T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HARMONİK ANALİZDE REEL HARDY UZAYLARI VE İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Emre YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR
2023

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HARMONİK ANALİZDE REEL HARDY UZAYLARI VE İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Emre YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ali AKBULUT

KIRŞEHİR
2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Emre YILDIRIM

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışmamda Hardy uzayları ve harmonik analizin klasik operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılıkları hakkındaki bilgileri inceledim ve elde ettiğim bilgileri, sonuçları sizlere sunmaktayım.

Tez çalışmamda planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Sayın Prof. Dr. Ali AKBULUT 'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2023 Emre YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$ReH^p(\mathbb{R}^n)$	: Reel Hardy uzay
$P^*_{\bigtriangledown}$	: Poisson teğet olamayan maksimal fonksiyon
$\varphi^*_{\bigtriangledown}$	: f'nin Teğet olmayan maksimal fonksiyonu
φ^*_{+}	: f'nin Radyal maksimal fonksiyonu
f^*_m	: f'nin Grand maksimal fonksiyonu
$H^{p,q,s}_a(\mathbb{R}^n)$	: Atomik Hardy Uzay
I_α	: Riesz potansiyel operatörü
T	: Singüler integral operatörü
$\|\cdot\|_{L_p}$	: Lebesgue normu
$L_p(\mathbb{R}^n)$	: Lebesgue uzayı
$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$	: f fonksiyonu lokal integrallenebilir

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HARMONİK ANALİZDE REEL HARDY UZAYLARI VE İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Emre YILDIRIM

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Ali AKBULUT

Bu yüksek lisans tezinde, Hardy uzayları ve harmonik analizin klasik operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılıkları hakkında bilgi verilecektir.

İlk bölümde, literatürde bu konu ile ilgili araştırmaları olan bir çok matematikçi hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, tez konusunda geçen bazı temel tanım ve özellikler verilecektir.

Üçüncü bölümde, Hardy uzaylarının karakterizasyonu, tanım ve özellikleri verilecektir.

Son bölümde ise harmonik analizin integral operatörlerinin Hardy uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgili sonuçlara yer verilecektir.

Mayıs 2023, 88 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Teğet olmayan maksimal fonksiyon, radyal maksimal fonksiyon,Grand maksimal fonksiyon, singüler integral operatör, Riesz potansiyeli.

ABSTRACT

MSc THESIS

REAL HARDY SPACES AND INTEGRAL OPERATORS ON HARMONIC ANALYSIS

Emre YILDIRIM

KIRŞEHİR AHİ EVARAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Ali AKBULUT

In this thesis, we will inform you about Hardy spaces and the boundedness of classical operators of harmonic analysis in these spaces.

In the first section, information is given about many mathematicians studying in this field in the literature and also about the purpose of this study.

In the second section, some basic definitions and features of the thesis will be given.

In the third section, the characterization, definition and properties of the Hardy spaces will be given.

In the last section, the results about the boundedness of integral operators of harmonic analysis in Hardy spaces will be given.

May 2023, 88 Pages.

Keywords: Nontangential maximal function, radial maximal function,grand maximal function, singular integral operator, Riesz potential.

1. GİRİŞ

E. M. Stein ve G. Weiss [28] ve A.P. Calderón ve A. Zygmund [5] tarafından verilen $ReH^p(\mathbb{R}^n)$ (reel Hardy) uzaylarının ilk tanımı analitik fonksiyonlarla yakından ilişkilidir. 1970'li yıllarda reel Hardy uzaylarının reel değişkenli karakterini ifade eden yeni gelişmeler ortaya çıkmıştır. Aslında, Hardy ve Littlewood daha önceki yıllarda "$f \in ReH^p(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad P^*_{\bigtriangledown}(f)(x) := \sup_{|y-x|<t} |(f * P_t)(y)| \in L^p(\mathbb{R})$" önermesinin doğru olduğunu göstermişlerdi. 1971 yılında D.L. Burkholder, R.F. Gundy ve M.L. Silverstein [4] bu önermenin tersinin de doğru olduğunu gösterdi. Böylece, "$f \in ReH^p(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad f \in P^*_{\bigtriangledown}(f)(x)$," ($P^*_{\bigtriangledown}(f)(x)$; ($f$ fonksiyonunun Poisson teğet olmayan maksimal fonksiyonu.) Açıkçası, $ReH^p(\mathbb{R})$ uzayının bu karakteri, analitik fonksiyonların özellikleri kullanılarak verilen yukarıdaki tanımından bağımsızdır. Fakat bu karakterizasyon hala tam anlamıyla harmonik fonksiyonlara bağlı olmaktan kurtulamamıştır. Çünkü tanımda Poisson çekirdeği kullanılmaktadır. Böylece ortaya "Poisson çekirdeği birime yaklaşık başka bir çekirdekle değiştirilebilr mi?" sorusu çıktı. 1972 yılında, C. Fefferman, E.M. Stein [15] bu soruya olumlu cevap verdiler ve reel değişkenli metodlardan n-boyutlu versiyonu için yukarıdaki karakterisazyonlar genişlettiler ve $ReH^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının tanımına denk bir karakterizasyonu elde ettiler.

Bu yüksek lisans tezinde, Hardy uzaylarının çeşitli karakterizasyonları verilerek, Riesz potansiyel ve singüler integral operatörlerin bu uzaylardaki sınırlılıkları incelemiştir.

Bu tez konusunu bir baslangıç kabul edilerek, "İntegral Operatörlerin Reel Hardy Uzaylarında Sınırlılığı" konusunda daha ileri düzeyde çalışmalar yapabilmek için bir temel oluşturulması hedeflenmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Normlu Uzaylar

Tanım 2.1. X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to R, \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbf{K}$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir [2].

Teorem 2.2. X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$$\| \cdot \| : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı her norm dönüşümü X vektör uzayı üzerinde süreklidir [2].

Teorem 2.3. Bir $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı herhangi bir X normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir [2].

Tanım 2.4. (Denk Norm) X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in X$ için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk normlar denir [24].

Tanım 2.5. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama denir [24].

Tanım 2.6. (Cauchy Dizisi) $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, bir Cauchy dizisidir denir [24].

Tanım 2.7. (Banach Uzayı) Bir $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayına Banach Uzayı adı verilir [2].

Tanım 2.8. (Riesz-Fischer özelliği) Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_X < \infty \tag{2.1}$$

özelliğine sahip her $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ varsa, yani

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} u_k - u \right\|_X = 0$$

oluyorsa $(X, \|\cdot\|_X)$ uzayına Riesz-Fisher özelliğini sağlıyor denir [22].

Teorem 2.9. Bir normlu lineer uzayın tam olması için gerek ve yeter şart Riesz-Fischer özelliğine sahip olmasıdır [22].

2.2. Operatör Teorisi

Tanım 2.10. X ve Y iki lineer uzay ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonuna operatör denir. Burada D_T, T nin tanım kümesi ve $\mathfrak{R} \equiv T(D_T) \subset Y$ de T nin görüntü kümesidir [2].

Tanım 2.11. $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar kümesinin bir lineer alt uzayı G olmak üzere $T : G \to G$ operatörü $\forall f, g \in G$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \text{ ve } T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

şartlarını sağlıyorsa lineer operatör,

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \text{ ve } |T(\lambda f)| = |\lambda| \, |T(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa altlineer operatör, bir $C > 0$ sabiti için

$$|T(f+g)| \leq C \left(|T(f)| + |T(g)|\right) \text{ ve } |T(\lambda f)| = |\lambda| \, |T(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa quasilineer operatör olarak adlandırılır [2].

Tanım 2.12. $T : X \to X$ operatörü verilsin. $\forall x \in X$ için $T(x) = x$ ise T operatörüne birim(veya özdeşlik) operatörü denir. I_X veya I ile gösterilir [2].

Tanım 2.13. X ve Y iki normlu uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in D(T)$ için,

$$\|Tx\| \leq C \|x\|$$

olacak şekilde bir C reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir. Bir T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 2.14. X ve Y iki normlu uzay ve $T : D(T) \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlandığında T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında süreklidir denir.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni \forall x \in D(T),\ \|x - x_0\| < \delta$ iken

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$$

[2].

Tanım 2.15. Eğer $T : X \to Y$ operatörü $D(T)$ nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir denir [2].

Tanım 2.16. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün sınırlı olmasıdır [2].

Tanım 2.17. (Gömme) X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun.

$$D_T(I) = \mathfrak{R}(I) = X,$$

yani $\forall x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde Y de en az bir eleman olmak üzere

$$\mathrm{I} : X \to Y$$

ile verilen operatöre birim operatörü denir. Bu operatör sürekli ise yani her $x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti var ise X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir. I operatörüne X uzayından Y uzayına bir gömme operatörü denir. Alternatif olarak bazen X uzayının Y

uzayına bir sürekli(veya sınırlı) gömmesi mevcuttur denir.

$$\|\mathrm{I}\|_{X\hookrightarrow Y} := \sup_{f\not\equiv 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

şeklinde gösterilen bu sayıya da I nın operatör normu denir. Eğer X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına bir sürekli gömme mevcut ise

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$X \hookrightarrow Y \text{ ve } Y \hookrightarrow X$$

aynı anda oluyorsa,

$$X \rightleftarrows Y$$

şeklinde gösterilir ve eğer bu gömme operatörü kompakt ise de

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir [22].

Tanım 2.18. (Konveks) Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in X : y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2,\ 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa, Y alt kümesi konvekstir(veya dışbükeydir) denir [2].

2.3. Ölçü Teorisi

X boştan farklı bir küme olmak üzere X kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan küme $P(X)$ ile gösterilmiştir.

Tanım 2.19. (Cebir ve $\sigma-$Cebir) X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun.

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A},\ E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, \ldots, n,\ \{E_k\}_{k=1}^{n} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

şartları sağlanıyor ise bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir. Eğer (iii) şartı yerine

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \tag{2.2}$$

şartı alınırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir σ-cebir denir [23].

Teorem 2.20. $\emptyset \neq \mathcal{K} \in X$ olsun. $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin bir en küçüğü vardır [23].

Tanım 2.21. (Borel Cebiri) Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (veya doğurduğu) σ-cebiri denir ve $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine Borel cebiri denir ve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nin herbir elemanına Borel kümesi denir [23].

Tanım 2.22. (Ölçü) $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü fonksiyonu(veya ölçü) adı verilir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ oluyorsa μ ye sonlu ölçü adı verilir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsüne σ-sonlu denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye olasılık ölçüsü adı verilir [23].

Tanım 2.23. (Ölçü Uzayı) X, boştan farklı bir küme, $\mathcal{A} \subset P(X)$ de X in bir $\sigma-$cebiri ve $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ de $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay ve $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne de bir ölçü uzayı denir. $\mathcal{A}$ daki herbir eleman da ölçülebilir küme olarak adlandırılır [23].

Tanım 2.24. (Atomik Ölçü) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer $\mu(A) > 0$ ve her $B \in \mathcal{A}$ kümesi için $B \subset A$ ise ya $\mu(B) = 0$ yada $\mu(A \backslash B) = 0$ olacak şekildeki bir $A \in \mathcal{A}$ kümesine atom denir. Eğer $\mu(X \backslash M) = 0$ olacak şekilde bir $M \subset X$ kümesi mevcutsa ve her $x \in M$ için $\mu(\{x\}) \neq 0$ ise bu $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı bütünüyle atomik(veya sadece atomik veya ayrık) diye adlandırılır. Şayet $\mathcal{A}$ da herhangi bir atom mevcut değil ise $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı atomik olmayan diye adlandırılır [22].

Örnek 2.25. X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A} := P(X)$ olsun. $A \in \mathcal{A}$ için

$$\mu(A) := \begin{cases} A \text{ nın elemanlarının sayısı}, & A \text{ sonlu} \\ \infty, & A \text{ sonsuz} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ bir ölçüdür. Bu ölçüye X üzerinde sayma ölçüsü denir.

Teorem 2.26. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ daki elemanların artan bir dizisi ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{2.3}$$

2. $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{2.4}$$

[23].

Sonuç 2.27. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{2.5}$$

2. $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{2.6}$$

[23].

Teorem 2.28. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $\mathcal{A}$ ya ait kümelerin herhangi bir dizisi $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ olmak üzere

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{2.7}$$

[23].

Tanım 2.29. (Dış Ölçü) X boştan farklı bir küme olsun. $\mathrm{P}(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu için

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall \mathrm{E} \in \mathrm{P}(X),\ \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathrm{P}(X) \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçü denir [23].

Tanım 2.30. (Lebesgue Dış Ölçüsü) $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü adı verilir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.
$n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i \ , \quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v\left(I\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(b_i - a_i\right)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^*\left(E\right) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v\left(I_k\right) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \ , \ I_k \text{ bir aralık}\right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$\lambda^*\left(A\right) = \lambda^*\left(A \cap E\right) + \lambda^*\left(A \cap \left(\mathbb{R}^n - E\right)\right) \qquad \left(\textbf{Caratheodary Ölçümü}\right)$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir [23].

Teorem 2.31. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir [23].

Sonuç 2.32. A sayılabilir bir küme ise $\lambda^*\left(A\right) = 0$.

Sonuç 2.33. $[0, 1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 2.34. (Lebesgue Ölçüsü) $\mathcal{M}\left(\mathbb{R}, \lambda^*\right)$, λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir sınıfı olsun. λ^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}\left(\mathbb{R}, \lambda^*\right)$ sınıfına da $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, λ ile gösterilir [23].

Tanım 2.35. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer,

$$E := \{x \in A : \ V(x) \text{ doğru değildir}\}$$

ile gösterilen bir küme

$$E \subset \mathcal{A} \text{ ve } \mu(E) = 0$$

şartlarını sağlıyorsa $V(x)$, A üzerinde (veya hemen her $x \in A$ için) μ ile bağlantılı olarak hemen her yerde (veya h.h.y) doğrudur denir [22].

Teorem 2.36. (Levi Monoton Yakınsaklık Teoremi) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, ölçülebilir $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ kümesi üzerinde integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ ve hemen her $x \in \Omega$ için

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

olmak üzere

$$\int_{\Omega} f_1(x)\mathrm{d}x > -\infty.$$

Bu durumda hemen her $x \in \Omega$ için

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

limiti mevcut olup f fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\mathrm{d}x$$

eşitliği gerçeklenir [22].

Teorem 2.37. (Radon-Nikodým) $v \in AC[\mu]$ sonlu bir fonksiyon kümesi olsun. Bu durumda Ω üzerinde sonlu Lebesgue integraline sahip bir f fonksiyonu kesinlikle mevcuttur, öyle ki her $E \subset \Omega$ Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri için

$$v(E) = \int_{E} f(x)\mathrm{d}x$$

[22].

Tanım 2.38. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olmasıdır [23].

Şimdi yukardaki tanımda geçen kümelerin şeklini değiştirmeye olanak veren bir lemmayı ifade edelim.

Lemma 2.39. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(i) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$

(iv) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

önermeleri denktir [23].

Teorem 2.40. f ve g ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$cf,\;\; f^2,\;\; \text{f+g},\;\; \text{f.g},\;\; |f|$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir [23].

Tanım 2.41. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.

$$f : A \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ölçülebilirdir } \Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathbb{R},\; f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olmalıdır. X kümesi üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}$ ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir. Eğer $f \in M(X, \mathcal{A})$ ise

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : f(x) = +\infty\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{x \in X : f(x) = -\infty\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq -n\} \\ &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right)^c \end{aligned}$$

olacağından A ve B ölçülebilirdir [23].

Teorem 2.42. $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilirdir $\Longleftrightarrow$

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\},$$

$$B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

kümeleri ve

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \ x \notin A \cup B \\ \quad 0, \ x \in A \cup B \end{cases} \tag{2.8}$$

biçiminde tanımlanan reel değerli f_1 fonksiyonu ölçülebilirdir [2].

Tanım 2.43. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Borel ölçülebilir fonksiyon (veya Borel fonksiyonu) adı verilir. $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ $\sigma-$cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Lebesgue ölçülebilir fonksiyon denir. $\mathbb{R}$ nin Borel kümesi olmayan fakat Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri mevcut olduğundan $\mathbb{R}$ üzerinde herbir Borel ölçülebilir fonksiyon Lebesgue ölçülebilirdir [23].

Tanım 2.44. $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun.

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

biçiminde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^+ fonksiyonuna f nin pozitif parçası, f^- fonksiyonuna da f nin negatif parçası denir.

Bu durumda, tanımdan

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-,$$

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

bağıntıları mevcuttur [23].

Teorem 2.45. $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır [23].

Teorem 2.46. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ise bu durumda

$$\{x \in A : f(x) < g(x)\}, \ \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}, \ \{x \in A : f(x) = g(x)\}$$

kümeleri ölçülebilirdir [23].

Teorem 2.47. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ise $(f \vee g)$ ve $(f \wedge g)$ fonksiyonları ölçülebilirdir [23].

Teorem 2.48. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A \in \mathcal{A}$ üzerinde tanımlı $\overline{\mathbb{R}}$-değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ve $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ fonksiyonları da ölçülebilirdir [23].

Teorem 2.49. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı $\overline{\mathbb{R}}$-değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ ve $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir. Ayrıca tanım kümesi $A_0 = \{x \in A : \limsup\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \liminf\limits_{n \to \infty} f_n(x)\}$ olan $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ fonksiyonu da ölçülebilirdir [23].

Tanım 2.50. (Karakteristik Fonksiyon) X boştan farklı bir küme ve $E \subset X$ olsun.

$$\chi_{E(x)} := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\chi_{E(x)} : X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna E kümesinin karakteristik fonksiyonu denir [22].

Şimdi, negatif olmayan ölçülebilir basit fonksiyonların integrali, daha sonra da negatif olmayan, $\overline{\mathbb{R}}$-reel değerli, ölçülebilir fonksiyonların integrali ile ilgili bilgiler verilecektir. Sonra da $\overline{\mathbb{R}}$-değerli fonksiyonların integrali üzerinde durulacaktır. Önce basit fonksiyonun tanımını verelim.

Tanım 2.51. Görüntü kümesi sonlu elemandan oluşan φ fonksiyonuna basit fonksiyon adı verilir [23].

φ reel değerli bir basit fonksiyon ve χ_{E_k}, E_k kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\mathrm{E}_k}, \quad a_k \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer φ fonksiyonu X üzerinde tanımlı ise

$$\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k = X.$$

Burada E_k kümelerinin seçilişi tek olmadığından φ nin (2.9) tipindeki gösterimi tek değildir. Eğer $a_1, a_2, ..., a_m$ sayıları φ nin X üzerinde aldığı farklı değerler ve

$$\mathrm{E}_k = x \in X \;\; ve \;\; f(x) = a_k$$

seçilirse E_k kümeleri ayrık olur. Bu durumda

$$\varphi := \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\mathrm{E}_k}$$

gösterimine φ fonksiyonunun standart gösterimi adı verilir. X üzerinde tanımlı, reel değerli, $\mathcal{A}$ ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X, \mathcal{A})$, S deki negatif olmayan fonksiyonların kümesi S^+ ile gösterilir [23].

Tanım 2.52. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. a_k sayıları negatif olmayan reel sayılar ve $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler $\mathcal{A}$ ya ait olmak üzere

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X \quad ve \quad \varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\mathrm{E}_k} \tag{2.10}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) \tag{2.11}$$

[23].

Bu tanıma göre φ nin μ ye göre integrali ya negatif olmayan bir reel sayı ya da μ ölçüsünün sonlu olmayan bir ölçü olması haline karşılık gelen $+\infty$ değeridir. Belirtelim ki, φ fonksiyonunun μ ye göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.53. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı $\varphi \in S^+(X, \mathcal{A})$ ve A_k lar ayrık olmak üzere φ nin bir gösterimi $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ olsun. φ nin μ ölçüsüne göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır [23].

Şimdi negatif olmayan basit fonksiyonların integraline ait temel özellikleri verelim.

Teorem 2.54. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $\varphi \in S^+, \Psi \in S^+$ ve $c \geq 0$ olsun. Bu durumda

(i) $\int\limits_X c.\varphi d\mu = c \int\limits_{\mathcal{X}} \varphi d\mu$

(ii) $\int\limits_X (\varphi + \Psi) d\mu = \int\limits_X \varphi d\mu + \int\limits_X \Psi d\mu$

(iii) $\forall x \in X, \varphi(x) \leq \Psi(x) \Rightarrow \int\limits_X \varphi d\mu \leq \int\limits_X \Psi d\mu$

şartları sağlanır [23].

Tanım 2.55. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int\limits_X f d\mu = \sup \int\limits_X \varphi d\mu : \varphi \in S^+ \text{ ve } \varphi \leq f \tag{2.12}$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

$E \in \mathcal{A}$ olsun. f nin μ ye göre E üzerindeki integrali

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f \chi_E d\mu \tag{2.13}$$

şeklinde verilir [23].

Teorem 2.56. $f, g \in M^+(X, \mathcal{A})$ ve E, $F \in \mathcal{A}$ olsun.

(i) $\forall x \in X,\, f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X \mathrm{g} d\mu.$

(ii) $\mathrm{E} \subset F \Rightarrow \int\limits_{\mathrm{E}} f d\mu \leq \int\limits_F f d\mu$

şartları sağlanır [23].

Şimdi integral teorisinin temel teoremlerinden birini ifade edelim.

Teorem 2.57. (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. f_n dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu \tag{2.14}$$

[22].

Teorem 2.58. (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların bir dizisi olsun. Hemen her $x \in X$ için

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

olacak şekilde g bir integrallenebilir fonksiyon olsun. $f_n \to f$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n ve f integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$$

[22].

Lemma 2.59. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay, $A \in \mathcal{A}$ ve $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Bu taktirde A üzerinde tanımlı $\overline{\mathbb{R}}$-değerli, ölçülebilir basit fonksiyonların öyle bir artan φ_n dizisi vardır ki $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ olur. Eğer f sınırlı ise bu yakınsama düzgündür [23].

Teorem 2.60. (i) $f \in M^+$ ve $c \geq 0 \Rightarrow cf \in M^+$ ve

$$\int\limits_X cf d\mu = c \int\limits_X f d\mu.$$

(ii) $f, g \in M^+ \Rightarrow f + g \in M^+$ ve

$$\int\limits_X (f+g) d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu$$

[23].

Teorem 2.61. (Fatou Lemma) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve f_n de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int\limits_X \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int\limits_X f_n d\mu \tag{2.15}$$

[23].

Teorem 2.62. (Beppo-Levi Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\sum f_k$ da X üzerinde tanımlı $[0, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. Bu durumda

$$\int\limits_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_X f_k d\mu \right) \tag{2.16}$$

[23].

Tanım 2.63. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Eğer $\int\limits_X f^+ d\mu$ ve $\int\limits_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde integrallenebilirdir denir. Bu integral

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir [23].

Teorem 2.64. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Bu durumda

$$f \in \mathfrak{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathfrak{L}$$

olur ve bunların biri gerçeklendiğinde

$$\left| \int\limits_X f d\mu \right| \leq \int\limits_X |f| d\mu$$

olur [23].

Teorem 2.65. (Chebyshev Eşitsizliği) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. $\alpha > 0$ için

$$A_\alpha := \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

olmak üzere

$$\mu(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{A_\alpha} f d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_X f d\mu$$

[23].

Teorem 2.66. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, f ile g X üzerinde integrallenebilen reel değerli fonksiyonlar ve α herhangi bir reel sayı olsun. Bu durumda

(i) $\alpha f \in \mathcal{L}$ ve $f + g \in \mathcal{L}$

(ii) $\int\limits_X \alpha f \mathrm{d}\mu = \alpha \int\limits_X f \mathrm{d}\mu$

(iii) $\int\limits_X (f+g)\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\mathrm{d}\mu + \int\limits_X g\mathrm{d}\mu$

şartları sağlanır [23].

2.4. Lebesgue Uzayları

Fonksiyonel analizde, Banach uzayı ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını Lebesgue uzayı $L^p(\mathbb{R}^n)$ oluşturur. Harmonik analizin önemli konularından biri olan Lebesgue uzayı, harmonik analizin iç problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde de uygulamalara sahiptir.

Tanım 2.67. $\mathbb{R}^n$ ile n boyutlu Öklid uzayını gösterelim.
$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,,\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \geq 0$$

olsun. Tüm $\mathbb{R}^n$ de veya $\mathbb{R}^n$ in bir alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon $g(x) = g\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ ve f, $[0, \infty)$ da hemen her yerde tanımlı tek değişkenli fonksiyon olsun. Eğer n-değişkenli bir g fonksiyonu herhangi bir tek değişkenli f fonksiyonunun yardımıyla $g(x) := f\left(|x|\right)$ şeklinde gösterilebiliyorsa g fonksiyonuna radyal fonksiyon denir. Yani

$$g\left(x_1, \ldots, x_n\right) = f\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)$$

[23].

Tanım 2.68. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1 \ldots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsü ve $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f\left(x\right) dx = \int \cdots \int f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_n$$

şeklinde gösterilir.

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $\mathrm{S}^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ ile birim küre gösterilsin.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx$$

integralinin hesabı için

$0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \theta_1, ..., \theta_{n-2} \leq \pi,\ 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ olmak üzere

$x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

...

$x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-1}$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}) = r^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(\sin\theta_j)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx &= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^{2\pi} f(r)\, J(r,\theta)\, dr d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} \\
&= \int\limits_0^\infty r^{n-1} f(r)\, dr \int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{n-1}(\sin\theta_j)^{n-1-j}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} \\
&= \omega_{n-1}\int\limits_0^\infty f(r)\, r^{n-1} dr
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada ω_{n-1}, birim kürenin yüzey alanıdır. Genel olarak

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int\limits_0^\infty\int\limits_{S^{n-1}} f(r\sin\theta_1, ..., r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-1})\, r^{n-1} dr d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\
&= \int\limits_0^\infty\int\limits_{S^{n-1}} f(r,\theta)\, r^{n-1} dr d\sigma
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. dx hacim elemanı $dx = r^{n-1} dr d\sigma$ biçiminde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür. Ayrıca,

$$|B(x,r)| = \int_{B(x,r)} dy = \int_{\{x\in\mathbb{R}^n; |x-y|<r\}} dy = \int_{\{z\in\mathbb{R}^n: |z|<r\}} dz = |B(0,r)|$$

ve

$$\begin{aligned} |B(x,r)| &= \int_{B(x,r)} dz = \int_0^r \int_{S^{n-1}} t^{n-1} dt d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^r t^{n-1} dt \\ &= |S^{n-1}| \frac{r^n}{n} = \omega_n r^n \end{aligned}$$

[25].

Tanım 2.69. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı veya Ω bölgesinde p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

seklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_{L^p}$ gösterimine f fonksiyonunun $L^p(\Omega)$-normu denir.

Ω bölgesinde hemen her x için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna hemen heryerde sınırlıdır denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin Ω

bölgesindeki esas supremumu (veya esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \text{ess inf}\,\{K : |f(x)| \leq K \quad \textbf{hemen her } x \in \Omega\}$$

seklinde gösterilir. Ω bölgesindeki hemen heryerde sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ seklinde gösterilir. Buna göre bir f fonksiyonunun $L^\infty-$normu

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır [22].

Tanım 2.70. (Zayıf Lebesgue Uzayı) $1 \leq p < \infty$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\|f\|_{WL^p} := \sup_{\lambda>0} \lambda \left(\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere zayıf Lebesgue uzayı

$$WL^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f - \text{ölçülebilir ve } \|f\|_{WL^p} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır [13, 25].

Uyarı 2.71. $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow WL^p(\mathbb{R}^n)$. Ayrıca

$$\|f\|_{WL^p} \leq \|f\|_{L^p}$$

eşitsizliği sağlanır [13, 25].

Tanım 2.72. ((p,q) **tipli operatör**) T bir quasi-lineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise zayıf (p,q) tipindendir denir. Yani her bir $\lambda > 0$ ve f $\in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T\text{f(x)}| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|\text{f}\|_{L^p}\right)^q$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü zayıf (p,q) tipindendir.

Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise güçlü (p,q) tipindendir denir. Yani her f $\in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|T\mathrm{f}\|_{L^q} \leq C\|\mathrm{f}\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü güçlü (p,q) tipindendir [22].

Uyarı 2.73. Her güçlü (p,q) tipli operatör aynı zamanda zayıf (p,q) tipli operatördür [22].

Sonuç 2.74. (Lebesgue Diferansiyelleme Teoremi) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen her x için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

[22].

Teorem 2.75. (Hölder eşitsizliği) $p \in (1,\infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $f \in L^p$ ve $g \in L^{p'}$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1$ olur ve

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}} \tag{2.17}$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Teorem 2.76. (Minkowski eşitsizliği) $p \in [1,\infty)$ ve $f, g \in L^p$ olsun. Bu durumda $(f+g) \in L^p$ olmak üzere

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \tag{2.18}$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Lebesgue integralinin özellikleri ve Hölder eşitsizliği gözönüne alındığında L^p uzayının $1 \leq p < \infty$ için bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla beraber bir $f \in L^p$ olmak üzere $\|f\|_{L^p}$ normu altında;

$(L1)$ $\|f\|_{L^p} \geq 0$

$(L2)$ $\|f\|_{L^p} = 0 \Rightarrow$ h.h.y $f(x) = 0$

$(L3)$ $\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p}, \alpha \in \mathbb{R}$

$(L4)$ $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

şartları sağlandığından $1 \leq p < \infty$ için L^p bir normlu uzaydır.

Teorem 2.77. (Young eşitsizliği) $p \in (1, \infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a, b > 0$ ve $p' = \frac{p}{p-1}$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{2.19}$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Tanım 2.78. (L^p uzayında yakınsaklık) $f_n, f \in L^p$ olmak üzere $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna p. mertebeden yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon$ olmasıdır.

Burada

$$\|f_n - f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Buna göre, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna L^p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$$

olmasıdır [22].

Teorem 2.79. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ uzayı

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolaysıyla Banach uzayıdır [23].

Teorem 2.80. (Fubini) f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\, dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{m}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} |f(x,y)|\, dx \right) dy$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{m}} |f(x,y)|\, dy \right) dx$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallenebilen bir g fonksiyonu vardır öyle ki $g(y)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda

(a) Hemen her $y \in \mathbb{R}^m$, $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(b) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(c) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y)\, dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(d) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot)\, dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(e) $I_1 = I_2 = I_3$

şartları elde edilir [22].

Tanım 2.81. (Homojen Fonksiyon) λ ve α iki reel sayı olmak üzere

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna α. dereceden homojen fonksiyon denir [22].

Tanım 2.82. (Örtü) Birleşimleri A kümesini kapsayan $\bigcup\limits_i$ kümeler ailesine A kümesinin bir örtüsüdür denir. Bu $\bigcup\limits_i$ kümelerinin her biri açıksa bu halde $\bigcup\limits_i$, A kümesinin açık örtüsüdür denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün alt örtüsü ismi verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye sonlu alt örtü denir [2].

Tanım 2.83. (Kompaktlık) X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine “kompakttır” denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani, kapalı ve sınırlı her küme kompakttır [2].

Tanım 2.84. (Destek) (X, ϱ) bir metrik uzayı ve $f : X \to [0, \infty]$ olsun. $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışına f fonksiyonunun desteği denir ve

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}}$$

ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f kompakt destekli fonksiyon adını alır [22].

Tanım 2.85. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ metrik ile verilen bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı olsun. Bu durumda bir $s : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun basit olması için gerek ve yeter koşul s fonksiyonunun görüntüsü sonlu bir küme ve desteğinin sonlu ölçülü olmasıdır [22].

Teorem 2.86. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise L^p deki basit fonksiyonların kümesi L^p de yoğundur [23].

Tanım 2.87. (Lokal İntegrallenebilme) f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her K kompakt kümesi üzerinde

$$\int\limits_K |f| \, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal(veya yerel) integrallenebilir adı verilir ve

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \int\limits_K |f| \, d\mu \ < \ \infty, \ K \subset \mathbb{R}^n, \ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \left(\int\limits_K |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ < \ \infty, \ K \ \subset \ \mathbb{R}^n, \ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Teorem 2.88. $1 \leq p \leq \infty \Rightarrow L_p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ [23].

Şimdi, $L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty$ uzayının $[L^p(\Omega)]^*$ dual uzayını ifade eden tanımı verelim.

Tanım 2.89. (Dual Uzayı) $g \in L^{p'}$ olmak üzere $f \in L^p(\Omega)$ için

$$\Phi_g(f) := \int\limits_\Omega f(x)g(x)dx$$

gösterilsin. Bu durumda,

$$\Phi_g \in [L^p(\Omega)]^*$$

ve

$$\|\Phi_g\| = \|g\|_{p'}$$

[22].

Lemma 2.90. Ω, $\mathbb{R}^n$ nin bir boş olmayan sınırlı açık alt kümesi ve g de Ω üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Kabul edelimki $p > 1$ ve $M > 0$ mevcuttur öyle ki keyfi bir $f \in L^p(\Omega)$ için

$$f \cdot g \in L^1(\Omega)$$

ve

$$\left| \int\limits_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq M\|f\|_p.$$

Bu durumda $g \in L^{p'}(\Omega)$ ve $\|g\|_{p'} \leq M$ [22].

Teorem 2.91. (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) (X, μ) ve (Y, v) ölçü uzayı $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, T $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ den Y ye zayıf (p_0, p_0) ve zayıf (p_1, p_1) tipli alt lineer operatör olsun. O halde $p_0 < p < p_1$ için T kuvvetli (p, p) tiplidir [10].

2.5. Maksimal Operatörü

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ilk olarak Hardy ve Littlewood tarafından bir boyutlu durumda, kompleks analizin uygulamalarına yönelik olarak tanımlanmıştır. Maksimal fonksiyon, analizde pek çok operatörün sınırlılığında çok önemli bir role sahiptir. Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun farklı tanımları aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.92. $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{-1} \int\limits_{B(0,r)} |f(x-y)|dy$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon $+\infty$ a eşit olabilir [13]

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu yuvar yerine küp alınarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 2.93. $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer Q_r, $[-r,r]^n$ kübü ise $M'f$ merkezli Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int\limits_{Q_r} |f(x-y)|\, dy$$

şeklinde tanımlanır. $n = 1$ iken M ve M' çakışır. Eğer $n > 1$ ise bu durumda

$$c_n M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_n M'f(x)$$

olacak şekilde sadece n boyutuna bağlı c_n ve C_n sabitleri vardır. Bu eşitsizlikten dolayı M ve M' operatörleri uygun koşullara göre değiştirilebilir [16].

Tanım 2.94. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $M''f$ merkezli olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M''f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int\limits_{B} |f(y)|dy$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum x i içeren bütün $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarları üzerinden alınmaktadır. M ve M'' noktasal olarak eşdeğerdir.

M maksimal operatörü altlineer ve homojendir. Yani,

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \quad \text{ve} \quad M(\lambda f) = \lambda(Mf), \ \forall\lambda \geq 0$$

sağlanır [27, 10].

Aşağıdaki teorem M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün hemen her yerde sonlu, zayıf $(1,1)$ ve $1 < p \leq \infty$ için (p,p) tipinden bir operatör olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2.95.

(1) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) < \infty$.

(2) $p = 1$ ise bu durumda $\forall\lambda > 0$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

(3) $1 < p \leq \infty$ ise $\forall f \in L^p$ için

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C = C(n,p) > 0$ sabiti vardır [13, 16].

2.6. Riesz potansiyeli

f yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in S$ olmak üzere

$$F^{-1}\left(\hat{f}(x)\right) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy$$

dir. $e^{i(xy)} = e^{i(x_1 y_1 + ... + x_n y_n)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (-\Delta) f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\Delta e^{i(xy)}\right) \hat{f}(y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1^2} e^{ix_1 y_1} - \frac{\partial}{\partial x_2^2} e^{ix_2 y_2} - ... + \frac{\partial}{\partial x_n^2} e^{ix_n y_n}\right) \hat{f}(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^2 e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy \end{aligned}$$

$$I_\alpha f = F^{-1} |y|^{-\alpha} F, \quad f \in S \tag{2.20}$$

olduğundan

$$\Rightarrow (-\Delta) f = F^{-1} |y|^2 F f$$

yazılabilir. Bilindiği gibi Laplace operatörü eliptik operatördür. R. Seeley [26] göstermiştir ki eğer bir eliptik L operatörü için

$$Lf = F^{-1} \phi(x) F f$$

formülü mevcut ise o zaman onun istenilen kompleks kuvveti için

$$L^z f = F^{-1} \phi^z(x) F f$$

geçerlidir. Dolayısıyla bu teoreme göre Laplace operatörü için

$$(-\Delta)^z f = F^{-1} |y|^{2z} Ff$$

yazılabilir. Dolayısıyla görünür ki $z = -\frac{\alpha}{2}$ için

$$(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = F^{-1} |y|^{-\alpha} Ff \tag{2.21}$$

geçerlidir. Yani (2.20) ve (2.21) den görünür ki Riesz potansiyelinin ve $-\Delta$ nın negatif kesir kuvvetinin genelleşmiş anlamda Fourier dönüşümleri aynıdır. Bu durumda

$$I_\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} \ , \ \ 0 < \alpha < n \tag{2.22}$$

ifadesi yazılabilir. (2.22) formülü Riesz potansiyelinin ne kadar önemli bir operatör olduğunu gösterir. Çünkü (2.21) in yardımıyla Laplace operatörünün negatif kesir kuvvetleri tanımlanabilir, burada $0 < \alpha < n$ ve

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

I_α operatörüne Riesz potansiyeli denir.

Teorem 2.96. (Riesz Potansiyeli İçin Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi)

$o < \alpha < n, 1 \leq p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

(i) Eğer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\left(I_\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n+\alpha} f(y)dy$$

integrali hemen her x için mutlak yakınsaktır.

(ii) Eğer $p > 1$ ise bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq A_{p,q} \|f\|_{L^p}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

(iii) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$m\left\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\right\} \leq \left(\frac{A\|f\|_{L^1}}{\lambda}\right)^q, \text{ T üm } \lambda \text{ lar için}$$

Yani, $f \to I_\alpha f$ dönüşümü $(1, q)$ zayıf tiptir $\left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}\right)$ [25].

İspat. $K(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ olsun. $f \to I_\alpha * f$ dönüşümü yerine $f \to K * f$ dönüşümünü göz önüne alalım (İki dönüşüm arasında bir sabitle$\left(\frac{1}{\gamma(\alpha)}\right)$ çarpım kadar fark vardır). K yı $K_1 + K_2$ olarak ayrıştıralım. Burada

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x) \ , \ |x| \leq \mu \\ \quad 0 \quad \ , \ |x| > \mu \end{cases} \qquad K_2(x) = \begin{cases} K(x) \ , \ |x| > \mu \\ \quad 0 \quad \ , \ |x| \leq \mu \end{cases}$$

biçimindedir. Burada μ herhangi bir pozitif sabittir. Buradan

$$K * f = K_1 * f + K_2 * f$$

elde edilir. $K_1 * f$ ve $K_2 * f$ nin hemen her x için mutlak yakınsak olduğu gösterilirse $K * f$ nin hemen her x i çin mutlak yakınsak olduğu, dolayısıyla $I_\alpha f$ nin hemen her x için mutlak yakınsak olduğu gösterilmiş olur.

$$\left(K_1 * f\right)(x) = \int\limits_{|x| \leq \mu} K_1(x-t) f(t)dt = \int\limits_{|x| \leq \mu} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt$$

Young Teoreminden;

$$\begin{aligned}\|K_1 * f\|_{L^p} &\leq \|f\|_{L^p} \int\limits_{|x|\leq\mu} \frac{1}{|x-t|^{n-\alpha}} dt \\ &= \|f\|_{L^p} w_{n-1} \int\limits_0^{\mu} \rho^{\alpha-1} d\rho \\ &= \|f\|_{L^p} w_{n-1} \frac{\mu^\alpha}{\alpha} < \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow K_1 * f$ hemen her x için mutlak yakınsaktır.

$$(K_2 * f)(x) = \int\limits_{|x|>\mu} K_2(x-t) f(t) dt = \int\limits_{|x|>\mu} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt$$

dir. $p^{'}$, p nin dualini belirtmek üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$ olduğundan, Hölder eşitsizliğinden

$$(K_2 * f)(x) = \int\limits_{|x|>\mu} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt \leq \left[\int\limits_{|x|>\mu} \frac{1}{\left(|x-t|^{n-\alpha}\right)^{p^{'}}} dt \right]^{\frac{1}{p^{'}}} \|f\|_{L^p}$$

elde edilir. Parantez içindeki integralin yakınsak olması için $(n-\alpha)p^{'} > n$ olması gerekir.

$$\begin{aligned}(n-\alpha)p^{'} &= n\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p^{'} = n\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)p^{'} = n\left(\frac{1}{p^{'}}+\frac{1}{q}\right)p^{'} = n\left(1+\frac{p^{'}}{q}\right) > n \\ &= \|f\|_{L^p} \left(w_{n-1} \int\limits_{\mu}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{(n-\alpha)p^{'}}} d\rho \right)^{\frac{1}{p^{'}}} = \|f\|_{L^p} \left(c^{'} w_{n-1} \mu^{n-(n-\alpha)p^{'}} \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\ &\quad \left\{ \frac{n}{p^{'}} - (n-\alpha) = n\left(\frac{1}{p^{'}} - 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{-n}{q} \right\} \\ &\leq c_1 \|f\|_{L^p} \mu^{-\frac{n}{q}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|K_2 * f\|_{L^1} \leq c_1 \|f\|_{L^p} \mu^{-\frac{n}{q}}$

$\Rightarrow \|K_2 * f\|_{L^1} < \infty$ olup

$\Rightarrow K_2 * f$ hemen her x için mutlak yakınsaktır. O halde

$\Rightarrow K * f = K_1 * f + K_2 * f$ olduğundan

$\Rightarrow K * f$ hemen her x için mutlak yakınsaktır.

Böylece $I_\alpha f$ nin hemen her x için mutlak yakınsak olduğu elde edilir.

Dolayısıyla teoremin (i) ifadesi ispatlanmış olur. şimdi (iii) yi ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
(I_\alpha f)(x) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \qquad (y \to x+y) \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|\leq\alpha} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|>\alpha} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \\
&= (I_{\alpha_1} f)(x) + (I_{\alpha_2} f)(x)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

elde edilir. (2.23) den

$$\{x : |(I_\alpha f)(x)| > 2\lambda\} \subset \{x : |(I_{\alpha_1} f)(x)| > \lambda\} \cup \{x : |(I_{\alpha_2} f)(x)| > \lambda\}$$

gerçeklenir. O halde yukarıdaki kümenin ölçüsü

$$m\{x : |(I_\alpha f)(x)| > 2\lambda\} \leq m\{x : |(I_{\alpha_1} f)(x)| > \lambda\} + m\{x : |(I_{\alpha_2} f)(x)| > \lambda\} \tag{2.24}$$

şeklindedir. şimdi bu ifadeleri ayrı ayrı hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
m\{x : |(I_{\alpha_1} f)(x)| > \lambda\} &= \int\limits_{m\left\{x:\left|\left(I_{\alpha_1} f\right)(x)\right|>\lambda\right\}} 1^p dx \\
&\leq \int\limits_{m\left\{x:\left|\left(I_{\alpha_1} f\right)(x)\right|>\lambda\right\}} \left|\frac{(I_{\alpha_1} f)(x)}{\lambda}\right|^p dx \\
&\leq \frac{1}{\lambda^p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(I_{\alpha_1} f)(x)|^p dx \\
&= \frac{1}{\lambda^p} \|I_{\alpha_1} f\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Young teoreminden

$$m\{x : |(I_{\alpha_1} f)(x)| > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^p} \|I_{\alpha_1} f\|_{L^p}^p = \frac{1}{\lambda^p} A^p \|K_1 * f\|_{L^p}^p \leq \frac{A^P}{\lambda^P} \|K_1\|_{L^1}^p \|f\|_{L^p}^p$$

bulunur. Buradan

$$\|K_1\|_{L^1}^p = \left(\int\limits_{|x|\leq\mu} \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} dx \right)^p = \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_0^\mu \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-\alpha}} d\rho dx' \right)^p \tag{2.25}$$

$$= \left(w_{n-1} \int\limits_0^\mu \rho^{\alpha-1} d\rho \right)^p = \left(w_{n-1} \frac{\rho^\alpha}{\alpha} \Big|_0^\mu \right)^p$$

$$= \frac{w_{n-1}^p}{\alpha^p} \mu^{\alpha p} = c^p \mu^{\alpha p}$$

$$m\left\{x : \left|\left(I_{\alpha_1} f\right)(x)\right| > \lambda\right\} \leq \frac{c_1 \mu^{\alpha p}}{\lambda^p} \|f\|_{L^p}^p = c_1 \left(\frac{\mu^\alpha}{\lambda} \|f\|_{L^p} \right)^p$$

elde edilir. Ayrıca Hölder eşitsizliğinden

$$m\left\{x : |(I_{\alpha_2} f)(x)| > \lambda\right\} \leq \frac{A'}{\lambda} \|K_2\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$$\|K_2\|_{L^{p'}} = \left(\int\limits_{|x|>\mu} \frac{1}{\left(|x|^{n-\alpha}\right)^{L^{p'}}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} = c_2 \mu^{-\frac{n}{q}}$$

olduğundan ve

$$\|K_2\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} = c_2 \mu^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^p} = \lambda$$

seçilirse $\|K_2 * f\|_{L^1} \leq \lambda$ ve böylece $m\left\{x : |K_2 * f| > \lambda\right\} = 0$ elde edilir.

$$\Rightarrow \mu^{-\frac{n}{q}} = \frac{\lambda}{c_2 \|f\|_{L^p}} \Rightarrow \mu = \left(\frac{c_2 \|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^{\frac{q}{n}} \tag{2.26}$$

(2.24), (2.25), (2.23) de kullanılır ve (2.24) de μ nun yerine (2.26) daki ifadesi yazılırsa

$$
\begin{aligned}
m\left\{x : |(I_\alpha f)(x)| > 2\lambda\right\} &\le c_1 \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda} \left(\frac{c_2 \|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^{\frac{q\alpha}{n}} \right)^p \\
&= c_{p,q} \frac{\|f\|_{L^p}^p}{\lambda^p} \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^{\frac{q\alpha p}{n}} \\
\frac{\alpha}{n} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{\alpha q p}{n} = q - p \\
&= c_{p,q} \frac{\|f\|_{L^p}^p}{\lambda^p} \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^{q-p} = c_{p,q} \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^q
\end{aligned}
$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede $p = 1$ için $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alındığında $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere zayıf $(1, q)$ tipinde operatördür. Böylece (iii) ifadesi ispatlanmış olur.

Şimdi (ii) yi ispatlayalım. İspatı yaparken Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi' nden yararlanacağız. (iii) den dolayı I_α zayıf $(1, q_0) = \left(1, \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}}\right)$ tipli operatördür. $(p_1, q_1) = \left(p_1, \frac{1}{\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}}\right)$ tipli operatör, (p_0, p_1), (q_0, q_1) sayılarını Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi'ne uygun olarak seçelim. I_α zayıf (p_0, q_o) ve (p_1, q_1) tipli operatördür. Bu durumda Marcinkiewicz Teoremi' nden

$$
0 < \theta < 1 \text{ ve } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}
$$

olmak üzere I_α kuvvetli (p, q) tipli operatördür.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} = (1-\theta)\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) + \theta\left(\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{n} - \theta + \theta\frac{\alpha}{n} + \frac{\theta}{p_1} - \frac{\alpha}{n}\theta \\
&= 1 - \theta - \frac{\alpha}{n} + \frac{\theta}{p_1} \\
&\quad \left(\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p_1} \text{ olduğundan} \right) \\
&= \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \text{ veya } \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}
\end{aligned}
$$

olduğundan Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi' nden

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq c\,\|f\|_{L^p}\,, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

2.7. Singüler İntegral Operatörü

Tanım 2.97.

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{supp} f$$

Calderón-Zygmund operatörü $T : C_0^\infty \to L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli lineer operatördür. $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca

$$K(x,y) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ x = y\Big\}$$

dışında sürekli bir fonksiyondur ve $c_1 > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ olmak üzere
(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \ x \neq y$ için

$$|K(x,y)| \leq c_1 |x-y|^{-n}.$$

(ii) 2 $|x - x'| \leq |x - y|$ için

$$|K(x,\ y) - K(x',\ y)| + |K(y,\ x) - K(y,\ x')| \leq c_1 \left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right) |x-y|^{-n}$$

eşitsizlikleri sağlanır [3].

Önerme 2.98. T Calderón-Zygmund operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır ve zayıf $(1,1)$ tiplidir [11].

Teorem 2.99. T Calderón-Zygmund operatörü olsun. Bu durumda p ye bağlı olmayan $c > 0$ sabiti için

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \;\le\; c\left(\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2-p}\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<2,$$

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \;\le\; c\left(p+\frac{p}{p-2}\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad p>2$$

gerçeklenir [21].

3. $H^p(\mathbb{R}^n)$ UZAYLARI

Klasik H^p uzayı 1971 yılında Duren [12] tarafından bazı analitik fonksiyonlar için tanımlandı. $H^p(\mathbb{R}^2_+)$ uzayı, $\mathbb{R}^2_+$ üst yarı düzlemde analitik ve

$$\sup_{0<y<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p dx < \infty, \ \ 0 < p < \infty$$

şartını sağlayan F fonksiyonlarını içeren uzay olarak adlandırılır. $F \in H^p(\mathbb{R}^2_+)$ ise bu durumda F nin reel kısmının sınır değerleri için

$$\lim_{y \longrightarrow 0} ReF(x+iy) < \infty.$$

(Genellikle, sınır değer, $\mathbb{R}$ de bir dağılım gibidir.) Böylece, $H^p(\mathbb{R}^2_+)$ deki fonksiyonlarının tüm sınır değerleri toplamlarından bir uzay tanımlanabilir öyle ki bu uzaya $H^p(\mathbb{R})$ (reel Hardy) uzayı denir. Yani

$$ReH^p(\mathbb{R}) = f : f(x) = \lim_{y \longrightarrow 0} ReF(x+iy), \ \ F \in H^p(\mathbb{R}^2_+).$$

$ReH^p(\mathbb{R})$ uzayı; $p > 1$ için, $L^p(\mathbb{R})$ uzayı ile özdeş ve $0 < p \leq 1$ için $L^p(\mathbb{R})$ uzayından tamamen farklıdır.

n boyutlu Fourier analizin gelişimi ile birlikte, $ReH^p(\mathbb{R})$ uzayının n boyutlu versiyonları doğal bir problem olmuştur. E. M. Stein ve G. Weiss [28], $H^p(\mathbb{R}^2_+)$ de Cauchy-Riemann şartını sağlayan fonksiyonun reel ve imajinel kısımlarının olduğu gerçeğine dayanarak genelleştirilmiş Cauchy-Riemann denklemlerinin kavramlarını önerdiler ve $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ uzaylarını tanımladılar. $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ de harmonik fonksiyonlarının bir sistemi olarak,

$$F(x_1, \cdots, x_n, y) = (u_0(x_1, \cdots, x_n, y), \cdots, u_n(x_1, \cdots, x_n, y));$$

$x_0 = y$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad 0 \leq i, j \leq n, \\ \\ \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \ , \end{cases} \tag{3.1}$$

genelleştirilmiş Cauchy-Riemann denklemlerini sağlasın. Şimdi, $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ uzayları,

$$H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \{F : F \quad (3.1) \ \text{sağlasın ve} \sup_{0<y<\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x+y)|^p dx < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde, $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ deki elemanlarının ilk birleşenlerinin sınır değerlerini kullanarak, $H^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$ReH^p(\mathbb{R}^n) = H^p(\mathbb{R}^n) =: \{f : f(x) = \lim_{y \to 0} u_0(x, y), \ \ F \in H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)\}.$$

Burada şunu belirtelim ki Stein ve Weiss, yalnızca $p > (n-1)/n$ için $ReH^p(\mathbb{R}^n)$ uzayını tanımladılar. Daha sonra, A.P. Calderón ve A. Zygmund [5], tüm p ler için ,
$0 < p < \infty$, p nin limit durumunu kaldırarak $ReH^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının bir tanımını verdiler öyle ki bu tanım günümüzde kullanılan reel Hardy uzayları tanımıdır.

E. M. Stein ve G. Weiss [28] ve A.P. Calderón ve A. Zygmund [5] tarafından verilen $ReH^p(\mathbb{R}^n)$ reel Hardy uzaylarının ilk tanımı analitik fonksiyonlarla yakından ilişkilidir. 1970'li yıllarda reel Hardy uzaylarının reel değişkenli karakterini ifade eden yeni gelişmeler ortaya çıkmıştır. Aslında, Hardy ve Littlewood daha önce ki yıllarda "$f \in ReH^p(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad P^*_\bigtriangledown(f)(x) := \sup_{|y-x|<t} |(f * P_t)(y)| \in L^p(\mathbb{R})$" önermesinin doğru olduğunu göstermişlerdi. 1971 yılında D.L. Burkholder, R.F. Gundy ve M.L. Silverstein [4] bu önermenin tersinin de doğru olduğunu gösterdi. Böylece, "$f \in ReH^p(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad f \in P^*_\bigtriangledown(f)(x)$," ($P^*_\bigtriangledown(f)(x)$; ($f$ fonksiyonunun Poisson teğet olmayan maksimal fonksiyonu.) Açıkçası, $ReH^p(\mathbb{R})$ uzayının bu karakteri, analitik fonksiyonların özellikleri kullanılarak verilen yukarıdaki tanımından bağımsızdır. Fakat bu karakterizasyon hala tam anlamıyla harmonik fonksiyonlara bağlı olmaktan kurtulamamıştır. Çünkü tanımda Poisson çekirdeği kullanılmaktadır. Böylece ortaya "Poisson

çekirdeği birime yaklaşık başka bir çekirdekle değiştirilebilr mi?" sorusu çıktı. 1972 yılında, C. Fefferman, E. M. Stein [15] bu soruya olumlu cevap verdiler ve reel değişkenli metodlardan n-boyutlu versiyonu için yukarıdaki karakterisazyonlar genişlettiler ve $ReH^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının tanımına denk bir karakterizasyonu elde ettiler.

3.1. $H^p(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarının Karakterizasyonu

Bundan sonra tez konusunda özellikle bir fonksiyon uzayı olarak Schwartz fonksiyonlar uzayı gözönüne alınacaktır. Gayri resmi olarak, bunların türevleri sonsuzdaki herhangi bir polinomdan daha hızlı bozulan sonsuz türevlenebilir fonksiyonlardır. $\mathbb{R}$ de birçok fonksiyonun entegre edilmesini sağlayan bir özellik Schwartz fonksiyonu ile çarpılır. .

Tanım 3.1. (Schwartz fonksiyonları) Schwartz fonksiyonları,

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)|$$

olmak üzere

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlanır [7].

$\|.\|_{\alpha,\beta} < \infty$ normu, bir normun özelliklerinin çoğuna sahip olduğu için yarı-norm olarak adlandırılır, ancak sıfır olmayan vektörlerin sıfıra eşlenmesi mümkün olduğundan bu dönüşüm gerçek bir norm değildir. Schwartz fonksiyonlarının bir başka yararlı özelliği, noktasal toplama ve skaler çarpmanın standart işlemleri altında bir vektör uzay yapısı oluşturmalarıdır. Bu ek yapı, birçok lineer cebir teoreminden yararlanmamızı sağlar, özellikle $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlanan lineer fonksiyonları anlamlandırabilir. Ayrıca belirtelim ki, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, polinomlar ve sınırlı $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonlar ile türev alma ve çarpma altında kapalıdır.

Örnek 3.2. $R > 0$ olsun. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ üzerinde herhangi bir $\varphi(x)$ fonksiyonu $\varphi(x) = 0$ ise bir Schwartz fonksiyonudur [7].

Birçok uzay da olduğu gibi, bu fonksiyon uzayları, üzerlerinde fonksiyonlar tanımlandığında daha ilginç hale gelir.

Ω bir fonksiyon uzayı olmak üzere,

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

dönüşümü bir fonksiyonel dönüşüm olarak adlandırılır.

Örnek 3.3. $I : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $I[u] = \int_0^1 u(x)dx$ olsun. I bir fonksiyoneldir [7].

Lemma 3.4. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ fonksiyonlar uzayı,

$$d : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}} 2^{-\alpha-\beta} \frac{\|f-g\|_{\alpha,\beta}}{1+\|f-g\|_{\alpha,\beta}}, \;\; f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan metriğe göre bir metrik uzaydır [7].

Tanım 3.5. (Tempered Dağılımlar)

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bir fonksiyonel olsun. Eğer T, hem lineer hem de sürekli ise tempered dağılım olarak adlandırılır [7].

Tanım 3.6. f, $\mathbb{R}^n$ de bir tempered dağılım fonksiyonu ve P Poisson çekirdeği

$$P = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

olsun. Eğer

$$P^*_{\bigtriangledown}(f)(x) := \sup_{|y-x|<t} |(f * P_t)(y)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

Poisson teğet olmayan maksimal fonksiyon ise bu durumda $f \in ReH^p(\mathbb{R}^n)$, burada
$\{(y,t) : |y-x| < t\}$ kümesi,
$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(y,t) : y \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ de bir koni,
$P_t(x) = t^{-n}P(x/t)$

ve $\Gamma(x) = \{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : |y-x| < t\}$.
Sadelik için bundan sonra $ReH^p(\mathbb{R}^n)$ yerine $H^p(\mathbb{R}^n)$ yazılacaktır [20].

Tanım 3.7. $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ve $\int \varphi(x)dx = 1$ olmak üzere

$$\varphi^*_{\bigtriangledown}(f)(x) = \sup_{|y-x|<t} |(f * \varphi_t)(y)|$$

ile tanımlanan $\varphi^*_{\bigtriangledown}(f)$ fonksiyonu, f'nin $\varphi-$ teğet olmayan maksimal fonksiyonu olarak adlandırılır [20].

Tanım 3.8. $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ve $\int \varphi(x)dx = 1$ olmak üzere

$$\varphi^*_+(f)(x) := \sup_{t>0} |(f * \varphi_t)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

ile tanımlanan $\varphi^*_+(f)$ fonksiyonu, f'nin radyal maksimal fonksiyonu olarak adlandırılır [20].

Tanım 3.9. $m \in \mathbb{N}$ ve

$$K_m = \{\Phi \in S(\mathbb{R}^n) : \sup_{u \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \le m} (1+|u|)^{m+n} |D^\alpha \Phi(u)| \le 1\}$$

olmak üzere

$$f^*_m(x) = \sup_{\Phi \in K_m} \Phi^*_{\bigtriangledown}(f)(x)$$

ile tanımlanan $f^*_m(x)$ fonksiyonu, f'nin Grand maksimal fonksiyonu olarak adlandırılır.
Uygunluk için, eğer

$$\|\Phi\|_{K_m} = \sup_{u \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \le m} (1+|u|)^{m+n} |D^\alpha \Phi(u)|$$

olarak alınırsa, $f^*_m(x)$ fonksiyonu

$$f^*_m(x) = \sup_{\|\Phi\|_{K_m} \le 1} \Phi^*_{\bigtriangledown}(f)(x)$$

olarak yeniden yazılabilir [20].

Aşağıda Fefferman ve Stein [15] tarafından verilen teorem ve önermeleri ispatsız olarak verelim.

Teorem 3.10. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$

(2) $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ile $\int \varphi(x)dx = 1$ vardır, öyle ki $\varphi_+^*(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(3) $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ile $\int \varphi(x)dx = 1$ vardır, öyle ki $\varphi_\nabla^*(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(4) $P_+^*(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(5) $f_m^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ek olarak, $H^p(\mathbb{R}^n)$ uzayları Lusin alan integralleri [15] tarafından da karakterize edilebilir.

(6) $S(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\lim\limits_{t \mapsto \infty}(f * P_t)(x) = 0$ dır. Burada

$$S(f)(x) = \Big\{ \int_{\Gamma(x)} \int |\nabla(f * P_t)(y)|^2 t^{1-n} dydt \Big\}^{1/2}$$

ve

$$\Gamma(x) = \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : |y - x| < t\}$$

[15].

Lemma 3.11. $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ile $\int \varphi(x)dx = 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer $\varphi_+^*(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$\|\varphi_\nabla^*(f)\|_p \leq C_{p,n} \|\varphi_+^*(f)\|_p.$$

Önerme 3.12.

(1) Eğer $1 < p < \infty$ ise $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

(2) $p = 1$ olduğu zaman H^1 Hardy uzayı L^1 uzayının öz alt uzayıdır.

(3) Eğer $0 < p \leq 1$ ve $1 \leq q < \infty$ ise $H^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayı $H^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğundur [15].

3.2. $H^p(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarında Ayrışma Teorisi

Tanım 3.13. $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, ve $s \geq [n(\frac{1}{p} - 1)]$ olsun. Eğer $a(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu

(i) Supp $a \subset B(x_0, r)$,

(ii) $\|a\|_q \leq |B(x_0, r)|^{1/q-1/p}$,

(iii) $\int a(x)x^\alpha dx = 0, 0 \leq |\alpha| \leq s$

şartlarını sağlıyorsa x_0 merkezli (p, q, s)- atom olarak adlandırılır [20].

Buradan açıktır ki, eğer $p < q < \infty$ ise (p, ∞, s)- atomu, (p, q, s)- atomu olmalıdır. Şimdi atomlar tarafından üretilen bir fonksiyon uzayları sınıfını tanımlayalım.

Tanım 3.14. Atomik Hardy Uzayı $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$ tanımı;

$$H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S' : f(x) = \sum_k \lambda_k a_k(x), \text{her bir } \mathrm{a_k} \text{ bir } \ (\mathrm{p,q,s}) \text{ atom}, \ \& \ \sum_{\mathrm{k}} |\lambda_{\mathrm{k}}|^{\mathrm{p}} < \infty \right\}$$

ile verilir. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|f\|_{H_a^{p,q,s}} = \inf(\sum_k |\lambda_k|^p)^{1/p},$$

olarak tanımlanır. Burada infimum yukarıdaki bütün $f = \sum_k \lambda_k a_k$ ayrışımları üzerinden alınmaktadır [20].

Ayrıca,

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{H_a^{p,q,s}}$$

ile tanımlanan uzaklık fonksiyonu ile $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir tam metrik uzaydır.

Özellikle, $H_a^{1,q,s}(\mathbb{R}^n)$ bir Banach uzaydır.
R.R. Coifman [8], $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n) = H^p(\mathbb{R})$ olduğunu ispatladı. Bu, $H^p(\mathbb{R})$ uzayındaki her elemanın belirli bir şekilde bir atom toplamına ayrıştırılabileceğini gösterir.

Şimdi Coifman'nın teoremini verebiliriz.

Teorem 3.15. $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$ ve $s \geq [\frac{1}{p} - 1]$ negatif olmayan tamsayı olsun.

$$H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}) = H^p(\mathbb{R})$$

ve

$$\|f\|_{H_a^{p,q,s}} \sim \|f\|_{H^p}[8].$$

Teorem 3.15.' in ispatında kullanılacak aşağıdaki lemma ispatsız olarak verilmiştir.

Lemma 3.16. $G \supset Q$ bölgesi $\{x + iy \in \mathbb{C} : x_0 \leq x \leq x_0 + h, y_0 \leq y \leq y_0 + h\}$ ile tanımlansın. Eğer u, G de harmonikse bu durumda

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \{u(x + iy_0) + u[x + i(y_0 + h)]\}dx$$
$$+ \int_{y_0}^{y_0+h} \{u(x_0 + iy) + u(x_0 + h + iy)\}dy$$
$$= 2\int_0^h \{u[x_0 + t + i(y_0 + t)] + u[x_0 + t + i(y_0 + h - t)]\}dt[20].$$

İspat. (`Teorem 3.15.' in ispatı`)
Kolaylık için teoremi sadece $p = 1$ ve $s = 0$ için ispatlayalım. $a(x)$, $(1, q, 0)$ atom olsun. Başka bir deyişle, $a(x)$

(i) supp$a \subset I = \{x : |x - x_0| < r\}$;

(ii) $||a||_q \leq (2r)^{1/q-1}$;

(iii) $\int a(x)dx = 0$.

şartlarını sağlar. a'nın Hilbert dönüşümünü $\tilde{a}$ olarak tanımlansın ve

$$\int_{\mathrm{R}} |\tilde{a}(x)|dx = \int_{|x-x_0|\leq 2r} |\tilde{a}(x)|dx + \int_{|x-x_0|>2r} |\tilde{a}(x)|dx.$$

Böylece Hilbert dönüşümünün $L^q(\mathbb{R})(1 < q < \infty)$ üzerindeki sınırlılığından

$$1/q + 1/q' = 1$$

olmak üzere

$$\int_{|x-x_0|\leq 2r} |\tilde{a}(x)|dx \leq Cr^{1/q'}||a||_q$$

$$\leq C$$

olur. Dolaysıyla, (iii)'den

$$\int_{|x-x_0|>2\mathrm{r}} |\tilde{a}(x)|dx = \int_{|x-x_0|>2\mathrm{r}} \Big| \int_{|y-x_0|>\mathrm{r}} \Big\{ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-x_0} \Big\} a(y)dy \Big| dx$$

$$\leq C \int_{|x-x_0|>2r} |x-x_0|^{-2} \Big(\int_{|y-x_0|<r} |y-x_0||a(y)|dy \Big) dx$$

$$\leq C$$

elde edilir. Böylece $\tilde{a} \in L^1(\mathbb{R})$ ve $||\tilde{a}||_1 \leq C$ olup, burada C, a'da bağımsızdır. Şimdi $f \in H_a^{1,q,0}(\mathbb{R})$ yani, $f(x) = \sum_k \lambda_k a_\mathrm{k}(x)$ olsun. Burada her a_k bir (1,q,0) atomdur ve $\sum_\mathrm{k} |\lambda_k| < \infty$ dır. $\tilde{a}$ için yukarıda elde edilen sonuçtan,

$$||\tilde{f}||_1 \leq C \sum_k |\lambda_k|$$

elde edilir. Bu ise $f \in H^1(\mathbb{R})$ olmasını gerektirir, (bkz. Y.Katznelson [18]). Böylece

$$H_a^{1,q,0} \subset H^1(\mathbb{R})$$

ve

$$||f||_{H^1(\mathbb{R})} \leq C||f||_{H_a^{1,q,0}(\mathbb{R})}$$

elde edilir. Şimdi $H^1(\mathbb{R}) \subset H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})$ olduğunu ispatlayalım. Kabul edelim ki $f \in H^1(\mathbb{R})$ olsun ve $u(x,y) = (f * P_y)(x), y > 0$ ile tanımlansın. Ek olarak $\Omega_k = \{x - P_\nabla^*(f)(x) > 2^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ olsun. Ω_k, $\mathbb{R}$ uzayında açık bir küme olduğundan,

$$\Omega_\mathrm{k} = \bigcup_j I_j^{(k)},$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\{I_\mathrm{j}^{(k)}\}$ ayrık açık aralıkların bir dizisidir. Şimdi f fonksiyonunu

$$f(x) = g_k(x) + b_k(x)$$

şeklinde yazılsın.

$$g_k(x) = \sum_j [f(x) - f_{I_\mathrm{j}^{(\mathrm{k})}}]\mathcal{X}_{I_\mathrm{j}^{(\mathrm{k})}},$$

ve

$$b_k(x) = f(x)\mathcal{X}_{\Omega_k^c} + \sum_\mathrm{j} f_{I_\mathrm{j}^{(k)}}\mathcal{X}_{I_\mathrm{j}^{(\mathrm{k})}}$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{X}_E$, E'nin karakteristik fonksiyonunu ve f_I, $\frac{1}{|I|}\int_I f(t)dt$ ortalamasını göstermektedir. İlk olarak

$$\lim_{k \to -ß} g_\mathrm{k}(x) = f(x), h.h. \tag{3.2}$$

olduğunu ispatlayalım.

Aslında, harmonik fonksiyonlarda teğet olmayan fonksiyonun yakınsaklığından,

$$|f(x)| \leq P_\nabla^*(f)(x), \;\; h.h.$$

elde edilir. Kolaylık için, $I_j^{(k)} = I = (a,b)$ biçiminde gösterip ve alt kenarı I, $\mathbb{R}_+^2$ üst yarı düzleminde olan bir Q küpü yapalım. Sırasıyla Q küpünün diğer üç kenarı l_1, l_2, l_3 ve Q küpünün iki köşegeni d_1, d_2 olsun. Ek olarak, Δ, $d_1 d_2$ ve I'dan kapalı olan üçgensel bölge olsun. $a \notin \Omega_k, b \notin \Omega_k$ ve $Q \backslash \Delta \subset \Gamma(a) \cup \Gamma(b)$ olup, burada

$$\Gamma(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : |x - a| < y\}$$

ve

$$\Gamma(b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : |x - b| < y\}$$

şeklinde tanımlayıp,

$$|u(x, y)| \leq \max\{P^*_\nabla(f)(a), P^*_\nabla(f)(b)\} \leq 2^k$$

olduğu kolayca görülür. Yukarıdaki eşitsizlikten $(x, y) \in Q \backslash \Delta$ için,

$$\frac{1}{|I|}\Big|\int_{I_\mathrm{j}} \mathrm{u}\Big| \leq 2^k, j = 1, 2, 3$$

elde edilir. Q_ϵ, ϵ tarafından yukarıdaki Q dönüşümü ile elde edilen bir küp olsun. Ayrıca $\mathrm{s} = 1, 2$ için,

$$\frac{1}{|I|}|\int_{d_s} \mathrm{u}| \leq \sqrt{2}2^k$$

eşitsizliği elde edilir. Q_ϵ için $x_0 = a$, $h = b - a$ ve $y_0 = \epsilon$ olmak üzere Lemma 3.16. den dolayı,

$$\int_a^b u(x, \epsilon)dx = 2(\int_{d_1} \mathrm{u} + \int_{d_2} \mathrm{u}) - (\int_{l_1} \mathrm{u} + \int_{l_2} \mathrm{u} + \int_{l_3} u)$$

elde edilir. Buradan

$$|\int_a^b \mathrm{u}(x, \epsilon)dx| \leq 9.2^k|I|$$

elde edilir. Ayrıca, Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\frac{1}{|I|}|\int_I f(x)dx| \leq 9.2^k$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, bu eşitsizlik ve $b_k(x)$ tanımından,

$$|b_k(x)| \leq 9.2^k$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki (3.2) eşitsizliği, yani istenilen elde edilmiş olur. Diğer yandan, $P^*_\nabla(f) \in L^1(\mathbb{R})$ için,

$$\lim_{k \to ß} |\Omega_k| = 0$$

elde edilir. Bu,

$$\lim_{k \to ß} g_k(x) = 0, \; h.h. \tag{3.3}$$

olduğunu gösterilir. (3.2) ile (3.3) yararlanılarak, $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \lim_{N,M \to \infty} \sum_{\mathrm{k}=-M}^{N} \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\}, \; h.h. \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir.
Dolaysıyla, $P^*_\nabla(f) \in L^1(\mathbb{R})$ ve

$$\begin{aligned} |g_{\mathrm{k}}(x)| &\leq \sum_j \{|f(x)| + |f_{I_j^{(k)}}|\} \mathcal{X}_{I_{\mathrm{j}}^{(k)}}(x) \\ &\leq \sum_{\mathrm{j}} \{P^*_\nabla(f)(x) + 9.2^k\} \mathcal{X}_{I_{\mathrm{j}}^{(k)}}(x) \\ &\leq 10 P^*_\nabla(f)(x), \;\; h.h. \end{aligned}$$

dır. Böylece L^1 uzayında, Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden (3.4) ifadesi elde edilir. Şimdi (3.4) ifadesini kullanılarak, f'nin atomik bir parçalanması kolayca elde edilir. Ayrıca, eğer

$$a_j^{(k)}(x) = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{j}}^{(k)}} \{g_k(x) - g_{\mathrm{k}+1}(x)\} \mathcal{X}_{I_j^{(k)}}$$

ve

$$\lambda_j^{(k)} = 27.|I_{\mathrm{j}}^{(k)}|.2^k$$

ise bu durumda

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_j \lambda_j^{(\mathrm{k})} a_{\mathrm{j}}^{(k)}(x).$$

L^1 uzayında (3.4) ifadesi gerçekleştiğinden dolayı yukarıdaki eşitlik S' de gerçekleşir. Dahası,

$$\text{supp}\ \ a_j^{(k)} \subset I_j^{(\mathrm{k})},\ \ |a_j^{(\mathrm{k})}(x)| \leq |I_j^{(k)}|^{-1}$$

doğrulamak kolaydır ve

$$\int a_{\mathrm{j}}^{(k)}(x)dx = 0$$

dır. Böylece $f \in H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})$ dır. Dolayısıyla

$$H^1(\mathbb{R}) \subset H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R}).$$

Sonuç olarak

$$\sum_{j,k} |\lambda_{\mathrm{j}}^{(k)}| \leq C \sum_{\mathrm{k}} 2^k |\Omega_k|$$

$$\leq C \int_{\mathrm{R}} P_{\nabla}^*(f)(x)dx$$

eşitsizliğinden

$$||f||_{H_a^{1,\infty,0}} \leq C||f||_{H^1}.$$

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

Önerme 3.17. $0 < \mathrm{p} \leq 1 \leq q \leq \infty, p \neq q$, s ve m negatif olmayan tamsayı, $s \geq [n(\frac{1}{\mathrm{p}} - 1)]$ ve $m \geq [n(\dfrac{1}{\mathrm{p}} - 1)] + 1$ olsun. Bu durumda her (p, q, s) atom için,

$$||a_m^*||_{\mathrm{p}} \leq C$$

eşitsizliğinde sürekli bir $C = C(p, q, s, m)$ sabiti vardır ve burada a_m^*, a'nın Grand maximal fonksiyondur [19].

İspat. Genelliği bozmadan, a, orijin merkezli bir (p, q, s) atom ve supp$a \subset B(0, r) = B$ olduğunu kabul edelim. $\tilde{B} = B(0, 2r)$ olsun. Bu durumda iki durum söz konusudur.
$0 < \mathrm{p} \leq 1$ ve $q > 1$ olduğunda Hölder eşitsizliğinden ve Önerme 3.26. (ii)'den $\Phi \in K_m$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{B}} \{\Phi_+^*(a)(x)\}^p dx &\leq \int_{\tilde{B}} |a_m^*(x)|^p dx \leq ||a_{\mathrm{m}}^{\mathrm{q}}||_q^p |\tilde{B}|^{1-\frac{p}{q}} \\ &\leq C||a||_q^{\mathrm{p}} |B|^{1-\frac{p}{q}} \\ &\leq C\end{aligned}$$

elde edilir.
$0 < \mathrm{p} < 1$ ve $q = 1$ olduğunda Önerme 3.26. (i) şartı kullanılarak,

$$\begin{aligned}\int_{\breve{B}} \{\Phi_+^*(a)(x)\}^p dx &\leq \int_{\tilde{B}} |a_m^*(x)|^p dx \\ &= \int_0^\infty p\alpha^{\mathrm{p}-1} |\{x \epsilon \tilde{B} : a_m^*(x) > \alpha\}| dx \\ &\leq C\{\int_0^{|B|^{-1/p}} |B| \mathrm{p} \alpha^{p-1} d\alpha \\ &\quad + \int_{|B|^{-1/\mathrm{p}}}^\infty p\alpha^{p-1} (\|a\|_1/\alpha) d\alpha\} \\ &\leq C\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Lemma 3.11. ve Önerme 3.17. den

$$\int_{\tilde{B}}^{\mathrm{c}} \{\Phi_+^*(a)(x)\}^p dx \leq C \tag{3.5}$$

eşitsizliği kolayca gösterilir.

Kabul edelim ki $m = [n(\frac{1}{p} - 1)] + 1$ olsun. $P_{m-1}(z)$, z için $\Phi(w - z)$'nin Taylor genişlemesi $(m - 1)$ olsun. Bu durumda $z \in B(0, r)$ ve $w \in (B(0, 2r))^c$ için,

$$|\Phi(w - z) - P_{m-1}(z)| \leq C|\mathrm{u}|^{-m-n}|z|^m.$$

Böylece, $x \in \tilde{B}^c$ olduğunda,

$$\begin{aligned} |(a * \Phi_{\mathrm{t}})(x)| &= |t^{-n} \int a(y)\{\Phi(\frac{x-y}{t}) - P_{m-1}(\frac{y}{t})\}dy| \\ &\leq C|x|^{-m-n} \int_B |a(y)||y|^m dy \\ &\leq C|x|^{-m-n}|B|^{\frac{m}{n} - \frac{1}{p} + 1} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.
Dolayısıyla (3.5) eşitsizliği sağlanır. Böylece önermenin ispatı tamamlanır. ■

$f \in H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$ ve $m = [n(\frac{1}{p} - 1)] + 1$ olsun. Bu durumda f, herbir a_k, bir (p, q, s) atomu ve $\sum_k |\lambda_k|^p < \infty$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_k \lambda_k a_k(x)$$

şeklinde yazılabilir. Önerme 3.17. den

$$\int |f_m^*|^p dx \leq \sum_k |\lambda_k|^p \int |(a_k)_m^*|^p dx \leq C \sum_k |\lambda_k|^p$$

kolayca elde edilir. Böylece, Teorem 3.10. den $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür. Dolaysıyla son elde edilen sonuçtan aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.18. $0 < \mathrm{p} \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, ve $s \geq [n(\frac{1}{\mathrm{p}} - 1)]$ negatif olmayan tamsayı olsun. Bu durumda

$$H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n) \subset H^p(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$||f||_{H^p} \leq C||f||_{H_a^{p,q,s}},$$

burada C, f fonksiyonundan bağımsızdır [19].

$H^p(\mathbb{R}^n) \subset H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$ tersini elde etmek amacıyla, öncelikle aşağıdaki lemmaları ispatsız olarak verelim.

Lemma 3.19. (Vitali-Wiener örtme lemması) $\Omega \in \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $|\Omega| < \infty$ olsun. Herhangi bir $x \in \Omega$ için bir $r(x) > 0$ vardır, öyleki $B(x, r(x)) \subset \Omega$ ise bu durumda $\{B(x_i, r(x_i))\}_i$ nin bir serisi vardır, öyle ki tüm $B(x_i,\ r(x_{\bar{i}}))$ yuvarları ikişer ikişer ayrık ve $\Omega \subset \cup_i B(x_i,\ 4r(x_i))$, [19].

Lemma 3.20. (Whitney örtme lemması) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $|\Omega| < \infty$ olsun. Bu durumda $\{x_{\mathrm{i}}\ :\ x_{\mathrm{i}} \in \Omega\}_{\mathrm{i}}$ ve $\{r_i : r_i > 0\}_{\mathrm{i}}$ serileri mevcuttur öyle ki

(i) $\Omega = \cup_i B(x_i, r_i)$ ve $\{B(x_i, r_i/4)\}_i$ ikişer ikişer ayrık yuvarlardır.

(ii) $B(x_i, 18r_i)| \cap \Omega^c = \emptyset$, fakat $B(x_i, 54r_i) \cap \Omega^c \neq \emptyset$;

(iii) Sürekli bir $M = M(n)$ fonksiyonu vardır, öyle ki $\forall x \in \Omega$ için,

$$\sum_i \mathcal{X}_{B_{(x_i, 18r_i)}}(x) \leq M$$

dir [19].

Lemma 3.21. Aşağıdakiler doğrudur.

(i) $\tilde{B}_i^{k+1} \cap \tilde{B}_{1'}^{k} \neq \emptyset$ ise $r_j^{k+1} < 4r_i^k$, ve $\tilde{B}_{\mathrm{J}'}^{k+1} \subset B(x_i^k,\ 18r_i^k)_{\mathrm{i}}$.

(ii) Her j için bir $M = M(n)$ vardır, öyleki

$$\tilde{B}_j^{k+1} \cap \tilde{B}_i^{\mathrm{k}} \neq \emptyset$$

$\tilde{B}_{\mathrm{i}}^k$ sayısı M'den küçüktür [19].

Lemma 3.22. j, k' dan bağımsız sürekli bir C vardır, öyle ki

$$\sup_{|\alpha| \leq \mathrm{m}, y \in \tilde{B}_{\mathrm{j}}^{k+1}\mathrm{up}} (r_j^{k+1})^{|\alpha|} |D^\alpha \pi_l(y)| \leq C$$

ve

$$\sup_{|\alpha|\leq \mathrm{m}, y\in\mathbb{R}^n} (r_j^{k+1})^{|\alpha|} |D^\alpha \pi_l(y) \xi_{\mathrm{j}}^{k+1}(y)| \leq C$$

olacak şekilde eşitsizlikleri vardır [19].

Aşağıda ilerde kullanacağımız eşitlikler verilmiştir;
$P_i^k(x) \in \mathcal{P}_s$ (tüm s- dereceden polinomlar) mevcut ise bu durumda

$$\int \{f(x) - P_i^k(x)\} Q(x) \xi_i^k(x) dx = 0, \quad \forall Q \in \mathcal{P}_s, \tag{3.6}$$

ve
$P_{i.j}^{k+1}(x) \in \mathcal{P}_s$ mevcut ise bu durumda

$$\begin{aligned} &\int \{f(x) - P_j^{k+1}(x)\} Q(x) \xi_i^k(x) \xi_j^{k+1}(x) dx \\ &= \int P_{i,j}^{k+1}(x) Q(x) \xi_j^{k+1}(x) dx, \quad \forall Q \in \mathcal{P}_s. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Lemma 3.23. j, k' dan bağımsız sürekli bir C vardır, öyle ki

$$\sup_{y\in\tilde{B}_j^{k+1}} |P_j^{k+1}(y)| \leq 2^{k+1} C$$

olacak şekilde eşitsizliği vardır [19].

Lemma 3.24. i, j, k' dan bağımsız sürekli bir C vardır, öyle ki

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} |P_{i,j}^{k+1}(y) \xi_{\mathrm{j}}^{k+1}(y)| \leq 2^{k+1} C$$

olacak şekilde eşitsizliği vardır [19].

Lemma 3.25. Her $k \in Z_1$ için,

$$\sum_i \sum_j P_{i,j}^{k+1}(x) \xi_j^{k+1}(x) = 0$$

olup, burada eşitlik $h.h.$ ve $\mathcal{S}'$ üzerinde tanımlanır [19].

Şimdi, Önerme 3.18. nin tersini aşağıdaki önerme ile verelim.

Önerme 3.26. $0 < p \leq 1$ ve $s \geq [n(\frac{1}{p} - 1)]$ negatif olmayan tamsayı olsun. Bu durumda

$$H^p(\mathbb{R}^n) \subset H_a^{p,\infty,s}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$||f||_{H^{p,\infty,s}} \leq C||f||_{H^p}[20].$$

İspat. İlk olarak, $f \in H^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\begin{aligned} g^k &= f\mathcal{X}_{\Omega_k} - \sum_i P_i^k \xi_i^k \\ &= \sum_i (f - P_i^{\mathrm{k}})\xi_i^k \end{aligned}$$

ve

$$b^k = f\mathcal{X}_{\Omega_{\mathrm{k}}^{\mathrm{c}}} + \sum_i P_i^k \xi_i^k$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$f = g^k + b^k$$

dır. $M = M(n)$'den daha küçük herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için ve keyfi $i \in \mathbb{N}$ için $\xi_i^{\mathrm{k}}(x) \neq 0$ dır. Bundan ve Lemma 3.23. kullanarak,

$$|b^k(x)| \leq 2^k C$$

dir. Böylece, aşağıdaki bağıntı düzgün yakınsar;

$$\lim_{\mathrm{k} \to -\infty} g^{\mathrm{k}}(x) = f(x). \qquad (3.8)$$

Diğer yandan, supp $g^k \subset \Omega_k$ ve

$$|\Omega_k| \leq (C||f_m^*||_p/2^k)^p \to 0, \;\; k \to \infty,$$

dikkate alırnırsa

$$\lim_{k\to\infty} g^{\mathrm{k}}(x) = 0 \ \ h.h. \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.8) ve (3.9) kullanılarak, f fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=-\mathrm{m}}^{\infty} \{g^k(x) - g^{k+1}(x)\} \ \ h.h.$$

şeklinde yazılır. Fakat,

$$g^k - g^{k+1} = \sum_i (f - P_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}})\xi_i^k - \sum_j (f - P_{\mathrm{j}}^{k+1})\xi_j^{k+1},$$

burada $\sum_i \xi_i^k = \mathcal{X}_{\Omega_k}$ ve $\mathrm{supp}\xi_j^{k+1} \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega_k$. Böylece yukarıdaki eşitlik

$$g^k - g^{k+1} = \sum_i \{(f - P_{\mathrm{i}}^k)\xi_i^k - \sum_{\mathrm{j}} (f - P_j^{k+1})\xi_i^k \xi_j^{k+1}\}.$$

şeklinde yazılır. Tekrar Lemma 3.25. kullanılarak, yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} g^k - g^{k+1} &= \sum_i \{(f - P_{\mathrm{i}}^k)\xi_{\mathrm{t}}^k - \sum_j [\{f - P_{\mathrm{j}}^{k+1}\}\xi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}} - P_{i,j}^{k+1}]\xi_{\mathrm{j}}^{k+1}\} \\ &= \sum_i h_i^k, \end{aligned}$$

şeklinde yazılır, burada

$$h_i^k = (f - P_i^{\mathrm{k}})\xi_i^k - \sum_{\mathrm{j}} [(f - P_j^{k+1})\xi_{\mathrm{i}}^k - P_{i,j}^{k+1}]\xi_j^{k+1}.$$

Dolayısıyla f fonksiyonu

$$f(x) = \sum_k \sum_i h_i^{\mathrm{k}}(x) \ \ h.h.$$

olarak ifade edilebilir. Açıkçası, $\mathrm{supp} h_i^k \subset \tilde{B}_i^k$ dir. Aslında, (3.6) ve (3.7) den, herhangi $\mathrm{Q} \in \mathcal{P}_s$ (tüm s-dereceden polinomlar) için

$$\int h_i^k(x)Q(x)dx = 0$$

eşitliği kolayca görülebilir. $h_{\tilde{l}}^{\mathrm{k}}$'nın boyutunu tahmin etmek amacıyla,

$$h_i^k = f\xi_i^{\mathrm{k}}\mathcal{X}_{\Omega_{k+1}^c} - P_i^k\xi_i^k + \xi_i^k\sum_{\mathrm{j}} P_j^{\mathrm{k+1}}\xi_{\mathrm{j}}^{k+1} + \sum_{\mathrm{j}} P_{i,j}^{k+1}\xi_{\mathrm{j}}^{\mathrm{k+1}}$$

olacak şekilde yazılır. Önerme 3.18. kullanılarak

$$|f\xi_i^k\mathcal{X}_{\Omega_{k+1}^c}| \leq Cf_m^*\mathcal{X}_{\Omega_{k+1}^c} \leq 2^kC$$

dir. $\{B(x_j^{k+1}, r_j^{k+1})\}$ yuvarının Lemma 3.20.(iii), Lemma 3.23. ve Lemma 3.24. kullanılarak,

$$|h_i^k(x)| \leq 2^kC_0$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\lambda_i^k = 2^{\mathrm{k}}C_0|\tilde{B}_{\mathrm{i}}^k|^{1/p}$ ve $a_i^{\mathrm{k}}\{x) = h_i^k(x)f\lambda_i^k$ ise bu durumda

$$f(x) = \sum_{k,i}\lambda_i^k a_i^k(x), \quad h.h. \tag{3.10}$$

Burada her a_{i}^k bir (p, ∞, s) atomdur. Sonrasında,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,i}|\lambda_i^k|^p &\leq C\sum_{k,i}2^{kp}|B_i^k| \leq C\sum_k 2^{\mathrm{k}p}|\Omega_k| \\
&\leq C\sum_k\int_{2^{\mathrm{k}-1}}^{2^{\mathrm{k}}} p\alpha^{p-1}|\{x : f_m^*(x) > \alpha\}|d\alpha \\
&\leq C\|f_m^*\|_p < \infty
\end{aligned}$$

olduğu kolayca gösterilir. $f \in H_a^{p,\text{ß},s}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermek amacıyla, S' 'de (3.10) olduğunu göstermek yeterlidir. Aslında,

$$|P_i^k(x)\xi_i^k(x)| \leq C2^k\xi_{\mathrm{s}}^k(x) \leq Cf_m^*(x)\xi_i^k(x)$$

ve

$$|\sum_i P_i^k(x)\xi_i^k(x)| \leq Cf_m^*(x)$$

eşitsizliklerinden

$$|b^k(x)| \leq Cf_m^*(x)$$

elde edilir. Böylece

$$|g^k(x)| = |f(x) - b^k(x)| \leq Cf_m^*(x)$$

dir. Eğer $f \in H^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $f_m^* \in L^1(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ olduğunu dikkate alalım. Böylece, Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden, L^1 uzayında

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{ß} \{g^k(x) - g^{k+1}(x)\}$$

elde edilir. Ek olarak

$$g^k - g^{k+1} = \sum_i h_i^k(x)$$

ve $\{h_i^k\}$ destekleri Lemma 3.20.(iii) özelliğine sahip olup,

$$f(x) = \sum_k \sum_i h_i^k(x)$$

L^1 uzayında olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu durumda S' de (3.10) eşitliği sağlanır.

$$H^p(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \subset H_\alpha^{p,ß,s}(\mathbb{R}^n)$$

olduğu yukarıda gösterildi. Önermenin isapatını tamamlamak için H^p uzayında, $H^p \cap L^2$ yoğun olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten de, en son elde edilen sonuç gerçekleşiyor ise bu durumda herhangi bir $f \in H^{\mathrm{p}}$ için, $f_k \in H^p(\mathrm{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ vardır, öyle ki

$$\|f - f_k\|_{H^p} \to 0, \ \ k \to \infty.$$

Genelliği bozmadan, uygun f_k için

$$||f_1||^p_{H^{\mathrm{p}}} \leq \frac{3}{2}||f||^{\mathrm{p}}_{H\mathrm{p}},$$

ve

$$||f_{\mathrm{k}+1} - f_{\mathrm{k}}||^p_{H^p} \leq 2^{-k-1}||f||^p_{H^p}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$g_1 = f_1$, ve $g_k = f_{\mathrm{k}} - f_{k-1}(k > 1)$ alınsın. Bu durumda, H^{p} uzayında

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

eşitliği sağlanır. $g_k \in H^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ olduğunda $g_k \in H^{p,\infty,s}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ olur. Dolayısıyla g_k fonksiyonu S' üzerinde herhangi bir a^k_j, bir (p, ∞, s) atomu olmak üzere

$$g_k = \sum_j \lambda^k_j a^k_j$$

şeklinde yazılabilir. O halde C, k 'dan bağımsız olmak üzere

$$\sum_j |\lambda^k_{\mathrm{j}}|^p \leq C||g_k||^p_{H^p}.$$

Şimdi, f fonksiyonunu

$$f(x) = \sum_{k,j} \lambda^k_j a^k_j(x),$$

şeklinde yazılabilir, burada eşitlik S' üzerinde tanımlıdır ve

$$\sum_{k,j} |\lambda^k_j|^p \leq C \sum_k ||g_k||^p_{H^p} \leq C||f||^p_{H^p}.$$

Dolaysıyla $f \in H^{p,\infty,s}_a(\mathbb{R}^n)$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

3.3. $H^1(\mathbb{R}^n)$ nin Dual Uzayı

C.Fefferman [14] ve C.Fefferman-E.M. Stein [15] tarafından Teorem 3.29. ile sırasıyla $p = 1$ ve $p > 1$ için sonuçlar ifade edilmiştir. F. John, L. Nirenberg [17] tarafından $H^1(\mathbb{R}^n)$ nin dual uzayı sınırlı ortalama salınımlı fonksiyon uzayı da eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin regular çözümlerini çalıştı.

Tanım 3.27. $f(x)$ lokal integranebilir fonksiyon ve Q, $\mathbb{R}^n$ de bir küp olsun. Q da $f(x)$ in ortalama değer fonksiyonu

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$$

ve $1 \leq q < \infty$ olsun. Eğer $f(x)$ fonksiyonu

$$\sup_Q\{\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^q dx\}^{1/q} dx < \infty$$

sağlıyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna q- dereceden bir sınırlı ortalama salınımlı fonksiyonu olarak adlandırılır. q- dereceden tüm sınırlı ortalama salınımlı fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya BMO_q denir.
$q = 1$ için BMO_q nun kısaltması BMO dur.

Sonuç 3.28. $1 < q < \infty$ ise burumda $BMO_q = BMO$ [20].

$H^1(\mathbb{R}^n)$ nin dual uzayında temel bir sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.29. Eğer $g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$Lf = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$$

$H^1(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir sınırlı lineer fonksiyondur. Tersine L, $H^1(\mathbb{R}^n)$ üzerinde herhangi bir sınırlı lineer fonksiyon için

$$Lf = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx, \forall f \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

olacak şekilde bir $g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ vardır [14, 15].

Yukarıdaki sonuç $H^1(\mathbb{R}^n)$ uzayının dualinin $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı olduğunu ifade eder yani

$$(H^1(\mathbb{R}^n))' = BMO(\mathbb{R}^n).$$

İspat. Teoremi yalnızca $p = 1$ ispatlamak yeterlidir. Teorem 3.15. den dolayı

$$(H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R}))' = BMO(\mathbb{R})$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $g \in BMO(\mathbb{R})$ olsun.

$$BMO(\mathbb{R}) \subset (H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R}))$$

olduğunu göstermek amacıyla,

$$Lf = \int_{\mathrm{R}} f(x)g(x)dx$$

lineer fonksiyonu, genelleştirilmiş Hahn-Banach teoremi tarafından, $H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})$'nın bazı yoğun D altuzaylarında sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$D = H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R}) \cap L_c^{\infty}(\mathbb{R})$ olup, burada $L_c^{\infty}(\mathbb{R})$, kompakt desteği ile ölçülebilir tüm fonksiyonların sınırlılığından oluşmaktadır. $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k a_{\mathrm{k}}(x)$ formu ile tüm fonksiyon kümeleri $H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})$ üzerinde yoğun olduğu için, D kümesi, $H_a^{1,\infty,0}(\mathbb{R})$ uzayının yoğun bir alt kümesidir.

Şimdi

$$g_N(x) = \begin{cases} N & , \ g(x) \geq N \\ g(x) & , \ |g(x)| < N \\ -N & , \ g(x) \leq -N \end{cases}$$

olsun. Eğer N yeterince geniş ise bu durumda

$$\|g_N\|_* \leq 4\|g\|_*.$$

eşitsizliği kolayca gösterilir. $f(x) = \sum_k \lambda_k a_k(x) \in D$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)g_N(x)dx\Big| &\leq \sum_k |\lambda_k| \cdot \Big|\int_{\mathbb{R}} a_k(x)\{g_N(x) - (g_N)_{I_k}\}dx\Big| \\ &\leq \sum_k |\lambda_k| \|g_N\|_*\end{aligned}$$

eşitsizliği olup, burada supp $a_k \subset I_k$ dır. Dolayısıyla $f \in D$ için,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)g_N(x)dx\Big| \leq 4||f||_{H_a^{1,\infty,0}}||g||_*$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $f \in D$ ve $g \in BMO$ alınır ise bu durumda

$$|f(x)g_N(x)| \leq |f(x)g(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

olur. Bu nedenle, Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx\Big| \leq 4||f||_{H_a^{1,\infty,0}}||g||_*, \ f \in D$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, $BMO(\mathbb{R}) \subset (H_a^{1,\infty,0}\{\mathbb{R}))'$ olduğu gösterilir.

İspatın tersini göstermek amacıyla $(H_a^{1,q,0}(\mathbb{R}))' \subset BMO(\mathbb{R})$, $1 < \mathrm{q} < \infty$ gösterelim. L, $H_a^{1,q,0}(\mathbb{R})$ üzerinde sınırlı lineer fonksiyon olsun. $\mathrm{I} \in BMO(\mathbb{R})$ vardır, öyleki herhangi $f \in H_a^{1,q,0}(\mathbb{R})$ için

$$Lf = \int_{\mathbb{R}} f(x)l(x)dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}} a_k(x)l(x)dx$$

elde edilir. Yukarıdaki bu iddianın ispatını üç adımda yapalım.

(i) İlk olarak $(H_a^{1,q,0})' \subset (L_I^q)'$ ispatlayalım, burada I bir aralık ve

$$L_I^q = \{f \in L^q(I) : \int_I f(x)dx = 0\}$$

olsun. Bu durumda $f \in L_1^q$ için,

$$a(x) = |I|^{\frac{1}{q}-1}||f||_{L^q(I)}^{-1} f(x)$$

bir $(1, q, 0)$ atomdur. Böylece, $L_I^q \subset H_a^{1,q,0}$ olur. Dolayısıyla, (i) gösterilmiş olur. (i)'nin bir sonucu olarak, genelleşmiş Hanh-Banach teoremi ve Riesz teoreminin temsili olan $l \in L^{q'}(I), 1/q + 1/q' = 1$ vardır, öyleki $\forall f \in L_I^q$ için,

$$Lf = \int_I f(x)l(x)dx.$$

Yukarıdaki gerçekten ve $I_j \uparrow \mathbb{R}$ alınarak, her I_j için, bir $l_j \in L^{q'}(I_j)$ vardır, öyleki $\forall f \in L_{I_j}^q$ için,

$$Lf = \int_{I_j} f(x)l_j(x)dx, \tag{3.11}$$

dir.

(ii) Bir l alalım, öyleki $\forall f \in L_{I_j}^q$ ve herhangi I_j için,

$$Lf = \int_{I_j} f(x)l(x)dx$$

elde edlir.

$f \in L_{I_1}$ olsun. (3.11)$'den$ bir $l_1 \in L^{q'}(I_1)$ vardır, öyleki

$$Lf = \int_{I_1} f(x)l_1(x)dx.$$

Varsayalım ki $f \in L_{I_1}^q \subset L_{I_2}^q$ olsun. (3.11) kullanılarak, uygun bir $l_2 \in L^{q'}(I_2)$ için,

$$Lf = \int_{I_2} f(x)l_2(x)dx = \int_{I_1} f(x)l_2(x)dx$$

elde edilir. Yukarıdaki iki eşitlikten, $\forall f \in L^q_{I_1}$ için,

$$\int_{l_1} f(x)\{l_1(x) - l_2(x)\}dx = 0$$

olur. $f(x) = g(x) - g_{I_1}$ kullanırsak, $g \in L^q(I_1)$ olup,

$$\int_{I_1} g(x)\{[l_1(x) - l_2(x)] - (l_1 - l_2)_{I_1}\}dx = 0, \forall g \in L^q(I_1)$$

elde edilir. Buradan

$$l_1(x) - l_2(x) = C_1, \;\; x \in I_1$$

olur. Böylece

$$l(x) = \begin{cases} l_1(x) & , x \in I_1, \\ l_2(x) + C_1 & , x \in I_2 \backslash I_1 \end{cases}$$

yazılabildiği için, $x \in I_2$ için

$$l(x) = l_2(x) + C_1$$

elde edlir. Bu uygun metodla elde edilen $l(x)$ ve $\forall f \in L^q_{I_j}, (j = 1, 2)$ için,

$$Lf = l_{I_j} f(x)l(x)dx$$

olduğu göeterilir. Yukarıdaki bu basit metodla, herhangi $j \in \mathbb{N}$ için gösterilir öyleki bir $l(x)$ elde edlilir, Böylece, (ii) gösterilmiş olur.

(iii) Nihayet, $l(x)$'in BMO, uzayına ait olduğunu ispatlandı ve $\forall f \in H^{1,q,0}_a(\mathbb{R})$ için

$$Lf = \int_{\mathrm{R}} f(x)l(x)dx$$

uygun bir eşitlik elde edilir. Gerçekten yukarıdaki eşitlikten (ii) ve $l \in BMO$ kolayca elde edilir. O halde $l \in BMO$ olduğu göstermek yeterldir. (ii) kullanılarak

$$La = \int a(x)l(x)dx$$

eşitliği herhangi bir $(1, q, 0)$ $a(x)$ atom için sağlanır. I bir aralık, $\text{supp}h \subset I, h \in L^q(I)$ ve $||h|1_q = 1$ olsun. Bu durumda

$$a(x) = 2^{-1}|I|^{1/q-1}\{h(x) - h_I\}\mathcal{X}_I(x)$$

fonksiyonu bir $(1,\ q, 0)$ atomdur. Böylece, $L \in (H_a^{1,q,0})'$ olup,

$$\Big|\int_I a(x)l(x)dx\Big| \leq ||L||$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan yeniden

$$|I|^{1/q-1}\Big|\int_I h(x)\{l(x) - l_I\}dx\Big| \leq 2||L||$$

olarak yazılabilir. Dahası $||.||_{q'}$ tanımından,

$$\{\frac{1}{|I|}l_I|t(x) - l_t|^{q'}dx\}^{1/q'} \leq 2|[L||$$

eşitsizliği yazılır. Dolaysıyla

$$l \in BMO_{q'} = BMO$$

olur. Böylece, Teorem 3.15. ispatı tamamlanmış olur. ■

Uyarı 3.30. $H^p(\mathbb{R}^n)$ uzayının duali Campanato uzayıdır [6].
$p = 1$ için R.R. Coifman ve G. Weiss [8, 9],
$p > 1$ için S.Z. Lu [20] tarafından gösterilmiştir.

M. H. Taibleson ve G. Weiss [29] tarafından verilen (p, q, a, ϵ)- molekül tanımını ve atomun bir genelleştirilmiş hali olan molekül yapı ile ilgili teoremi ispatsız olarak aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.31. $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $s \geq [n(\frac{1}{p} - 1)]$ negatif olmayan tamsayı, $\epsilon > \max\{s/n, \frac{1}{p} - 1\}$, $a_0 = 1 - \frac{1}{p} + \epsilon$, ve $b_0 = 1 - \frac{1}{q} + \epsilon$ olsun. Eğer M fonksiyonu, $M \in L^q(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

(i) $M(x)|x|^{nb_0} \in L^q(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$,

(ii) $\mathcal{N}_q(M) = \|M\|_q^{a_0/b_0} \left\| M(\cdot)\, |\cdot - x_0|^{nb_0} \right\|_q^{1-(a_0/b_0)} < \infty$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} M(x) x^\alpha dx = 0, \quad |\alpha| \leq s$

şartlarını sağlıyorsa x_0 merkezli bir (p, q, a, ϵ)- molekül olarak adlandırılır, [29].

Teorem 3.32. p, q, s ve ε Tanım 3.31. deki gibi olsunlar.

$$f \in H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$$

olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{S}'$ de

$$f(x) = \sum_k \lambda_k M_k(x)$$

olmasıdır, burada $\sum |\lambda_k|^p < \infty$, herbir M_k (p, q, s, ϵ)- molekül ve $\mathcal{N}_q(M_k) \leq C$ olacak şekilde k'dan bağımsız bir C sabiti vardır. Dahası,

$$\inf \left\{ \left(\sum |\lambda_k|^p \right)^{1/p} : f = \sum \lambda_k M_k \right\} \sim \|f\|_{H^p}, \quad [29].$$

Önerme 3.33. $p_1 \leq p_2 \leq 1$ olsun. Eğer a, herhangi bir (p_1, q_1, s_1)-atom, $\mathcal{T}$ bir lineer operatör olmak üzere $\mathcal{T}a$, bir $(p_1, q_1, s_1, \epsilon)$-molekül ve

$$\mathcal{N}_{q_2}(\mathcal{T}a) \leq C$$

sağlansın, burada C, a dan bağımsızdır. Bu durumda $\mathcal{T}$, (H^{p_1}, H^{p_2}) tiplidir, [20].

4. HARDY UZAYLARINDA İNTEGRAL OPERATÖRLER

Bu bölümde harmonik analizdeki integral operatörlerinden Riesz Potansiyel operatörü ve singüler integral operatörünün Hardy uzaylarında sınırlılığı ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

4.1. Riesz Potansiyel Operatörü

$L^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında $1 < p < \infty$ için, Riesz Potansiyel Operatörleri

$$(I_\alpha f)(x) = C_{\alpha,n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n,$$

ile tanımlanır, burada $C_{\alpha,n}$ uygun bir sabittir. Benzer şekilde bu operatörü Fourier dönüşümü yardımı ile

$$\left(\widehat{I_\alpha f}\right)(x) = (2\pi |x|)^{-\alpha} \widehat{f}(x) \tag{4.1}$$

olarak da tanımlayabiliriz. Burada f yeterince düzgün fonksiyondur. Sobolev teoremi gereğince $1 < p_1 < p_2 < \infty$, $0 < \alpha < n/p_1$ ve $1/p_2 = 1/p_1 - \alpha/n$ koşulları sağlandığında, I_α operatörü (L^{p_1}, L^{p_2}) tipli olur. Yani bir $C = C_{\alpha,p_1,p_2,n}$ sabiti vardır, öyle ki

$$\|I_\alpha f\|_{p_2} \leq C \|f\|_{p_1} \tag{4.2}$$

olur. $H^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında Fourier dönüşümü tanımlanabildiğinden Riesz potansiyel operatörünü $H^p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde (4.1) ile tanımlayabiliriz.

Teorem 4.1. (i) Eğer $p_1 \leq 1 < p_2$, $0 < \alpha < n$ ve $1/p_2 = 1/p_1 - \alpha/n$ koşulları sağlanırsa I_α operatörü (H^{p_1}, L^{p_2}) tiplidir,

(ii) Eğer $p_1 \leq 1 < p_2$, $0 < \alpha < n$ ve $1/p_2 = 1/p_1 - \alpha/n$ koşulları sağlanırsa I_α operatörü (H^{p_1}, H^{p_2}) tiplidir, [29].

İspat. (i): Önerme 3.1 den,

$$\|I_\alpha a\|_{p_2} \leq C_{\alpha,n,p_1,p_2}$$

eşitsizlikten tüm a (p_1, q_1, s) atomları, ispat için yeterlidir. Burada $q_1 > p_1$, ve $s \geq \left[n \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) \right]$ dir. Teorem 3.15. kullanılarak, $s+1 > n \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right)$ tek sayısının uygun olduğunu varsayabiliriz. Dahası, $1 < q_1 < q_2 < \infty$ ve $1/q_1 - 1/q_2 = 1/p_1 - 1/p_2$ gibi q_1 ve q_2 kullanabiliriz. Ayrıca a, orijin merkezli bir (p_1, q_1, s)- atomdur. $supp\ a \subset B$ olsun. $\widetilde{B}$, B'nin aynı merkezli genişlemesi olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} \|I_\alpha a\|_{p_2} &\leq \left(\int_{\widetilde{B}} |I_\alpha a(x)|^{p_2} \, dx \right)^{1/p_2} + \left(\int_{\widetilde{B}^c} |I_\alpha a(x)|^{p_2} \, dx \right)^{1/p_2} \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

olduğu açıktır. $q_2/p_2 > 1$ için Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \|I_\alpha a\|_{q_2} |B|^{1/p_2 - 1/q_2} \\ &\leq C \|a\|_{q_1} |B|^{1/p_1 - 1/q_1} \\ &\leq C \end{aligned}$$

elde edilir.

$$J_2 = C_{\alpha,n} \left(\int_{\widetilde{B}^c} \left| \int_B \frac{a(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \right|^{p_2} dx \right)^{1/p_2}$$

olduğu dikkate alınırsa, x e göre $|x-y|^{-n+\alpha}$ Taylor açılımı yapılarak ve atomların yok olma anı kullanılarak,

$$J_2 \leq C_{\alpha,n} \left\{ \int_{\widetilde{B}^c} \left(\int_B \frac{|a| \, |y|^{s+1}}{|x|^{(n-\alpha+s+1)}} dy \right)^{p_2} dx \right\}^{1/p_2}$$

elde edilir. Buradan,

$$J_2 \leq C \|a\|_{q_1} |B|^{\frac{s+1}{n} - \frac{1}{q_1} + 1} \left(\int_{\widetilde{B}^c} \frac{dx}{|x|^{(n-\alpha+s+1)p_2}} \right)^{1/p_2}$$
$$\leq C$$

bulunur.

(ii) q_1, q_2 ve s (i)'deki gibi olsun. Önerme 3.33.'den, a, bir (p_1, q_1, s)- atomu ise bu durumda $I_\alpha a$, bir $\left(p_2, q_2, \left[n\left(\frac{1}{p_2} - 1\right)\right], \varepsilon\right)$- molekül ve

$$\varepsilon > \max\left\{s/n, \frac{1}{p_2} - 1\right\}$$

ve

$$s/n < \varepsilon < (s + 1 - \alpha)/n$$

olmak üzere

$$\mathcal{N}_{q_2}(I_\alpha a) \leq C_{\alpha,n,p_1,p_2}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$s + 1 > n\left(\frac{1}{p_1} - 1\right) > n\left(\frac{1}{p_2} - 1\right)$$

dikkate alırsak, istenilene uygun bir ε mevcuttur.

$$a_0 = 1 - \frac{1}{p_2} + \varepsilon$$

ve

$$b_0 = 1 - \frac{1}{q_2} + \varepsilon$$

şeklinde tanımlansın. (i)'deki gibi, a, orijin merkezli bir (p_1, q_1, s)- atom ve $supp\ a \subset B$ olsun. Böylece $I_\alpha a$ bir moleküldür. J_1 ve J_2, (i)'deki gibi benzer şekilde kullanılarak,

$$\left(\int_{\widetilde{B}}\left|I_{\alpha}a(x)\,|x|^{nb_0}\right|^{q_2}dx\right)^{1/q_2}\leq |B|^{b_0}\,\|a\|_{q_1}$$

ve

$$\left(\int_{\widetilde{B}^c}\left|I_{\alpha}a(x)\,|x|^{nb_0}\right|^{q_2}dx\right)^{1/q_2}\leq |B|^{b_0}\,\|a\|_{q_1}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{q_2}(I_{\alpha}a)&=\|I_{\alpha}a\|_{q_2}^{a_0/b_0}\left\|I_{\alpha}a(\cdot)\,|\cdot|^{nb_0}\right\|_{q_2}^{1-(a_0/b_0)}\\&\leq C\,\|a\|_{q_1}^{a_0/b_0}\left(\|a\|_{q_1}|B|^{b_0}\right)^{1-(a_0/b_0)}\\&\leq C.\end{aligned}$$

Böylece yok olma anı şartlarına göre

$$\int I_{\alpha}a(x)x^{v}dx=0,\quad |v|\leq s.$$

Aslında

$$\begin{aligned}\int_{|x|>1}|I_{\alpha}a(x)x^{v}|\,dx&\leq\left\|I_{\alpha}a(\cdot)\,|\cdot|^{nb_0}\right\|_{q_2}\cdot\left(\int_{|x|>1}|x|^{(|v|-nb_0)q2'}dx\right)^{1/q_2'}\\&<\infty\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır, dolayısıyla $I_{\alpha}a(x)x^{v}\in L^{1}(\mathbb{R}^{n})$. Buradan

$$\left(I_{\alpha}\widehat{a}(t)t^{v}\right)(x)=D^{v}\left[\left(I_{\alpha}\widehat{a}\right)(x)\right]\in C(\mathbb{R}^{n}).$$

Böylece

$$\left(I_{\alpha}\widehat{a}(t)t^{v}\right)(0)=\int I_{\alpha}a(t)t^{v}dt=0$$

ispatlamak amacıyla

$$\lim_{|x|\to 0} D^v \left[(I_\alpha \widehat{a})(x) \right] = 0 \tag{4.3}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$|v_1| + |v_2| = |v|$ olacak şekilde v_1 ve v_2 alalım. Buradan

$$D^{v_1}\left(|x|^{-\alpha}\right) = O\left(|x|^{-\alpha-|v_1|}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} D^{v_2}\widehat{a}(x) &= \int a(\xi)(-2\pi i\xi)^{v_2} e^{-2\pi i\xi\cdot x} d\xi \\ &= \int a(\xi)(-2\pi i\xi)^{v_2} \left[e^{-2\pi i\xi\cdot x} - P(\xi) \right] d\xi \end{aligned}$$

dır. Böylece $P \in \mathcal{P}_{s-|v_2|}$ dir. $P(\xi)$, $s-|v_2|$-dereceden $e^{-2\pi i\xi\cdot x}$ Taylor polinomları gibi olmak üzere

$$|D^{v_2}\widehat{a}(x)| \le C\,|x|^{s-|v_2|+1}$$

elde edilir. Buradan

$$\left| D^{v_1}\left(|x|^{-\alpha}\right) D^{v_2}\widehat{a}(x) \right| \le C\,|x|^{s-|v|-\alpha+1}$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla bu (4.3)'ü gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

■

4.2. Singüler İntegral Operatörleri

Singüler integral operatör,

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} f(y)K(x-y)dy$$

şeklinde tanımlanır, burada K çekirdeği,

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)dx = 0, \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty$$

şartını sağlar. Singüler integral operatörü genellikle

$$Tf(x) = p.v(f * K)$$

şeklinde ifade edilecek.

Teorem 4.2.

$$Tf(x) = p.v(f * K),$$

$L^2(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı bir singüler integral operatör ve bazı δ $(0 < \delta \leq 1)$ için K,

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C\,|y|\,\delta/\,|x|^{n+\delta}, \quad |x| > 2\,|y| \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer

$$\frac{n}{n+\delta} < p \leq 1$$

ise T operatörü (H^p, H^p) tiplidir, [1].

İspat. Önerme 3.33. kullanılarak, $(p, 2, 0)$ a- atomu için Ta,

$$\mathcal{N}_2(Ta) \leq C \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir $(p, 2, 0, \varepsilon)$- moleküldür, burada C, a'dan bağımsız ve $1/p - 1 < \varepsilon < \delta/n$ dır.

$$p.v. \int K(x)dx = 0$$

olduğu dikate alınırsa,

$$\int Ta(x)dx = 0$$

olduğu kolayca görülür. Böylece (4.5)'in doğruluğu gösterilir. Kabul edelim ki a, $(p,2,0)$-atom ve $\mathrm{supp} a \subset B(x_0,r)$ olsun. T, L^2 uzayında sınırlı olduğu için,

$$\|Ta\|_2 \leq C\|a\|_2 \leq Cr^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{|x-x_0|<2r} |Ta(x)|^2 |x-x_0|^{2nb_0}\,dx &\leq Cr^{n(1+2\varepsilon)}\|Ta\|_2^2 \\ &\leq Cr^{2n(1-1/p+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Şimdi yok olma anı şartları ve (2.19) kullanılarak, $y \in B(x_0,r)$ ve $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(x_0,2r)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|Ta(x)| &= \left|\int [K(x-y)-K(x-x_0)]\,a(y)dy\right| \\ &\leq C\int \frac{|y-x_0|^\delta}{|x-x_0|^{n+\delta}}|a(y)|\,dy \\ &\leq Cr^{\delta+n(1-1/p)}|x-x_0|^{-(n+\delta)}.\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}&\int_{|x-x_0|\geq 2r} |Ta(x)|^2|x-x_0|^{2nb_0}\,dx \\ &\leq Cr^{2\delta+2n(1-1/p)}\int_{|x-x_0|\geq 2r}|x-x_0|^{2nb_0-2(n+\delta)}\,dx \\ &\leq Cr^{2n(1-1/p+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}&\|Ta\|_2^{a_0/b_0}\left\|Ta(\cdot)\,|\cdot-x_0|^{nb_0}\right\|_2^{1-(a_0/b_0)} \\ &\leq C(r^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})})^{a_0/b_0}\cdot(r^{n(1-\frac{1}{p}+\varepsilon)})^{1-(a_0/b_0)} \\ &\leq C.\end{aligned}$$

Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizliği (4.5) eşitsizliği olup ispat tamamlanır. ■

KAYNAKLAR

[1]. Alvarez, J., Milman, M. (1986). *H^p continuity properties of Calderon- Zygmund-type operators,* J. Math. Anal. Appl., 118, 65-79.

[2]. Alp, M., Musayev, B. (2000). *Fonksiyonel Analiz,* Balcı Yayınları.

[3]. Burenkov, V.I., Guliyev, V.S., Tararykova, T.V., Serbetci, A. (2008). *Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of Genuine Singular Integral Operators in Local Morrey-Type Spaces,* Doklady Akademii Nauk, 1, 11-14.

[4]. Burkholder, D.L., Gundy, R.F., Silverstein, M.L. (1971). *A maximal function characterization of the class H^p,* Trans. Amer. Math. Soc., 157 , 137-153.

[5]. Calderón, A.P., Zygmund, A. (1964). *On higher gratients of harmonic functions,* Studia Math., 24, 211-226.

[6]. Campanato, S. (1964). *Proprieta di una famiglia di spazi funzionali,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18, 137-160.

[7]. Cristina, P.M., Ward, L. A. (2012). *Harmonic Analysis: From Fourier to Wavelets,* Providence, RI: American Mathematical Society.

[8]. Coifman, R.R. (1974). *A real variable characterization of H^p,* Studia Math., 51, 269-274.

[9]. Coifman, R.R., Weiss, G. (1977). *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis,*
Bull. Amer. Math. Soc., 83, 569-645.

[10]. Duandikoetxea, J. (2001). *Fourier Analysis,* Graduate Studies in Math., AMS, Providence, RI, 1, 29.

[11]. Dyn'kin, E.M. (1991). *Methods of singular integrals: Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory,* Commutative Harmonic Analysis I. Encyclopaedia of Math. Sci., 15, 167-259.

[12]. Duren, P.L. (1971). *Theory of H^p Spaces,* Academic Press, N.Y..

[13]. Grafakos, L. (2004). *Classical and modern Fourier analysis,* Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 42-01

[14]. Fefferman, C. (1971). *Characterizations of bounded mean oscillation,*Bull. Amer. Math.Soc. 77, 587-588.

[15]. Fefferman, C., Stein, E.M. (1972). *Hardy spaces of several variables,* Acta Math., 129, 137-193.

[16]. Hardy, G. H., Littlewood, J. E. (1939). *A maximal theorem with function-theoretic applications,* Acta Mathematica, Acta Math., 54(none), 81-116.

[17]. John, F., Nirenberg, L. (1961). *On functions of bounded mean oscillation,* Comm. Pure Appl.Math., 14, 415-426.

[18]. Katznelson, Y. (1968). *An Introdution to Harmonic Analysis,* Dover publications, Inc., N.Y..

[19]. Latter, R.H. (1978). *A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms,* Studia Math., 62, 93-101.

[20]. Lu, S.Z. (1995). *Four Lectures on Real H^p Spaces,* World Scientific, Singapore.

[21]. Meskhi, A. (2011). *Maximal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces,* Complex Variables and Elliptic Equations, 56(10-11), 1003-1019.

[22]. Pick, L., Kufner, A.; John, O., Fucík, S. (2012). *Function Spaces,* 1. Berlin, Boston: De Gruyter.

[23]. Royden, H. L. (1968). *Real Analysis,* MacMillan, New York, 2nd ed.

[24]. Rudin, W. (1991). *Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics,* McGraw-Hill, Inc., New York.

[25]. Sadosky, C. (1979). *Interpolation of operators and Singular integrals: An Introduction to Harmonic Analysis,* Marcel Dekker Inc..

[26]. Seeley, R. (1980). *An Estimate Near the Boundary for the Spectral Function of the Laplace Operator,* American Journal of Mathematics, 102 (5), 869-902.

[27]. Stein, E. M. (1970). *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, Princeton.

[28]. Stein, E.M., Weiss, G. (1960). *On the theory of harmonic functions of several variables, I.The theory of H^p spaces,* Acta Math., 103, 25-62.

[29]. Taibleson, M.H., Weiss,G. (1980). *The molecular characterization of certain Hardy spaces,* Asterisque, 77 , 67-149.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Emre YILDIRIM
Uyruğu	T.C.

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Erciyes Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölüm	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2020

Makale ve Bildiriler
1. Akbulut A., Yıldırım E., 2022, *Decomposition of local mixed Morrey-Adams spaces,* 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applicstions, 24-26 August 2022, Bakü, Azarbaijan, 8(2), 54.