerinde  $|\mathbf{F}|/w \in L_w^2(\Omega)$  olsun. Eğer her  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  için

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i}\varphi_{x_j}dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f_i\varphi_{x_i}dx$$

ise,  $u \in W_w^{1,2}(\Omega)$ ,  $\mathcal{L}u = -\operatorname{div}\mathbf{F}$  denkleminin bir çözümüdür denir ([20]).

Yukarıdaki tanımda  $|\mathbf{F}|/w \in L_w^2(\Omega)$  koşulu, her  $\varphi \in W_{0,w}^{1,2}(\Omega)$  için sağ taraftaki integralin yakınsamasını sağlar.

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.31.'in bir sonucudur ([20]).

**Teorem 4.35.**  $|\mathbf{F}|/w \in L_w^2(\Omega)$  ve  $h \in W_w^{1,2}(\Omega)$  olacak şekilde verildiğinde  $u - h \in W_{0,w}^{1,2}(\Omega)$  olacak şekilde  $W_w^{1,2}(\Omega)$  de  $\mathcal{L}u = -\operatorname{div}\mathbf{F}$  denkleminin tek bir çözümü vardır ([20]).

**Teorem 4.36.**  $u, \Omega$  da bir yerel alt çözüm olsun. Bu durumda her  $B_R(x_0) \subset \Omega$  için

$$\max_{B_{R/2}(x_0)} u(x) \leq C \left( \frac{1}{w(B_R(x_0))} \int_{B_R(x_0)} u^2 w dx \right)^{1/2}$$

olacak şekilde  $C > 0$  vardır ([20]).

**Tanım 4.37.**  $f$  ve  $w, \mathbb{R}^n$  de yerel integrallenebilir ve  $w \geq 0$  olsun. Eğer kenarları koordinat eksenlerine paralel bütün  $Q$  küpleri için

$$\int_Q |f(x) - f_{Q,w}|w(x)dx \leq Cw(Q)$$

ise  $f \in \operatorname{BMO}(w)$  dır denir ([38]).

**Sonuç 4.38.**  $w \in A_\infty$  ve  $f \in \operatorname{BMO}(w)$  ise  $Q \subset Q_0$  için

$$w(\{Q : |f - f_{Q,w}| > \lambda\}) \leq C_1 e^{-C_2 \lambda} w(Q)$$

sağlanır, burada  $Q_0$  sabit bir küptür ([38]).

**Lemma 4.39.**  $u, \Omega$  da  $\mathcal{L}u = 0$  denkleminin pozitif bir yerel çözümü ve  $4\rho \leq d(x_0, \partial\Omega)$  olsun. Bu durumda  $\max_{B_\rho(x_0)} u \leq C \min_{B_\rho(x_0)} u$  olur, burada  $C; \rho, u$  ve  $x_0$  dan bağımsızdır ([20]).

**İspat.** İspat Moser iterasyon tekniğine benzer olup [20] ve [47] den faydalanılmıştır.  $p \neq 1/2$ ,  $v = u^p$ ,  $\varphi \in C_0^1(\Omega)$  olsun. Bu durumda [47] çalışmasındaki benzer yolla

$$\int_{\Omega} \varphi^2 |Dv|^2 w dx \leq C(p) \int_{\Omega} |D\varphi|^2 v^2 w dx$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.28. den

$$\frac{1}{w(B_{\rho}(x_0))} \int_{B_{\rho}(x_0)} |v - v_{B_{\rho}(x_0),w}|^2 w dx \leq C$$

elde edilir, dolayısıyla  $v \in \text{BMO}(w)$  olur. Pozitif bir  $q$  için

$$\left( \frac{1}{w(B_{\rho}(x_0))} \int_{B_{\rho}(x_0)} u^q w dx \right)^{1/q} \leq C \left( \frac{1}{w(B_{\rho}(x_0))} \int_{B_{\rho}(x_0)} u^{-q} w dx \right)^{-1/q} \quad (4.52)$$

elde edilir. Gerçekten  $w \in A_{\infty}$  olduğundan Sonuç 4.38. den

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(B_{\rho}(x_0))} \int_{B_{\rho}(x_0)} e^{q|v-v_{B,w}|} w dx &= \frac{1}{w(B_{\rho}(x_0))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \int_{B_{\rho}(x_0)} |v - v_{B,w}|^n w dx \\ &= \frac{1}{w(B_{\rho}(x_0))} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \int_0^{\infty} n t^{n-1} w(\{B_{\rho}(x_0) : |v - v_{B,w}| > t\}) dt \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-Ct} dt = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q/C)^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q/C)^{n+1}}{n!} \Gamma(n) = Cq\Gamma(n)e^{q/C} = C \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_{B_{\rho}(x_0)} e^{-q(v-v_{B,w})} w dx \leq Cw(B_{\rho}(x_0)) \quad \text{ve} \quad \int_{B_{\rho}(x_0)} e^{q(v-v_{B,w})} w dx \leq Cw(B_{\rho}(x_0))$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\int_{B_{\rho}(x_0)} e^{qv} w dx \int_{B_{\rho}(x_0)} e^{-qv} w dx \leq Cw(B_{\rho}(x_0))^2$$

olur ve burada  $v = \log u$  alınırsa (4.52) elde edilir. Teorem 4.36.  $v = u^p$  ye  $p < 0$  veya  $p > 1$  için uygulanırsa

$$\max_{B_{\rho}(x_0)} u \leq C \left( \frac{1}{w(B_{2\rho}(x_0))} \int_{B_{2\rho}(x_0)} u^q w dx \right)^{1/q}; \quad q \geq 2 \quad \text{ise} \quad (4.53)$$

ve

$$\min_{B_\rho(x_0)} u \geq C \left( \frac{1}{w(B_{2\rho}(x_0))} \int_{B_{2\rho}(x_0)} u^q w dx \right)^{1/q}; \quad q < 0 \quad \text{ise}$$

olur. [47] deki Teorem 8.1 deki gibi iterasyon argümanı ile Teorem 4.24. kullanılırsa herhangi bir  $\alpha > 0$  için

$$\left( \frac{1}{w(B_\rho(x_0))} \int_{B_\rho(x_0)} u^q w dx \right)^{1/q} \leq C \left( \frac{1}{w(B_{2\rho}(x_0))} \int_{B_{2\rho}(x_0)} u^\alpha w dx \right)^{1/\alpha}$$

elde edilir. Böylece (4.52) ve (4.53) ile istenilen elde edilir. ■

Lemma 4.39. dan aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 4.40.**  $u, \Omega$  da  $\mathcal{L}u = 0$  denkleminin pozitif yerel çözümü ise her kompakt  $K \subset \Omega$  için,  $\max_K u \leq C \min_K u$  olacak şekilde  $u$  dan bağımsız bir  $C$  sabiti vardır ( [20]).

Şimdi yerel Hölder sürekliliği ifade edelim:

**Teorem 4.41.**  $u, \Omega$  da  $\mathcal{L}u = 0$  denkleminin yerel çözümü ise  $u, \Omega$  da yerel Hölder süreklidir. Daha açık bir ifadeyle eğer  $x_0 \in \Omega, 0 < \rho < R < \frac{1}{16}d(x_0, \partial\Omega)$  ise

$$\max_{B_\rho(x_0)} u - \min_{B_\rho(x_0)} u \leq C(\rho/R)^\lambda \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^2 w dx \right)^{1/2}$$

olacak şekilde  $C, \lambda, 0 < \lambda < 1$  vardır ( [20]).

**Teorem 4.42.**  $u, \Omega$  da  $\mathcal{L}u = -\text{div}\mathbf{F}$  denkleminin bir yerel çözümü olsun, burada  $|\mathbf{F}|/w \in L_w^p(\Omega), p > 2\frac{k}{k-1}, k,$  (4.54) deki gibi ve  $p, w \in A_{p/n}$  olacak şekilde çok büyüktür. Bu durumda  $u, \Omega$  da yerel Hölder süreklidir. Yani  $x_0 \in \Omega, 0 < \rho < R < \frac{1}{16}d(x_0, \partial\Omega)$  ise

$$\max_{B_\rho(x_0)} u - \min_{B_\rho(x_0)} u \leq C \left( \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^2 w dx \right)^{1/2} + \| |\mathbf{F}|/w \|_{L_w^p(B_R)} \right)^\lambda$$

olacak şekilde  $C, \lambda, 0 < \lambda < 1$  vardır ( [20]).

**Uyarı 4.43.**  $w(x_1, \dots, x_n) = |x_1| \log^2 1/|x_1|$  olsun. Bu durumda  $w$  ve  $\frac{1}{w}, n \geq 2$  için  $\mathbb{R}^n$  de yerel integrallenebilirdir ve her  $p > 2$  için  $A_p$  sınıfına ait olup  $A_2$  sınıfına ait değildir. Ayrıca  $u(x_1, \dots, x_n) = \frac{\text{sign}x_1}{\log 1/|x_1|}$  olmak üzere  $u \in W_w^{1,2}(B_1(0))$  fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyon 0 da Hölder sürekli olmayıp  $\sum_i (w(x)u_{x_i})_{x_i} = 0$  denklemini sağlar. Dolayısıyla  $A_\infty$  ağırlıkları arasında  $A_2$  sınıfı Hölder süreklilik sonuçlarının geçerli olduğu en iyi sınıftır ( [20]).

**Örnek 4.44.**  $\alpha > -1$  için  $f_\alpha(x) = |x|^\alpha x$  olsun. Bu durumda  $f'_\alpha(x) = |x|^\alpha (\delta_{ij} + \alpha \frac{x_i x_j}{|x|^2})$  dir.  $|f'_\alpha(x)|$  ile  $|x|^{\alpha n}$  eş değerdir. Ayrıca her  $\xi \in \mathbb{R}^n$  için,  $|f'_\alpha(x)\xi|^2$  ile  $|x|^{2\alpha} |\xi|^2$  eş değerdir.

Bu nedenle  $f_\alpha(x)$ ,  $\alpha > -1$  için  $\mathbb{R}^n$  üzerinde quasi-konform dur ve  $|f'_\alpha(x)|^{1-\frac{2}{n}}$  ile  $|x|^{\alpha(n-2)}$  eş değerdir.  $\alpha \geq \frac{n}{n-2}$  için  $|x|^{\alpha(n-2)} \notin A_2$  olur, fakat  $\operatorname{div}(A(x)Du(x)) = 0$  dejenere eliptik denklemlerinin çözümleri için uygundur, burada  $\frac{1}{C}|x|^\beta|\xi|^2 \geq A(x)\xi \cdot \xi \geq C|x|^\beta|\xi|^2$  ve  $\beta > 2 - n$  dir ([20]).

Örnek 4.4. deki fonksiyon göz önüne alınsın.  $-n < \beta \leq -(n-2)$  ile  $w(x) = |x|^\beta \in A_2$  olup bu nedenle bunlar tarafından belirlenen dejenere denklemler için yukarıdaki sonuçlar geçerlidir ([20]).

**Uyarı 4.45.** Lemma 4.22. ve Uyarı 4.23. te  $B_R \subset \mathbb{R}^n$  bir yuvar ve  $k > 1$  olmak üzere her  $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$  için

$$\left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} \varphi^{2k} w dx \right)^{1/2k} \leq CR \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} |D\varphi|^2 w dx \right)^{1/2} \quad (4.54)$$

eşitsizliğinin benzerinin kesirli integraller için gerçekleşmesi için gerek ve yeter şartın  $w \in A_2$  olduğu gösterilmişti. Buna rağmen,  $w \notin A_2$  olup ta (4.54) ün geçerli olduğu  $w$  ağırlıkları vardır. Bu ağırlıkların önemli örnekleri  $w = |\mathbf{F}'(x)|^{1-2/n}$  dir, burada  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbb{R}^n$  de quasi-konformdur (ayrıca bakınız [28]). [20] de  $w(x) = |\mathbf{F}'(x)|^{1-2/n}$  ile çözümlerin yerel Hölder sürekliliği ve (4.51) denkleminin negatif olmayan çözümleri için Harnack eşitsizliği kanıtlanmıştır.

### 4.3. Parabolik Ağırlıklı Sobolev-Poincaré Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda öncelikle parabolik denklemler örneklerle tanıtılmıştır. Daha sonra parabolik  $\mathcal{A}_p$  sınıfının tanımı verilmiştir. Son olarak ta parabolik ağırlıklı Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlikler verilmiştir.

#### 4.3.1. Parabolik Denklemler

Bu kısımda,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  açık, sınırlı ve bir sabit  $T > 0$  zamanı için  $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$  olsun. İlk olarak,

$$\begin{cases} u_t + Lu = f, & \Omega_T \text{ de} \\ u = 0, & \partial\Omega \times [0, T] \text{ de} \\ u = g, & \Omega \times \{t = 0\} \text{ da} \end{cases}$$

başlangıç (sınır) değer problemi göz önüne alınsın, burada  $f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  verilip  $u = u(x, t)$ ,  $u : \bar{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}$  bilinmeyendir.  $L$ , her  $t$  zamanı ve verilen  $a^{ij}, b^i, c$  ( $i, j = 1, \dots, n$ )

katsayıları için

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$$

divergence biçiminde ya da

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$$

divergence biçiminde olmayan ikinci basamaktan bir kısmi diferansiyel operatörü göstermektedir ([19]).

**Tanım 4.46.** Her  $(x, t) \in \Omega_T, \xi \in \mathbb{R}^n$  için

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

olacak şekilde bir  $\theta > 0$  sabiti var ise  $\frac{\partial u}{\partial t} + L$  kısmi diferansiyel operatörüne (düzgün) paraboliktir denir ([19]).

**Uyarı 4.47.**  $L$  her sabit  $0 \leq t \leq T$  zamanı için  $x$  uzaysal değişkenine göre düzgün eliptik bir operatörüdür [19].

$a^{ij} \equiv \delta_{ij}, b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$  olduğu durumda  $L = -\Delta$  olup  $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0$  kısmi diferansiyel denklemi ısı denklemi haline gelir. Aslında genel ikinci basamaktan parabolik kısmi diferansiyel denkleminin çözümleri birçok yönden ısı denkleminin çözümlerine benzer. Genel 2. basamaktan parabolik denklemler, fiziksel uygulamalarda  $\Omega$  bölgesindeki bir  $u$  niceliğinin, örneğin bir kimyasal konsantrasyonun yoğunluğunun zaman içindeki evrimini tanımlar. Difüzyon süreçlerinin olasılıksal çalışmasından elde edilen Fokker-Planck ve Kolmogorov denklemleri de ikinci basamaktan parabolik denklemlerdir ([19]).

Harnack eşitsizliğinin ilk parabolik versiyonu, Hadamard ([26]) ve Pini ([44]) ye aittir ve ısı denkleminin negatif olmayan çözümlerine uygulanmıştır:  $u, \Omega_T \equiv \Omega \times (0, T), 0 < T < \infty$  silindirik bölgede ısı denkleminin negatif olmayan bir çözümü olsun ve  $(x_0, t_0) \in \Omega_T$  için  $S_\rho \equiv B_\rho(x_0) \times (t_0 - \rho^2, t_0]$  silindiri göz önüne alınsın. Eğer  $S_{2\rho} \subset \Omega_T$  ise, bu durumda

$$u(x_0, t_0) \geq \gamma \sup_{B_\rho(x_0)} u(x, t_0 - \rho^2) \quad (4.55)$$

olacak şekilde sadece  $n$  ye bağlı bir  $\gamma$  sabiti vardır. Moser [40] daki çalışmasında  $V^{m,p}(\Omega_T), \|u\|_{V^{m,p}(\Omega_T)} = \text{esssup}_{0 < t < T} \|u(\cdot, t)\|_{L^m(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega_T)}$  normuyla Banach uzayı olmak

üzere

$$\begin{cases} u \in V^{1,2}(\Omega_T) \\ u_t - (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} = 0, \Omega_T \text{ de} \end{cases} \quad (4.56)$$

denkleminin negatif olmayan zayıf çözümleri için (4.55) in geçerli olduğunu göstermiştir, burada  $a^{ij} \in L^\infty(\Omega_T)$  eliptiklik koşulunun benzerini sağlamaktadır. Bu sonuç, zayıf çözümlerin  $\Omega_T$  de yerel Hölder sürekli olduğunu kanıtlar. (4.56) nın lineerliği ispat için önemsiz olduğundan, eliptik durumunda olduğu gibi, bu sonuçların aşağıdaki tipteki quasilineer denklemlere bir genişlemesi beklenebilir:

$$\begin{cases} u \in V^{1,p}(\Omega_T) \\ u_t - \text{div}(x, t, u, Du) = b(x, t, u, Du), \Omega_T \text{ de} \end{cases} \quad (4.57)$$

burada yapı koşulu (4.48) daki gibidir. Ancak J. Moser'in ispatı yalnızca  $p = 2$  durumu için yani esas kısmı  $|Du|$  ya göre doğrusal bir büyümeye sahip denklemler için genişletilebilir. Bu durum D.G. Aronson ve J. Serrin ( [1]) ve N.S. Trudinger ( [56]) in çalışmalarında görülmektedir. E.De Gorgi'nin yöntemleri de genişletilememiştir. O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov ve N.N. Ural'tzeva ( [35]) (4.57) çözümlerinin esas kısımlarının  $|Du|$  ya göre tam olarak lineer bir büyümeye sahip olması koşuluyla Hölder sürekli olduğunu kanıtlamıştır. Benzer sonuçlar S.N. Kruzkov ( [31–33]) ve J. Nash ( [43]) tarafından tamamen farklı yöntemlerle ortaya konmuştur. Bu nedenle eliptik durumdan farklı olarak esas kısmın dejenerasyonu veya singülerliği kendine özgü bir rol oynar. Örneğin

$$u_t - \text{div}|Du|^{p-2}Du = 0, \quad \Omega_T \text{ de, } p > 1$$

lineer olmayan denklemi için, negatif olmayan zayıf çözümlerin Harnack eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığı veya bir çözümün yerel Hölder sürekli olup olmadığı belirlenememiştir ( [10]).

Kısım 4.2. de ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliği ve bunun yardımıyla bir dejenere eliptik denklemin çözümünün düzgünlük çalışmaları incelenmişti. Bu sonuçlardan sonra dejenere parabolik denklemler için de düzgünlük çalışmaları yapılmıştır ( [7–9, 24, 51]). Ancak, bu çalışmalarda ele alınan ağırlıklar zaman değişkeninden bağımsızdır veya zaman yada uzay değişkenleri üzerinde ayrı ayrı  $\mathcal{A}_p$  koşulunu sağlamaktadır. [13] de L. Diening, M. Lee ve J. Ok tarafından parabolik kısmi türevli denklemlerden ortaya çıkan Sobolev uzayları ve parabolik yapıda doğal bir Muckenhoupt sınıfı olan ve parabolik  $\mathcal{A}_p$  sınıfı olarak adlandırılan ağırlıklar ele alınmıştır ve bu parabolik yapıda Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha açık bir ifadeyle,  $u(\cdot, t) \in W^{1,1}(\Omega)$ ,  $Du \in L^1(\Omega \times I)$  olmak üzere

$$u_t = \text{div}_x \mathbf{F}, \quad \Omega \times I \text{ da,} \quad (4.58)$$

divergence biçimindeki lineer parabolik denklemlerin dağılımsal çözümü olan bir  $u$  fonksiyonu göz önüne alınmıştır, burada  $(x, t) \in \Omega \times I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{F} \in L^1(\Omega \times I, \mathbb{R}^n)$  dir. Burada (4.58) in  $u$  dağılımsal çözümü dendiğinde  $u$  nun her  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times I)$  için

$$\int_{\Omega \times I} u \varphi_t d\mathbf{x} = \int_{\Omega \times I} \mathbf{F} \cdot D_x \varphi d\mathbf{x}$$

eşitliğini sağladığı anlaşılacaktır. Bu durumda  $u, t$  ye göre diferansiyellenebilir olmayabilir, ancak dağılımsal anlamda (4.58) i sağlar. Bu konuyla ilgili olarak,  $L^p$  uzayından daha geniş bir sınıf olan Orlicz uzayı çerçevesinde  $u$  için parabolik Poincaré tipli bir eşitsizlik [14] de elde edilmiştir. Bu bölümde  $u$  için [13] de elde edilen parabolik  $\mathcal{A}_p$  sınıfından  $\omega = \omega(x, t)$  ağırlığı ve  $p > 1$  için  $\mathbf{F} \in L_\omega^p(\Omega \times I, \mathbb{R}^n)$  ile Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlikler incelenecektir.

Şimdi bu bölümdeki bazı gösterimler ifade edilsin.  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$  deki noktalar  $\mathbf{x} = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$  ve  $\mathbf{y} = (y, \tilde{t}) = (y_1, \dots, y_n, \tilde{t})$  biçiminde olsun.  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{y}$  noktaları arasındaki parabolik  $d$  uzaklığı

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max \left\{ |x - y|, \sqrt{|t - \tilde{t}|} \right\}$$

ile tanımlanır, burada  $|\cdot|$  Öklid metriğidir.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$  ve  $r_i > 0, i = 1, \dots, n + 1$  ile  $\mathbf{r} := (\tilde{\mathbf{r}}, r_{n+1}) = (r_1, \dots, r_n, r_{n+1})$  için  $Q_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$  parabolik dikdörtgeni  $Q_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := K_{\tilde{\mathbf{r}}}(x) \times (t - r_{n+1}^2, t + r_{n+1}^2)$  ile tanımlanır, burada  $K_{\tilde{\mathbf{r}}}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < r_i, i = 1, \dots, n\}$ ,  $n$ - boyutlu bir dikdörtgendir.  $r > 0$  olmak üzere her  $i = 1, \dots, n + 1$  için  $r_i = r$  ise  $Q_r(\mathbf{x}) = Q_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$  yazılır.  $Q_r(\mathbf{x})$  bir parabolik küp olarak adlandırılır.  $Q_r = Q_r(0)$  yazılacaktır.  $U, \mathbb{R}^{n+1}$  de sınırlı açık ve  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  ise,  $v$  nin uzaysal gradienti  $Dv = (v_{x_1}, \dots, v_{x_n})$  ile,  $v$  nin uzaysal Hessian'ı  $D^2v$  ile ve  $v$  nin zamana göre türevi  $v_t$  ile gösterilecektir ([13]).

#### 4.3.2. Parabolik $\mathcal{A}_p$ Sınıfı

Bu kısımda, kısım 4.1. de tanıtilan  $A_p$  sınıfına benzer şekilde parabolik  $\mathcal{A}_p$  sınıfının tanımı verilip kaloritik Riesz potansiyelinin yüksek mertebeden integrallenebilirliği incelenecektir. İspatlarda  $A_p$  sınıfının sağladığı özellikler  $\mathcal{A}_p$  için de kullanılacaktır.  $1 < p < \infty$  için  $\mathbb{R}^{n+1}$  de bir  $\omega$  ağırlığı, yani  $\mathbb{R}^{n+1}$  de yerel integrallenebilir bir  $\omega$  fonksiyonu, eğer

$$[\omega]_{\mathcal{A}_p} = \sup_Q \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(\mathbf{x})^{-\frac{1}{p-1}} d\mathbf{x} \right)^{p-1} < \infty$$

ise  $\omega \in \mathcal{A}_p$  ile gösterilen bir parabolik  $\mathcal{A}_p$  ağırlığı olarak adlandırılır, burada supremum tüm  $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$  parabolik küpleri üzerinden alınmaktadır. Ölçülebilir  $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$  kümeleri için  $\omega$  ağırlığı ile  $\omega(E) = \int_E \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  ölçüsü tanımlanır.

$U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  sınırlı olsun.  $\omega \in \mathcal{A}_p$  verildiğinde,  $U$  üzerinde

$$\|u\|_{L_\omega^p(U)} = \left( \int_U |u(\mathbf{x})|^p \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p} < \infty$$

olacak şekilde tüm ölçülebilir  $u$  fonksiyonlarını içeren ağırlıklı Lebesgue uzayı  $L_\omega^p(U)$  ile gösterilecektir.  $W_\omega^{2,1,p}(U)$  uzayı  $u, u_t, Du, D^2u, L_\omega^p(U)$  ya ait olacak şekildeki  $u$  fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır.  $\omega \equiv 1$  olduğunda,  $W^{2,1,p}(U)$  yazılır ([13]).

Parabolik maksimal operatörü

$$\mathcal{M}f(\mathbf{x}) = \sup_{s>0} \frac{1}{|Q_s|} \int_{Q_s(\mathbf{x})} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$$

şeklinde tanımlanır ve  $\omega \in \mathcal{A}_p$  iken parabolik yapıda  $L_\omega^p(\mathbb{R}^{n+1})$  de sınırlıdır ([4]). Son olarak,  $\mathbb{R}^{n+1}$  de ölçülebilir bir  $f$  fonksiyonunun kaloritik Riesz potansiyeli

$$\mathcal{I}_\alpha f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{f(\mathbf{y})}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{n+2-\alpha}} d\mathbf{y}$$

ile tanımlanır, burada  $0 < \alpha \leq n+2$  dir ([17]).  $\alpha = 1$  iken  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}$  olsun.

Aşağıda kaloritik Riesz potansiyelinin yüksek mertebeden integrallenebilirliği kanıtlanmıştır.

**Lemma 4.48.**  $1 < p < \infty$  ve  $\omega \in \mathcal{A}_p$  olsun. Eğer  $f \in L_\omega^p(\mathbb{R}^{n+1})$  ve  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Q_r$  de  $f \equiv 0$  ise bir  $C = C(n, p, [\omega]_{\mathcal{A}_p}) > 0$  için

$$\left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} \mathcal{I} |f|(\mathbf{x})^{pk} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} \leq Cr \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} |f(\mathbf{x})|^p \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir, burada  $k > 1$  (4.59) da verilmiştir ([13]).

**İspat.** Sonuç 4.13. den bir  $q \in (1, p)$  için  $\omega \in \mathcal{A}_q$  dur ve  $[\omega]_{\mathcal{A}_q} > 0$  sadece  $n, p$  ve  $[\omega]_{\mathcal{A}_p}$  ye bağlıdır. Bundan başka  $q > \frac{p}{n+2}$  olsun. Herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için

$$\mathcal{I} |f|(\mathbf{x}) = \int_{d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq \varepsilon} \frac{|f(\mathbf{y})|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{n+1}} d\mathbf{y} + \int_{d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) > \varepsilon} \frac{|f(\mathbf{y})|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{n+1}} d\mathbf{y} = I_1 + I_2$$

olsun.  $|Q_{2^{-j}\varepsilon}(\mathbf{x})| = 2^{n+1}(2^{-j}\varepsilon)^{n+2}$  olduğundan

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}\varepsilon < d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq 2^{-j}\varepsilon} \frac{|f(\mathbf{y})|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{n+1}} d\mathbf{y} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)(n+1)} \varepsilon^{-(n+1)} \int_{d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq 2^{-j}\varepsilon} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &\leq C(n)\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{1}{|Q_{2^{-j}\varepsilon}|} \int_{Q_{2^{-j}\varepsilon}} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq C(n)\varepsilon \mathcal{M}f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

olur.  $(Q_r)^c$  de  $f \equiv 0$  olduğundan Hölder eşitsizliği ve  $\omega \in \mathcal{A}_q$  ile

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left( \int_{Q_r} |f(\mathbf{y})|^p \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{Q_r} \omega(\mathbf{y})^{-\frac{1}{q-1}} d\mathbf{y} \right)^{\frac{q-1}{p}} \left( \int_{d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) > \varepsilon} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{-\frac{p(n+1)}{p-q}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{p-q}{p}} \\ &\leq C \left( \int_{Q_r} |f(\mathbf{y})|^p \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{Q_r} \omega(\mathbf{y})^{-\frac{1}{q-1}} d\mathbf{y} \right)^{\frac{q-1}{p}} \varepsilon^{1 - \frac{q(n+2)}{p}} \end{aligned}$$

olur, son eşitsizlikte

$$\begin{aligned} \int_{d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) > \varepsilon} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{-\frac{p(n+1)}{p-q}} d\mathbf{x} &= 2 \int_0^{\varepsilon^2} \int_{|x| > \varepsilon} |x|^{-\frac{p(n+1)}{p-q}} dx dt + 2 \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \int_{|x| > \sqrt{t}} |x|^{-\frac{p(n+1)}{p-q}} dx dt \\ &\quad + 2 \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \int_{0 < |x| \leq \sqrt{t}} t^{-\frac{p(n+1)}{2(p-q)}} dx dt \\ &\leq C \int_0^{\varepsilon^2} \varepsilon^{-\frac{p(n+1)}{p-q} + n} dt + C \int_0^{\varepsilon^2} t^{-\frac{p(n+1)}{2(p-q)} + \frac{n}{2}} dt = C \varepsilon^{-\frac{p(n+1)}{p-q} + n + 2} \end{aligned}$$

kullanılmıştır. Şimdi  $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon = \mathcal{M}f(\mathbf{x})^{-\frac{p}{q(n+2)}} \left( \int_{Q_r} |f(\mathbf{y})|^p \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{q(n+2)}} \left( \int_{Q_r} \omega(\mathbf{y})^{-\frac{1}{q-1}} d\mathbf{y} \right)^{\frac{q-1}{q(n+2)}}$$

olarak alınırsa

$$\mathcal{I} |f|(\mathbf{x}) \leq C \mathcal{M}f(\mathbf{x})^{1 - \frac{p}{q(n+2)}} \left( \int_{Q_r} |f(\mathbf{y})|^p \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{q(n+2)}} \left( \int_{Q_r} \omega(\mathbf{y})^{-\frac{1}{q-1}} d\mathbf{y} \right)^{\frac{q-1}{q(n+2)}}$$

elde edilir. Şimdi

$$k = \frac{q(n+2)}{q(n+2) - p} \quad (4.59)$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned} &\left( \int_{Q_r} \mathcal{I} |f|(\mathbf{x})^{pk} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} \\ &\leq C \left( \int_{Q_r} |f(\mathbf{y})|^p \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{q(n+2)}} \left( \int_{Q_r} \omega(\mathbf{y})^{-\frac{1}{q-1}} d\mathbf{y} \right)^{\frac{q-1}{q(n+2)}} \left( \int_{Q_r} \mathcal{M}f(\mathbf{x})^p \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\mathcal{M}$  nin sınırlılığından ve  $(Q_r)^c$  de  $f \equiv 0$  olduğundan

$$\left( \int_{Q_r} \mathcal{I} |f|(\mathbf{x})^{pk} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} \leq C \left( \int_{Q_r} |f(\mathbf{x})|^p \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{Q_r} \omega(\mathbf{x})^{-\frac{1}{q-1}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{q-1}{q(n+2)}}$$

olur. Son olarak,  $\omega \in \mathcal{A}_q$  olduğundan

$$\begin{aligned} \left( \int_{Q_r} \mathcal{I} |f|(\mathbf{x})^{pk} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} &\leq C \left( \int_{Q_r} |f(\mathbf{x})|^p \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} |Q_r|^{\frac{q-1}{q(n+2)}} \left( \frac{\omega(Q_r)}{|Q_r|} \right)^{-\frac{1}{q(n+2)}} \\ &\leq Cr \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} |f(\mathbf{x})|^p \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \omega(Q_r)^{\frac{1}{pk}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

### 4.3.3. Parabolik Denklemlerin Çözümleri İçin Ağırlıklı Sobolev-Poincaré Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda önceki bölümün temel sonucu olan ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliğinin parabolik biçimi incelenecektir.

Divergence biçiminde olmayan ikinci mertebeden lineer parabolik

$$u_t - a^{ij}(x, t)u_{x_i x_j} = f, \quad \Omega_T \text{ de} \quad (4.60)$$

denklemleri göz önüne alınsın, burada  $A = (a^{ij})$ ,  $n \times n$  matrisi uygun düzgün eliptiklik ve sınırlılık koşullarını sağlar. Bu denklem için, eğer  $\Omega$ ,  $C^{1,1}$  de,  $A$  sürekli ve  $f \in L^p(\Omega_T)$  ise  $W^{2,1,p}(\Omega_T)$  de güçlü bir  $u$  çözümü olduğu iyi bilinmektedir, yani  $\Omega_T$  nin parabolik sınırında  $u = 0$  olmak üzere  $L^p$  uzayında  $u_t$ ,  $Du$ ,  $D^2u$  zayıf türevleri mevcuttur.  $W^{2,1,p}$  uzayında herhangi bir  $Q_r$  parabolik kübü ve  $u \in W^{2,1,p}(Q_r)$  fonksiyonu için

$$\left( \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |Du - (Du)_{Q_r}|^{pk} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} \leq Cr \left( \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} (|u_t|^p + |D^2u|^p) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.61)$$

Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlik elde edilir ([36]), burada  $p < n + 2$  ise  $k = \frac{n+2}{n+2-p} > 1$  dir. Yukarıdaki eşitsizlikte sağ taraf  $t$  değişkenine göre  $Du$  nun türevini değil  $u_t$  yi içermektedir. Bu nedenle  $L^p$  düzgünlük teorisi (4.60) için incelendiğinde,  $u_t$  ve  $D^2u$  yu dikkate almak yeterlidir. [2, 3, 15] çalışmalarında ağırlıklı uzaylarda kuvvetli çözümler üzerinde çalışılmıştır, ancak (4.61) in ağırlıklı biçimi araştırılmamıştır. Bu kısımda (4.61) in ağırlıklı biçimi incelenecektir. Ağırlıksız durumun aksine, temel zorluk her zaman diliminde

$$\left( \frac{1}{\omega(B_r)} \int_{B_r} |f - f_{B_r}|^{pk} \omega dx \right)^{\frac{1}{pk}} \leq Cr \left( \frac{1}{\omega(B_r)} \int_{B_r} |Df|^p \omega dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

klasik ağırlıklı Sobolev-Poincaré eşitsizliğinden yararlanılamamasıdır. Çünkü her zaman diliminde parabolik  $\mathcal{A}_p$  sınıfındaki bir ağırlık fonksiyonunun,  $x \rightarrow \omega(x, t)$ , kısıtlaması genel olarak  $\mathcal{A}_p$  sınıfına ait değildir ([13]).

Divergence biçimindeki bir parabolik denklem için Poincaré tipli eşitsizlikler aşağıdaki lemmada verilmiştir.

**Lemma 4.49.** Eğer h.h.  $t \in I$  için  $u(\cdot, t) \in W^{1,1}(\Omega)$ ,  $Du \in L^1(\Omega \times I)$  ve  $r/2 \leq \mathbf{r} \leq 2r$  için  $\mathbf{F} \in L^1(Q_{\mathbf{r}}, \mathbb{R}^n)$  ile  $Q_{\mathbf{r}}$  de  $u_t = \text{div} \mathbf{F}$  nin dağılımsal bir çözümü  $u$  ise, bu durumda bir  $C = C(n) > 0$  için

$$\int_{Q_{\mathbf{r}}} |u - u_{Q_{\mathbf{r}}}| d\mathbf{x} \leq Cr \int_{Q_{\mathbf{r}}} (|Du| + |\mathbf{F}|) d\mathbf{x} \quad (4.62)$$

elde edilir ([14]).

Bu bölümün ana sonucu olan Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlik aşağıdaki teoremdedir. Eğer her  $i = 1, 2, \dots, n+1$  ve  $0 < a < b$  için  $a \leq r_i \leq b$  ise  $a \leq \mathbf{r} \leq b$  yazılacaktır.

**Teorem 4.50.**  $1 < p < \infty$ ,  $\omega \in \mathcal{A}_p$  ve h.h.  $t \in (-r^2, r^2)$  için  $u(\cdot, t) \in W^{1,1}(K_r)$ ,  $Du \in L^1(K_r \times (-r^2, r^2))$ ,  $Du \in L^p_{\omega}(Q_r, \mathbb{R}^n)$  ile  $Q_r$  de  $u_t = \text{div} \mathbf{F}$  nin dağılımsal bir çözümü  $u$  ise bu durumda bir  $k = k(n, p, [\omega]_{\mathcal{A}_p}) > 1$  için  $u \in L^{pk}_{\omega}(Q_r)$  dir, burada  $\mathbf{F} \in L^p_{\omega}(Q_r, \mathbb{R}^n)$  dir ve bir  $C = C(n, p, [\omega]_{\mathcal{A}_p}) > 0$  için

$$\left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} |u - u_{Q_r}|^{pk} \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} \leq Cr \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} (|Du| + |\mathbf{F}|)^p \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir ([13]).

**İspat.**  $u_{Q_r} = 0$  durumunda teoremi kanıtlamak yeterlidir, çünkü  $v = u - u_{Q_r}$  ayrıca dağılımsal anlamda  $v_t = \text{div} \mathbf{F}$  denklemini sağlamaktadır.  $\mathbf{y} \in Q_r$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|Q_{\rho}|} \int_{Q_{\rho}(\mathbf{y})} |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| d\mathbf{x} = 0$$

koşulunu sağlasın. Böyle bir  $\mathbf{y}$  noktası  $u$  nun parabolik Lebesgue noktası olarak adlandırılır. Parabolik Lebesgue noktası olmayan noktalar kümesinin  $\mathbb{R}^{n+1}$  de sıfır Lebesgue ölçüsüne sahip olduğu kolayca görülebilir.  $r_j = 2^{1-j}r$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , ve  $\tilde{Q}_j = Q_{r_j}(\mathbf{y}) \cap Q_r$  olsun. Bu durumda  $\tilde{Q}_0 = Q_r$  ve  $\tilde{Q}_j$  nin bir  $\xi \in Q_r$  için  $r_j/2 \leq \mathbf{r} \leq r_j$  ile bir  $Q_{\mathbf{r}}(\xi)$  parabolik dikkörtgen olduğu görülür, buradan  $|\tilde{Q}_j| \approx |Q_{r_j}(\mathbf{y})| \approx r_j^{n+2}$  olur, burada ilgili sabitler sadece  $n$  ye bağlıdır. (4.62) ile

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{y})| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |u_{\tilde{Q}_j} - u_{\tilde{Q}_{j+1}}| \leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|\tilde{Q}_j|} \int_{\tilde{Q}_j} |u - u_{\tilde{Q}_j}| d\mathbf{x} \\ &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|\tilde{Q}_j|} \int_{\tilde{Q}_j} r_j (|Du| + |\mathbf{F}|) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, h.h.  $\mathbf{y} \in Q_r$  için  $Q_{r_j}(\mathbf{y}) = \bigcup_{i=j}^{\infty} (Q_{r_i}(\mathbf{y}) \setminus Q_{r_{i+1}}(\mathbf{y}))$  olduğundan

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{y})| &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \int_{(Q_{r_i}(\mathbf{y}) \setminus Q_{r_{i+1}}(\mathbf{y})) \cap Q_r} \frac{|Du| + |\mathbf{F}|}{r_i^{n+1}} d\mathbf{x} \\ &= C \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^i \frac{1}{2^{(n+1)(i-j)}} \right) \int_{(Q_{r_i}(\mathbf{y}) \setminus Q_{r_{i+1}}(\mathbf{y})) \cap Q_r} \frac{|Du| + |\mathbf{F}|}{r_i^{n+1}} d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{Q_r} \frac{|Du(\mathbf{x})| + |\mathbf{F}(\mathbf{x})|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{n+1}} d\mathbf{x} = C\mathcal{I}(|Du| + |\mathbf{F}|)\mathcal{X}_{Q_r}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, Lemma 4.48.  $f = (|Du| + |\mathbf{F}|)\mathcal{X}_{Q_r}$  ile uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} |u|^{pk} \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} &\leq \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} (\mathcal{I}(|Du| + |\mathbf{F}|)\mathcal{X}_{Q_r})^{pk} \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} \\ &\leq Cr \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} (|Du| + |\mathbf{F}|)^p \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

**Uyarı 4.51.**  $k$  sabiti (4.59) da verilmiştir. Ağırlıklı olmayan durumda  $p < n + 2$  ile  $\omega \equiv 1 \in \mathcal{A}_1$  olduğundan  $k = \frac{n+2}{n+2-p}$  seçilebilir ve dolayısıyla Lemma 4.48. ün ispatında  $q = 1$  olarak alınabilir ([13]).

Teorem 4.50. den  $|u|^p \omega$  nın aşağıdaki yüksek integrallenebilirliğine ulaşılır.

**Sonuç 4.52.** Teorem 4.50. nin koşulları ile bir  $\gamma \in (1, k)$  için  $|u|^p \omega \in L^\gamma(Q_r)$  olur ve bir  $C = C(n, p, [\omega]_{\mathcal{A}_p}) > 0$  için

$$\left( \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} (|u - u_{Q_r}|^p \omega)^\gamma d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p\gamma}} \leq Cr \left( \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} (|Du|^p + |\mathbf{F}|^p) \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir, burada  $\gamma$  sadece  $n, p$  ve  $[\omega]_{\mathcal{A}_p}$  ye bağlıdır ve  $k > 1$  (4.59) da verilmiştir ([13]).

**İspat.** Hölder eşitsizliği ile

$$\frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} (|u - u_{Q_r}|^p \omega)^\gamma d\mathbf{x} \leq \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} |u - u_{Q_r}|^{pk} \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{\gamma}{k}} \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} \omega^{\frac{(k-1)\gamma}{k-\gamma}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{k-\gamma}{k}}$$

elde edilir.

$$\left( \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} \omega^{1+\varepsilon_0} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon_0}} \leq C \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} \omega d\mathbf{x} \quad (4.63)$$

ters Hölder eşitsizliği göz önüne alınsın, burada  $\varepsilon_0, C > 0$  sadece  $n, p$  ve  $[\omega]_{\mathcal{A}_p}$  ye bağlıdır.  $\gamma \in (1, k), 1 < \frac{(k-1)\gamma}{k-\gamma} < 1 + \varepsilon_0$  olacak şekilde seçilsin. (4.63) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} \omega^{\frac{(k-1)\gamma}{k-\gamma}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{k-\gamma}{k}} &= \left( \frac{|Q_r|}{\omega(Q_r)} \right)^{\frac{k-\gamma}{k}} \left( \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} \omega^{\frac{(k-1)\gamma}{k-\gamma}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{k-\gamma}{k}} \\ &\leq C \left( \frac{|Q_r|}{\omega(Q_r)} \right)^{\frac{k-\gamma}{k}} \left( \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{(k-1)\gamma}{k}} \\ &= C \left( \frac{\omega(Q_r)}{|Q_r|} \right)^{\gamma-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.50. den

$$\left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} (|u - u_{Q_r}|^p \omega)^\gamma d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p\gamma}} \leq Cr \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} (|Du|^p + |\mathbf{F}|^p) \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{\omega(Q_r)}{|Q_r|} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma p}}$$

elde edilir. ■

$W^{2,1,1}$  uzayındaki fonksiyonlar ele alınarak ve önceki kısımdaki sonuçlardan bir  $\omega \in \mathcal{A}_p$ ,  $1 < p < \infty$  ağırlığı ile  $Du$  uzaysal gradienti için ağırlıklı Sobolev-Poincaré tipi eşitsizlik elde edilecektir.

**Teorem 4.53.**  $1 < p < \infty$  ve  $\omega \in \mathcal{A}_p$  olsun. Eğer  $u \in W^{2,1,1}(Q_r)$  ve  $u_t, |D^2u| \in L_\omega^p(Q_r)$  ise bu durumda (4.59) da verilen  $k > 1$  ile  $Du \in L_\omega^{pk}(Q_r, \mathbb{R}^n)$  dir ve bir  $C = C(n, p, [\omega]_{\mathcal{A}_p}) > 0$  için

$$\left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} |Du - (Du)_{Q_r}|^{pk} \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} \leq Cr \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} (|D^2u|^p + |u_t|^p) \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir ([13]).

**İspat.**  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $v_i = u_{x_i}$  olsun. Bu durumda  $f_i^i = u_t$  ve her  $j \neq i$  için  $f_j^i = 0$  ile  $\mathbf{F}^i = (f_1^i, \dots, f_n^i)$  iken  $Q_r$  de h.h.y.  $(v_i)_t = (u_t)_{x_i} = \text{div} \mathbf{F}^i$  elde edilir. Bu nedenle Teorem 4.50. ile her  $i = 1, \dots, n$  için

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} |u_{x_i} - (u_{x_i})_{Q_r}|^{pk} \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{pk}} &\leq Cr \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} (|D(u_{x_i})|^p + |\mathbf{F}^i|^p) \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Cr \left( \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} (|D^2u|^p + |u_t|^p) \omega d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar. ■

**Uyarı 4.54.** Yukarıdaki teoremden  $|Du|^p \omega$  nın yüksek integrallenebilirliği elde edilir. Bu bölümdeki yöntemlere benzer argümanlar ile [21, 45] de homojen tipteki uzaylar için ağırlıklı Sobolev-Poincaré tipli eşitsizlikler elde edilmiştir ([13]).

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak kısmi diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir yeri olan Sobolev-Poincaré eşitsizliğinin ağırlıklı biçimi ve uygulama alanı ele alınmıştır. Daha sonra bu eşitsizliğin parabolik yapıda elde edilen biçimi ele alınmıştır. Konuların daha iyi anlaşılabilmesi için bazı ispatlar açıklayıcı hale getirilmiştir. Bu konuda araştırma yapmak isteyenler için temel bilgiler ve son yıllarda yapılan araştırmalar birlikte vermeye çalışılmıştır.

Bu tez ile konuların temelleri iyi bir şekilde anlaşılacağından literatürde var olan ve bu tezdeki konulara yakın başka çalışmalar çok rahatlıkla incelenebilecektir. Böylece araştırmacılar için yeni sonuçları elde edebilmelerini sağlayacak uygun bilgi alyapısı sağlanmış olacaktır.



## 6. KAYNAKLAR

- [1] Aronson, D. G., & Serrin, J. (1967). Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 25(2), 81-122.
- [2] Byun, S. S., & Lee, M. (2015). Weighted estimates for nondivergence parabolic equations in Orlicz spaces. *Journal of Functional Analysis*, 269(8), 2530-2563.
- [3] Byun, S. S., Lee, M., & Ok, J. (2018). Nondivergence parabolic equations in weighted variable exponent spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 370(4), 2263-2298.
- [4] Byun, S. S., Palagachev, D. K., & Softova, L. (2016). Global gradient estimates in weighted Lebesgue spaces for parabolic operators. *In annales academiae scientiarum fennicae. mathematica* (Vol. 41, pp. 67-83).
- [5] Caffarelli, L., Fabes, E. B., Mortola, S., & Salsa, S. (1981). Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(4), 621-640.
- [6] Chiarenza, F., & Frasca, M. (1985). A note on a weighted Sobolev inequality. *In Proc. Amer. Math. Soc.* 93 (4) 703-704.
- [7] Chiarenza, F., & Serapioni, R. (1984). Degenerate parabolic equations and Harnack inequality. *Annali di matematica pura ed applicata*, 137, 139-162.
- [8] Chiarenza, F. M., & Serapioni, R. P. (1984). A Harnack inequality for degenerate parabolic equations. *Communications in partial differential equations*, 9(8), 719-749.
- [9] Chiarenza, F., & Serapioni, R. (1987). Pointwise estimates for degenerate parabolic equations. *Applicable Analysis*, 23(4), 287-299.
- [10] DiBenedetto, E. (2012). *Degenerate parabolic equations*. Springer Science & Business Media.
- [11] De Giorgi, E. (1957). Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 3(3), 25-43.
- [12] de Guzmán, M. (1970). A covering lemma with applications to differentiability of measures and singular integral operators. *Studia Mathematica*, 34(3), 299-317.
- [13] Diening, L., Lee, M., & Ok, J. (2022). Parabolic weighted Sobolev–Poincaré type inequalities. *Nonlinear Analysis*, 218, 112772.

- [14] Diening, L., Schwarzacher, S., Stroffolini, B., & Verde, A. (2017). Parabolic Lipschitz truncation and caloric approximation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 56(4), 120.
- [15] Dong, H., & Kim, D. (2018), On  $L_p$ -estimates for elliptic and parabolic equations with  $A_p$  weights, *Trans. Amer. Math. Soc.* 370(7) 5081-5130.
- [16] Duoandikoetxea, J. (2001). Fourier analysis, *American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*.
- [17] Duzaar, F., & Mingione, G. (2011). Gradient estimates via non-linear potentials. *American Journal of Mathematics*, 133(4), 1093-1149.
- [18] Edmunds, D. E., & Peletier, L. A. (1972). A Harnack inequality for weak solutions of degenerate quasilinear elliptic equations. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1), 21-31.
- [19] Evans, L. C. (2022). Partial differential equations. *American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*.
- [20] Fabes, E. B., Kenig, C. E., & Serapioni, R. P. (1982). The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 7(1), 77-116.
- [21] Franchi, B., Pérez, C., & Wheeden, R. L. (1998). Self-improving properties of John–Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type. *Journal Of Functional Analysis*, 153(1), 108-146.
- [22] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., Gilbarg, D., & Trudinger, N. S. (1977). *Elliptic partial differential equations of second order* (Vol. 224, No. 2). Berlin: springer.
- [23] Giusti, E. (2003). *Direct methods in the calculus of variations*. World Scientific.
- [24] Grafakos, L. (2008). *Classical fourier analysis*, Second Edition. Graduate Texts in Mathematics, 249, Springer, New York.
- [25] Grafakos, L. (2009). *Modern fourier analysis*, Second ed., Graduate Texts in Mathematics, 250, Springer, New York.
- [26] Hadamard, J. (1954). Extension á l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack, *Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. 23*, 337-346.
- [27] Hedberg, L. I. (1972). On certain convolution inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 36(2), 505-510.
- [28] Heinonen, J., Kilpeläinen, T. & Martio, O. (2006) *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*. Dover Publications, New York.

- [29] Kinderlehrer, D., & Stampacchia G. (1980). *An introduction to variational inequalities and their applications*. Academic Press, Inc. New York-London.
- [30] Kruzkov, S.N. (1963) Certain properties of solutions to elliptic equations, *Soviet Math.*, 686-695.
- [31] Kruzkov, S.N. (1961) On the a priori estimation of solutions of linear parabolic equations and of solutions of boundary value problems for a certain class of quasi-linear parabolic equations, *Dokl. Akad. NAUK SSSR* 138 , pp. 1005-1008 (Engl.transl.:Soviet Math. Dokl. 2(1961),pp. 764-767).
- [32] Kruzkov, S.N. (1964), A priori estimates and certain properties of the solutions of elliptic and parabolic equations of second order, *Math. Sbornik* 65 107 , pp. 522-570 (Engl. trans.: Amer. Math. Soc. Transl. 2 68(1968), pp. 169-220.)
- [33] Kruzhkov, S. N. (1969). Results concerning the nature of the continuity of solutions of parabolic equations and some of their applications. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 6, 517-523.
- [34] Ladyzenskaja, O. A., & Ural'tzeva N. N. (1968). *Linear and quasilinear elliptic equations* Academic press, New York.
- [35] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A. & Ural'tzeva, N. N., *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Transl. Math. Mono. Vol. 23 AMS, Providence, RI (1968).
- [36] Lieberman, G. M. (2003). A mostly elementary proof of Morrey space estimates for elliptic and parabolic equations with VMO coefficients. *Journal of Functional Analysis*, 201(2), 457-479.
- [37] Littman, W., Stampacchia, G., & Weinberger, H. F. (1963). Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche*, 17(1-2), 43-77.
- [38] Muckenhoupt, B., & Wheeden, R. (1976). Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. *Studia Mathematica*, 54, 221-237.
- [39] Moser, J. (1961). On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14(3), 577-591.
- [40] Moser, J. (1964). A Harnack inequality for parabolic differential equations. *Communications on pure and applied mathematics*, 17(1), 101-134.
- [41] Muckenhoupt, B., & Wheeden, R. (1974). Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 192, 261-274.

- [42] Murthy, M. R., & Stampacchia, G. (1968). Boundary value problems for some degenerate-elliptic operators. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 80(1), 1-122.
- [43] Nash, J. (1958). Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *American Journal of Mathematics*, 80(4), 931-954.
- [44] Pini, B. (1954). Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 23, 422-434.
- [45] Sawyer, E., & Wheeden, R. L. (1992). Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 114(4), 813-874.
- [46] Serrin, J. (1964), Local behaviours of solutions of quasilinear elliptic equations, *Acta Math.* 111, 101-134.
- [47] Stampacchia, G. (1965). Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *In Annales de l'institut Fourier* 15(1), 189-257.
- [48] Stein, E. M. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of functions* (30). Princeton university press.
- [49] Stein, E. M. (1993). *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals* (3). Princeton University Press.
- [50] Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2009), *Real Analysis: measure theory, integration and Hilbert spaces*. Princeton University Press.
- [51] Strömberg, J. O., & Wheeden, R. L. (1985). Fractional integrals on weighted  $H^p$  and  $L^p$  spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 287(1), 293-321.
- [52] Torchinsky, A. (1986). *Real-variable Methods in Harmonic Analysis* (123). Academic Press. Inc Orlando.
- [53] Trudinger, N. S. (1971). On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 42(1), 50-62.
- [54] Trudinger, N. S. (1973). Linear elliptic operators with measurable coefficients. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche*, 27(2), 265-308.
- [55] Trudinger, N. S. (1967). On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations. *Communications on pure and applied mathematics*, 20(4), 721-747.

- [56] Trudinger, N. S. (1968). Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 21(3), 205-226.
- [57] Turesson, B. O. (2000). *Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces* (Vol. 1736). Springer Science & Business Media.



## ÖZGEÇMİŞ

<b>KİŞİSEL BİLGİLER</b>	
Adı Soyadı	RIŞVAN TEKİN
Uyruğu	T.C.
Orcid Numarası	0009-0003-0039-9584

<b>EĞİTİM BİLGİLERİ</b>	
<b>Lisans</b>	
Üniversite	SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
Fakülte	EĞİTİM FAKÜLTESİ
Bölüm	İLKÖĞRETİM MATEMATİK BÖLÜMÜ
Mezuniyet Yılı	2004
<b>Yüksek Lisans</b>	
Üniversite	KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
Enstitü	FEN BİLİMLERİ
Anabilim Dalı	MATEMATİK
Mezuniyet Yılı	2025

<b>Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler</b>
Tekin,R.,(2024) "Weighted Sobolev-Poincaré Type Inequalities", 4. International Boğaziçi Scientific Studies Congress, İstanbul, Turkey (bildiri)