



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



ESNEK MAKSİMAL KAVRAMI YARDIMIYLA
YENİ TÜR ESNEK ÖRTÜ TABANLI KABA
KÜMELER VE KARAR VERME
UYGULAMALARI

Kubilay YAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR

2026



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**ESNEK MAKSİMAL KAVRAMI YARDIMIYLA
YENİ TÜR ESNEK ÖRTÜ TABANLI KABA
KÜMELER VE KARAR VERME
UYGULAMALARI**

Kubilay YAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL

KIRŞEHİR

2026

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

10/06/2026
Kubilay YAŞAR

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	I
TEŞEKKÜR	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	V
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL VE METOT	7
3.1. Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümeler	9
3.2. Esnek Matrisler ve Bazı İşlemler	11
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	15
4.1. Esnek Maksimal Kavramı Yardımıyla Yeni Tür Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümeler	15
4.2. Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Karşılaştırılması	24
4.3. Karar Verme Uygulamaları	26
4.3.1. Yeni Tür Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümeler Kullanılarak Çok Kriterli Grup Karar Verme	28
4.3.2. Esnek Max-Min Karar Verme	34
4.3.3. Esnek Dağılmalı (Min-Min, Min-Max, Max-Min, Max-Max) Karar Verme	38
4.3.4. Küme-Kısıtlı Esnek Karar Verme	45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	53
EKLER	55
EK 1. Kongre Katılım Belgesi	55
EK 2. Kongre Katılım Belgesi	56
ÖZGEÇMİŞ	57

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitim ve öğreniminin her aşamasında bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, tüm içtenliği ve sabrıyla beni motive edip destekleyen, tez çalışmamın her satırında emeği olan çok kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim ve öğrenim hayatım boyunca bu aşamaya gelmemde verdikleri emek ve sevgiyle her daim yanımda olan aileme, bu yoldaki engebeleri daha aşılabılır hale getiren, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili babam İsmail YAŞAR'a ve annem Şerife YAŞAR'a teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2026

Kubilay YAŞAR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK MAKSİMAL KAVRAMI YARDIMIYLA YENİ TÜR ESNEK ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELER VE KARAR VERME UYGULAMALARI

Kubilay YAŞAR

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL

Yıl: 2026, Sayfa: 57

Jüri: Doç. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL

Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Prof. Dr. Tuğba Han ŞİMŞEKLER DİZMAN

Bu tez çalışması, esnek kaba kümelerin bir genelleştirilmesi olan esnek örtü tabanlı kaba kümelerin yeni türlerini vermek ve bunları belirsizlik içeren karar verme problemlerine uygulamak amacıyla yapılmıştır. İlk olarak, tezde kullanılan belirsizlik teorileri ve karar verme metotları ile ilgili temel kavramlar hatırlatılmıştır. Daha sonra esnek maksimal tasvir kavramı tanımlanmış ve bu kavram yardımıyla iki farklı yeni esnek örtü tabanlı kaba küme türü elde edilmiştir. Tanımlanan bu yapıların örnekleri verilmiş, temel özellikleri incelenmiş ve ilgili özelliklerin ispatları ayrıntılı olarak sunulmuştur. Ayrıca elde edilen bu yeni türler ile literatürde daha önce tanımlanmış bazı esnek örtü tabanlı kaba kümeler arasındaki ilişkiler incelenmiş ve karşılaştırmalar yapılmıştır. Daha sonra, esnek maksimal tasvir kavramı ile tanımlanan esnek örtü tabanlı kaba kümelerden biri karar verme problemlerinde uygulanmıştır. Bu kapsamda dört farklı karar verme yöntemi ele alınmıştır. Kullanılan yöntemler; yalnızca en uygun alternatifi belirleyen yöntemler ile hem en uygun alternatifi seçen hem de alternatiflerin sıralanmasını sağlayan yöntemler olarak değerlendirilmiştir. Sonuç olarak, farklı karar verme yöntemlerinden elde edilen bulgular karşılaştırılmış ve değerlendirilen yöntemlerin karar verme süreçlerindeki etkinlikleri ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Esnek kümeler, Kaba kümeler, Esnek kaba kümeler, Esnek örtü tabanlı kaba kümeler.

ABSTRACT

MASTER’S THESIS

NEW TYPES OF SOFT COVERING BASED ROUGH SETS AND DECISION MAKING APPLICATIONS USING THE CONCEPT OF SOFT MAXIMAL

Kubilay YAŞAR

**KIRŞEHİR AHI EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL

Year: 2026, Pages: 57

Juries: Assoc. Prof. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL

Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Prof. Dr. Tuğba Han ŞİMŞEKLER DİZMAN

This thesis was conducted with the aim of introducing new types of soft covering based rough sets which are a generalization of soft rough sets and applying them to decision making problems involving uncertainty. First, the basic concepts related to the uncertainty theories and decision making methods used in the thesis are reviewed. Subsequently, the concept of soft maximal description is defined, and two distinct new types of soft covering based rough sets are derived using this concept. Examples of these structures are provided, their fundamental properties are examined, and the proofs of the relevant properties are presented in detail. Additionally, the relationships between these newly derived types and some previously defined soft covering based rough sets in the literature were examined, and comparisons were made. Subsequently, one of the soft covering based rough sets, defined by the concept of soft maximal description, was applied to decision making problems. In this context, four different decision making methods were considered. The methods used were evaluated as those that merely identify the optimal alternative and those that both select the optimal alternative and provide a ranking of the alternatives. As a result, the findings obtained from the different decision making methods were compared, and the effectiveness of the evaluated methods in decision making processes was demonstrated.

Keywords: Soft sets, Rough sets, Soft rough sets, Soft covering based rough sets.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$=$	Eşittir
$\neq$	Eşit değildir
$\in$	Ait
$\notin$	Ait değil
$\exists$	Öyle ki
$\Rightarrow$	Gerek koşul
$\Leftarrow$	Yeter koşul
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
$\subseteq$	Alt küme
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
A^c	Tümleyen
$\emptyset$	Boş küme
X	Evren küme
$P(X)$	Kuvvet kümesi
$\mathcal{R}$	Denklik bağıntısı
$(X, \mathcal{R})$	Yaklaşım uzayı
E	Parametre kümesi
(F, E)	Esnek küme
C_G	Esnek örtü küme
(X, C_G)	Esnek örtü yaklaşım uzayı

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda ve bilimsel çalışmalarda karşılaşılan bazı problemler belirsizlik içerdiğinden klasik mantık yöntemleriyle çözülememektedir. Bu nedenle bilim insanları, bu tür problemleri çözmek amacıyla belirsizliğe dayalı teoriler geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada ilk olarak belirsizlik için iki farklı matematiksel yaklaşım olarak önerilen kaba (rough) küme [16] ve esnek (soft) küme [15] teorilerinin kombinasyonu ile oluşturulan esnek kaba kümelerin [7,8] genelleştirilmesi olan esnek örtü tabanlı kaba kümeleri ve çeşitlerini inceleyeceğiz. Yüksel ve ark. [20, 21] tarafından kaba kümeler ve esnek örtü kümeler kullanılarak esnek örtü yaklaşım uzayı elde edilmiş ve esnek minimal tasvir kavramı yardımıyla, esnek örtü tabanlı kaba kümeler ve çeşitleri tanımlanmıştır. Daha sonraki yıllarda esnek örtü tabanlı kaba kümeler üzerine birçok çalışma yapılmış, bu yapıların cebirsel özellikleri ve farklı çeşitleri araştırılmıştır [11, 12, 23]. Ayrıca esnek örtü tabanlı kaba kümeler, klasik kaba kümelerin yetersiz kaldığı durumlarda parametreler yardımıyla çok yönlü ve kapsamlı bir modelleme imkânı sunmaları nedeniyle literatürde önemli bir çalışma alanı hâline gelmiş ve çok kriterli karar verme problemlerinin çözümünde kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasında ise belirsizlik içeren problemlerin çözümüne katkı sağlamak amacıyla, esnek örtü tabanlı kaba kümelerin yeni türleri tanımlanmış ve bu yapılar karar verme problemlerine uygulanmıştır. İlk olarak literatürde yer alan çalışmalardan farklı olarak esnek maksimal tasvir kavramı verilmiş ve bu kavram yardımıyla iki yeni esnek örtü üst yaklaşım operatörü tanımlanmıştır. Böylece yeni tür esnek örtü tabanlı kaba kümeler elde edilmiştir. Tanımlanan esnek örtü üst yaklaşım operatörlerinin temel özellikleri incelenmiş ve mevcut modellerle karşılaştırmaları örnekler yardımıyla yapılmıştır. Daha sonra, esnek maksimal tasvir kavramı ile tanımlanan esnek örtü tabanlı kaba kümelerden biri karar verme problemlerine uygulanmıştır. Bu kapsamda en uygun seçeneğin belirlenmesi ve alternatiflerin sıralanması amacıyla dört farklı karar verme yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntemler temel alınarak ve esnek maksimal tasvir kavramı kullanılarak esnek örtü tabanlı kaba küme teorisine dayalı yeni bir karar verme süreci geliştirilmiştir. Bu süreçte; yöntemlerin probleme uygulanması için dört aşamalı sistematik karar verme yapısı tasarlanmıştır.

İlk aşamada, Feng'in [9] karar verme yöntemi temel alınarak, uzman grubunun değerlendirme kümesinden esnek maksimal tasvir kavramına dayalı esnek örtü alt ve üst yaklaşımları elde edilmiştir. Bu yaklaşımlar yardımıyla mutlak optimal ve muhtemelen optimal alternatifler belirlenmiştir. Böylece süreçte bir ön eleme aşaması oluşturulmuş ve alternatiflerin sıralaması elde edilmiştir.

İkinci aşamada, Çağman ve Enginoğlu'nun [5] karar verme yöntemi temel alınarak, ilk aşamada elde edilen alt ve üst yaklaşımlarla tanımlanan esnek kümeler, esnek matrisler biçiminde temsil edilmiştir. Ayrıca esnek matris çarpımları kullanılmıştır. Böylece karar verme sürecinde kullanılan veriler işlem yapılabilir bir yapıya dönüştürülerek etkili bir veri gösterimi sağlanmış ve en uygun alternatif belirlenmiştir.

Üçüncü aşamada, Atagün ve ark.'nın [2] karar verme yöntemi temel alınarak, karar verme sürecindeki hesaplama etkinliğini artırmak amacıyla geliştirilmiş esnek matris çarpımları kullanılmıştır. Bu aşamada, Min-Min, Min-Max, Max-Min ve Max-Max olacak şekilde dört farklı yöntemde en uygun alternatifler belirlenmiş ve alternatiflerin değerlendirilmesine yönelik tutarlı sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü aşamada, Atagün ve Kamacı'nın [3] karar verme yöntemi temel alınarak, geliştirilmiş esnek matris çarpımlarından elde edilen sonuçlar ve toplam-satır fonksiyonu kullanılmıştır. Bu aşamada, toplam karar üçlüsü ile birinci ve ikinci karar değerlerinden yararlanılmıştır. Böylece farklı kriterler ve uzman değerlendirmeleri arasındaki ilişkiler daha kapsamlı bir şekilde analiz edilmiştir. Ayrıca alternatiflerin sıralaması elde edilmiştir.

Böylece geliştirilen karar verme süreci, Feng'in yöntemindeki güvenilirlik analizini, Çağman ve Enginoğlu'nun yöntemindeki veri gösterimini ve esnek matris çarpımını, Atagün ve ark.'nın yöntemindeki işlem kapasitesini artıran geliştirilmiş esnek matris çarpımlarını ve Atagün ile Kamacı'nın küme-kısıtlı karar verme yöntemindeki alternatif sıralama yaklaşımını bir araya getirerek bütünlük bir karar verme modeli ortaya koymuştur.

Elde edilen sonuçlar, önerilen esnek maksimal tasvir temelli yaklaşımın hem teorik açıdan esnek örtü tabanlı kaba küme literatürüne katkı sağladığını hem de belirsizlik içeren karar verme problemlerinde uygulanabilir ve etkili sonuçlar ürettiğini göstermektedir. Bu yönüyle çalışma, belirsizlik altında karar verme problemlerine yönelik yeni modellerin geliştirilmesine katkı sağlamakta ve gelecekte yapılacak teorik ve uygulamalı araştırmalar için önemli bir temel oluşturmaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Günlük yaşamda ve mühendislik, eğitim, tıp, ekonomi gibi birçok alanda belirsizlik içeren problemlerle karşılaşilmektedir. Klasik mantık ve klasik küme teorisi, bu tür belirsizlik içeren durumları açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Klasik küme teorisinde, bir elemanın kümeye üyeliği açıkça "bir eleman ya kümeye aittir ya da değildir" şeklinde tanımlanır. Oysa belirsizlik teorilerinde, bir elemanın bir kümeye üyeliği genellikle kesin bir "evet" ya da "hayır" yerine daha esnek ve derecesine bağlı olarak ifade edilir. Bu nedenle, belirsizlik içeren problemlerin modellenmesi ve çözümünde belirsizlik teorilerinden yararlanılmaktadır. Bilim insanları, bu problemlerin çözümünde kullanılmak üzere bulanık küme teorisi [22], kaba küme teorisi [16] ve esnek küme teorisi [15] gibi çeşitli belirsizlik modelleri geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada, belirsizlik içeren problemleri çözmek için esnek kümeler ve kaba kümelerin bir kombinasyonu olan esnek örtü tabanlı kaba kümeler ele alınmıştır. Şimdi bu kavramlar ile ilgili daha önce yapılan çalışmaları hatırlatalım. Pawlak [16] tarafından önerilen kaba küme teorisinin temeli bilgi sistemlerine dayanır. Bilgi sistemlerinin yapısı matematiksel anlamda özel bir bağıntı türü olan denklik bağıntısı ile yakından ilişkilidir. Kaba küme teorisinde denklik bağıntısıyla oluşturulan yaklaşım uzayında, denklik sınıfları yardımıyla alt ve üst yaklaşım adı verilen iki küme çifti tanımlanır. Bu yaklaşımlar aracılığıyla, bir evren kümenin alt kümesi olan kaba küme ifade edilir. Yani belirsizliğin yapılandırılmasında yaklaşım operatörleri önemli rol üstlenirler. Böylece kaba küme teorisi, klasik küme teorisinin bir genişlemesi olarak düşünülebilir. Kaba küme teorisi, kural indirgeme ve sınıflandırma yaklaşım özellikleri ile büyük verilerin analiz işlemlerinin yanı sıra çok kriterli karar verme problemlerinde de kullanılmaktadır. Ayrıca makine öğrenimi, akıllı sistemler, tümevarımsal akıl yürütme, desen tanıma, görüntü işleme, sinyal analizi, bilgi keşfi, karar analizi, uzman sistemler ve diğer birçok alanda başarıyla uygulanmaktadır.

Belirsizlik için farklı bir matematiksel yaklaşım olarak önerilen esnek küme teorisi Molodtsov [15] tarafından tanımlanmıştır. Molodtsov esnek kümeyi, bir evren kümenin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesi olarak tanımlamıştır. Ayrıca Molodtsov [15], yaklaşım tanımında hiçbir kısıtlama olmayan esnek küme teorisini kullanarak, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, oyun teorisi, olasılık teorisi, ölçüm teorisi vb. alanlarda başarılı çalışmalar yapmıştır. 2010 yılında Feng ve ark. [7] tarafından kaba kümelerde parametreleme araçlarını kullanılabilir hale getirmek için önemli bir adım atılmıştır. Feng ve ark. [7] bir kümenin esnek alt ve esnek üst yaklaşımlarını bulmak için kaba küme teorisinde denklik bağıntısı yerine esnek kümeyi kullanarak esnek yaklaşım uzayını elde etmişlerdir. Esnek yaklaşım uzayında esnek alt ve

üst yaklaşım kavramları aracılığıyla, esnek kaba kümeleri tanımlamışlar, temel özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca Pawlak'ın kaba kümelerinin, esnek kaba kümelerin özel bir durumu olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra Shabir ve ark. [18] tarafından esnek kaba kümelerin bir başka kombinasyonu verilmiştir. 2014 yılında Yüksel ve ark. [20], esnek kümeler yerine esnek örtü kümeleri kullanarak esnek örtü yaklaşım uzayını elde etmişler ve esnek minimal tasvir kavramı aracılığıyla esnek örtü tabanlı kaba kümeleri tanımlamışlardır. Sonraki yıllarda, Li ve ark. [12], Zhan ve Alcantud [23], Yüksel ve ark. [21] ile Güzel Ergül ve Yüksel [11], farklı esnek örtü tabanlı kaba küme modellerini tanımlamışlardır.

Yukarıda bahsedilen esnek kaba kümeler ve esnek örtü tabanlı kaba kümeler, belirsizlik teorisinde önemli ve yararlı bir araştırma konusu haline gelen çok kriterli grup karar verme yöntemlerinde kullanılmıştır. Ayrıca, bulanık küme teorisi [22], kaba küme teorisi [16], esnek küme teorisi [15] ve bunların hibrit modelleri gibi farklı modelleme yaklaşımları kullanılarak çeşitli ortamlara yönelik çok kriterli grup karar verme teknikleri geliştirilmiştir. Bu teoriler, geniş bir uygulama alanına sahip olduğundan literatürde birçok yazar tarafından çalışılmıştır [1–3, 5, 6, 9–11, 13, 14, 17, 19–21, 25, 26].

Bu çalışmada, sonlu sayıda alternatif arasından birini seçebileceğimiz ve bu alternatifleri özelliklerine göre yaklaşık olarak değerlendirebileceğimiz çok kriterli karar verme yöntemleri ele alınmıştır. Bu kapsamda, Feng [9], Çağman ve Enginoğlu [5], Atagün ve ark. [2] ve Atagün ve Kamacı [3] tarafından verilen çok kriterli grup karar verme yöntemleri yeni bir bakış açısıyla incelenmiştir. Öncelikle, bu çalışmaları hatırlatalım. Feng [9], esnek kaba kümeler aracılığıyla farklı karar vericilerin değerlendirmelerini dikkate alarak en uygun seçeneğin belirlenmesini sağlayan çok kriterli bir grup karar verme yöntemi önermiştir. Bu yaklaşımda, karar vericilerin öznel tercihlerinden kaynaklanan belirsizlikleri azaltmak amacıyla esnek örtü alt ve üst yaklaşımları kullanılmış, farklı güven seviyelerine karşılık gelen değerlendirmeler dikkate alınarak daha esnek bir karar mekanizması oluşturulmuştur. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda mutlak optimal ve muhtemel optimal alternatifler belirlenmiş ve bu alternatiflerin karar kümesinin daraltılmasında önemli bir rol oynadığı gösterilmiştir. Bu yönüyle yöntem, günlük yaşamda belirsizlik içeren grup karar verme problemlerinde güvenilir alternatiflerin belirlenmesine yönelik etkili bir yaklaşım sunmuştur. Feng'in önerdiği yöntem daha sonra farklı araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir. Yüksel ve ark. [20, 21], Zhan ve ark. [24], Güzel Ergül ve Yüksel [11] ile Zhan ve Alcantud [23], Feng'in yaklaşımında kullanılan esnek kaba kümeler yerine kendi çalışmalarında tanımladıkları esnek örtü tabanlı kaba küme modellerinden yararlanmışlardır. Böylece yöntemin daha fazla karar verme problem türünde uygulanabileceğini ve yaklaşımın farklı esnek örtü tabanlı kaba küme modellerinde de etkin bir şekilde kullanılabileceğini göstermişlerdir.

Esnek küme teorisinin karar verme problemlerindeki kullanımına yönelik önemli bir diğer çalışma Çağman ve Enginoğlu [5] tarafından yapılmıştır. Çağman ve Enginoğlu, esnek kümeleri yeniden tanımlamış [4] ve hesaplama işlemlerinin daha etkin gerçekleştirilebilmesi amacıyla esnek matris kavramını geliştirmişlerdir [5]. Ayrıca, aynı türdeki esnek matrislerin çarpımlarını ve bu işlemlere ait özellikleri tanımlayarak bir karar verme algoritması önermişlerdir. Bu yaklaşım ile karar vericiler tarafından sağlanan bilgiler matris yapısında ifade edilmiş ve esnek kümelerin karar verme problemlerinde daha sistematik bir şekilde kullanılabilmesi sağlanmıştır. Bununla birlikte, önerilen yöntemin temel sınırlamalarından biri, yalnızca aynı türdeki esnek matrisler üzerinde işlem yapılabilmesidir. Bu durum, farklı parametre kümelerini değerlendiren ve farklı yapılarıdaki bilgileri kullanan çoklu karar vericilerin yer aldığı karar verme problemlerinde yöntemin uygulanabilirliğini kısıtlamıştır. Bu sınırlamanın giderilmesine yönelik önemli gelişmelerden biri ise Atagün ve ark. [2] tarafından gerçekleştirilmiştir. Atagün ve ark. [2], ortak evren üzerinde farklı türlerdeki esnek matrisleri çarpım amacıyla Çağman ve Enginoğlu'nun [5] makalesinde tanımlanan And, And-Not, Or ve Or-Not esnek matris çarpımlarını genelleştirmişlerdir. Ayrıca Çağman ve Enginoğlu'nun [5] esnek matris çarpımlarını yalnızca tek yönlü olarak kullanan karar verme yönteminden farklı olarak, bu genelleştirilmiş esnek matris çarpımlarını hem sağ yönlü hem de sol yönlü kullanarak daha genel bir karar verme algoritması önermişlerdir. Bu yaklaşımda, esnek sağ ve sol matris çarpımları ile tanımlanan sağ ve sol dağılmalı karar fonksiyonlarından elde edilen sonuçlar birleştirilerek tek bir karar fonksiyonu oluşturulmuş; böylece optimum alternatiflerin değişme olasılığı azaltılmış ve daha tutarlı karar sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca, esnek matrislerin bilgisayar ortamında uygulanabilirliğini göstermek amacıyla Scilab kodları sunulmuş ve yöntemin hesaplama yönü de ele alınmıştır. Bu gelişmeler, esnek matris tabanlı karar verme yöntemlerinin daha geniş problem türlerine uygulanabilmesine katkı sağlamıştır. Daha sonraki yıllarda Atagün ve Kamacı [3], esnek kümelerin ayrıştırılması konusunu ayrıntılı olarak inceleyerek esnek karar verme teorisine yeni katkılar sağlamıştır. Esnek matrisler için α -üst, α -alt, α -kesişim ve α -birleşim kavramlarını tanımlamışlar ve bu kavramlara dayalı ayrıştırma teoremleri elde etmişlerdir. Esnek kümelerin ve esnek matrislerin ayrıştırmaları arasındaki bazı ilişkileri örnekler yardımıyla incelemişlerdir. Ayrıca, toplam-satır fonksiyonu, toplam karar üçlüsü, birinci ve ikinci karar değerleri kavramlarını tanımlamışlardır. Genelleştirilmiş esnek matris çarpımlarından elde edilen sonuçları bu kavramlar çerçevesinde değerlendirerek klasik grup karar verme problemleri ve küme kısıtlı grup karar verme problemleri için iki farklı esnek karar verme algoritması geliştirmişlerdir. Bu yaklaşım, önceki yöntemlerden farklı olarak yalnızca en uygun alternatifi belirlemekle kalmamış, aynı zamanda alternatiflerin sıralanmasına

da olanak sağlamıştır. Böylece, çok kriterli grup karar verme problemlerinde daha ayrıntılı ve kapsamlı değerlendirmelerin yapılabilmesi mümkün hâle gelmiştir.

Literatürdeki bu çalışmalar birlikte değerlendirildiğinde, esnek küme tabanlı çok kriterli grup karar verme yöntemlerinin zaman içerisinde önemli bir gelişim gösterdiği görülmektedir. Mevcut yöntemlerde karar mekanizmaları büyük ölçüde belirli karar fonksiyonlarına dayanmaktadır. Bu tez çalışmasında, mevcut çalışmalardan farklı olarak tek bir karar verme yöntemi yerine dört farklı çok kriterli karar verme yöntemini bir araya getiren bütünleşik bir karar verme modeli önerilmiştir. Önerilen model ile farklı karar vericilerden elde edilen bilgilerin etkin bir şekilde değerlendirilmesi, alternatifler arasındaki ayrımın daha belirgin hâle getirilmesi ve sonlu sayıdaki alternatif arasından en uygun seçeneğin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu kapsamda, öncelikle esnek maksimal tasvir kavramı tanımlanmış ve bu kavrama dayalı yeni tür esnek örtü üst yaklaşım operatörleri geliştirilmiştir. Ardından, önerilen operatörler yardımıyla yeni tür esnek örtü tabanlı kaba kümeler elde edilmiş ve bu yapılar çok kriterli karar verme problemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Sonuç olarak, alternatiflerin daha tutarlı biçimde değerlendirilmesi, alternatifler arasındaki ayrımın güçlendirilmesi, belirsizliğin etkilerinin azaltılması ve karar verme sürecinde daha güvenilir ve anlamlı sıralama sonuçlarının elde edilmesi sağlanmıştır.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız küme çeşitleri ile ilgili literatür bilgileri ve bazı temel kavramlar hatırlatılmıştır.

Tanım 3.1. [16] X bir evren küme ve $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ bir denklik bağıntısı olsun. $(X, \mathcal{R})$ ikilisine yaklaşım uzayı denir.

Herhangi bir $x \in X$ için, x noktasının denklik sınıfı, $[x]_{\mathcal{R}}$ sembolü ile gösterilir. X kümesinin $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına göre oluşan tüm denklik sınıflarının kümesi yani X kümesinin $\mathcal{R}$ denklik bağıntısıyla belirlenmiş parçalanışı, $X/\mathcal{R}$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 3.2. [16] $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı olsun. $\mathcal{R}$ denklik bağıntısının denklik sınıflarına $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayında elemanter kümeler (atomlar) denir. $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki tüm atomların kümesi $X/\mathcal{R}$ ile gösterilir. Ayrıca boş küme, elemanter küme (atom) olarak kabul edilir.

Tanım 3.3. [16] $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{R}^-(A) = \cup_{x \in X} \{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \cap A \neq \emptyset\}$$

kümesine, A kümesinin $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki üst yaklaşımı denir.

$$\mathfrak{R}_-(A) = \cup_{x \in X} \{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \subseteq A\}$$

kümesine, A kümesinin $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki alt yaklaşımı denir.

Eğer $\mathfrak{R}^-(A) = \mathfrak{R}_-(A)$ ise $A \subseteq X$ alt kümesine tanımlanabilir küme denir. Aksi takdirde A kümesine kaba küme denir.

Önerme 3.4. [16] X bir evren küme ve $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ bir denklik bağıntısı olsun. $\mathcal{R}$ denklik bağıntısından üretilen alt ve üst yaklaşımlar sırasıyla topolojik uzaylardaki iç ve kapanış operatörlerine karşılık gelir.

Tanım 3.5. [15] X bir evren küme ve E parametrelerin kümesi olsun. $P(X)$, X kümesinin kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F : A \rightarrow P(X)$ bir dönüşüm olmak üzere

$$(F, A) = \{(e, F(e)) : e \in A, F(e) \in P(X)\}$$

ikilisine X evreni üzerinde bir esnek küme denir.

Tanım 3.6. [5] X bir evren küme ve E parametrelerin kümesi olsun. $P(X)$, X kümesinin kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F : E \rightarrow P(X) \ni e \notin A$ için $F(e) = \emptyset$ şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olmak üzere

$$F_A = \{(e, F(e)) : e \in E, F(e) \in P(X)\}$$

kümesine X evreni üzerinde bir esnek küme denir.

Tanım 3.7. [22] X bir evren küme olsun. $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ üyelik fonksiyonu olmak üzere

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanan A kümesine bulanık küme denir. Burada $\mu_A(x)$, x elemanının A kümesine üye olma derecesidir. X üzerindeki bütün bulanık kümelerin kümesi I^X ile gösterilir.

Tanım 3.8. [14] X bir evren küme, E parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $f : A \rightarrow I^X$ bir dönüşüm olmak üzere (f, A) ikilisine bulanık esnek küme denir.

Tanım 3.9. [7] $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek küme olsun. $S = (X, G)$ ikilisine bir esnek yaklaşım uzayı denir. S -esnek yaklaşım uzayını temel alarak keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesi için S -esnek alt ve S -esnek üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$CL(U) = \{x \in X : \exists a \in A, [x \in F(a) \subseteq U]\},$$

$$SH(U) = \{x \in X : \exists a \in A, [x \in F(a) \cap U \neq \emptyset]\}.$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin S -esnek pozitif, S -esnek negatif ve S -esnek sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_S(U) = CL(U),$$

$$NEG_S(U) = X - SH(U),$$

$$SNR_S(U) = SH(U) - CL(U).$$

Eğer $SH(U) = CL(U)$ ise U kümesi, S -esnek yaklaşım uzayında S -tanımlanabilir küme; $SH(U) \neq CL(U)$ ise U kümesi, S -esnek yaklaşım uzayında S -esnek kaba küme olarak adlandırılır.

Önerme 3.10. [7] $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek küme ve $S = (X, G)$ esnek yaklaşım uzayı olsun. Her $U \subseteq X$ alt kümesi için aşağıdakiler sağlanır:

$$CL(U) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq U\},$$

$$SH(U) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \cap U \neq \emptyset\}.$$

3.1. Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümeler

2014 de Yüksel ve ark. [20] esnek kümelerin yerine, esnek örtü kümeleri kullanarak esnek kaba kümelerin genelleştirilmesi olan, esnek örtü tabanlı kaba kümeleri tanımladılar. Esnek örtü yaklaşım uzayını elde ederek, esnek örtü yaklaşımlar olarak adlandırılan yapıları, bu yapıların temel özelliklerini incelediler. Esnek örtü yaklaşımlar aracılığıyla, esnek örtü yaklaşım uzayında kaba kümeleri ve çeşitlerini incelediler.

Tanım 3.11. [8] $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\{F(a) : a \in A\}$ ailesi, X evreninin bir parçalanışını oluşturuyorsa $G = (F, A)$ esnek kümesine, parçalı esnek küme denir.

Tanım 3.12. [7] $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\cup_{a \in A} F(a) = X$ ise $G = (F, A)$ esnek kümesine, tam esnek küme denir.

Tanım 3.13. [7] $G = (F, A)$, X evreni üzerinde tam esnek küme olsun. Eğer her $a \in A$ için $F(a) \neq \emptyset$ ise $G = (F, A)$ esnek kümesine bir esnek örtü küme denir.

Bundan sonra, esnek örtü küme C_G ile gösterilecektir.

Tanım 3.14. [20] $G = (F, A)$, X evreni üzerinde esnek örtü küme olsun. $S = (X, C_G)$ ikilisine, esnek örtü yaklaşım uzayı denir.

Tanım 3.15. [20] $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı ve $x \in X$ olsun.

$$Mind_S(x) = \{F(a) : a \in A \wedge x \in F(a) \wedge (\forall e \in A \wedge x \in F(e) \subseteq F(a) \implies F(a) = F(e))\}$$

ailesi, C_G esnek örtüsüne göre, x noktasının esnek minimal tasviri olarak adlandırılır.

Şimdi literatürde esnek minimal tasvir kavramıyla tanımlanmış bazı esnek örtü tabanlı kaba kümeleri hatırlatalım.

Tanım 3.16. [21] $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 1. tip esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_-(U) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq U\},$$

$$F^-(U) = F_-(U) \cup \{\cup \text{Mind}_S(x) : x \in U - F_-(U)\}.$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü pozitif, esnek örtü negatif ve esnek örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_S(U) = F_-(U),$$

$$NEG_S(U) = X - F^-(U),$$

$$SNR_S(U) = F^-(U) - F_-(U).$$

Eğer $F^-(U) = F_-(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 1. tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $F^-(U) \neq F_-(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 1. tipe göre esnek örtü tabanlı kaba küme olarak adlandırılır.

Tanım 3.17. [20] $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 2. tip esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T_-(U) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq U\},$$

$$T^-(U) = \cup \{\cup \text{Mind}_S(u) : u \in U\}.$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü pozitif, esnek örtü negatif ve esnek örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_S(U) = T_-(U),$$

$$NEG_S(U) = X - T^-(U),$$

$$SNR_S(U) = T^-(U) - T_-(U).$$

Eğer $T^-(U) = T_-(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 2. tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $T^-(U) \neq T_-(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 2. tipe göre esnek örtü tabanlı kaba küme olarak adlandırılır.

Tanım 3.18. [11] $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 3. tip esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B_-(U) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq U\},$$

$$B^-(U) = B_-(U) \cup (\cup \{ \bigcap_{F(a) \in \text{Mind}_S(x)} F(a) : x \in X - B_-(U) \}).$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü pozitif, esnek örtü negatif ve esnek örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_S(U) = B_-(U),$$

$$NEG_S(U) = X - B^-(U),$$

$$SNR_S(U) = B^-(U) - B_-(U).$$

Eğer $B^-(U) = B_-(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 3. tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $B^-(U) \neq B_-(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 3. tipe göre esnek örtü tabanlı kaba küme olarak adlandırılır.

Uyarı 3.19. [20] Esnek yaklaşım uzayında “kaba küme” bir esnek kümeye bağlı olarak ifade edilirken, esnek örtü yaklaşım uzayında bir “kaba küme” bir esnek örtü kümeye bağlı olarak ifade edilir. Aslında Feng ve ark. [7] tarafından verilen esnek kaba küme, bir esnek örtü yaklaşım uzayında ele alındığında esnek örtü tabanlı kaba kümelerin yeni bir tipi olarak düşünülebilir.

Uyarı 3.20. Yukarıda Tanım 3.9., Tanım 3.16., Tanım 3.17. ve Tanım 3.18. de verilen esnek örtü tabanlı kaba kümelerin alt yaklaşım operatörlerinin aynı olduğu kolayca görülebilir. Ancak üst yaklaşım operatörleri farklıdır.

3.2. Esnek Matrisler ve Bazı İşlemler

Tanım 3.21. [5] $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ evren kümesi, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ parametrelerin kümesi, $A \subseteq E$ ve F_A, X üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall i, j$ için

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in F(e_j) \\ 0, & x_i \notin F(e_j) \end{cases}$$

olmak üzere

$$[a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine X üzerinde F_A esnek kümesinin bir esnek matrisi denir.

$m \times n$ esnek matris tanımına göre, bir F_A esnek kümesi $[a_{ij}]$ matrisi tarafından tek bir şekilde karakterize edilir. Dolayısıyla bir F_A esnek kümesi, onun esnek matrisi olan $[a_{ij}]$ matrisine biçimsel olarak eşittir.

Uyarı 3.22. [5] X üzerinde tanımlı tüm $m \times n$ boyutlu esnek matrisler kümesi $SM_{m \times n}$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.23. [5] $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun. Eğer $\forall i, j$ için $c_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise bu durumda $[c_{ij}] \in SM_{m \times n}$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ matrislerinin esnek kesişimi denir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}] \widetilde{\cap} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

Tanım 3.24. [5] $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun. Eğer $\forall i, j$ için $c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise bu durumda $[c_{ij}] \in SM_{m \times n}$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ matrislerinin esnek birleşimi denir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}] \widetilde{\cup} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

Tanım 3.25. [5] $[a_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun. Eğer $\forall i, j$ için $c_{ij} = 1 - a_{ij}$ ise bu durumda $[c_{ij}] \in SM_{m \times n}$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ esnek matrisinin tümleyeni denir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}]^c$ ile gösterilir.

Tanım 3.26. [5] $[a_{ij}], [b_{ik}] \in SM_{m \times n}$ olsun.

a) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin VE çarpımı ($\wedge$)

$$\begin{aligned} \wedge : SM_{m \times n} \times SM_{m \times n} &\rightarrow SM_{m \times n^2} \\ [a_{ij}], [b_{ik}] &\rightarrow [a_{ij}] \wedge [b_{ik}] = [c_{il}] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l = n(j - 1) + k$ ve $c_{il} = \min\{a_{ij}, b_{ik}\}$ dir.

b) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin VEYA çarpımı ($\vee$)

$$\begin{aligned} \vee : SM_{m \times n} \times SM_{m \times n} &\rightarrow SM_{m \times n^2} \\ [a_{ij}], [b_{ik}] &\rightarrow [a_{ij}] \vee [b_{ik}] = [c_{il}] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l = n(j - 1) + k$ ve $c_{il} = \max\{a_{ij}, b_{ik}\}$ dır.

c) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin VE-DEĞİL çarpımı ($\bar{\wedge}$)

$$\begin{aligned}\bar{\wedge} : SM_{m \times n} \times SM_{m \times n} &\rightarrow SM_{m \times n^2} \\ [a_{ij}], [b_{ik}] &\rightarrow [a_{ij}] \bar{\wedge} [b_{ik}] = [c_{il}]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l = n(j - 1) + k$ ve $c_{il} = \min\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ dır.

d) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin VEYA-DEĞİL çarpımı ($\underline{\vee}$)

$$\begin{aligned}\underline{\vee} : SM_{m \times n} \times SM_{m \times n} &\rightarrow SM_{m \times n^2} \\ [a_{ij}], [b_{ik}] &\rightarrow [a_{ij}] \underline{\vee} [b_{ik}] = [c_{il}]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l = n(j - 1) + k$ ve $c_{il} = \max\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ dır.

Tanım 3.27. [2] $[a_{ij}] \in SM_{m \times n_1}$ ve $[b_{ik}] \in SM_{m \times n_2}$ olsun.

a) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin genelleştirilmiş VE çarpımı ($\wedge$)

$$\begin{aligned}\wedge : SM_{m \times n_1} \times SM_{m \times n_2} &\rightarrow SM_{m \times n_1 n_2} \\ [a_{ij}], [b_{ik}] &\rightarrow [a_{ij}] \wedge [b_{ik}] = [c_{is}]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{is} = \min\{a_{ij}, b_{ik}\}$ öyle ki $\alpha, s \leq \alpha n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $j = \alpha, s = (\alpha - 1)n_2 + k$ dir.

b) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin genelleştirilmiş VEYA çarpımı (Υ)

$$\begin{aligned}\Upsilon : SM_{m \times n_1} \times SM_{m \times n_2} &\rightarrow SM_{m \times n_1 n_2} \\ [a_{ij}], [b_{ik}] &\rightarrow [a_{ij}] \Upsilon [b_{ik}] = [c_{is}]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{is} = \max\{a_{ij}, b_{ik}\}$ öyle ki $\alpha, s \leq \alpha n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $j = \alpha, s = (\alpha - 1)n_2 + k$ dir.

c) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin genelleştirilmiş VE-DEĞİL çarpımı ($\bar{\wedge}$)

$$\begin{aligned}\bar{\wedge} : SM_{m \times n_1} \times SM_{m \times n_2} &\rightarrow SM_{m \times n_1 n_2} \\ [a_{ij}], [b_{ik}] &\rightarrow [a_{ij}] \bar{\wedge} [b_{ik}] = [c_{is}]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{is} = \min\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ öyle ki $\alpha, s \leq \alpha n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $j = \alpha, s = (\alpha - 1)n_2 + k$ dir.

d) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin genelleştirilmiş VEYA-DEĞİL çarpımı ($\underline{\vee}$)

$$\begin{aligned}\underline{\vee} : SM_{m \times n_1} \times SM_{m \times n_2} &\rightarrow SM_{m \times n_1 n_2} \\ [a_{ij}], [b_{ik}] &\rightarrow [a_{ij}] \underline{\vee} [b_{ik}] = [c_{is}]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{is} = \max\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ öyle ki $\alpha, s \leq \alpha n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $j = \alpha, s = (\alpha - 1)n_2 + k$ dir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde belirsizlik içeren problemlerin çözümüne katkı sağlamak amacıyla, esnek örtü tabanlı kaba kümelerin yeni türleri tanımlanmış ve bu yapılar karar verme problemlerine uygulanmıştır.

4.1. Esnek Maksimal Kavramı Yardımıyla Yeni Tür Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümeler

Bu bölümde, esnek maksimal tasvir kavramı yardımıyla yeni tip esnek örtü tabanlı kaba kümeleri tanımlayacağız. İlk olarak esnek maksimal tasvir kavramını verelim:

Tanım 4.1. $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı ve $x \in X$ olsun.

$$Maxd_S(x) = \{F(a) : a \in A \wedge x \in F(a) \wedge (\forall e \in A \wedge x \in F(a) \subseteq F(e) \implies F(a) = F(e))\}$$

ailesi, C_G esnek örtüsüne göre, x noktasının esnek maksimal tasviri olarak adlandırılır.

Minimal tasvir kavramı esnek örtü tabanlı kaba kümelerin tanımlanmasında önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada bir elemanın maksimal tasvir tanımı kullanılarak esnek örtü tabanlı kaba kümeler yeniden ele alınmıştır. Bir nesneyi ifade etmek için nesnenin tüm özelliklerine değil yalnızca o nesneye ilişkin temel özelliklere ihtiyacımız vardır. Minimal tasvir ve maksimal tasvir kavramlarının amacı budur.

Örnek 4.2. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_2\},$$

$$F(a_2) = \{x_1, x_3\},$$

$$F(a_3) = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$F(a_4) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır. C_G esnek örtüsüne göre, sırasıyla $x \in X$ noktalarının

esnek minimal tasvirleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} Mind_S(x_1) &= \{F(a_1), F(a_2)\}, \\ Mind_S(x_2) &= \{F(a_1)\}, \\ Mind_S(x_3) &= \{F(a_2)\}, \\ Mind_S(x_4) &= \{F(a_3)\}, \\ Mind_S(x_5) &= \{F(a_4)\}. \end{aligned}$$

C_G esnek örtüsüne göre, sırasıyla $x \in X$ noktalarının esnek maksimal tasvirleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} Maxd_S(x_1) &= \{F(a_1), F(a_4)\}, \\ Maxd_S(x_2) &= \{F(a_1)\}, \\ Maxd_S(x_3) &= \{F(a_4)\}, \\ Maxd_S(x_4) &= \{F(a_4)\}, \\ Maxd_S(x_5) &= \{F(a_4)\}. \end{aligned}$$

Şimdi esnek maksimal tasvir kavramı yardımıyla, esnek örtü yaklaşım uzayında yeni tür esnek örtü tabanlı kaba kümeleri tanımlayalım:

Tanım 4.3. $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 1. tip esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} S_-(U) &= \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq U\}, \\ S^-(U) &= \cup \{\cup Maxd_S(x) : x \in U\}. \end{aligned}$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü pozitif, esnek örtü negatif ve esnek örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} POZ_S(U) &= S_-(U), \\ NEG_S(U) &= X - S^-(U), \\ SNR_S(U) &= S^-(U) - S_-(U). \end{aligned}$$

Herhangi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü sınırı, $SNR_S(U) = \emptyset$ ise $U \subseteq X$ alt kümesine, esnek örtü yaklaşım uzayında 1. tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $SNR_S(U) \neq$

$\emptyset$ ise $U \subseteq X$ alt kümesine, esnek örtü yaklaşım uzayında 1. tipe göre esnek örtü tabanlı kaba küme denir.

Örnek 4.4. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_2\},$$

$$F(a_2) = \{x_4, x_5\},$$

$$F(a_3) = \{x_4, x_6\},$$

$$F(a_4) = \{x_2, x_3\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır.

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq X \text{ alt kümesini ele alalım.}$$

$$S_-(X_1) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq X_1\} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$S^-(X_1) = \cup \{\cup \text{Maxd}_S(x) : x \in X_1\} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

olup $S_-(X_1) = S^-(X_1)$ olduğundan $X_1 \subseteq X$ kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 1. tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir kümedir.

$$X_2 = \{x_3, x_4, x_6\} \subseteq X \text{ alt kümesini ele alalım.}$$

$$S_-(X_2) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq X_2\} = \{x_4, x_6\},$$

$$S^-(X_2) = \cup \{\cup \text{Maxd}_S(x) : x \in X_2\} = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

olup $S_-(X_2) \neq S^-(X_2)$ olduğundan $X_2 \subseteq X$ kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 1. tipe göre esnek örtü tabanlı kaba kümedir.

Teorem 4.5. $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek örtü küme, $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayı ve $U, V \subseteq X$ olsun. 1. tip esnek örtü üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $S^-(X) = X$,
2. $S^-(\emptyset) = \emptyset$,
3. $\forall U \subseteq X$ için $U \subseteq S^-(U)$,

$$4. S^-(U \cup V) = S^-(U) \cup S^-(V),$$

$$5. U \subseteq V \Rightarrow S^-(U) \subseteq S^-(V).$$

İspat. 1., 2. ve 3. özelliklerin ispatları, Tanım 4.3. gereği açıktır.

4. Tanım 4.3. gereği $U, V \subseteq X$ için

$$S^-(U) = \cup \{ \cup \text{Maxd}_S(x) : x \in U \}$$

ve

$$S^-(V) = \cup \{ \cup \text{Maxd}_S(x) : x \in V \}.$$

Bu yüzden

$$\begin{aligned} S^-(U) \cup S^-(V) &= (\cup \{ \cup \text{Maxd}_S(x) : x \in U \}) \cup (\cup \{ \cup \text{Maxd}_S(x) : x \in V \}) \\ &= \cup \{ \cup \text{Maxd}_S(x) : x \in U \cup V \} \\ &= S^-(U \cup V). \end{aligned}$$

5. Tanım 4.3. gereği keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin

$$S^-(U) = \cup \{ \cup \text{Maxd}_S(x) : x \in U \}$$

1. tip esnek örtü üst yaklaşımı,

$$x_1, x_2, \dots, x_m \in U \text{ ve } F(a_1), F(a_2), \dots, F(a_m) \in G = (F, A)$$

olmak üzere $1 \leq i \leq m$ için $F(a_i) \in \text{Maxd}_S(x_i)$ olduğundan

$$S^-(U) = F(a_1) \cup F(a_2) \cup \dots \cup F(a_m)$$

şeklinde ifade edilir. Açıktır ki $F(a_i) \subseteq S^-(U)$ olur. $U \subseteq V$ ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in U$ olduğundan $x_i \in V$ olur. Buradan $1 \leq i \leq m$ için $F(a_i) \subseteq S^-(V)$ olup böylece $S^-(U) \subseteq S^-(V)$ elde edilir.

■

Teorem 4.6. $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek örtü küme, $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayı ve $U, V \subseteq X$ olsun. 1. tip esnek örtü alt ve üst yaklaşım operatörleri için aşağıdaki özellikler sağlanmaz:

1. $S_-(U \cap V) = S_-(U) \cap S_-(V)$,
2. $S_-(-S_-(U)) = -S_-(U)$,
3. $S^-(-S^-(U)) = -S^-(U)$,
4. $S^-(S^-(U)) = S^-(U)$,
5. $S_-(U) = -S^-(-U)$,
6. $S^-(U) = -S_-(-U)$,
7. $\forall a \in A, S^-(F(a)) = F(a)$.

Aşağıdaki örnekler, yukarıdaki eşitliklerin geçerli olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.7. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ evren kümesi ve $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ parametreler kümesi

$$\begin{aligned} F(a_1) &= \{x_1, x_7\}, \\ F(a_2) &= \{x_2, x_5\}, \\ F(a_3) &= \{x_3, x_4, x_6\}, \\ F(a_4) &= \{x_5, x_6\}, \\ F(a_5) &= \{x_2, x_3\} \end{aligned}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi ve $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayı verilsin.

1. $S_-(U \cap V) = S_-(U) \cap S_-(V)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_2, x_3\} \subseteq X$ ve $V = \{x_2, x_5\} \subseteq X$ alt kümelerini ele alalım. $U \cap V = \{x_2\}$ ve $S_-(U \cap V) = \emptyset$ olur. $S_-(U) = \{x_2, x_3\}$ ve $S_-(V) = \{x_2, x_5\}$ olmak üzere $S_-(U) \cap S_-(V) = \{x_2\}$ olup bu durumda $S_-(U \cap V) \neq S_-(U) \cap S_-(V)$ olduğu görülür.
2. $S_-(-S_-(U)) = -S_-(U)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_5, x_6\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S_-(U) = \{x_5, x_6\}$ olduğundan $-S_-(U) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$ ve buradan $S_-(-S_-(U)) = \{x_1, x_2, x_3, x_7\}$ elde edilir. Bu durumda $S_-(-S_-(U)) \neq -S_-(U)$ olduğu görülür.

3. $S^-(-S^-(U)) = -S^-(U)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_5\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S^-(U) = \{x_2, x_5, x_6\}$ ve $-S^-(U) = \{x_1, x_3, x_4, x_7\}$ olmak üzere $S^-(-S^-(U)) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}$ bulunur. $S^-(-S^-(U)) \neq -S^-(U)$ olduğu görülür.
4. $S^-(S^-(U)) = S^-(U)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_6\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S^-(U) = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ve $S^-(S^-(U)) = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ olmak üzere $S^-(S^-(U)) \neq S^-(U)$ olduğu görülür.
5. $S_-(U) = -S^-(-U)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1, x_2, x_5, x_7\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S^-(-U) = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ olup $-S^-(-U) = \{x_1, x_7\}$ elde edilir. Ayrıca $S_-(U) = \{x_1, x_2, x_5, x_7\}$ olup $S_-(U) \neq -S^-(-U)$ olduğu görülür.
6. $S^-(U) = -S_-(-U)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_6\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. $S^-(U) = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ve $S_-(-U) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_7\}$ olmak üzere $-S_-(-U) = \{x_4, x_6\}$ olur. Bu durumda $S^-(U) \neq -S_-(-U)$ olduğu görülür.
7. $\forall a \in A$ için $S^-(F(a)) = F(a)$ olmadığını gösterelim. $F(a_2) = \{x_2, x_5\}$ kümesini ele alalım. $S^-(F(a_2)) = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$ olup bu durumda $S^-(F(a_2)) \neq F(a_2)$ olduğu görülür.

Tanım 4.8. $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 2. tip esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$R_-(U) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq U\},$$

$$R^-(U) = R_-(U) \cup (\cup \{UMaxd_S(x) : x \in U - R_-(U)\}).$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü pozitif, esnek örtü negatif ve esnek örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_S(U) = R_-(U),$$

$$NEG_S(U) = X - R^-(U),$$

$$SNR_S(U) = R^-(U) - R_-(U).$$

Herhangi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü sınırı, $SNR_S(U) = \emptyset$ ise $U \subseteq X$ alt kümesine, esnek örtü yaklaşım uzayında 2. tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $SNR_S(U) \neq \emptyset$ ise $U \subseteq X$ alt kümesine, esnek örtü yaklaşım uzayında 2. tipe göre esnek örtü tabanlı kaba küme denir.

Örnek 4.9. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_2\},$$

$$F(a_2) = \{x_2, x_3, x_4\},$$

$$F(a_3) = \{x_5, x_6\},$$

$$F(a_4) = \{x_5, x_7\},$$

$$F(a_5) = \{x_3, x_6, x_7, x_8\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır.

$X_1 = \{x_1, x_2, x_4\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$R_-(X_1) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq X_1\} = \{x_1, x_2\},$$

$$R^-(X_1) = R_-(X_1) \cup (\cup \{\cup Maxd_S(x) : x \in X_1 - R_-(X_1)\}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

olup $R_-(X_1) \neq R^-(X_1)$ olduğundan $X_1 \subseteq X$ alt kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 2. tipe göre esnek örtü tabanlı kaba kümedir.

$X_2 = \{x_5, x_6, x_7\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$R_-(X_2) = \cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq X_2\} = \{x_5, x_6, x_7\},$$

$$R^-(X_2) = R_-(X_2) \cup (\cup \{\cup Maxd_S(x) : x \in X_2 - R_-(X_2)\}) = \{x_5, x_6, x_7\}$$

olup $R_-(X_2) = R^-(X_2)$ olduğundan $X_2 \subseteq X$ alt kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 2. tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir kümedir.

Teorem 4.10. $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek örtü küme, $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayı ve $U \subseteq X$ olsun. 2. tip esnek örtü üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $R^-(X) = X$,
2. $R^-(\emptyset) = \emptyset$,
3. $\forall U \subseteq X$ için $U \subseteq R^-(U)$,
4. $R^-(R^-(U)) = R^-(U)$,

$$5. \forall a \in A, R^-(F(a)) = F(a).$$

İspat. 1., 2. ve 3. özelliklerin ispatları Tanım 4.8. gereği aşıktır.

4. Tanım 4.8. gereği keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesi için

$$R^-(R^-(U)) = R_-(R^-(U)) \cup (\cup\{\cup Maxd_S(x) : x \in R^-(U) - R_-(R^-(U))\})$$

şeklinde ifade edilir. Buradan $\forall x \in R^-(U)$ için $\exists e \in A$ vardır öyle ki $x \in F(e)$ ve $F(e) \subseteq R^-(U)$ olup $R_-(R^-(U)) = R^-(U)$ elde edilir. Bu durumda

$$R^-(R^-(U)) = R^-(U) \cup (\cup\{\cup Maxd_S(x) : x \in R^-(U) - R^-(U)\}) = R^-(U).$$

Dolayısıyla $R^-(R^-(U)) = R^-(U)$ eşitliği ispatlanmış olur.

5. Tanım 4.8. gereği keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesi için

$$R^-(F(a)) = R_-(F(a)) \cup (\cup\{\cup Maxd_S(x) : x \in F(a) - R_-(F(a))\})$$

şeklinde ifade edilir. $R_-(F(a)) = F(a)$ olduğu esnek örtü alt yaklaşımı tanımı gereği aşıktır. Dolayısıyla aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$R^-(F(a)) = F(a) \cup (\cup\{\cup Maxd_S(x) : x \in F(a) - F(a)\}) = F(a).$$

■

Teorem 4.11. $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek örtü küme, $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayı ve $U, V \subseteq X$ olsun. 2. tip esnek örtü alt ve üst yaklaşım operatörleri için aşağıdaki özellikler sağlanmaz:

$$1. R_-(U \cap V) = R_-(U) \cap R_-(V),$$

$$2. R_-(R_-(U)) = R_-(U),$$

$$3. R^-(R^-(U)) = R^-(U),$$

$$4. R_-(U) = R^-(U),$$

$$5. R^-(U) = R_-(U),$$

$$6. R^-(U \cup V) = R^-(U) \cup R^-(V),$$

$$7. U \subseteq V \Rightarrow R^-(U) \subseteq R^-(V).$$

Aşağıdaki örnekler, yukarıdaki eşitliklerin geçerli olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.12. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ evren kümesi ve $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ parametreler kümesi

$$F(a_1) = \{x_1, x_2, x_4\},$$

$$F(a_2) = \{x_2, x_3, x_4\},$$

$$F(a_3) = \{x_4, x_7\},$$

$$F(a_4) = \{x_5, x_6\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi ve $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayı verilsin.

1. $R_-(U \cap V) = R_-(U) \cap R_-(V)$ özelliğinin sağlanmadığı Örnek 4.7.'de gösterilmiştir.
2. $R_-(-R_-(U)) = -R_-(U)$ özelliğinin sağlanmadığı Örnek 4.7.'de gösterilmiştir.
3. $R^-(-R^-(U)) = -R^-(U)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq X$ olsun.
 $R^-(U) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $-R^-(U) = \{x_5, x_6, x_7\}$, $R^-(-R^-(U)) = \{x_4, x_5, x_6, x_7\}$.
Dolayısıyla $R^-(-R^-(U)) \neq -R^-(U)$ olduğu görülür.
4. $R_-(U) = -R^-(-U)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq X$ olsun.
 $R_-(U) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $R^-(-U) = \{x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $-R^-(-U) = \{x_1, x_2, x_3\}$.
Dolayısıyla $R_-(U) \neq -R^-(-U)$ olduğu görülür.
5. $R^-(U) = -R_-(-U)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq X$ olsun.
 $R^-(U) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $R_-(-U) = \{x_5, x_6\}$, $-R_-(-U) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$.
Dolayısıyla $R^-(U) \neq -R_-(-U)$ olduğu görülür.

Örnek 4.13. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evren kümesi ve $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ parametreler kümesi

$$F(a_1) = \{x_1, x_2\},$$

$$F(a_2) = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$F(a_3) = \{x_3, x_4\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi ve $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayı verilsin.

6. $R^-(U \cup V) = R^-(U) \cup R^-(V)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_3\} \subseteq X$ ve $V = \{x_4\} \subseteq X$ alt kümelerini ele alalım. $U \cup V = \{x_3, x_4\}$ ve $R^-(U \cup V) = \{x_3, x_4\}$ olur. $R^-(U) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $R^-(V) = \{x_3, x_4\}$ olmak üzere $R^-(U) \cup R^-(V) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olup, bu durumda $R^-(U \cup V) \neq R^-(U) \cup R^-(V)$ olduğu görülür.
7. $U \subseteq V \Rightarrow R^-(U) \subseteq R^-(V)$ olmadığını gösterelim. $U = \{x_3\} \subseteq X$ ve $V = \{x_3, x_4\} \subseteq X$ alt kümelerini ele alalım. $R^-(U) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $R^-(V) = \{x_3, x_4\}$ olup $U \subseteq V$ olmasına rağmen $R^-(U) \not\subseteq R^-(V)$ olduğu görülür.

4.2. Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Karşılaştırılması

Bu bölümde, literatürde daha önce tanımlanmış olan farklı esnek örtü tabanlı kaba küme modelleri ile bu çalışmanın önceki bölümünde tanımlanan esnek örtü tabanlı kaba küme modelleri arasındaki ilişkiler incelenmektedir. Bu modellerin alt yaklaşımları aynıdır, ancak üst yaklaşımları farklıdır. Bu yüzden karşılaştırmalar yapılırken üst yaklaşım operatörleri dikkate alınır. Elde edilen karşılaştırmalar aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

1. $B^-(X) \subseteq F^-(X) \subseteq R^-(X) \subseteq S^-(X)$,
2. $B^-(X) \subseteq F^-(X) \subseteq T^-(X) \subseteq S^-(X)$.

Şimdi esnek örtü tabanlı kaba kümelerin karşılaştırmalarını yapmak için aşağıdaki örnekleri verelim:

Örnek 4.14. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_6\},$$

$$F(a_2) = \{x_1, x_6, x_8\},$$

$$F(a_3) = \{x_2, x_4\},$$

$$F(a_4) = \{x_2, x_4, x_5\},$$

$$F(a_5) = \{x_3, x_7\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır. $X_1 = \{x_2, x_4, x_6\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$F^-(X_1) = F_-(X_1) \cup \{\cup Mind_S(x) : x \in X_1 - F_-(X_1)\} = \{x_1, x_2, x_4, x_6\},$$

$$R^-(X_1) = R_-(X_1) \cup (\cup \{\cup Maxd_S(x) : x \in X_1 - R_-(X_1)\}) = \{x_1, x_2, x_4, x_6, x_8\},$$

$$S^-(X_1) = \cup \{\cup Maxd_S(x) : x \in X_1\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8\}$$

olup $F^- \subseteq R^- \subseteq S^-$ şeklinde aralarında alt küme ilişkisi vardır.

Örnek 4.15. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_3\},$$

$$F(a_2) = \{x_2, x_4\},$$

$$F(a_3) = \{x_2, x_5\},$$

$$F(a_4) = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$F(a_5) = \{x_2, x_4, x_6\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır. $X_1 = \{x_2, x_4\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$F^-(X_1) = F_-(X_1) \cup \{\cup Mind_S(x) : x \in X_1 - F_-(X_1)\} = \{x_2, x_4\},$$

$$T^-(X_1) = \cup \{\cup Mind_S(x) : x \in X_1\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$S^-(X_1) = \cup \{\cup Maxd_S(x) : x \in X_1\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} = X$$

olup $F^- \subseteq T^- \subseteq S^-$ şeklinde aralarında alt küme ilişkisi vardır.

Örnek 4.16. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_2\},$$

$$F(a_2) = \{x_2, x_3\},$$

$$F(a_3) = \{x_2, x_3, x_4\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır. $X_1 = \{x_2, x_4\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$B^-(X_1) = B_-(X_1) \cup (\cup \{ \bigcap_{F(a) \in Mind_S(x)} F(a) : x \in X_1 - B_-(X_1) \}) = \{x_2, x_3, x_4\},$$

$$F^-(X_1) = F_-(X_1) \cup \{ \cup Mind_S(x) : x \in X_1 - F_-(X_1) \} = X$$

olup $B^- \subseteq F^-$ şeklinde aralarında alt küme ilişkisi vardır.

Örnek 4.17. Örnek 4.15.'te $X_1 = \{x_2, x_4, x_6\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$R^-(X_1) = R_-(X_1) \cup (\cup \{ \cup Maxd_S(x) : x \in X_1 - R_-(X_1) \}) = \{x_2, x_4, x_6\},$$

$$T^-(X_1) = \cup \{ \cup Mind_S(x) : x \in X_1 \} = X$$

olup $R^- \subseteq T^-$ şeklindedir. Örnek 4.2.'de $X_1 = \{x_2, x_4\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$R^-(X_1) = R_-(X_1) \cup (\cup \{ \cup Maxd_S(x) : x \in X_1 - R_-(X_1) \}) = X,$$

$$T^-(X_1) = \cup \{ \cup Mind_S(x) : x \in X_1 \} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

olup $T^- \subseteq R^-$ şeklindedir. Bu yüzden R^- üst yaklaşım operatörü ile T^- üst yaklaşım operatörü karşılaştırılmaz.

4.3. Karar Verme Uygulamaları

Bir nesnenin temsil edilmesinde, tüm özellikleri yerine yalnızca onu karakterize eden ayırt edici özelliklerinin esas alınması, minimal ve maksimal tasvir kavramlarının geliştirilmesine temel oluşturmuştur. Literatürde, esnek minimal tasvir kavramı kullanılarak tanımlanan esnek örtü tabanlı kaba kümeler üzerine çok sayıda karar verme yöntemi geliştirilmiş ve çeşitli problemlere başarıyla uygulanmıştır. Bu bölümde ise, önceki bölümde tanımlanan esnek maksimal tasvir kavramına dayalı esnek örtü tabanlı kaba kümelerin çok kriterli grup karar verme yöntemlerindeki uygulamaları ele alınmaktadır. Bu kapsamda, sonlu sayıdaki alternatifler arasından en uygun seçeneğin belirlenmesi veya alternatiflerin sıralanması amacıyla Feng [9], Çağman ve Enginoğlu [5], Atagün ve ark. [2] ile Atagün ve Kamacı [3] tarafından geliştirilen dört farklı çok kriterli grup karar verme yöntemi yeni bir bakış açısıyla incelenmektedir. Söz konusu yöntemler, belirsizlik içeren karar ortamlarında uzman görüşlerinin daha etkin bir şekilde değerlendirilmesi, farklı karar vericilerden elde edilen bilgilerin bütünleştirilmesi ve karar süreçlerinin daha güvenilir hâle getirilmesi amacıyla

geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin esnek maksimal tasvir kavramına dayalı esnek örtü tabanlı kaba kümeler kullanılarak çok kriterli karar verme problemlerine uygulanabilmesi için aşağıdaki şekilde sistematik bir süreç tasarlanmış ve her bir yöntem bu süreç doğrultusunda ele alınmıştır.

1. [9] Feng'in yöntemi: İlk olarak, Feng'in yönteminde esnek kaba kümeler yerine maksimal tasvir kavramı yardımıyla tanımlanan 2. tip esnek örtü tabanlı kaba kümeler kullanılacak ve uzman grubunun değerlendirme kümesinden esnek örtü alt ve üst yaklaşımları elde edilecektir. Bu yaklaşımlar, alternatif kümesini daraltmak ve karar vericilerin ortak seçeneklerini önceden belirlemek amacıyla kullanılacaktır. Ardından, alternatifler sıralanacaktır.
2. [5] Çağman ve Enginoğlu'nun yöntemi: Önerilen bu karar verme yönteminde, Feng'in yöntemi temel alınarak; uzman grubuna ait değerlendirme kümesinden elde edilen esnek örtü alt ve üst yaklaşımları ile tanımlanan esnek kümeler kullanılacaktır. İşlem kapasitesini artırmak amacıyla bu kümeler kullanılarak esnek matrisler elde edilecektir. Daha sonra esnek matrislerin çarpım sonuçları kullanılarak en uygun alternatifler belirlenecektir. Fakat burada kullanılan yöntemde alternatifler arasında herhangi bir sıralama verilmez.
3. [2] Atagün ve ark.'nın yöntemi: Önerilen bu karar verme yönteminde, Feng'in yöntemi temel alınarak; uzman grubuna ait değerlendirme kümesinden elde edilen esnek örtü alt ve üst yaklaşımlarıyla tanımlanan esnek kümeler kullanılacaktır. Karar verme sürecinde işlem kapasitesini artırmak amacıyla, genelleştirilmiş esnek matris çarpımlarından faydalanılarak sonuçlar elde edilecektir. Böylece, Çağman ve Enginoğlu'nun yöntemindeki kısıtlamalar ve eksiklikler giderilerek en uygun alternatifler belirlenecektir. Ancak bu kullanılan yöntemde de alternatifler arasında bir sıralama verilmez.
4. [3] Atagün ve Kamacı'nın yöntemi: Önerilen bu karar verme yönteminde, Feng'in yöntemi temel alınarak; uzman grubuna ait değerlendirme kümesi ile bu kümeden elde edilen esnek örtü alt ve üst yaklaşımlarıyla tanımlanan esnek kümeler kullanılacaktır. İşlem kapasitesini artırmak amacıyla genelleştirilmiş esnek matris çarpımları, toplam-satır fonksiyonu ve toplam karar üçlülere kullanılarak sonuçlar elde edilecektir. Böylelikle, Atagün ve ark.'nın yöntemindeki bazı eksiklikler giderilmiş olacaktır. Daha sonra, elde edilen sonuçlar yardımıyla en iyi alternatifler belirlenecek ve bu alternatiflerin sıralaması yapılacaktır.

Bu çalışma, literatürde yer alan diğer karşılaştırma çalışmalarından önemli bir yönüyle ayrılmaktadır. Mevcut çalışmaların büyük bir kısmında yalnızca farklı karar verme yöntemlerinden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Buna karşın, bu çalışmada yöntemler, birbirini tamamlayacak şekilde belirli bir sırayla uygulanarak bütünlüklük bir karar verme modeli oluşturulmaktadır. İlk aşamada yer alan uzmanların ön değerlendirme kümelerinden elde edilen esnek kümeler, problemin temelini oluşturmakta ve sonraki aşamalarda kullanılacak ortak veri yapısını meydana getirmektedir. Mevcut çalışmalardan farklı olarak, sonraki aşamalardaki diğer karar verme yöntemleri doğrudan herhangi bir esnek küme üzerinde değil, uzmanların ön değerlendirme kümeleri ile bu kümelerden elde edilen esnek örtü alt ve üst yaklaşımları kullanılarak tanımlanan esnek kümeler üzerinde uygulanmaktadır. Bu durum, çalışmayı yalnızca sonuçların karşılaştırıldığı klasik bir uygulama olmaktan çıkararak, yöntemlerin ortak ve uzman temelli bir bilgi yapısı üzerinden değerlendirilmesini sağlayan özgün bir metodolojik çerçeve sunmaktadır. Çalışmada kullanılan karar verme yöntemlerinin ortak özelliği, en yüksek değerlendirme değerine sahip alternatif(ler)i en uygun çözüm olarak belirlemeleridir. Bu ortak özellik sayesinde, problemimiz aynı karar verme mantığına sahip yöntemler kullanılarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar ortak bir değerlendirme zemini üzerinde karşılaştırılmıştır.

Bu çalışma, restoran personeli olarak kullanılmak üzere satın alınması planlanan insansı robotlar arasından en uygun seçeneği belirlemeye yönelik bir uygulama sunmaktadır. Değerlendirme, maliyet, işlevsel yetenekler, konuşma becerileri ve yüz tanıma performansı gibi çok sayıda kriter dikkate alınarak gerçekleştirilmektedir. Amaç, restoran işletmecilerine hem verimli hem de maliyet açısından uygun bir insansı robot çözümü sunmaktır. Çalışmada, üç insansı robot uzmanının ilk görüşleri dikkate alınmıştır.

4.3.1. Yeni Tür Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümeler Kullanılarak Çok Kriterli Grup Karar Verme

Bu bölümde, Feng'in [9] önerdiği karar verme yöntemi kısaca gözden geçirilmektedir. Feng [9], esnek kaba kümelere dayalı bir grup karar verme yöntemi önermiştir. Bu yöntemde, bir uzman grubunun ilk değerlendirmesi esas alınarak nesneler arasında bir ön değerlendirme yapılır. Ardından, bu ön değerlendirmeye dayalı olarak alt ve üst yaklaşımlar hesaplanır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda tüm nesneler karşılaştırılır ve en uygun alternatif belirlenir.

Yöntemin temel avantajı, grup karar verme süreçlerinde uzmanların öznel değerlendirmelerinden kaynaklanabilecek hataları alt ve üst yaklaşım kavramlarıyla azaltması ve karar vericilere mutlak optimal ile muhtemelen optimal alternatifleri sunarak daha güvenilir bir karar mekanizması oluşturmaktır. Ayrıca, en uygun alternatif uzmanların ortak değerlendirmelerine göre belirlendiğinden, yöntem günlük yaşamda karşılaşılan problemlerin

çözümünde daha kesin sonuçlar sağlamaktadır. Bu nedenle, bu çalışmada karar sürecimizde Feng'in [9] yöntemi bir ön filtreleme ve güvenilirlik belirleme aracı olarak kullanılmış ve sürecin ilk aşamasında bu yöntemin uygulanması tercih edilmiştir. Bu kapsamda Feng'in yöntemindeki esnek kaba kümeler yerine, esnek maksimal tasvir kavramı yardımıyla tanımlanan yeni tür esnek örtü tabanlı kaba kümeler kullanılmıştır. Böylece, Feng'in karar verme yaklaşımı korunurken, önerilen esnek örtü tabanlı kaba küme modeli karar sürecine entegre edilerek yöntemin uygulama çerçevesi genişletilmiştir.

Feng'in yöntemini hatırlatalım [9]:

Algoritma 1 - Karar verme metodu

Adım 1: X evreni üzerindeki $G = (F, A)$ orjinal tanım esnek kümesi girilir.

Adım 2: $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ uzman grubu oluşturulur. Bu uzman grubunun ilk degerlendirmesine dayalı olarak nesneler arasında bir ön degerlendirme yapılıır. T uzman grubunun ön degerlendirme sonuçları kullanılarak $\mathbf{T}_\eta = (G_\eta, T)$ degerlendirme esnek kümesi kurulur.

Adım 3: T uzman grubunun ön degerlendirme sonuçları kullanılarak esnek yaklaşımlar hesaplanır ve bu yaklaşımlar aracılığıyla $\mathbf{T}_{\eta-} = (G_{\eta-}, T)$ ve $\mathbf{T}_\eta^- = (G_\eta^-, T)$ esnek kümeleri elde edilir.

Adım 4: $\mathbf{T}_\eta$, $\mathbf{T}_{\eta-}$ ve $\mathbf{T}_\eta^-$ esnek kümelerinin yerini tutan $\mu_{\mathbf{T}_\eta}$, $\mu_{\mathbf{T}_{\eta-}}$ ve $\mu_{\mathbf{T}_\eta^-}$ bulanık kümeleri hesaplanır.

Adım 5: $\mu_{\mathbf{T}_\eta}$, $\mu_{\mathbf{T}_{\eta-}}$ ve $\mu_{\mathbf{T}_\eta^-}$ bulanık kümeleri kullanılarak X üzerinde $\eta : C \rightarrow I^X$ fonksiyonu ile $\eta(L) = \mu_{\mathbf{T}_\eta^-}$, $\eta(M) = \mu_{\mathbf{T}_\eta}$ ve $\eta(H) = \mu_{\mathbf{T}_{\eta-}}$ şartlarını sağlayacak şekilde $R = (\eta, C)$ bulanık esnek kümesi kurulur. Burada $C = \{L, M, H\}$ bir parametre kümesi ve L, M ve H sırasıyla “düşük güven”, “orta güven” ve “yüksek güven” olarak ifade edilir.

Adım 6: $w_L + w_M + w_H = 1$ şartını sağlayan bir $w = (w_L, w_M, w_H)$ ağırlık vektörü girilir. Her bir $x_k \in X$ alternatifinin ağırlıklı degerlendirme degeri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$v(x_k) = w_L \cdot \eta(L)(x_k) + w_M \cdot \eta(M)(x_k) + w_H \cdot \eta(H)(x_k).$$

Daha sonra bütün alternatifler ağırlıklı degerlendirme degerlerine göre sıralanır ve en büyük ağırlıklı degerlendirme degerine dayanarak bu nesnelerden herhangi biri en iyi alternatif olarak tercih edilir.

Şimdi, restoran personeli olarak kullanılmak üzere satın alınacak insansı robotların seçiminde en uygun seçeneğin belirlenmesine yönelik bir örnek verelim. Bu çalışmada problem, temsili bir işletme ve piyasada mevcut olan robotların sahip olduğu özellikler çerçevesinde ele alınacaktır.

Örnek 4.18. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ insansı robotların kümesini oluşturan evren küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ insansı robotlar için dikkate alınan özellikleri oluşturan parametreler kümesi olsun. Burada özellikler ve $G = (F, E)$ esnek kümesi aşağıdaki şekildedir:

$$e_1 = \text{Yüz Tanıma},$$

$$e_2 = \text{Konuşma Becerisi},$$

$$e_3 = \text{Hareketli},$$

$$e_4 = \text{Ekonomik}$$

ve

$$F(e_1) = \{x_1, x_2\},$$

$$F(e_2) = \{x_1, x_3\},$$

$$F(e_3) = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$F(e_4) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}.$$

Şimdi, bu grup karar verme sürecini desteklemek için 2. tip esnek örtü üst ve alt yaklaşımlarının nasıl kullanılacağını gösterelim. Restoran personeli olarak kullanmak için satın alınacak insansı robotların seçiminde ortak karara ulaşmayı kolaylaştırmak için en önemli seçeneği belirleyelim.

Adım 1: Yukarıda verilen $G = (F, E)$ esnek kümesini dikkate alalım. $G = (F, E)$ bir esnek örtü küme olduğu için, insansı robotların sahip oldukları bazı özellikleri tanımlayan bir $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayı oluşturur.

Adım 2: $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ uzman grubu olarak, restoranda çalışmak üzere satın alınacak insansı robotların belirlenmesine ilişkin görüşleri dikkate alınacak olan robot uzmanlarını seçelim. Bu uzmanlar kendi tercihi için önemli olan özelliklere sahip insansı robotları belirler. Buradaki, $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ robot uzmanlarının değerlendirmelerinin aynı öneme sahip olduğunu varsayıyoruz. Bu doğrultuda robot uzmanlarının ön değerlendirme sonuçları olan X_i kümeleri aşağıdaki şekildedir:

$$X_1 = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$X_2 = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$X_3 = \{x_1, x_2, x_5\}.$$

$T = \{T_1, T_2, T_3\}$ uzman grubunun $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ ön değerlendirme sonuçları kullanılarak $\mathbf{T}_\eta = (G_\eta, T)$ değerlendirme esnek kümesi aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$$X_1 = G_\eta(T_1) = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$X_2 = G_\eta(T_2) = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$X_3 = G_\eta(T_3) = \{x_1, x_2, x_5\}.$$

$\mathbf{T}_\eta = (G_\eta, T)$ değerlendirme esnek kümesinin tablo gösterimi Tablo 4.1’de verilmiştir.

Robotlar	T_1	T_2	T_3
x_1	1	1	1
x_2	0	1	1
x_3	1	1	0
x_4	1	0	0
x_5	0	0	1

Tablo 4.1. $\mathbf{T}_\eta = (G_\eta, T)$ değerlendirme esnek kümesinin tablo halinde gösterimi

Adım 3: Feng’in esnek kaba kümeleri yerine esnek maksimal tasvir kavramı ile tanımladığımız 2. tip esnek örtü tabanlı kaba kümeleri bu adımda kullanıyoruz. $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayına göre, başlangıçtaki ön değerlendirme sonuçları olan X_i kümelerinin, esnek örtü alt ve üst yaklaşımlarını hesaplıyoruz. Buradan, esnek örtü alt ve üst yaklaşımlarını kullanarak X üzerinde $\mathbf{T}_\eta^- = (G_\eta^-, T)$ ve $\mathbf{T}_{\eta-} = (G_{\eta-}, T)$ esnek kümelerini aşağıdaki şekilde elde ediyoruz:

$$G_\eta^-(T_i) = R^-(X_i)$$

ve

$$G_{\eta-}(T_i) = R_-(X_i).$$

Feng’in yöntemine göre [9], esnek örtü alt yaklaşımı, T_i uzmanının değerlendirmesine göre kesinlikle en uygun adaylar olan alternatiflerden oluşan küme olarak yorumlanabilir. Benzer şekilde, esnek örtü üst yaklaşımı, T_i uzmanının değerlendirmesine göre muhtemelen en uygun adaylar olan alternatiflerden oluşan küme olarak yorumlanabilir. Bu çerçevede, X_i kümelerinin, esnek örtü alt ve üst yaklaşım hesaplamalarına göre, esnek kümeler aşağıdaki

şekilde oluşturulur.

$$\begin{aligned} G_{\eta}^{-}(T_1) &= R^{-}(X_1) = \{x_1, x_3, x_4\}, \\ G_{\eta}^{-}(T_2) &= R^{-}(X_2) = \{x_1, x_2, x_3\}, \\ G_{\eta}^{-}(T_3) &= R^{-}(X_3) = X. \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_{\eta-}(T_1) &= R_{-}(X_1) = \{x_1, x_3, x_4\}, \\ G_{\eta-}(T_2) &= R_{-}(X_2) = \{x_1, x_2, x_3\}, \\ G_{\eta-}(T_3) &= R_{-}(X_3) = \{x_1, x_2\}. \end{aligned}$$

Adım 4: $\mathbf{T}_{\eta}$, $\mathbf{T}_{\eta-}$ ve $\mathbf{T}_{\eta}^{-}$ esnek kümelerinin yerini tutan $\mu_{\mathbf{T}_{\eta}}$, $\mu_{\mathbf{T}_{\eta-}}$ ve $\mu_{\mathbf{T}_{\eta}^{-}}$ bulanık kümelerini oluşturuyoruz. $X_i \subset X$ için, X_i kümesinin karakteristik fonksiyonunu λ_{X_i} ile gösterelim. $\mathbf{T}_{\eta} = (G_{\eta}, T)$ göz önüne alındığında, $\mu_{\mathbf{T}_{\eta}}$ bulanık kümesini aşağıdaki şekilde tanımlarız:

$$\mu_{\mathbf{T}_{\eta}} : X \rightarrow [0, 1], \quad x_k \mapsto \mu_{\mathbf{T}_{\eta}}(x_k) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \lambda_{G_{\eta}(T_i)}(x_k),$$

burada $i = 1, 2, 3$ ve $k = 1, \dots, 5$ için $G_{\eta}(T_i) = X_i$ şeklindedir. Dolayısıyla $\mu_{\mathbf{T}_{\eta}}$ bir bulanık kümedir. Benzer şekilde, $G_{\eta}^{-}(T_i) = R^{-}(X_i)$ ve $G_{\eta-}(T_i) = R_{-}(X_i)$ olup diğer $\mu_{\mathbf{T}_{\eta-}}$ ve $\mu_{\mathbf{T}_{\eta}^{-}}$ bulanık kümelerini de $i = 1, 2, 3$ ve $k = 1, \dots, 5$ için şu şekilde tanımlarız:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{T}_{\eta}^{-}} : X &\rightarrow [0, 1], \quad x_k \mapsto \mu_{\mathbf{T}_{\eta}^{-}}(x_k) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \lambda_{G_{\eta}^{-}(T_i)}(x_k), \\ \mu_{\mathbf{T}_{\eta-}} : X &\rightarrow [0, 1], \quad x_k \mapsto \mu_{\mathbf{T}_{\eta-}}(x_k) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \lambda_{G_{\eta-}(T_i)}(x_k). \end{aligned}$$

Buna göre, bulanık kümeler aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{T}_{\eta}} &= \left\{ \left(x_1, 1 \right), \left(x_2, \frac{2}{3} \right), \left(x_3, \frac{2}{3} \right), \left(x_4, \frac{1}{3} \right), \left(x_5, \frac{1}{3} \right) \right\}, \\ \mu_{\mathbf{T}_{\eta}^{-}} &= \left\{ \left(x_1, 1 \right), \left(x_2, \frac{2}{3} \right), \left(x_3, 1 \right), \left(x_4, \frac{2}{3} \right), \left(x_5, \frac{1}{3} \right) \right\}, \\ \mu_{\mathbf{T}_{\eta-}} &= \left\{ \left(x_1, 1 \right), \left(x_2, \frac{2}{3} \right), \left(x_3, \frac{2}{3} \right), \left(x_4, \frac{1}{3} \right), \left(x_5, 0 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Adım 5: Şimdi, yukarıdaki “esnek” ve “bulanık” değerlendirme sonuçlarını birleştirebiliriz. Feng [9], $\mu_{T_{\eta_-}}$, $\mu_{T_{\eta}}$ ve $\mu_{T_{\eta^+}}$ bulanık kümelerini sırasıyla “yüksek güvenilirliğe sahip optimal alternatifler”, “orta güvenilirliğe sahip optimal alternatifler” ve “düşük güvenilirliğe sahip optimal alternatifler” gibi ifadelerle karşılık gelen belirsiz kavramlar olarak yorumlamıştır. $C = \{L, M, H\}$ bir parametre kümesi olsun; burada L, M ve H sırasıyla “düşük güven”, “orta güven” ve “yüksek güven” olarak ifade edelim. Bu durumda, X üzerinde $\eta : C \rightarrow I^X$ fonksiyonu ile $\eta(L) = \mu_{T_{\eta^-}}$, $\eta(M) = \mu_{T_{\eta}}$ ve $\eta(H) = \mu_{T_{\eta^+}}$ şartlarını sağlayacak şekilde $R = (\eta, C)$ bulanık esnek kümesini tanımlayabiliriz.

Adım 6: Son olarak, en yüksek ağırlıklı değerlendirme değerine sahip alternatifi, en uygun çözüm olarak seçeceğiz. Üç insansı robot uzmanının görüşlerine göre, $w_L + w_M + w_H = 1$ şartını sağlayan ağırlık vektörünü $w = (0, 25; 0, 5; 0, 25)$ olacak şekilde belirleyelim. Her $x_k \in X$ alternatifinin ağırlıklı değerlendirme değerini aşağıdaki şekilde tanımlarız:

$$v(x_k) = w_L \cdot \eta(L)(x_k) + w_M \cdot \eta(M)(x_k) + w_H \cdot \eta(H)(x_k).$$

$w = (0, 25; 0, 5; 0, 25)$ ve $k = 1, 2, 3, 4, 5$ için

$$v(x_k) = 0.25 \cdot \eta(L)(x_k) + 0.5 \cdot \eta(M)(x_k) + 0.25 \cdot \eta(H)(x_k)$$

olup, elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} v(x_1) &= 0.25 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 + 0.25 \cdot 1 = 1 \\ v(x_2) &= 0.25 \cdot \frac{2}{3} + 0.5 \cdot \frac{2}{3} + 0.25 \cdot \frac{2}{3} = 0,66 \\ v(x_3) &= 0.25 \cdot 1 + 0.5 \cdot \frac{2}{3} + 0.25 \cdot \frac{2}{3} = 0,75 \\ v(x_4) &= 0.25 \cdot \frac{2}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.25 \cdot \frac{1}{3} = 0,41 \\ v(x_5) &= 0.25 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.25 \cdot 0 = 0,25 \end{aligned}$$

Ardından, tüm alternatifler ağırlıklı değerlendirme değerlerine göre sıralanır; en yüksek ağırlıklı değerlendirme değerine sahip nesnelerden herhangi biri en çok tercih edilen alternatif olarak seçilir. Hesaplamalar sonucunda elde edilen sonuçlar Tablo 4.2’de verilmiştir.

Analiz sonuçları aşağıdaki şekildedir:

$$x_1 = 1 > x_3 = 0,75 > x_2 = 0,66 > x_4 = 0,41 > x_5 = 0,25.$$

Robotlar	$\mu_{T_{\eta}}$	$\mu_{T_{\eta}^-}$	$\mu_{T_{\eta-}}$	$v(x_k)$
x_1	1	1	1	1
x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0,66
x_3	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0,75
x_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,41
x_5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0,25

Tablo 4.2. İnsansı robotların ağırlıklı değerlendirme değeri sonuçları

Sonuç olarak elde edilen sıralamaya göre, x_1 alternatifi en yüksek ağırlıklı değerlendirme değerine sahip olduğundan, restoranda çalıştırılmak üzere satın alınacak en uygun insansı robot olarak belirlenmiştir.

Uyarı 4.19. Feng'in yöntemine göre [9],

- $T_{\eta-}$ esnek kümesi, T uzman grubunun yüksek güven düzeyindeki değerlendirme sonucu,
- T_{η}^- esnek kümesi, T uzman grubunun düşük güven düzeyindeki değerlendirme sonucu,
- T_{η} esnek kümesi, T uzman grubunun orta güven düzeyindeki değerlendirme sonucu

olarak yorumlanabilir. Bu çalışmada uygulanacak sonraki yöntemlerde, ilk yöntemden elde edilen bu üç küme dikkate alınacaktır. Diğer bir deyişle, herhangi bir esnek küme kullanmak yerine, uzmanlar tarafından oluşturulan ön değerlendirme kümesi ve bu kümeden elde edilen esnek örtü alt ve üst yaklaşımları ile oluşturulan esnek kümeler kullanılmaktadır. Bu yaklaşımlar aracılığıyla en uygun seçeneği belirleme işleminin kolaylaştırılması amaçlanmıştır.

Bu yaklaşımlar uzman görüşlerinden kaynaklanabilecek öznel hataları azaltmakta; karar vericilere hem mutlak optimal hem de muhtemelen optimal alternatifleri sunarak özellikle başlangıç aşamasında alternatif kümesinin daraltılmasına olanak sağlamaktadır. Bu durum, karar verme sürecinde bir ön filtreleme mekanizması oluşturarak değerlendirme sürecinin daha tutarlı ve gerçekçi biçimde yürütülmesine katkı sağlamaktadır. Bu bakımdan, bu çalışma diğer karşılaştırmalı çalışmalardan farklıdır.

Şimdi Çağman ve Enginoğlu tarafından verilen karar verme yöntemini hatırlatalım [5].

4.3.2. Esnek Max-Min Karar Verme

Bu bölümde Çağman ve Enginoğlu'nun yöntemi [5] kısaca ele alınmaktadır. Çağman ve Enginoğlu [5], esnek max-min karar fonksiyonunu kullanarak bir esnek max-min karar verme ($SMmDM$) yöntemi geliştirmiştir. Bu yöntem ile alternatifler kümesinde yer alan seçeneklerin değerlendirilmesi ve en uygun alternatiflerin belirlenmesi amaçlanmıştır.

Tanım 4.20. [5] $[a_{ij}], [b_{ik}] \in SM_{m \times n}$ iki esnek matris olsun. $[c_{ip}] \in S_{m \times n^2}$ ve $k \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$I_k = \{p : \exists i, c_{ip} \neq 0, (k-1)n < p \leq kn\}$$

olsun. Bu durumda esnek max-min karar fonksiyonu Mm ,

$$Mm : SM_{m \times n^2} \rightarrow SM_{m \times 1}, \quad Mm[c_{ip}] = [\max_{k \in I} \{t_k\}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$t_k = \begin{cases} \min_{p \in I_k} \{c_{ip}\}, & \text{eğer } I_k \neq \emptyset, \\ 0, & \text{eğer } I_k = \emptyset. \end{cases}$$

şeklinde dir. Bu durumda, $Mm[c_{ip}]$ sütun esnek matrisine max-min karar esnek matrisi denir.

Tanım 4.21. [5] $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ bir başlangıç evreni ve $Mm[c_{ip}] = [d_{i1}]$ olsun. Bu durumda,

$$opt_{[d_{i1}]}(U) = \{u_i : u_i \in U, d_{i1} = 1\}$$

kümesine U nun optimum kümesi denir.

Çağman ve Enginoğlu [5], tanımları ve aşağıdaki algoritmayı kullanarak bir $SMmDM$ yöntemi geliştirmişlerdir.

Çağman ve Enginoğlu'nun yöntemini hatırlatalım [5]:

Algoritma 2: - Karar verme metodu

Adım 1: Parametrelerin uygun alt kümeleri seçilir ve esnek kümeler oluşturulur.

Adım 2: Her bir esnek kümeye karşılık gelen esnek matrisler oluşturulur.

Adım 3: Bu esnek matrislerin verilen probleme göre en uygun çarpımı alınır.

Adım 4: Esnek max-min karar fonksiyonu kullanılarak max-min karar esnek matrisi bulunur.

Adım 5: U nun optimum kümesi elde edilir.

Şimdi, $SMmDM$ 'yi uygulayarak problemimize tekrar bakalım.

Örnek 4.22. Bu örnekte, Örnek 4.18.'deki $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ uzmanlarının $X_i = \{X_1, X_2, X_3\}$ ön değerlendirme kümelerinden elde edilen esnek örtü alt ve üst yaklaşımları ile tanımlanan $\mathbf{T}_{\eta^-} = (G_{\eta^-}, T)$, $\mathbf{T}_{\eta^+} = (G_{\eta^+}, T)$ esnek kümeler kullanılacaktır. Bu örnekte, evren kümemiz Örnek 4.18.'dekiyle aynıdır ve parametre kümesi, uzmanlar tarafından oluşturulan kümedir.

Şimdi esnek max-min karar verme yöntemini uygulayarak Örnek 4.18.'deki problemi yeni bir problem olarak ele alabiliriz.

Adım 1: Örnek 4.18.'deki uzman grubunun ön değerlendirme kümelerinin esnek örtü alt ve üst yaklaşımlarından oluşan esnek kümeleri aşağıdaki gibi gösterelim:

$$\mathbf{T}_{\eta-} = (G_{\eta-}, T) = \{(T_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (T_2, \{x_1, x_2, x_3\}), (T_3, \{x_1, x_2\})\}$$

ve

$$\mathbf{T}_{\eta}^{-} = (G_{\eta}^{-}, T) = \{(T_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (T_2, \{x_1, x_2, x_3\}), (T_3, X)\}.$$

Adım 2: Bu esnek kümelere karşılık gelen esnek matrisler sırasıyla aşağıdaki şekilde

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Adım 3: VE çarpımı kullanılarak esnek matrislerin çarpımı

$$[c_{ip}] = [a_{ij}] \wedge [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 4: Bu çarpım esnek matrisi için max-min karar fonksiyonu kullanılarak,

$$Mm([c_{ip}]) = [d_{i1}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

max-min karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 5: Son olarak, $[d_{i1}]$ max-min karar esnek matrisinden X in optimum kümesi

$$opt_{[d_{i1}]}(X) = \{x_1, x_3\}$$

elde edilir.

Sonuç olarak x_1 ve x_3 alternatifleri, restoran personeli olarak kullanılmak üzere satın alınacak en uygun insansı robotlar olarak belirlenmiştir.

Örnek 4.23. Şimdi, Örnek 4.22.'nin 3. adımındaki VE-çarpımının sırasını değiştirerek Örnek 4.18.'deki problemi yeni bir problem olarak ele alabiliriz. 1. ve 2. adımlar, Örnek 4.22.'deki adımlarla aynıdır. Bu yüzden çözüme 3. adımdan devam edilecektir.

Adım 3: VE çarpımı kullanılarak esnek matrislerin çarpımı

$$[e_{is}] = [b_{ik}] \wedge [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 4: Bu çarpım esnek matrisi için max-min karar fonksiyonu kullanılarak,

$$Mm([e_{is}]) = [f_{i1}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

max-min karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 5: Son olarak, $[f_{i1}]$ max-min karar esnek matrisinden X in optimum kümesi

$$opt_{[f_{i1}]}(X) = \{x_1\}$$

elde edilir.

Sonuç olarak x_1 alternatifi, restoran personeli olarak kullanılmak üzere satın alınacak en uygun insansı robot olarak belirlenmiştir.

Uyarı 4.24. Bu bölümde tanımlanan esnek matris çarpımlarının hesaplanabilmesi için, bu matrislerin aynı türde olması gerekir. Dolayısıyla, bu yöntem farklı türlerdeki esnek matrislerden oluşan karar verme yöntemlerine uygulanamaz. Ayrıca, bu karar verme yöntemi yalnızca tek yönlü esnek matris çarpımlarını dikkate alır. Yani, diğer yöndeki esnek matris çarpımlarının karar verme problemini nasıl etkilediği ele alınmamıştır. Bu nedenle, esnek matris çarpımının sırasının değiştirilmesinin nasıl bir fark yarattığını göstermek için, Atagün ve ark.'nın yöntemini [2] kullanacağız. Yöntemlerin uygulanma sırası büyük önem taşımaktadır.

Şimdi Atagün ve ark. tarafından verilen karar verme yöntemini hatırlatalım [2].

4.3.3. Esnek Dağılmalı (Min-Min, Min-Max, Max-Min, Max-Max) Karar Verme

Bu bölümde Atagün ve ark.'nın [2] yöntemi kısaca gözden geçirilmektedir. Atagün ve ark. [2] esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonunu kullanarak bir esnek dağılmalı max-min karar verme ($SDMmDM$) yöntemi geliştirmişlerdir. Ayrıca, indirgenmiş esnek matrislerin genelleştirilmiş çarpımlarının değişmeli işlemler olmadığını göstermişlerdir. Parametrelerin birbirlerine soldan ve sağdan nasıl etki ettiğini araştırmak için, esnek sol dağılmalı max-min ve esnek sağ dağılmalı max-min karar fonksiyonlarını tanımlamışlardır. Bu yöntem ile alternatifler kümesinde yer alan seçeneklerin değerlendirilmesi ve en uygun alternatiflerin belirlenmesi amaçlanmıştır.

Tanım 4.25. [2]

a) $[c_{ip}] \in SM_{n \times m_1 m_2}$ ve $k \in I = \{1, 2, \dots, m_1\}$ için,

$$I_k = \{p : \exists i, c_{ip} \neq 0, (k-1)m_2 < p \leq km_2\}$$

olsun. Bu durumda esnek sol-dağılmalı max-min karar verme fonksiyonu $D_l f$,

$$D_l f : SM_{n \times m_1 m_2} \rightarrow SM_{n \times 1}, \quad D_l f([c_{ip}]) = [\max_{k \in I} \{l_k\}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$l_k = \begin{cases} \min_{p \in I_k} \{c_{ip}\}, & \text{if } I_k \neq \emptyset, \\ 0, & \text{if } I_k = \emptyset. \end{cases}$$

şeklindedir. $[f_{i1}] = D_l f([c_{ip}])$ tek sütunlu esnek matrisine sol-dağılmalı max-min karar esnek matrisi denir.

b) $[d_{is}] \in SM_{n \times m_2 m_1}$ ve $t \in J = \{1, 2, \dots, m_2\}$ için,

$$J_t = \{s : \exists i, d_{is} \neq 0, (t-1)m_1 < s \leq tm_1\}$$

olsun. Bu durumda esnek sağ-dağılımlı max-min karar verme fonksiyonu $D_r f$,

$$D_r f : SM_{n \times m_2 m_1} \rightarrow SM_{n \times 1}, \quad D_r f([d_{is}]) = [\max_{t \in J} \{r_t\}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$r_t = \begin{cases} \min_{s \in J_t} \{d_{is}\}, & \text{if } J_t \neq \emptyset, \\ 0, & \text{if } J_t = \emptyset. \end{cases}$$

şeklindedir. $[g_{i1}] = D_r f([d_{is}])$ tek sütunlu esnek matrisine sağ-dağılımlı max-min karar esnek matrisi denir.

c) $Df : SM_{n \times 1} \times SM_{n \times 1} \rightarrow SM_{n \times 1}$, $Df([f_{i1}], [g_{i1}]) = [f_{i1}] \widetilde{\cup} [g_{i1}] = [h_{i1}]$ fonksiyonuna esnek dağılımlı max-min karar fonksiyonu denir. Burada $[f_{i1}] = D_l f([c_{ip}])$, $[g_{i1}] = D_r f([d_{is}])$ ve $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $[h_{i1}] = \max\{f_{i1}, g_{i1}\}$ şeklindedir. Ayrıca $[h_{i1}]$ esnek matrisine dağılımlı max-min karar esnek matrisi denir.

$\wedge, \vee, \overline{}$ ve $\underline{}$ işlemleri değişmeli olmadığından, açıklık sağlamak amacıyla yukarıdaki denklemlerde, ilk terim $[a_{ij}]$ ve ikinci terim $[b_{ik}]$ olduğunda bu çarpım $[c_{ip}]$ ile gösterilir; benzer şekilde, ilk terim $[b_{ik}]$ ve ikinci terim $[a_{ij}]$ ise, çarpım $[d_{is}]$ ile gösterilir, yani

- Eğer $[c_{ip}] = [a_{ij}] \wedge [b_{ik}]$ ise, o zaman $[d_{is}] = [b_{ik}] \wedge [a_{ij}]$ olur.
- Eğer $[c_{ip}] = [a_{ij}] \vee [b_{ik}]$ ise, o zaman $[d_{is}] = [b_{ik}] \vee [a_{ij}]$ olur.
- Eğer $[c_{ip}] = [a_{ij}] \overline{\wedge} [b_{ik}]$ ise, o zaman $[d_{is}] = [b_{ik}]^c \wedge [a_{ij}]$ olur.
- Eğer $[c_{ip}] = [a_{ij}] \underline{\vee} [b_{ik}]$ ise, o zaman $[d_{is}] = [b_{ik}]^c \vee [a_{ij}]$ olur.

Tanım 4.26. [2] $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ evren kümesi ve $[f_{i1}] = D_l f(c_{ip})$, $[g_{i1}] = D_r f(d_{is})$ olmak üzere $Df([f_{i1}], [g_{i1}]) = [h_{i1}]$ olsun. Bu durumda,

$$opt_{[h_{i1}]}(U) = \{u_i : u_i \in U, h_{i1} = 1\}.$$

kümesine U nun optimum kümesi denir.

Atagün ve ark. [2], tanımları ve aşağıdaki algoritmayı kullanarak bir $SDMmDM$ yöntemi geliştirmişlerdir.

Atagün ve ark.'nın yöntemini hatırlatalım [2]:

Algoritma 3: - Karar verme metodu

Adım 1: Parametrelerin uygun alt kümeleri seçilir ve esnek kümeler oluşturulur.

Adım 2: Her bir esnek kümeye karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler oluşturulur.

Adım 3: Bu indirgenmiş esnek matrislerin verilen probleme göre en uygun genelleştirilmiş çarpımı alınarak $[c_{ip}]$ ve $[d_{is}]$ matrisleri elde edilir.

Adım 4: Esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonu kullanılarak dağılmalı max-min karar esnek matrisi bulunur.

Adım 5: U nun optimum kümesi elde edilir.

Uyarı 4.27. Bu bölümde, önceki bölümde Çağman ve Enginoğlu [5] tarafından verilen esnek matris çarpımları genelleştirilmiştir. Bu durum, farklı türdeki esnek matrislerin çarpımını mümkün kılmaktadır. Atagün ve ark. [2], bu genelleştirilmiş esnek matris çarpımlarını kullanarak yeni bir karar verme yöntemi geliştirmişlerdir. Önceki karar verme yönteminde olduğu gibi, bu yöntem de esnek matris çarpımlarının değişme özelliğini sağlamamaktadır. Bu yöntem esnek matris çarpımlarını yalnızca tek yönlü olarak ele alan önceki karar verme yönteminden farklı olarak, her iki yöndeki esnek matris çarpımlarını dikkate alır ve sonuçları birleştirir. Bu açıdan, problemimizin çözüm sürecinde bir önceki yöntemdeki kısıtlamalar ve eksiklikleri giderdiği için önemlidir.

Uyarı 4.28. [2] Tanım 4.25.'de, “min” ve “max” ifadelerinin sırasını değiştirirsek, ($SDmMDM$) ile gösterilen esnek dağılmalı min-max karar verme yöntemini elde ederiz. “max” yerine “min” alırsak, ($SDmmDM$) ile gösterilen esnek dağılmalı min-min karar verme yöntemini elde ederiz. “min” yerine “max” alırsak, ($SDMMDM$) ile gösterilen esnek dağılmalı max-max karar verme yöntemini elde ederiz.

Karar verme probleminin yapısına ve amaçlarına bağlı olarak bu yöntemlerden biri diğerlerine göre daha uygun veya daha avantajlı olabilir. Bu doğrultuda, probleme en uygun yöntem tercih edilebilir. Karşılaştırma yapmak amacıyla, uyarı 4.28. da listelenen her bir yöntemi kullanarak problemi çözeceğiz.

Şimdi, esnek dağılmalı min-min karar verme yöntemini kullanarak problemimize tekrar bakalım.

Örnek 4.29. Bu örnekte, Örnek 4.18.'deki $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ uzmanlarının $X_i = \{X_1, X_2, X_3\}$ ön değerlendirme kümelerinden elde edilen esnek örtü alt ve üst yaklaşımları ile tanımlanan

$\mathbf{T}_{\eta-} = (G_{\eta-}, T)$, $\mathbf{T}_{\eta}^{-} = (G_{\eta}^{-}, T)$ esnek kümeler kullanılacaktır. Bu örnekte, evren kümemiz Örnek 4.18.'dekiyle aynıdır ve parametre kümesi, uzmanlar tarafından oluşturulan kümedir. Şimdi esnek dağılımlı min-min karar verme yöntemini uygulayarak Örnek 4.18.'deki problemi yeni bir problem olarak ele alabiliriz.

Adım 1: Örnek 4.18.'deki uzman grubunun ön değerlendirme kümelerinin esnek örtü alt ve üst yaklaşımlarından oluşan esnek kümeleri aşağıdaki gibi gösterelim:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{\eta-} &= (G_{\eta-}, T) = \{(T_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (T_2, \{x_1, x_2, x_3\}), (T_3, \{x_1, x_2\})\} \\ \mathbf{T}_{\eta}^{-} &= (G_{\eta}^{-}, T) = \{(T_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (T_2, \{x_1, x_2, x_3\}), (T_3, X)\}.\end{aligned}$$

Adım 2: Bu esnek kümelere karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler sırasıyla

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 3: Genelleştirilmiş VE çarpımı kullanılarak indirgenmiş esnek matrisler için

$$\begin{aligned}[c_{ip}] &= [a_{ij}] \wedge [b_{ik}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ve

$$[d_{is}] = [b_{ik}] \wedge [a_{ij}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Burada, hem alt hem de üst yaklaşımlar dikkate alınması gerektiğinden, genelleştirilmiş VE çarpımı işlemini kullanıyoruz.

Adım 4: Sol-dağılmalı min-min ve sağ-dağılmalı min-min karar fonksiyonları kullanılarak

$$D_l f([c_{ip}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad D_r f([d_{is}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sol-dağılmalı ve sağ-dağılmalı karar esnek matrisleri elde edilir. Bu matrislerden yararlanarak

$$Df(D_l f([c_{ip}]), D_r f([d_{is}])) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dağılmalı min-min karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 5: Son olarak, $[h_{i1}]$ dağılmalı min-min karar esnek matrisinden X in optimum kümesi

$$opt_{[h_{i1}]}(X) = \{x_1\}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak x_1 alternatifi, restoran personeli olarak kullanılmak üzere satın alınacak en uygun insansı robot olarak belirlenmiştir.

Şimdi, esnek dağılmalı min-max karar verme yöntemini kullanarak problemi yeniden ele alalım.

Örnek 4.30. Şimdi, esnek dağılmalı min-max karar verme yöntemimizi Örnek 4.29.'deki probleme uygulayalım. 1., 2. ve 3. adımlar, Örnek 4.29.'dekiyle aynıdır.

Adım 4: Sol-dağılmalı min-max ve sağ-dağılmalı min-max karar fonksiyonları kullanılarak

$$D_l f([c_{ip}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad D_r f([d_{is}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sol-dağılmalı ve sağ-dağılmalı karar esnek matrisleri elde edilir. Bu matrislerden yararlanarak

$$Df(D_l f([c_{ip}]), D_r f([d_{is}])) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dağılmalı min-max karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 5: Son olarak, $[h_{i1}]$ dağılmalı min-max karar esnek matrisinden X in optimum kümesi

$$opt_{[h_{i1}]}(X) = \{x_1, x_3\}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak x_1 ve x_3 alternatifleri, restoran personeli olarak kullanılmak üzere satın alınacak en uygun insansı robotlar olarak belirlenmiştir.

Şimdi, esnek dağılmalı max-min karar verme yöntemini kullanarak problemimize yeniden bakalım.

Örnek 4.31. Şimdi, esnek dağılmalı max-min karar verme yöntemimizi Örnek 4.29.'deki probleme uygulayalım. 1., 2. ve 3. adımlar, Örnek 4.29.'dekiyle aynıdır.

Adım 4: Sol-dağılmalı max-min ve sağ-dağılmalı max-min karar fonksiyonları kullanılarak

$$D_l f([c_{ip}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad D_r f([d_{is}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sol-dağılmalı ve sağ-dağılmalı karar esnek matrisleri elde edilir. Bu matrislerden yararlanarak

$$Df(D_l f([c_{ip}]), D_r f([d_{is}])) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dağılmalı max-min karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 5: Son olarak, $[h_{i1}]$ dağılmalı max-min karar esnek matrisinden X in optimum kümesi

$$opt_{[h_{i1}]}(X) = \{x_1, x_3\}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak x_1 ve x_3 alternatifleri, restoran personeli olarak kullanılmak üzere satın alınacak en uygun insansı robotlar olarak belirlenmiştir.

Şimdi, esnek dağılmalı max-max karar verme yöntemini kullanarak problemimizi yeniden ele alalım.

Örnek 4.32. Şimdi, esnek dağılmalı max-max karar verme yöntemimizi Örnek 4.29.'deki probleme uygulayalım. 1., 2. ve 3. adımlar, Örnek 4.29.'dekiyle aynıdır.

4. Adım: Sol-dağılmalı max-max ve sağ-dağılmalı max-max karar fonksiyonları kullanılarak

$$D_l f([c_{ip}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad D_r f([d_{is}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sol-dağılmalı ve sağ-dağılmalı karar esnek matrisleri elde edilir. Bu matrislerden yararlanarak

$$Df(Dlf([c_{ip}]), Drf([d_{is}])) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dağılmalı max-max karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 5: Son olarak, $[h_{i1}]$ dağılmalı max-max karar esnek matrisinden X in optimum kümesi

$$opt_{[h_{i1}]}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak x_1, x_2, x_3 ve x_4 alternatifleri, restoran personeli olarak kullanılmak üzere satın alınacak en uygun insansı robotlar olarak belirlenmiştir.

Şimdi Atagün ve Kamacı tarafından verilen karar verme yöntemini hatırlatalım [3].

4.3.4. Küme-Kısıtlı Esnek Karar Verme

Bu bölümde Atagün ve Kamacı'nın yöntemi [3] kısaca ele alınmaktadır. Atagün ve Kamacı [3], toplam-satır fonksiyonu, toplam karar üçlüsü, birinci ve ikinci karar değerleri kavramlarını tanımlamışlardır. Bu kavramları kullanarak klasik grup karar verme problemlerini ve küme-kısıtlı grup karar verme problemlerini ele alan iki esnek karar verme algoritması geliştirmişlerdir. Bu algoritmalar ile alternatifler kümesinde yer alan seçeneklerin sıralanması ve en uygun alternatiflerin belirlenmesi amaçlanmıştır.

Tanım 4.33. [3] $[a_{ij}] \in SM_{m \times n}$ olsun. O halde, τ_i ile gösterilen toplam-satır fonksiyonu $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\tau_i : SM_{m \times n} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \tau_i([a_{ij}]) = \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Tanım 4.34. [3] $U = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ bir evren küme ve $[a_{ij}^1], [a_{ij}^2], \dots, [a_{ij}^r] \in SM_{m \times n}$ olsun. Ayrıca $[c_{ip}] = \wedge_{t=1}^r [a_{ij}^t]$ ve $[d_{ij}] = \widetilde{\cap}_{t=1}^r [a_{ij}^t]$ olsun. O zaman, $h_i \in U$ için bir toplu karar üçlüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\kappa_i = (\kappa_i^1, \kappa_i^2, \kappa_i^3)$$

Burada karar bileşenleri κ_i^1, κ_i^2 ve κ_i^3 aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\kappa_i^1 = \tau_i([c_{ip}]), \quad \kappa_i^2 = \sum_{t=1}^r \tau_i([a_{ij}^t]), \quad \kappa_i^3 = r \times \tau_i([d_{ij}]).$$

Tanım 4.35. [3] $U = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ bir evren küme olsun. $h_i \in U$ için bir toplu karar üçlüsü $\kappa_i = (\kappa_i^1, \kappa_i^2, \kappa_i^3)$ olsun. O zaman,

- (i) $l_i^1 = \kappa_i^1 + \kappa_i^2$ değeri, $h_i \in U$ için birinci karar değeri olarak adlandırılır.
- (ii) $l_i^2 = 2\kappa_i^3 - \kappa_i^2$ değeri, $h_i \in U$ için ikinci karar değeri olarak adlandırılır.

$h_i, h'_i \in U$, için κ_i ve κ'_i 'nin seçim sırası şu şekilde bulunur:

- Eğer $l_i^1 > l_{i'}^1$ ise, o zaman $\kappa_i > \kappa'_{i'}$ olur;
- Eğer $l_i^1 = l_{i'}^1$ ise, ikinci değerleri l_i^2 olarak ele alırsak;
- Eğer $l_i^2 > l_{i'}^2$ ise, o zaman $\kappa_i > \kappa'_{i'}$ olur;
- Eğer $l_i^1 = l_{i'}^1$ ve $l_i^2 = l_{i'}^2$ ise, o zaman $\kappa_i = \kappa'_{i'}$ olur.

Tanım 4.36. [3] $U = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ bir evren küme olsun. Toplam karar üçlüsü κ_i , birinci karar değeri l_i^1 ve ikinci karar değeri l_i^2 kullanılarak, nesnelerin sıralama düzeni şu şekilde bulunur:

$$\kappa_{i_1} \succ \kappa_{i_2} \succ \dots \succ \kappa_{i_m} \Rightarrow h_{i_1} \succ h_{i_2} \succ \dots \succ h_{i_m}.$$

Böylece, U kümesinin aşağıdaki gibi bir alt kümesini elde ederiz:

$$Opt_{\kappa}(U) = \{h_i : h_i \in U \text{ ve her bir } i' \neq i \text{ için } \kappa_i > \kappa_{i'}\}$$

buna U kümesinin optimum kümesi denir.

Atagün ve Kamacı [3], tanımları ve aşağıdaki algoritmayı kullanarak bir karar verme yöntemi geliştirmişlerdir.

Atagün ve Kamacı'nın yöntemini hatırlayalım [3]:

Algoritma 4: - Karar verme metodu

Adım 1: Karar vericiler, parametre kümesinden uygun alt kümeleri seçer ve ardından esnek kümeler oluşturulur.

Adım 2: $[a_{ij}^1], [a_{ij}^2], \dots, [a_{ij}^r]$ esnek matrisler oluşturulur.

Adım 3: $[c_{ip}] = \wedge_{t=1}^r [a_{ij}^t]$ ve $[d_{ij}] = \widetilde{\cap}_{t=1}^r [a_{ij}^t]$ esnek matrisleri elde edilir.

Adım 4: $i = 1, 2, \dots, m$ için toplam karar üçlüsü $\kappa_i = (\kappa_i^1, \kappa_i^2, \kappa_i^3)$ bulunur.

Adım 5: U kümesindeki $h_i \in U$ ($i = 1, 2, \dots, m$) nesnelerinin sıralama düzeni belirlenir ve U kümesinin optimum kümesi bulunur.

Uyarı 4.37. Bu bölümde, Atagün ve Kamacı [3] tarafından verilen yöntemde yine genelleştirilmiş esnek matris çarpımları kullanılmaktadır. Ayrıca, genelleştirilmiş esnek matris çarpımları dağılma özelliğini sağladığından, bu karar verme yönteminde de söz konusu özellikten yararlanılmaktadır. Bu yöntem, hem en iyi seçeneğin belirlenmesi hem de seçeneklerin sıralanması açısından önem taşımaktadır.

Örnek 4.38. Bu örnekte, Örnek 4.18.'deki $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ uzmanlarının $X_i = \{X_1, X_2, X_3\}$ ön değerlendirme kümelerinden oluşan $\mathbf{T}_\eta = (G_\eta, T)$ esnek kümesi ve bu ön değerlendirme kümelerinden elde edilen esnek örtü alt ve üst yaklaşımları ile tanımlanan $\mathbf{T}_{\eta-} = (G_{\eta-}, T)$, $\mathbf{T}_\eta^- = (G_\eta^-, T)$ esnek kümeleri kullanılacaktır. Bu örnekte, evren kümemiz Örnek 4.18.'dekiyle aynıdır ve parametre kümesi, uzmanlar tarafından oluşturulan kümedir. Şimdi, küme-kısıtlı esnek karar verme yöntemini uygulayarak Örnek 4.18.'deki problemi tekrar ele alalım.

Adım 1: Örnek 4.18.'deki uzman grubunun ön değerlendirme kümeleri ile bunların esnek örtü alt ve üst yaklaşımlarından elde edilen üç esnek kümeyi aşağıdaki şekilde gösterelim:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\eta &= (G_\eta, T) = \{(T_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (T_2, \{x_1, x_2, x_3\}), (T_3, \{x_1, x_2, x_5\})\}, \\ \mathbf{T}_{\eta-} &= (G_{\eta-}, T) = \{(T_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (T_2, \{x_1, x_2, x_3\}), (T_3, \{x_1, x_2\})\}, \\ \mathbf{T}_\eta^- &= (G_\eta^-, T) = \{(T_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (T_2, \{x_1, x_2, x_3\}), (T_3, X)\}.\end{aligned}$$

Adım 2: $\mathbf{T}_\eta$, $\mathbf{T}_{\eta-}$ ve $\mathbf{T}_\eta^-$ kümelerinin esnek matrisleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$[a_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [a_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ve} \quad [a_{ij}^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adım 3: $[c_{ip}] = \lambda_{t=1}^r [a_{ij}^t]$ ve $[d_{ij}] = \tilde{\eta}_{t=1}^r [a_{ij}^t]$ esnek matrisleri

[illegible]

ve

$$[d_{ij}] = \widetilde{\Pi}_{t=1}^3[a_{ij}^t] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 4: Her $i = 1, 2, \dots, 5$ için, toplu karar üçlüsü aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\kappa_1 = (\kappa_1^1, \kappa_1^2, \kappa_1^3) = (27, 9, 9)$$

$$\kappa_2 = (\kappa_2^1, \kappa_2^2, \kappa_2^3) = (8, 6, 6)$$

$$\kappa_3 = (\kappa_3^1, \kappa_3^2, \kappa_3^3) = (12, 7, 6)$$

$$\kappa_4 = (\kappa_4^1, \kappa_4^2, \kappa_4^3) = (2, 4, 3)$$

$$\kappa_5 = (\kappa_5^1, \kappa_5^2, \kappa_5^3) = (0, 2, 0).$$

Adım 5: Böylece, robotların sıralaması

$$x_1 > x_3 > x_2 > x_4 > x_5$$

şeklinde elde edilir. Buradan X kümesinin optimum kümesi $Opt_{\kappa}(X) = \{x_1\}$ şeklinde bulunur.

Sonuç olarak x_1 alternatifi, restoran personeli olarak kullanılmak üzere satın alınacak en uygun insansı robot olarak belirlenmiştir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, esnek örtü tabanlı kaba küme teorisine katkı sağlamak amacıyla esnek maksimal tasvir kavramı tanımlanmış ve bu kavram temel alınarak iki yeni esnek örtü üst yaklaşım operatörü önerilmiştir. Önerilen operatörler aracılığıyla yeni tür esnek örtü tabanlı kaba kümeler oluşturulmuştur. Tanımlanan üst yaklaşım operatörlerinin temel özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiş, teorik sonuçlar elde edilmiş ve literatürdeki mevcut modellerle karşılaştırmaları örnekler aracılığıyla ortaya konulmuştur. Çalışmanın uygulama kısmında ise esnek maksimal tasvir kavramı ile tanımlanan esnek örtü tabanlı kaba kümelerden biri karar verme problemlerinde uygulanmıştır.

Bu karar verme problemleri, uzman görüşlerinden elde edilen bilgilerin daha güvenilir ve kapsamlı bir şekilde değerlendirilmesi amacıyla dört aşamalı bir yaklaşımla ele alınmıştır. Kullanılan yöntemler birbirlerini tamamlayacak şekilde sıralanmış olup, her aşama sonraki aşamanın temelini oluşturmuştur. İlk aşamada, bu çalışmanın temelini oluşturan Feng'in [9] karar verme yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntemde, uzmanlar tarafından oluşturulan ön değerlendirme kümeleri ile bunların esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aracılığıyla yüksek, orta ve düşük güven düzeylerini temsil eden esnek kümeler elde edilmiştir. Böylece uzman görüşlerinden kaynaklanabilecek öznel değerlendirme farklılıklarının etkisi azaltılmış, alternatifler farklı güven düzeylerine göre değerlendirilmiş ve mutlak optimal ile muhtemel optimal alternatifler belirlenmiştir. Özellikle ilk aşamada elde edilen bu mutlak ve muhtemelen optimal seçenekler, alternatif kümesinin daraltılmasına katkı sağlamış ve sonraki yöntemlerin uygulanmasında temel veri olarak kullanılmıştır. Bu bağlamda, Feng'in [9] yöntemi çalışmada karar sürecinin başlangıç aşamasını oluşturan bir ön filtreleme yöntemi ve güvenilirlik belirleyicisi olarak kullanılmış ve sonraki aşamalar için gerekli altyapıyı oluşturmuştur. İkinci aşamada Çağman ve Enginoğlu'nun [5] yöntemi kullanılarak ilk aşamada elde edilen esnek kümeler esnek matris ortamına aktarılmıştır. Böylece karar verme probleminin esnek matrisler yardımıyla analiz edilmesine olanak sağlayan genel yapı oluşturulmuştur. Bu yöntemde esnek matris çarpımları kullanılarak alternatifler arasındaki ilişkiler değerlendirilmiştir. Ancak yöntemin yalnızca aynı türdeki esnek matrislere uygulanabilmesi ve esnek matris çarpımlarını tek yönlü olarak ele alması önemli bir sınırlılık oluşturmaktadır. Nitekim uygulama sonuçlarında da çarpım sırasının değiştirilmesiyle farklı sonuçlar elde edildiği görülmüştür. $([a_{ij}] \wedge [b_{ik}])$ esnek matris çarpımı sonucunda $\{x_1, x_3\}$ alternatifleri optimum olarak belirlenirken, $([b_{ik}] \wedge [a_{ij}])$ esnek matris çarpımı sonucunda yalnızca $\{x_1\}$ alternatifi optimum olarak elde edilmiştir. Bu durum, esnek matris çarpımının değişme özelliğine sahip olmamasının karar verme sonuçları üzerinde doğrudan etkili olduğunu

göstermektedir. Bu sınırlılıkları ortadan kaldırmak amacıyla üçüncü aşamada Atagün ve ark. [2] tarafından geliştirilen genelleştirilmiş esnek matris çarpımları kullanılmıştır. Bu yaklaşım, farklı türlerdeki esnek matrislerin çarpımını mümkün kılarak önceki yöntemin en önemli eksikliklerinden birini gidermektedir. Ayrıca yalnızca tek yönlü çarpımları değil, hem sağ yönlü hem de sol yönlü esnek matris çarpımlarını dikkate almakta ve elde edilen sonuçları birleştirmektedir. Esnek sağ-dağılmalı ve esnek sol-dağılmalı karar fonksiyonlarından elde edilen sonuçların tek bir karar fonksiyonunda bir araya getirilmesi sayesinde optimum alternatiflerin değişme olasılığı azaltılmış ve daha tutarlı sonuçlar elde edilmiştir. Atagün ve ark.'nın [2] yönteminde kullanılan max ve min operatörlerinin kullanım sırasının değişmesi, max operatörü yerine min operatörünün kullanılması veya min operatörü yerine max operatörünün kullanılması durumunda ise farklı sonuçların elde edilebildiği görülmüştür. Min-min yöntemi yalnızca $\{x_1\}$ alternatifini optimum olarak belirlerken, min-max ve max-min yöntemleri $\{x_1, x_3\}$ alternatiflerini optimum olarak değerlendirmiştir. Buna karşılık max-max yöntemi $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ alternatiflerini optimum olarak vermiştir. Bu sonuç, kullanılan yöntemin karar verme sonuçları üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğunu göstermektedir. İkinci ve üçüncü aşamadaki yöntemler yalnızca en iyi alternatifi belirlemekte, ancak alternatiflerin kendi aralarındaki sıralamasını ortaya koymamaktadır. Çalışmamızda ele alınan problemin çözüm sürecinde bu eksikliği gidermesi nedeniyle, dördüncü ve son aşamada ise Atagün ve Kamacı'nın [3] yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntem, genelleştirilmiş esnek matris çarpımları ile elde edilen sonuçları toplam-satır fonksiyonu, karar üçlülere, birinci karar değeri ve ikinci karar değeri yardımıyla değerlendirerek alternatiflerin sıralanmasına olanak sağlamaktadır. Böylece yalnızca optimum alternatiflerin belirlenmesi değil, tüm alternatiflerin göreceli üstünlüklerine göre sıralanması da mümkün hale gelmiştir. Bu yönüyle yöntem, önceki aşamalarda elde edilen bilgileri bütüncül bir şekilde kullanarak karar verme sürecini tamamlamakta ve daha ayrıntılı sonuçlar sunmaktadır. Atagün ve Kamacı'nın [3] yönteminde elde edilen alternatifler $x_1 > x_3 > x_2 > x_4 > x_5$ şeklinde sıralanmıştır. Benzer şekilde Feng'in [9] yöntemi de aynı sıralamayı vermiştir. Bu durum, çalışmada kullanılan çok aşamalı yaklaşımın tutarlılığını ve güvenilirliğini destekleyen önemli bir sonuçtur.

Yöntemlerden elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında önemli bulgular ortaya çıkmaktadır. Genel olarak değerlendirildiğinde, tüm yöntemlerde x_1 alternatifinin optimum ya da en yüksek öncelikli alternatif olarak ortaya çıkması dikkat çekicidir. Ayrıca x_3 alternatifi de birçok yöntemde öne çıkan alternatiflerden biri olmuştur. Bu durum, problem açısından x_1 alternatifinin en güçlü seçenek olduğunu ve x_3 alternatifinin de güçlü bir aday olarak değerlendirilebileceğini göstermektedir.

Karar verme yöntemlerinin sonuçlarını göstermek ve bu yöntemleri analiz etmek amacıyla, yeni tür esnek örtü tabanlı kaba kümeler kullanılarak farklı karar verme yöntemlerinden elde edilen bütün sonuçlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Örnekler	Karar Verme Metodları	Sonuçlar
Örnek 4.18.	Feng'in metodu	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4 > x_5$
Örnek 4.22.	Çağman ve Enginoğlu'nun metodu $[a_{ij}] \wedge [b_{ik}]$	$\{x_1, x_3\}$
Örnek 4.23.	Çağman ve Enginoğlu'nun metodu $[b_{ik}] \wedge [a_{ij}]$	$\{x_1\}$
Örnek 4.29.	Atagün ve ark.'nın metodu min-min	$\{x_1\}$
Örnek 4.30.	Atagün ve ark.'nın metodu min-max	$\{x_1, x_3\}$
Örnek 4.31.	Atagün ve ark.'nın metodu max-min	$\{x_1, x_3\}$
Örnek 4.32.	Atagün ve ark.'nın metodu max-max	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
Örnek 4.38.	Atagün ve Kamacı'nın metodu	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4 > x_5$

Tablo 5.1. Karar Verme Sonuçları

Bu yöntemler birlikte nasıl güçlü bir karar verme süreci oluşturur? Sorusunun cevabı olarak

- Feng'in [9] yöntemi: Uzman değerlendirmelerindeki belirsizliği ele almış, farklı güven düzeylerinden bilgi üretmiş ve sonraki aşamalar için temel veri oluşturmuştur.
- Çağman ve Enginoğlu'nun [5] yöntemi: Bu bilgileri esnek matris yapısına aktarmış ve ilk matris tabanlı değerlendirmeyi sağlamıştır.
- Atagün ve ark.'nın [2] yöntemi: Önceki yöntemin sınırlılıklarını gidererek genelleştirilmiş esnek matris çarpımlarıyla daha kapsamlı bir değerlendirme sunmuştur.
- Atagün ve Kamacı'nın [3] yöntemi: İşlem kapasitesini artırmak amacıyla genelleştirilmiş esnek matris çarpımları ile toplam-satır fonksiyonu ve karar üçlülerini kullanmış, elde edilen sonuçları bütünleştirerek alternatiflerin sıralanmasını ve matris tabanlı nihai kararın oluşturulmasını sağlamıştır.

Sonuç olarak, bu çalışmada farklı karar verme yöntemlerinin birbirini tamamlayacak ve eksikliklerini giderecek şekilde ardışık olarak uygulanması, her aşamada elde edilen sonuçların sonraki aşamalara aktarılması ve yöntemlerin sınırlılıklarının giderilmesiyle daha kapsamlı, sistematik ve bütünlük bir karar verme süreci oluşturulmuştur. Elde edilen bulgular, önerilen yaklaşımın hem tutarlı hem de güvenilir kararlar üretebildiğini göstermekte olup, bu yönüyle çalışma mevcut karar verme yöntemlerine önemli bir katkı sağlamaktadır ve uzman bilgisini aşamalı olarak değerlendiren özgün bir metodolojik çerçeve sunmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.
- [2] Atagün, A. O., Kamacı, H. and Oktay, O. (2018). Reduced soft matrices and generalized products with applications in decision making. *Neural Computing and Applications*, 29, 445-456.
- [3] Atagün, A. O. and Kamacı, H. (2024). Decompositions of soft sets and soft matrices with applications in group decision making. *Scientia Iranica*, 31(6), 518-534.
- [4] Çağman, N., and Enginoğlu S. (2010). Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, 207, 848-855.
- [5] Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft matrix theory and its decision making. *Computer and Mathematics with Applications*, 59, 3308-3314.
- [6] Çetkin, V., Aygünoğlu, A., and Aygün, H. (2016). A new approach in handling soft decision making problems. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 231-239.
- [7] Feng, F., Changxing, L., Davvaz, B. and Ali, M. I. (2010). Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: A tentative approach. *Soft Computing*, 14, 899-911.
- [8] Feng, F., Liu, X., Violeta, F. L. and Young, J. B. (2011). Soft sets and soft rough sets. *Information Sciences*, 181, 1125-1137.
- [9] Feng, F. (2011). Soft rough sets applied to multicriteria group decision making. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2(1), 69-80.
- [10] Ge, X. and Yang, S. (2011). Investigations on some operations of soft sets. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 5(3), 370-373.
- [11] Güzel Ergül, Z. and Yüksel, Ş. (2019). A new type of soft covering based rough sets applied to multicriteria group decision making for medical diagnosis. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 7(1), 28-38.
- [12] Li, Z. Xie, N. and Wen, G. (2015). Soft coverings and their parameter reductions. *Applied Soft Computing*, 31, 48-60.
- [13] Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562.
- [14] Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. (2001). Fuzzy soft sets. *Journal Fuzzy Mathematics*, 9(3), 589-602.
- [15] Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 19-31.

- [16] Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 11(5), 341-356.
- [17] Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011). On operations of soft sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 1457-1467.
- [18] Shabir, M., Ali, M. I. and Shaheen, T. (2013). Another approach to soft rough sets. *Knowledge-Based Systems*, 40(1), 72-80.
- [19] Suo, C. F., Li, Y. M. and Li, Z. H. (2021). A series of information measures of hesitant fuzzy soft sets and their application in decision making. *Soft Computing*, 25, 4771-4784.
- [20] Yüksel Ş., Güzel Ergül, Z. and Tozlu, N. (2014). Soft covering based rough sets and their application. *The Scientific World Journal*, Article ID 970893, 9 pages.
- [21] Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Dizman, T. (2015). An application of multicriteria group decision making by soft covering based rough sets. *Filomat*, 29, 209-219.
- [22] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.
- [23] Zhan, J. and Alcantud, J. C. R. (2019). A novel type of soft rough covering and its application to multicriteria group decision making. *Artificial Intelligence Review*, 52, 2381-2410.
- [24] Zhan, J., Liu, Q. and Herewan, T. (2017). A novel soft rough set: Soft rough hemirings and corresponding multicriteria group decision making. *Applied Soft Computing*, 54, 393-402.
- [25] Zhu, W. and Wang, F. Y. (2007). On three types of covering based rough sets. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 19(8), 1131-1143.
- [26] Zhu, W. (2007). Topological approaches to covering rough sets. *Information Sciences*, 177, 1499-1508.

EKLER

EK 1. Kongre Katılım Belgesi



EK 2. Kongre Katılım Belgesi



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	KUBİLAY YAŞAR
Uyruğu :	T.C.
Orcid Numarası:	0009-0007-7362-0592

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	KIRŞEHİR AHİ EVRAN
Fakülte	FEN EDEBİYAT
Bölüm	MATEMATİK
Mezuniyet Yılı	2023
Yüksek Lisans	
Üniversite	KIRŞEHİR AHİ EVRAN
Enstitü	FEN BİLİMLERİ
Anabilim Dalı	MATEMATİK
Mezuniyet Yılı	2026

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler
1. Güzel Ergül, Z. ve Yaşar, K. (2025). <i>New Kinds of Soft Covering Based Rough Sets via the Concept of Soft Maximal Description</i> , Advanced Studies:Euro-Tbilisi Mathematical Journal, Kabul Edildi, Basım Aşamasında.
2. Güzel Ergül, Z. ve Yaşar, K. (2026). <i>A Novel Perspective to Decision Making Methods via the Soft Covering Based Rough Sets by Concept of Soft Maximal Description</i> , Gönderildi.
Uluslararası Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler
1. Güzel Ergül, Z. ve Yaşar, K. (2024). <i>New Kinds of Soft Covering Based Rough Sets via the Concept of Soft Maximal Description</i> , ICMME - International Conference on Mathematics and Mathematics Education, 03-05 Ekim 2024, Nevşehir, Türkiye.
Ulusal Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler
1. Güzel Ergül, Z. ve Yaşar, K. (2025). <i>Esnek Minimal ve Esnek Maksimal Kavramları ile Tanımlanan Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Karşılaştırılması</i> , UMS - Ulusal Matematik Sempozyumu, 01-04 Eylül 2025, Antalya, Türkiye.