T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRLERİ

MEHMET TURGUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
Aralık - 2011

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRLERİ

MEHMET TURGUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
YRD.DOÇ. DR. ALİ AKBULUT

KIRŞEHİR
Aralık - 2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç.Dr. Mustafa KURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Tezin amacı, harmonik analizin temel konularıdan biri olan Maksimal fonksiyonu tanıtmak, Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün çeşitli genelleştirmelerini vermektir. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmından oluşmaktadır. Giriş kısmında temel tanım ve teoremlerle birlikte genelleştirilmiş öteleme operatörü, γ-dağılım fonksiyonu ve γ-azalan yeniden düzenleme tanıtılarak özelliklerine yer verilmiştir. İkinci bölümde Maksimal ve B-Maksimal fonksiyonlar tanıtılarak varlık ve sınırlılık özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölüm ise Laplace-Bessel Diferensiyel Operatörünün doğurduğu genelleştirilmiş B-Maksimal fonksiyonun özelliklerine ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hardy-Littlewood Maksimal operatörü, Maksimal Fonksiyon, Bessel Maksimal Fonksiyon, Laplace-Bessel Diferensiyel Operatörü, Bessel Konvolüsyon.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to introduce maximal function, which is one of the fundamental concept of harmonic analysis, and to give some generalizations of the Hardy-Littlewood Maximal Operator. This thesis consists of three chapters. Fundamental definitions, theorem, generalized shift operator, γ-distribution function and γ-decreasing rearrangement of the function are given in the first chapter. The second chapter contains the definitions and basic properties of maximal function and B-maximal function. The third chapter is devoted to the properties of B-maximal function associated with Laplace-Bessel differential operator.

Keywords: Hardy-Littlewood Maximal Operator, Maximal Function, Maximal Bessel Function, Laplace-Bessel Differential Operator, Bessel Convolution.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT'a, tezimin her aşamasında değerli yardımlarını esirgemeyen sayın Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'a içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$: n- boyutlu Öklid uzayı

$B(x,r)$: x merkezli, r yarıçaplı yuvar

Mf : Maksimal fonksiyon

M : Maksimal operatör

L_p : p. mertebeden integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

$|E|$: E nin Lebesgue ölçüsü

$Q\,(x,r)$: merkezi x ve kenar uzunluğu r, kenarları eksenlere paralel küp

L^1_{loc} : 1. mertebeden lokal integrallenebilen fonksiyonlar kümesi

.

1 GİRİŞ

Maksimal fonksiyon harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte bir çok uygulama alanları vardır.

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

Laplace-Bessel diferensiyel operatörü tarafından üretilen integral operatörler B. Muckenhoupt [21] ve E.M. Stein (1985) [24], Kipriyanov (1967) [17], Trimeche (1997) [27], Lyakhov (1997) [20], Stempak (1985) [26], Gadjiev ve Aliev (1988) [1], Şerbetçi ve Ekincioğlu (2004) [10,11,23], Guliyev (2003) [4,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

Kipriyanov 1967 [5] yılında $\mathbb{R}_+^n$, $n-$ boyutlu öklid uzayında ilk $(n-1)$ değişkene göre adi ve $n.$ değişkene göre $(0,\infty)$ aralığındaki genelleştirilmiş ötelemeyi kullanarak Δ_B Laplace-Bessel operatörü ile yakından ilgili olan

$$T^y f(x) = c_\gamma \int_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır.

f ve g, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere T^y operatörü yardımıyla B-konvolüsyon adı verilen yeni bir konvolüsyon operatörü

$$(f \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) T^y g(x)\, y_n^\gamma dy$$

şeklinde tanımlanır.

Tezin amacı, harmonik analizin temel konularından olan maksimal fonksiyonu tanıtmak, bu operatörün çeşitli genelleştirmelerini vermektir. Ayrıca, Laplace-Bessel diferensiyel operatörüne karşılık gelen maksimal fonksiyon ve son olarak genelleştirilmiş $B-$maksimal fonksiyonunun varlık ve sınırlılık gibi önemli özelliklerini incelemektir. Buradaki ispatlarda bir fonksiyonun yeniden düzenlemesi (rearrangement) kavramı kullanılmıştır. Bir fonksiyonun yeniden düzenlemesi kavramı ilk defa sistematik olarak Hardy-Littlewood tarafından kullanılmış ve bir çok eşitsizliğin elde edilmesinde anahtar rol oynamıştır. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmından oluşmaktadır. Giriş kısmında temel tanım ve teoremlerle birlikte genelleştirilmiş öteleme operatörü, γ-dağılım fonksiyonu ve γ-azalan yeniden düzenleme tanıtılarak özelliklerine yer verilmiştir. İkinci bölümde Maksimal ve B-Maksimal fonksiyonlar tanıtılarak varlık ve sınırlılık özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölüm ise Laplace-Bessel Diferensiyel Operatörünün doğurduğu genelleştirilmiş B-Maksimal fonksiyonun özelliklerine ayrılmıştır.

1.1 Temel Kavramlar

Tanım 1.1 X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|.\| : X \to R \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$(N1)$ $\|x\| \geq 0 \;\; ve \;\; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$(N2)$ $\|ax\| = |a| \, \|x\|$

$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|.\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 1.2 Bir T lineer operatörü aşağıdaki özellikleri gerçekleyen operatördür:

(i) T nin $D(T)$ tanım bölgesi bir vektör uzayı olup $R(T)$ deger bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayidir.

(ii) Her $x, y \in D(T)$ ve α skaleri için,

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha T x \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Tanım 1.3 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A \|x\|$ olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir. Bir T operatörünün normu $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ ile tanımlanır.

Tanım 1.4 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için, $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T ye x_0 da süreklidir denir.

Tanım 1.5 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır.

Tanım 1.6 X bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir:

(i) $x \in \mathcal{A}$

(ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) şartı yerine

$$\text{"Her } n \in N \text{ için } E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}\text{"}$$

şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma-$ cebiri adı verilir.

Tanım 1.7 X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma-$ cebiri olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 1.8 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in R$ için

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 1.9 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 1.10 Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı adı verilir.

Tanım 1.11 X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 1.12 (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.

$n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i \ , \quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \ , \ I_k \text{ bir aralık}\right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E))$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir.

Tanım 1.13 $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$, λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı olsun. λ^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına da $B(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, λ ile gösterilir.

Tanım 1.14 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme hemen her yerde doğrudur denir.

Tanım 1.15 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L^p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & , \ 1 \leq p < \infty \\ ess \ \sup |f(x)| \ , & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.16 f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt K kümesi üzerinde

$$\int_K |f| \, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal integrallenebilirdir denir.

Tanım 1.17 $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L^p$, $g \in L^q$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1$ ve

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir (Neri 1971) [19].

Tanım 1.18 $p \geq 1$ için eğer f, $g \in L^p$ ise $(f + g) \in L^p$ ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

dir. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir (Neri 1971) [19].

Tanım 1.19 $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de vektörler olmak üzere $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklidyen uzayı $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu reel uzayıdır. Burada x in mutlak değeri $|x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1...dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f(x) \, dx = \int \cdots \int f(x_1, ..., x_n) \, dx_1...dx_n$$

ile gösterilir.

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterelim. dx hacim elemanını $dx = r^{n-1} dr d\sigma$ biçiminde yazarız, burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür. Bu durumda eğer $f(x) \geq 0$ integrallenebilir bir fonksiyon ise Fubini Teoremi'nden

$$\int f(x)\,dx = \int_0^\infty \left\{ \int_{S^{n-1}} f(x)\,d\sigma \right\} r^{n-1} dr = \int_{S^{n-1}} \left\{ \int_0^\infty f(x)\,r^{n-1} dr \right\} d\sigma$$

elde edilir.

Tanım 1.20 $f(x)$ ve $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir fonksiyonları olsunlar. $\int_{\mathbb{R}^n_+} f(y)\,g(x-y)\,dy$ integraline f ile g nin konvolüsyonu denir ve $f * g$ ile gösterilir.

Teorem 1.21 Eğer $f, g \in L^1$ ise bu durumda $h = f * g$ hemen her yerde vardır ve L^1 e aittir. Ayrıca

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

sağlanır (Neri 1971) [19].

Teorem 1.22 (W. H. Young Teoremi) $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $f \in L^p$ ve $g \in L$ ise bu durumda $h = f * g$ hemen her yerde vardır ve L^p uzayına aittir. Ayrıca

$$\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

gerçeklenir (Neri 1971) [19].

Teorem 1.23 (Young Teoremi) $f \in L^p$ ve $g \in L^q$ olsun, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ dir. Eğer $h = f * g$ ise bu durumda $h \in L^r$ ve

$$\|h\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır (Neri 1971) [19].

Tanım 1.24 $f \in L(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n_+} f(y)\,e^{-i(x,y)} dy$$

ile verilen $\hat{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Burada $(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ dir. Fourier dönüşümü

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y)\, e^{-i(x,y)} dy$$

veya

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y)\, e^{-2\pi i(x,y)} dy$$

olarak da alınabilir. Eğer $n = 1$ ve $f \in L(\mathbb{R}^1)$ ise bu durumda

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy} dy$$

olur.

Lemma 1.25 Eğer $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_n(x_n)$ ise

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_1(x_1) \hat{f}_2(x_2) ... \hat{f}_n(x_n)$$

sağlanır (Neri 1971) [19].

Teorem 1.26 (Riemann-Lebesgue) Eğer $f \in L(\mathbb{R}_+^n)$ ise bu durumda sınırlı ve düzgün süreklidir. Ayrıca $|x| \to \infty$ iken $\widehat{f}(x) \to 0$ dır.

Teorem 1.27 $f, g \in L$olsun. Eğer $h = f * g$ ise bu durumda $\widehat{h} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ dır (Neri 1971) [19].

Teorem 1.28 $f, g \in L$olsun. Bu durumda

$$\int \widehat{f}(x) g(x) dx = \int f(x) \widehat{g}(x) dx$$

dir (Neri 1971) [19].

Teorem 1.29 (Parseval-Plancherel) $f \in L_2(E^n)$ olsun. Bu durumda

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y) e^{-i(x.y)} dy$$

Fourier dönüşümü vardır. Ayrıca

$$\left\| \widehat{f} \right\|_2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_2$$

dir. Eğer Fourier dönüşümünü

$$\widehat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y)e^{-2\pi i(x.y)}dy$$

ile tanımlarsak bu durumda

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 \qquad \text{(Parseval formülü)}$$

$$< \widehat{f}, \hat{g} >=< f, g > \text{ (Plancherel formülü)}$$

olur. Burada $< f, g >$, f ile g nin iç çarpımını gösterecektir ve

$$< f, g >= \int f\bar{g}dx$$

dir.

Teorem 1.30 (Hausdorff-Young Teoremi) $1 < p \leq 2$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ için $f \in L_p\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ olsun. Bu durumda

$$\widehat{f}(x) = (2\Pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y)e^{-i(x.y)}dy$$

vardır ve

$$\left\|\widehat{f}\right\|_q \leq (2\Pi)^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{\ p}$$

dir (Neri 1971) [19].

Tanım 1.31 İnvers Formülü $f \in L(\mathbb{R}^n_+)$ ve

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)e^{-i(x.y)}dx$$

f nin Fourier dönüşümü olsun. Bu durumda

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \widehat{f}(y)e^{i(x.y)}dy$$

formülüne Fourier dönüşümleri için invers formülü denir.

Tanım 1.32 λ ve α reel sayılar olmak üzere $f(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha} f(x)$ oluyorsa f ye α dereceden homojen fonksiyon denir.

Tanım 1.33 Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(n \geq 1)$ fonksiyonu için $f(x) = f(|x|)$ ise f bir radyal fonksiyondur (Neri 1971) [19].

Teorem 1.34 $E \subset \mathbb{R}^n$, $|E| < \infty$ olsun. Eğer $r < s$ ise bu durumda $L_s(E) \subset L_r(E)$ sağlanır (Neri 1971) [19].

Tanım 1.35 Bir s fonksiyonunun görüntü kümesi sonlu elemandan meydana geliyorsa s ye bir basit fonksiyondur denir.

Teorem 1.36 Eğer $1 \leq p < \infty$ ise L^p deki basit fonksiyonların kümesi L^p de yoğundur.

Tanım 1.37 Bir $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j tamsayılarının sıralı n-lisine katlı-indis denir.
$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ dir. Eğer α ve β iki katlı-indis ise $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ dir. Benzer şekilde, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$ mertebeden bir diferensiyel operatördür. Özel olarak $D^{(0,...,0)} f = f$ dir. Bir-boyutlu durumda D^α, $\frac{d}{dx}$ e indirgenir.

Tanım 1.38 (Schwarz uzayı) $\mathbb{R}^n$ uzayında sonsuz kez diferensiyellenebilir ve istenilen α ve β katlı-indisleri için

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına Schwarz uzayı denir. $\mathcal{S}$ ile gösterilir.

Eğer $f \in \mathcal{S}$ ise bu durumda f sınırlıdır, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\hat{f}(x) \in \mathcal{S}$ dir.

Tanım 1.39 $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere

$$T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$$

bir operatör olsun. Eğer $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_q \leq A \|f\|_p$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne "(p, q) tipindendir" denir.

m bir ölçü olmak üzere eğer $\forall \lambda > 0$ için

$$m\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A \|f\|_p}{\alpha} \right)^q, q < \infty$$

olacak biçimde α ve f den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir.

Lemma 1.40 (Vitali tipi örtme lemması) E,$\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir küme ve $\mathcal{B}$ $d(B) < \infty$ olan ve E yi Vitali anlamında örten B kümelerinin bir kolleksiyonu olsun. Herbir $x \in E$ için $B_x \in \mathcal{B}$ vardır öyleki $x \in B_x$, $\alpha, \beta > 0$ n boyuta dayanan sabitler ve $B_1, B_2, ..., B_k, ...,$ $\mathcal{B}$ de ayrık yuvarlar olmak üzere

$$\sum_k |B_k| \geq \beta |E|.$$

Burada $\beta = 5^{-n}$ almak yeterlidir.

Tanım 1.41 (**Zayıf** L^p**uzayı**)

f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Zayıf L^p uzayı

$$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_{p,\infty} < \infty\}$$

biçiminde tanımlanır.Burada, f nin yarı normu $C > 0$ sabiti için

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup_{\lambda>0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} \leq C$$

ile verilir.

Tanım 1.42 ((p,q) **tipli operatör)**

T, altlineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun.Eğer T, $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı bir operatör ise T, zayıf (p,q) tipindendir denir. Yani herhangi bir $\lambda > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q \tag{1.1}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. $T, L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı operatörü (p,q) tipindendir. Bir $C > 0$ sabiti vardır. Yani $C > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p \tag{1.2}$$

olur.Burada $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(R^n)}$, $f(x)$ in L^p normunu verir.

$p = q$ olduğunda ve T operatörü (1.1) ile (1.2) i, tanımladığı zaman, T nin de (p,q) zayıf tipinden olduğu söylenir. Ayrıca (p,q) tipli operatörünün zayıf (p,q) tipinden olduğunu görmek kolaydır. Fakat tersi tam olarak doğru değildir. Şimdi ise M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün, zayıf $(1,1)$ tipinden ve zayıf (p,q) tipinden olduğunu gösteren Teoremi vereceğiz.

Teorem 1.43 f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon olsun.

(a) $1 \leq p \leq \infty$ için $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $M(f(x)) < \infty$ olur.

(b) Herhangi bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

(c) Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < p \leq \infty$,için $\|Mf\|_p \leq C\|f\|_p$ olacak şekilde bir $C = C(n,p) > 0$ sabiti vardır.

Teorem 1.44 (**Lebesgue diferensiyellenebilme teoremi**) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0$$

Sonuç 1.45 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x)$$

dır.Burada $B(x,r)$, x merkezli ve r yarıçaplı yuvarları göstermektedir.

Teorem 1.46 (Marcinkiewicz) $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olmak üzere T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun. Ayrıca p ve q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad , \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p,q) tipli operatördür.

1.2 Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü ve Özellikleri

M. Levitan (1951) [1] $(0,\infty)$ aralığındaki ötelemenin Bessel diferensiyel operatörü ile ilişkisini inceleyerek genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır.

I. Kipriyanov (1967) [17] yılında $\mathbb{R}^n_+$, $n-$boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır. Bu ötelemenin $(n-1)$ değişkene göre adi ve n. değişkene göre $(0,\infty)$ aralığındaki öteleme olarak ele almış, daha sonrada Laplace-Bessel operatörleri ile ilişkisini incelemiştir.

Tanım 1.47 (Bessel operatörü) $\gamma > 0$ ve $x > 0$ olmak üzere;

$$B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}$$

şeklinde ifade edilen B operatörüne Bessel diferensiyel operatörü denir.

Tanım 1.48 (Laplace-Bessel operatörü) $\gamma > 0$ olmak üzere;

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial}{\partial x_n}$$

şeklinde tanımlanan operatöre Laplace-Bessel diferensiyel operatörü denir.

Tanım 1.49 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y \in \mathbb{R}$ olsun. x noktasını $x + y$ noktasına öteleyen

$$T^y f(x) = f(x + y)$$

şeklinde tanımlanan operatöre $\mathbb{R}$ de adi öteleme operatörü denir. Adi öteleme operatörü

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_y(x,0) &= 0 \end{cases}$$

şeklindeki başlangıç değer probleminin çözümüdür (Ekincioğlu 1994) [3].

Tanım 1.50 X bir topolojik uzay, $f : X \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $y \in X$ olmak üzere

$$F(x, y) = T^y f(x)$$

operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa genelleştirilmiş öteleme operatörü adını alır.

(i) $\forall f, g \in C(X)$, $a, b \in \mathbb{C}$ için

$$T^y [af(x) + bg(x)] = aT^y f(x) + bT^y g(x)$$

dir.

(ii) $\forall f \in C(X)$ için bir $y_0 \in X$ vardır $\ni T^{y_0} f(x) = f(x)$ sağlanır.

(iii) $\forall f \in C(X)$ ve $x, y, z \in X$ için

$$T^z T^y f(x) = T^y T^z f(x)$$

eşitliği sağlanır.

(iv) $\forall x, y \in X$ için $F(x, y) = T^y f(x)$ süreklidir.

B, Bessel diferensiyel operatörü olmak üzere

$$\begin{cases} B_x u &= B_y u \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_y(x,0) &= \quad 0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(x,y) = T^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

olarak elde edilir. Bu öteleme $(0,\infty)$ aralığındaki ötelemedir.

Şimdi $\mathbb{R}_+^n$ üzerindeki ötelemeyi verelim.

$x = (x', x_n)$, $y = (y', y_n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} (\Delta_B)_x u(x,y) = (\Delta_B)_y u(x,y) \\ \quad u(x,0) \quad = \quad f(x) \\ \quad u_y(x,0) \quad = \quad 0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(x,y) = T^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^\pi f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

fonksiyonudur. Bu öteleme $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde genelleştirilmiş ötelemedir.

Şimdi T^y operatörünün genelleştirilmiş öteleme özelliklerini sağladığını gösterelim. Basitlik olması için $(0,\infty)$ aralığında tanımlı

$$T^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

opatörünün bu özellikleri sağladığını göstermek yeterlidir.

(i) Lineerlik özelliği

T^y operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}
T^y\left(af\left(x\right)+bg\left(x\right)\right) &= T^y\left(\left(af+bg\right)\left(x\right)\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_0^\pi \left(af+bg\right)\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&= \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_0^\pi af\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&\quad +\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_0^\pi bg\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&= aT^y f\left(x\right)+bT^y g\left(x\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Pozitiflik özelliği

f, pozitif bir fonksiyon olsun.

$$T^y f\left(x\right)=\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

olduğunu biliyoruz. f pozitif fonksiyon olduğundan

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\geq 0$$

sağlanır. $0\leq\theta\leq\pi$ iken $\sin\theta\geq 0$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı pozitiftir. O halde

$$T^y f\left(x\right)\geq 0$$

olduğu görülür.

(iii) T^y operatörünün tanımı kullanılarak

$$T^y\left(1\right)=1$$

olduğu kolayca görülür.

(iv) T^y operatörü sınırlıdır.

$$\begin{aligned} \left|T^y f(x)\right| &= \left|\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^{\pi} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha\right| \\ &\le \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^{\pi} \left|f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\right|\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\ &\le \sup_{x\ge 0}\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^{\pi} \left|f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\right|\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\ &\le \sup_{x\ge 0}|f(x)|\,\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^{\pi}\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left|T^y f(x)\right| \le T^y\left|f(x)\right| \le \sup_{x\ge 0}\left|f(x)\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

(v) T^y operatörü süreklidir.

T^y operatörü lineer ve sınırlı olduğundan süreklidir.

(vi) T^y operatörünün yer değiştirme özelliği

$$T^y T^z f(x) = T^z T^y f(x)$$

biçimindedir.

Şimdi T^y genelleştirilmiş operatörü tarafından üretilen $f \otimes g$ konvolüsyonunu ($B-$konvolüsyon) tanımlayıp önemli özelliklerini vereceğiz

Tanım 1.51 f ve g, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$(f\otimes g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y)\,T^y g(x)\,y_n^{\gamma}dy$$

şeklinde tanımlanan konvolüsyona $B-$konvolüsyon denir (Guliyev 2003) [3].

Lemma 1.52 $1\le p\le\infty$, $f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun. Bu durumda $\forall y\in\mathbb{R}_+^n$ için

$$\left\|T^y f(x)\right\|_{L_{p,\gamma}} \le \|f\|_{L_{p,\gamma}} \tag{1.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Eşitsizliği önce $p=1$ durumu için ispatlayalım.

$$T^y f(x) = c_\gamma \int\limits_0^\pi f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

olduğunu biliyoruz. Burada c_γ sabiti

$$c_\gamma = \left(\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha\right)^{-1} = \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)\sqrt{\pi}}$$

eşitliğii ile verilir.

$$\begin{aligned}
\|T^y f(x)\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |T^y f(x)|\, x_n^\gamma dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| c_\gamma \int\limits_0^\pi f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \right| x_n^\gamma dx \\
&\le c_\gamma \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_0^\pi \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \right| \sin^{\gamma-1}\alpha x_n^\gamma d\alpha dx \\
&= c_\gamma \int\limits_0^\pi \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \right| \sin^{\gamma-1}\alpha x_n^\gamma dx d\alpha \\
&= c_\gamma \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \right| x_n^\gamma dx \\
&= \|f\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$p=\infty$ için $\|T^y f(.)\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \le \|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$ olduğunu gösterelim.

$$\|T^y f(.)\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = ess \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n} |T^y f(x)|$$

$$\begin{aligned}
|T^y f(x)| &= \left| c_\gamma \int\limits_0^\pi f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \right| \\
&\le c_\gamma \int\limits_0^\pi \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \right| \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&\le c_\gamma \int\limits_0^\pi \|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha = \|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} c_\gamma \int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha \\
&= \|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)}
\end{aligned}$$

$1 < p < \infty$ için

$$\left.\begin{aligned} \|T^y f(.)\|_{L_{1,\gamma}} &\le \|f\|_{L_{1,\gamma}} \\ \|T^y f(.)\|_{L_\infty} &\le \|f\|_{L_\infty} \end{aligned}\right\}$$

interpolasyon teoreminden

$$\|T^y f(.)\|_{L_{p,\gamma}} \le \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

olur.

Lemma 1.53 $1 \le p, r \le q \le \infty$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $g \in L_{r,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun. Bu durumda $f \otimes g \in L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\|f \otimes g\|_{L_{q,\gamma}} \le \|f\|_{L_{q,\gamma}} \|g\|_{L_{r,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. λ, μ, ν; $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$ olacak şekilde pozitif sayılar olsun.

$$\begin{aligned} |(f \otimes g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y)\, T^y g(x)\, y_n^\gamma dy \right| \le \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|\, |T^y g(x)|\, y_n^\gamma dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|^{p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)} |T^y g(x)|^{q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}\right)} |f(y)|^{\frac{p}{\mu}} |T^y g(x)|^{\frac{q}{\nu}} y_n^{\gamma\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)} dy \end{aligned}$$

elde ederiz. λ, μ, ν ye göre Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |(f \otimes g)(x)| \le & \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|^{\lambda p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)} |T^y g(x)|^{\lambda q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}\right)} y_n^\gamma dy \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ & \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|^p y_n^\gamma dy \right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |T^y g(x)|^q y_n^\gamma dy \right)^{\frac{1}{\nu}} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$|(f \otimes g)(x)| \le \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}} \|T^y g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|^{\lambda p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)} |T^y g(x)|^{\lambda q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}\right)} y_n^\gamma dy \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

elde edilir.

$\frac{1}{p} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\lambda}$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{\lambda}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} = 1$$

sağlanır.

$$(f\otimes g)(x)\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}}\|T^{y}g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}|f(y)|^{\lambda p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)}|T^{y}g(x)|^{\lambda q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}y_{n}^{\gamma}dy\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$|(f\otimes g)(x)|\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}}\|T^{y}g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}|f(y)|^{p}|T^{y}g(x)|^{q}y_{n}^{\gamma}dy\right)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği bulunur. Her iki tarafın r. kökü alınırsa

$$|(f\otimes g)(x)|^{r}\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{pr}{\mu}}\|T^{y}g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{qr}{\nu}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}|f(y)|^{p}|T^{y}g(x)|^{q}y_{n}^{\gamma}dy\right)$$

olduğu görülür. Şimdi her iki tarafın integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}|(f\otimes g)(x)|^{r}x_{n}^{\gamma}dx &\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{pr}{\mu}}\|T^{y}g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{qr}{\nu}}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}|f(y)|^{p}|T^{y}g(x)|^{q}y_{n}^{\gamma}dyx_{n}^{\gamma}dx\\ &= \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{pr}{\mu}}\|T^{y}g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{qr}{\nu}}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}|f(y)|^{p}y_{n}^{\gamma}dy\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}|T^{y}g(x)|^{q}x_{n}^{\gamma}dx\end{aligned}$$

sağlanır. Buradan

$$\|f\otimes g\|_{L_{r,\gamma}}^{r}\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{pr}{\mu}}\|T^{y}g(x)\|^{\frac{qr}{\nu}}\|f\|_{L_{p,\gamma}}^{p}\|T^{y}g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{q}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Her iki tarafın r. kökü alındığında

$$\begin{aligned}\|f\otimes g\|_{L_{r,\gamma}} &\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}}\|T^{y}g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}}\|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{r}}\|T^{y}g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{r}}\\ &= \|f\|_{L_{p,\gamma}}^{\frac{p}{\mu}+\frac{p}{r}}\|T^{y}g(x)\|_{L_{q,\gamma}}^{\frac{q}{\nu}+\frac{q}{r}}=\|f\|_{L_{p,\gamma}}\|T^{y}g(x)\|\leq \|f\|_{L_{p,\gamma}}\|g\|_{L_{q,\gamma}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 1.54 $\mathcal{A}=(\mathcal{A}',\mathcal{A}_{n})\subset\mathbb{R}_{+}^{n}$, $\mathcal{A}'=\mathcal{A}_{1}\times...\times\mathcal{A}_{n-1}\subset\mathbb{R}^{n-1}$ herhangi ölçülebilir kümeler, $\mathcal{A}_{n}\subset(0,\infty)$ ve $y\in\mathbb{R}_{+}^{n}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik gerçeklenir.

$$\int\limits_{\mathcal{A}}T^{y}g(x)x_{n}^{\gamma}dx=c_{\gamma}\int\limits_{(y,0)+\overline{\mathcal{A}}}g\left(z',\sqrt{z_{n}^{2}+z_{n+1}^{2}}\right)d\mu(z,z_{n+1})$$

Burada $\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{A}'\times(-m,m)\times[0,m)$, $m=\sup\mathcal{A}_{n}$ ve $d\mu(z,z_{n+1})=z_{n+1}^{\gamma-1}dzdz_{n+1}$ dir (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007) [12,13,14].

İspat. Genelleştirilmiş öteleme operatörünün tanımından;

$$T^{y}f(x)=c_{\gamma}\int\limits_{0}^{\pi}f\left(x'-y',\sqrt{x_{n}^{2}-2x_{n}y_{n}\cos\alpha+y_{n}^{2}}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın integralini alırsak;

$$\int\limits_{\mathcal{A}} T^y f(x)\, x_n^\gamma dx = c_\gamma \int\limits_{\mathcal{A}} \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha x_n^\gamma d\alpha dx$$

elde edilir.

$$\begin{cases} z' &= \quad x' - y' \\ z_n &= y_n - x_n \cos\alpha \\ z_{n+1} &= \quad x_n \sin\alpha \end{cases}$$

dönüşümünü yapalım. Dönüşümün Jakobiyeni $j = -\frac{1}{x_n}$ dir.

$$\begin{aligned} z_n^2 + z_{n+1}^2 &= (y_n - x_n\cos\alpha)^2 + x_n^2 \sin^2\alpha \\ &= y_n^2 + x_n^2\cos^2\alpha - 2x_n y_n \cos\alpha + x_n^2\sin^2\alpha \\ &= x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{A}} T^y f(x)\, x_n^\gamma dx &= c_\gamma \int\limits_{\overline{\mathcal{A}}+(y,0)} f\left(z', \sqrt{z_n^2 + z_{n+1}^2}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha \frac{1}{x_n} x_n^\gamma dx d\alpha \\ &= c_\gamma \int\limits_{\overline{\mathcal{A}}+(y,0)} f\left(z', \sqrt{z_n^2 + z_{n+1}^2}\right) z_{n+1}^{\gamma-1} dz dz_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

1.3 $\gamma-$ Dağılım Fonksiyonu ve $\gamma-$ Azalan Yeniden Düzenleme

Bu kısımda $\gamma-$dağılım fonksiyonu ve $\gamma-$yeniden düzenlemeyi tanıtıp bunlarla ilgili tamel özellikleri vereceğiz.

$E \subset \mathbb{R}_+^n$ ölçülebilir bir küme olsun. Bu durumda E nin $\gamma-$ölçüsü

$$|E|_\gamma = \int\limits_E x_n^\gamma dx$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.55 ($\gamma-$ dağılım fonksiyonu) $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $f_{*,\gamma} : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$f_{*,\gamma}(t) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\right\}\right|_\gamma$$

şeklinde tanımlanan $f_{*,\gamma}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun $\gamma-$dağılım fonksiyonu denir.

Aşağıdaki lemma ile $\gamma-$dağılım fonksiyonunun bazı özelliklerini vereceğiz.

Lemma 1.56 $f, g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) $|f|_{*,\gamma}(t) = f_{*,\gamma}(t)\,,\ t \geq 0$

(ii) h.h.y. $f = g$ ise $f_{*,\gamma} = g_{*,\gamma}$ dır.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n_+$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ ise $\forall t \in [0, \infty)$ için $f_{*,\gamma}(t) = g_{*,\gamma}(t)$ eşitsizliği sağlanır.

(iv) $f_{*,\gamma}$ azalan ve sağdan süreklidir.

(v) $(f+g)_{*,\gamma}(t_1 + t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1) + g_{*,\gamma}(t_2)\,;\ t_1, t_2 \geq 0$

(vi) $(fg)_{*,\gamma}(t_1 t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1) + g_{*,\gamma}(t_2)\,;\ t_1, t_2 \geq 0$

İspat. (i) $|f|_{*,\gamma} = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t\right\}\right|_\gamma = f_{*,\gamma}(t)$

(ii) $f_{*,\gamma}(t) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t\right\}\right|_\gamma = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |g(x)| > t\right\}\right|_\gamma = g_{*,\gamma}(t)$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n_+$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ olduğundan

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |g(x)| > t\right\}$$

olduğu görülür. Buradan her iki tarafın γ ölçüsü alınırsa

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t\right\}\right|_\gamma \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |g(x)| > t\right\}\right|_\gamma$$

olduğundan

$$f_{*,\gamma}(t) \leq g_{*,\gamma}(t)$$

eşitsizliği elde edilir.

(iv) $f_{*,\gamma}$ fonksiyonunun azalan olduğunu gösterelim. $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ için $t_1 > t_2$ olsun. Bu durumda $f_{*,\gamma}(t_1) \leq f_{*,\gamma}(t_2)$ olduğunu göstermeliyiz.

$t_1 > t_2$ olduğundan

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t_1\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > t_2\right\}$$

dir. Her iki tarafın γ ölçüsü alındığında

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t_1\right\}\right|_\gamma \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t_2\right\}\right|_\gamma$$

elde edilir. Buradan

$$f_{*,\gamma}(t_1) \leq f_{*,\gamma}(t_2)$$

olduğundan $f_{*,\gamma}$ azalandır.

$f_{*,\gamma}$ nın sağdan sürekli olduğunu gösterelim. $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_n ... \geq t$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$ olsun. $f_{*,\gamma}(t_n) \to f_{*,\gamma}(t)$ olduğunu göstereceğiz.

$$E_t = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |g(x)| > t\right\}$$

olsun. $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_n ... \geq t$ olduğundan $E_{t_1} \subset E_{t_2} \subset ... \subset E_t$ dir. Buradan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_t$$

olur.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_{*,\gamma}(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t_n\right\}\right|_\gamma \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|E_{t_n}\right|_\gamma = \left|E_t\right|_\gamma = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\right\}\right|_\gamma \\
&= f_{*,\gamma}(t)
\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

(v) $t_1, t_2 \geq 0$ için

$$(f+g)_{*,\gamma}(t_1+t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1) + g_{*,\gamma}(t_2)$$

olduğunu göstereceğiz.

$$(f+g)_{*,\gamma}(t_1+t_2) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |(f+g)(x)| > t_1+t_2\right\}\right|_\gamma$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)+g(x)| > t_1+t_2\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t_1\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |g(x)| > t_2\right\}$$

olduğu görülür. Her iki tarafın γ ölçüsü alındığında

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)+g(x)| > t_1+t_2\right\}\right|_\gamma &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t_1\right\}\right|_\gamma \\
&+ \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |g(x)| > t_2\right\}\right|_\gamma
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(f+g)_{*,\gamma}(t_1+t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1)+g_{*,\gamma}(t_2)$$

olduğu görülür.

(vi) $t_1,t_2 \geq 0$ için

$$(fg)_{*,\gamma}(t_1 t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1)+g_{*,\gamma}(t_2)$$

olduğunu göstereceğiz.

$$(fg)_{*,\gamma}(t_1 t_2) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |(fg)(x)| > t_1 t_2\right\}\right|_\gamma$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)\, g(x)| > t_1 t_2\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t_1\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |g(x)| > t_2\right\}$$

olduğu görülür. γ ölçüsüne geçtiğimiz taktirde

$$\begin{aligned}\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)\, g(x)| > t_1 t_2\right\}\right|_\gamma &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t_1\right\}\right|_\gamma \\ &+ \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |g(x)| > t_2\right\}\right|_\gamma\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(fg)_{*,\gamma}(t_1 t_2) \leq f_{*,\gamma}(t_1)+g_{*,\gamma}(t_2)$$

elde edilir.

Tanım 1.57 $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $\gamma-$yeniden düzenlemesi

$$f_\gamma^*(t) = \inf\left\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t\right\} \qquad \forall t \in [0,\infty)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdiki teorem $\gamma-$yeniden düzenlemenin temel özelliklerini vermektedir.

Teorem 1.58 $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) $s,t \geq 0$ için $f_\gamma^*(t) > s \Leftrightarrow f_{*,\gamma}(s) > t$ dir.

(ii) f ve f_γ^* eş ölçülebilirdir. Yani $\forall \lambda \geq 0$ için

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > \lambda\right\}\right|_\gamma = m\left(\left\{t \geq 0 : f_\gamma^*(t) > \lambda\right\}\right)$$

dır. Burada m Lebesgue ölçüsüdür.

(iii) $\forall t \geq 0$ için $|f|_{\gamma}^{*}(t) = f_{\gamma}^{*}(t)$ sağlanır.

(iv) $\mathbb{R}_{+}^{n}$ üzerinde h.h.y $f = g$ ise $[0, \infty)$ üzerinde $f_{\gamma}^{*} = g_{\gamma}^{*}$ gerçeklenir.

(v) f_{γ}^{*} azalan ve sağdan süreklidir.

(vi) $t \geq 0$ için $\left(f_{\gamma}^{*}\right)_{*}(t) = f_{*,\gamma}(t)$ eşitliği sağlanır.

(vii) $0 < p < \infty$ için $(|f|^{p})^{*}(t) = \left(f_{\gamma}^{*}(t)\right)^{p}$ dir.

(viii) A ölçülebilir bir küme ve $f \geq 0$ olmak üzere $(f\chi_{A})_{\gamma}^{*}(t) \leq f_{\gamma}^{*}(t)\, \chi_{[0,|A|_{\gamma})}(t)$, $t \geq 0$ dır.

İspat. (i) İlk olarak $f_{\gamma}^{*}(t) > s \Rightarrow t < f_{*,\gamma}(s)$ olduğunu gösterelim.

$$f_{\gamma}^{*}(t) = \inf\{z \geq 0 : f_{*,\gamma}(z) \leq t\} > s$$

dir. $f_{*,\gamma}$ azalan fonksiyon olduğundan

$$t < \inf\{z \geq 0 : f_{*,\gamma}(z) \leq s\} \Rightarrow t < f_{\gamma}^{*}(s)$$

dir. Karşıt olarak

$$t < f_{*,\gamma}(s) \Rightarrow f_{\gamma}^{*}(t) > s$$

olduğunu gösterelim. $t < \left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : |f(x)| > s\right\}\right|_{\gamma}$ ve $f_{*,\gamma}$ azalan bir fonksiyon olduğundan

$$s < \inf\{z : f_{*,\gamma}(z) \leq t\} \Rightarrow s < f_{\gamma}^{*}(t)$$

dir.

(ii)

$$m\left(\left\{t \geq 0 : f_{\gamma}^{*}(t) > \lambda\right\}\right) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : f_{*,\gamma}(\lambda) \leq t\right\}\right|_{\gamma}$$

olduğu görülür.

(iii) $\gamma-$azalan yeniden düzenlemenin tanımından ve (i) den

$$f_{\gamma}^{*}(t) = \inf\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t\} = \inf\left\{s \geq 0 : |f|_{*,\gamma}(s) \leq t\right\} = |f|_{\gamma}^{*}(t)$$

olduğu görülür.

(iv)

$$f_\gamma^*(s) = \inf\{t \geq 0 : f_{*,\gamma}(t) \leq s\} = \inf\{t \geq 0 : g_{*,\gamma}(t) \leq s\} = g_\gamma^*(s)$$

gerçeklenir.

(v) f_γ^* ın azalan olduğunu gösterelim. $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ için $t_1 > t_2$ olsun. $f_\gamma^*(t_1) \leq f_\gamma^*(t_2)$ olduğunu göstereceğiz. $t_1 > t_2$ ise $f_{*,\gamma}(t_1) \leq f_{*,\gamma}(t_2)$ olduğunu biliyoruz.

$$f_\gamma^*(t_1) = \inf\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t_1\}$$

ve

$$\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t_2\} \subset \{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t_1\}$$

olduğu görülür. Küme büyüdükçe infimum değeri küçüleceğinden

$$\inf\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t_1\} \leq \inf\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t_2\}$$

elde edilir. Buradan $f_\gamma^*(t_1) \leq f_\gamma^*(t_2)$ sağlanır.

Şimdi f_γ^* ın sağdan sürekli olduğunu gösterelim. $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq t_n ... \geq t$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$ olsun. $f_\gamma^*(t_n) \to f_\gamma^*(t)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\lim_{n\to\infty} f_\gamma^*(t_n) = \lim_{n\to\infty} \inf\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t_n\} = \inf\{s \geq 0 : f_{*,\gamma}(s) \leq t\} = f_\gamma^*(t)$$

olduğu görülür ve istenilen elde edilir.

(vi) $t \geq 0$ için $\left(f_\gamma^*\right)_*(t) = f_{*,\gamma}(t)$ olduğunu göstereceğiz. m, Lebesgue ölçüsü olmak üzere;

$$\begin{aligned} \left(f_\gamma^*\right)_*(t) &= m\left(\left\{s \geq 0 : f_\gamma^*(s) > t\right\}\right) \\ &= m\left(\{s \geq 0 : s < f_{*,\gamma}(t)\}\right) = m([0, f_{*,\gamma}(t)) = f_{*,\gamma}(t) \end{aligned}$$

dir.

(vii) $0 < p < \infty$ için $(|f|^p)^*(t) = \left(f_\gamma^*(t)\right)^p$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (|f|^p)^*(t) &= \inf\left\{\lambda \geq 0 : |f|_{*,\gamma}^p(\lambda) \leq t\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda \geq 0 : \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)|^p > \lambda\right\}\right|_\gamma \leq t\right\}, \ \lambda^{\frac{1}{p}} = v \\ &= \inf\left\{v^p \geq 0 : \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > v\right\}\right|_\gamma \leq t\right\} = \left(f_\gamma^*(t)\right)^p \end{aligned}$$

elde edilir.

(viii) $(f\chi_A)^*_\gamma(t) \leq f^*_\gamma(t)\,\chi_{[0,|A|_\gamma)}(t)$, $t \geq 0$ olduğunu göstereceğiz.

$\forall x \in \mathbb{R}^n_+$ için $(f\chi_A)(x) \leq f(x)$ dir. Buradan $(f\chi_A)_{*,\gamma}(t) \leq f_{*,\gamma}(t)$, $t \geq 0$ olur. Diğer taraftan

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(f\chi_A)(x)| > \lambda\right\}\right|_\gamma \leq |A|_\gamma \tag{1.4}$$

$$(f\chi_A)^*(t) = 0, \quad t > |A|_\gamma \tag{1.5}$$

olduğu görülür. (1) ve (2) den $\forall t \geq 0$ için

$$(f\chi_A)^*_\gamma(t) \leq f^*_\gamma(t)\,\chi_{[0,|A|_\gamma)}(t)$$

elde ederiz.

Tanım 1.59 (** **operatörü**) $f^*_\gamma : (0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$f^*_\gamma(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*_\gamma(s)\,ds$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$f^*_\gamma(s) = \inf\{t \geq 0 : f_*(t) \leq s\}$$

biçimindedir (Kristiansson 2002) [18].

Teorem 1.60 $f, g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) f^{**}_γ, $(0,\infty)$ üzerinde azalan ve süreklidir.

(ii) $\forall t \geq 0$ için $f^*_\gamma(t) \leq f^{**}_\gamma(t)$ dir.

(iii) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ ise $\forall t \geq 0$ için $f^{**}_\gamma(t) \leq g^{**}_\gamma(t)$ dir.

İspat.

(i) İlk olarak f^{**}_γ ın sürekliliğini gösterelim. $\frac{1}{t} \in C(0,\infty)$, $\int_0^t \varphi(s)\,ds \in C(0,\infty)$ ve sürekli iki fonksiyonun çarpımıda sürekli olduğundan $\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)\,ds \in C(0,\infty)$ dur. Buradan da $f^{**}_\gamma(t) \in C(0,\infty)$ dur.

Şimdi de f_{γ}^{**} ın azalan olduğunu gösterelim. $0 < t_1 < t_2$ keyfi sabitler olsun.

$$\begin{aligned}
f_{\gamma}^{**}(t_2) &= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds = \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds + \frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds \\
&\leq \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds + \frac{1}{t_2} f_{\gamma}^{*}(t_1)(t_2 - t_1) = \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) t_1 f_{\gamma}^{*}(t_1) \\
&\leq \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\int_0^{t_1} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds = f_{\gamma}^{**}(t_1)
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan istenilen elde edilir.

(ii) f_{γ}^{*} fonksiyonu azalan olduğundan

$$f_{\gamma}^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^{t} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds \geq \frac{1}{t}\int_0^{t} f_{\gamma}^{*}(t)\,ds = f_{\gamma}^{*}(t)$$

elde edilir.

(iii) $\forall t \geq 0$ için $f_{\gamma}^{*}(t) \leq g_{\gamma}^{*}(t)$ dir. Buradan da

$$f_{\gamma}^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^{t} f_{\gamma}^{*}(s)\,ds \leq \frac{1}{t}\int_0^{t} g_{\gamma}^{*}(s)\,ds = g_{\gamma}^{**}(t)$$

elde edilir.

Teorem 1.61 $t \geq 0$ olmak üzere $f_{*,\gamma}^{p}(t) = f_{*,\gamma}\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$ elde edilir.

İspat. f, $\mathbb{R}_{+}^{n}$ de ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
f_{*,\gamma}^{p}(t) &= \left(\int_{\{x:|f(x)|>t\}} x_n^{\gamma}dx\right)^{p} = \int_{\{x:|f(x)|^{p}>t\}} x_n^{\gamma}dx, \quad (|f|^{p})^{*} = \left(f_{\gamma}^{*}\right)^{p} \text{ olduğundan} \\
&= \int_{\left\{x:|f(x)|>t^{\frac{1}{p}}\right\}} x_n^{\gamma}dx = f_{*,\gamma}\left(t^{\frac{1}{p}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 1.62 $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}_{+}^{n}} |f(x)|^{p} x_n^{\gamma}dx = \int_0^{\infty} \left(f_{\gamma}^{*}(t)\right)^{p} dt \tag{2.3.3}$$

eşitliği sağlanır (Kristiansson 2002) [18].

İspat.

$$\begin{aligned}\left(|f(x)|^p\right)^*(t) &= \inf\left\{\lambda \geq 0 : \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)|^p > \lambda\right\}\right|_\gamma \leq t\right\}, \quad \lambda^{\frac{1}{p}} = \nu \\ &= \inf\left\{\nu^p \geq 0 : \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |f(x)| > \nu\right\}\right|_\gamma \leq t\right\} \\ &= \left(f^*_\gamma(t)\right)^p\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x_n^\gamma dx = \int\limits_0^\infty \left(|f_\gamma(t)|^p\right)^* dt = \int\limits_0^\infty \left(f^*_\gamma(t)\right)^p dt$$

ispat tamamlanır.

Lemma 1.63 Herhangi $t > 0$ için

$$\sup_{|E|_\gamma = t} \int\limits_E |f(x)| x_n^\gamma dx = \int\limits_0^t f^*_\gamma(s) ds \tag{2.3.4}$$

eşitliği geçerlidir (Kristiansson 2002) [18].

Lemma 1.64

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x) g(x)| x_n^\gamma dx \leq \int\limits_0^\infty f^*_\gamma(t) g^*_\gamma(t) dt$$

eşitsizliği geçerlidir (Kristiansson 2002) [18].

İspat. Bu eşitsizliği basit fonksiyonlar için ispatlayıp basit fonksiyonların yoğunluğundan yararlanarak tüm fonksiyonlara genelleştireceğiz.

$$S(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_k > 0$$

olsun. Burada A_j ler ayrık kümelerdir.

$$B_j = \bigcup_{i=1}^j A_i, \qquad \beta_j = \alpha_j - \alpha_{j+1}, \qquad \alpha_{k+1} = 0$$

olmak üzere

$$S(x) = \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{B_j}$$

yazabiliriz. Gerçekten

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \beta_1\chi_{B_1}+\beta_2\chi_{B_2}+...+\beta_k\chi_{B_k}\\
&= (\alpha_1-\alpha_2)\chi_{A_1}+(\alpha_2-\alpha_3)\chi_{A_1\cup A_2}+(\alpha_3-\alpha_4)\chi_{A_1\cup A_2\cup A_3}\\
&\quad +...+(A_1\cup A_2\cup...A_k)\chi_{A_1\cup A_2\cup...A_k}\\
&= \alpha_1\chi_{A_1}-\alpha_2\chi_{A_1}+\alpha_2\chi_{A_1\cup A_2}-\alpha_3\chi_{A_1\cup A_2}+\alpha_3\chi_{A_1\cup A_2\cup A_3}+...\\
&= \alpha_1\chi_{A_1}+\alpha_2\chi_{A_2}+\alpha_3\chi_{A_3}+...+\alpha_n\chi_{A_n}=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\chi_{A_j}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_+}|s(x)\,g(x)|\,x_n^\gamma dx &= \int_{\mathbb{R}^n_+}\left|\sum_{j=1}^{k}\beta_j\chi_{B_j}\right||g(x)|\,x_n^\gamma dx=\sum_{j=1}^{k}\beta_j\int_{\beta_j}|g(x)|\,x_n^\gamma dx\\
&\le \sum_{j=1}^{k}\beta_j\int_0^{|\beta_j|_\gamma}g_\gamma^*(t)\,dt=\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j-\alpha_{j+1})\int_0^{|\beta_j|_\gamma}g_\gamma^*(t)\,dt\\
&= \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j}g_\gamma^*(t)\,dt=\int_0^\infty\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\chi_{[\gamma_{j-1},\gamma_j)}(t)\,g_\gamma^*(t)\,dt\\
&= \int_0^\infty s^*(t)\,g_\gamma^*(t)\,dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
\gamma_j=\sum_{i=1}^{j}|A_i|_\gamma\,,\qquad \gamma_0=0
$$

dır.

Aşağıdaki lemmada $T^y f$ genelleştirilmiş öteleme operatörü ve f nin $\gamma-$yeniden düzenlemesi arasındaki ilişki verilmektedir.

Lemma 1.65 Herhangi ölçülebilir $A\subset\mathbb{R}^n_+$ ve $y\in\mathbb{R}^n_+$ için

$$
\sup_{|A|_\gamma=t}\int_A T^y|f(x)|\,x_n^\gamma dx=c_\gamma\int_0^t f_\gamma^*(s)\,ds
$$

dir (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007) [12,13,14].

İspat. Lemma 2.3.3 ten

$$
\int_A T^y|f(x)|\,x_n^\gamma dx=c_\gamma\int_{(y,0)+\overline{\mathcal{A}}}\left|\bar f(z,z_{n+1})\right|d\mu(z,z_{n+1}) \tag{1.6}
$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$\begin{aligned}\bar{f}\left(z, z_{n+1}\right) &= f\left(z', \sqrt{z_n^2 + z_{n+1}^2}\right), z_{n+1} > 0 \\ d\mu\left(z, z_{n+1}\right) &= z_{n+1}^{\gamma-1} dz dz_{n+1}\end{aligned}$$

ile verilir. $\bar{f}\left(z, z_{n+1}\right)$ fonksiyonu için (2.3.4) eşitliğini yazarsak

$$\sup_{\mu(\widetilde{\mathcal{A}})=t} \int_{\widetilde{\mathcal{A}}} \left|\tilde{f}\left(z, z_{n+1}\right)\right| d\mu\left(z, z_{n+1}\right) = c_\gamma \int_0^t \left(\bar{f}\right)_\mu^* (s)\, ds \tag{1.7}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned}\left(\bar{f}\right)_\mu (s) &= \inf\left\{t > 0 : \mu_{\left(\bar{f}\right)_\mu}(t) \leq s\right\} \\ &= \inf\left\{t > 0 : \mu\left(\left\{\left(z, z_{n+1}\right) : \left|\bar{f}\left(z, z_{n+1}\right)\right| > t\right\}\right) \leq s\right\}\end{aligned}$$

$$\mu\left(\left(y, 0\right) + \widetilde{\mathcal{A}}\right) = |A|_\gamma \quad \text{ve} \quad \left(\bar{f}\right)_\mu^* (s) = f_\gamma^* (s)$$

ile verilir.

$$\begin{cases} z' &= x' \\ z_n &= x_n \cos\alpha \\ z_{n+1} &= x_n \sin\alpha \end{cases}$$

dönüşümünü uygularsak;

$$\begin{aligned}&\mu\left(\left\{\left(z, z_{n+1}\right) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \left|\bar{f}\left(z, z_{n+1}\right)\right| > t\right\}\right) \\ &= \int_{\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\right\}} x_n^\gamma dx = \mu\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\right\} = f_*(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$\left(\bar{f}\right)_\mu^* (s) = \inf\left\{t > 0 : f_*(t) \leq s\right\} = f_\gamma^* (s)$$

dir. (5.1.3) eşitliğinin her iki tarafından supremum alınırsa,

$$\begin{aligned}\sup_{|A|_\gamma = t} \int_A T^y \left|f(x)\right| x_n^\gamma dx &= c_\gamma \sup_{\mu(\widetilde{\mathcal{A}})=t} \int_{(y,0)+\widetilde{\mathcal{A}}} \left|\bar{f}\left(z, z_{n+1}\right)\right| d\mu\left(z, z_{n+1}\right) \\ &= c_\gamma \int_0^t \left(\bar{f}\right)_\mu^* (s)\, ds = c_\gamma \int_0^t f_\gamma^* (s)\, ds\end{aligned}$$

eşitliğini (5.1.4) eşitliğini kullanarak elde ederiz. Böylece Lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 1.66 $1 \le p \le \infty$, $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun.

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = \left\|f_\gamma^*\right\|_{L_p(0,\infty)}$$

dur.

İspat.

$$\begin{aligned}\left\|f_\gamma^*\right\|_{L_p(0,\infty)}^p &= p\int_0^\infty t^{p-1}\left(f_{*,\gamma}\right)^*(t)\,dt = p\int_0^\infty t^{p-1} f_{*,\gamma}(t)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p\, x_n^\gamma dx = \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}^p\end{aligned}$$

Teorem 1.67 $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $1 \le p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$f_{*,\gamma}(t) \le \frac{1}{t^p}\int_{\left\{x\in\mathbb{R}_+^n : |f(x)|>t\right\}} |f(x)|^p\, x_n^\gamma dx, \quad t>0$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat.

$$\begin{aligned}\int_{\left\{x\in\mathbb{R}_+^n : |f(x)|>t\right\}} |f(x)|^p\, x_n^\gamma dx &\ge t^p \int_{\left\{x\in\mathbb{R}_+^n : |f(x)|>t\right\}} x_n^\gamma dx \\ &= t^p \left|\left\{x\in\mathbb{R}_+^n : |f(x)|>t\right\}\right|_\gamma = t^p f_{*,\gamma}(t)\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$f_{*,\gamma}(t) \le \frac{1}{t^p}\|f\|_{L_{p,\gamma}}^p = \left(\frac{\|f\|_{L_{p,\gamma}}}{t}\right)^p, \quad t>0$$

olduğu görülür. Açıkça yazılırsa;

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}_+^n : |f(x)|>t\right\}\right|_\gamma \le \left(\frac{\|f\|_{L_{p,\gamma}}}{t}\right)^p$$

elde edilir.

Bu kesimde son olarak zayıf $L_{p,\gamma}$ yani $WL_{p,\gamma}$ uzayını tanımlayalım.

Tanım 1.68 $1 \le p < \infty$ olmak üzere zayıf $L_{p,\gamma}$ uzayı

$$WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \left\{f : \|f\|_{WL_{p,\gamma}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_\gamma^*(t) < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007) [12,13,14].

Lemma 1.69 $0 < p < \infty$ olsun. $\forall f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ için

$$\|f\|_{WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 2.15 ten ve f^*_γ fonksiyonunun azalanlığından

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \left\|f^*_\gamma\right\|_{L_p(0,\infty)} = \left(\int\limits_0^\infty \left(f^*_\gamma\right)^p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int\limits_0^t \left(f^*_\gamma\right)^p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \geq f^*_\gamma(t)\,t^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Buradan

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \geq \|f\|_{WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$$

elde edilir.

Lemma 1.70 $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, $\theta \in (0,1)$ ve $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$ olmak üzere

$$\|f\|_{WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \leq \|f\|^{1-\theta}_{WL_{p_1,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \|f\|^{\theta}_{WL_{p_2,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$$

sağlanır.

İspat. $WL_{p,\gamma}$ uzayındaki norm tanımından

$$\begin{aligned}
\|f\|_{WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} &= \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*_\gamma(t) = \sup_{t\in[0,\infty)} \left[t^{\frac{1}{p_1}} f^*_\gamma(t)\right]^{1-\theta} \left[t^{\frac{1}{p_2}} f^*_\gamma(t)\right]^{\theta} \\
&= \|f\|^{1-\theta}_{WL_{p_1,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \|f\|^{\theta}_{WL_{p_2,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2 MAKSİMAL FONKSİYON VE B-MAKSİMAL FONKSİYONLAR

Maksimal fonksiyon harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır.

Burada klasik maksimal fonksiyon tanımlanıp bunun varlık ve sınırlılık özellikleri incelenecektir.

2.1 Maksimal fonksiyon

f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde hemen her x için integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Temel Lebesgue Teoremi'ne göre

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m\left(B\left(x,r\right)\right)}\int\limits_{B(x,r)} f\left(y\right)dy = f\left(x\right)$$

ifadesi hemen her x için geçerlidir, burada

$$B(x,r)=\{y\,\epsilon R^n : |x-y|<r\}$$

x merkezli r yarıçaplı açık yuvardır. Yukarıdaki limit yerine supremum ve f yerine $|f|$ alınarak f nin maksimal fonksiyonu tanımlanır.

Maksimal fonksiyon $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından $n > 1$ için $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir.

Tanım 2.1 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f nin maksimal fonksiyonu;

$$Mf\left(x\right)=\sup_{r>0}\frac{1}{m\left(B\left(x,r\right)\right)}\int\limits_{B(x,r)}\left|f\left(y\right)\right|dy$$

biçiminde tanımlanır.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir g fonksiyonunun $m\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|g\left(x\right)\right|>\alpha\right\}$ dağılım fonksiyonunu göz önüne alalım ve bu kümenin ölçüsünü de $g_*\left(\alpha\right)$ ile gösterelim. Yani

$$m\left\{x : \left|g\left(x\right)\right|>\alpha\right\}=g_*\left(\alpha\right)$$

olsun. $g \in L_p$ iken

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |g(y)|^p \, dy = -\int_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha)$$

sağlanır. Gerçekten $\int_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha)$ integraline kısmi integrasyon uygularsak;

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha) &= \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^p g_*(\alpha) - \int_0^\infty g_*(\alpha)\, p\alpha^{p-1} d\alpha = -\int_0^\infty g_*(\alpha)\, p\alpha^{p-1} d\alpha \\
&= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n_+} \chi\left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\right\} dx d\alpha^p \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \int_0^\infty \chi\left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\right\} d\alpha^p dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \int_{\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |g(x)| > \lambda\right\}} d\alpha^p dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \int_0^{|g(x)|} d\alpha^p dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \int_0^{|g(x)|} p\alpha^{p-1} d\alpha dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \left\{ p\frac{\alpha^p}{p} \Big|_0^{|g(x)|} \right\} dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} |g(x)|^p \, dx
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve istenilen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 2.2 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

(ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \alpha > 0$ için

$$m\left\{x : Mf(x) > \alpha\right\} \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.

(iii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

gerçeklenir.

İspat. Öncelikle teoremin (ii) ifadesini ispatlayalım. $E_\alpha = \left\{x : Mf(x) > \alpha\right\}$

olsun. $\forall x \in E_\alpha$ için $B_x = B(x,r)$, x merkezli yuvarı E_α da bulunsun. Bu durumda

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, dy$$

olduğundan

$$Mf(x) > \alpha \Rightarrow \int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha m(B_x) \tag{3.1.1}$$

elde edilir. Buradan $m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \|f\|_1$ elde ederiz. $\{B_k\}$, E_α da bulunan ayrık yuvarların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(B_k) \geq cm(E_\alpha) \tag{3.1.2}$$

olur. (3.1.1) eşitsizliğinde B_x yerine $\bigcup\limits_k B_k$ alınırsa bu durumda

$$\int_{\bigcup\limits_k B_k} |f(y)|\, dy > \alpha \sum_k m(B_k) \geq \alpha cm(E_\alpha)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)|\, dy > \alpha cm(E_\alpha)$$

elde edilir ki buradan $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$ yerine yazılırsa

$$m\{x : Mf(x) > \alpha\} < \frac{1}{\alpha c} \int_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)|\, dy$$

olduğu görülür. Burada $A = 1/c$ seçilirse (ii) ispatlanır.

Şimdi $1 \leq p \leq \infty$ için (i) ve (iii) ifadelerini ispatlayalım. $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |Mf|^p\, dx$ in sonlu olduğunu gösterelim. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir $g(x)$ fonksiyonunun dağılım fonksiyonu

$$g_*(\alpha) = m\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \alpha\}$$

ile tanımlanır. $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ iken

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |g(y)|\, dy = -\int_0^{\infty} \alpha^p dg_*(\alpha)$$

dır. Şimdi

$$m(E_\alpha) = m\{x : |Mf(x)| > \alpha\} = g_*(\alpha)$$

alınırsa

$$\|Mf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n_+} (Mf)^p\, dx = p \int_0^{\infty} \alpha^{p-1} m(E_\alpha)\, d\alpha \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Bu integrali hesaplayabilmek için $m\left(E_\alpha\right)$ için bir eşitsizlik elde edelim. Bunun için f_1 fonksiyonunu

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & , |f(x)|\geq\frac{\alpha}{2} \\ 0 & , |f(x)|<\frac{\alpha}{2}\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

$$|f(x)|\leq|f_1(x)|+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow Mf(x)\leq Mf_1(x)+\frac{\alpha}{2}$$

sağlanır. Buradan

$$m\left(E_\alpha\right)=m\left\{x:|Mf(x)|>\alpha\right\}\subset m\left\{x:Mf_1(x)>\frac{\alpha}{2}\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$m\left(E_\alpha\right)\leq m\left\{x:Mf_1(x)>\frac{\alpha}{2}\right\}\leq\frac{2A}{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}f_1(x)\,dx$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$m\left(E_\alpha\right)\leq\frac{2A}{\alpha}\int\limits_{|f|>\frac{\alpha}{2}}|f(x)|\,dx$$

eşitsizliği sağlanır. Bu son eşitsizliği (3.1.3) te yerine yazarsak

$$\|Mf\|_p^p=p\int\limits_0^\infty\alpha^{p-1}m\left(E_\alpha\right)d\alpha\leq p\int\limits_0^\infty\alpha^{p-1}\left(\int\limits_{|f|>\frac{\alpha}{2}}|f(x)|\,dx\right)d\alpha$$

elde edilir. Bu iki integralin değerini hesaplamak için integrasyon sırasını değiştirelim. İlk integrali α ya göre alırız. İçteki integral $p>1$ olduğundan

$$\int\limits_0^{2|f(x)|}\alpha^{p-2}d\alpha=\frac{1}{p-1}|2f(x)|^{p-1}$$

olur. Katlı integralin değeri

$$\frac{2A_p}{p-1}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f|\,|2f|^{p-1}\,dx=(A_p)^p\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f|^p\,dx$$

olarak elde edilir. Böylece teoremin (iii) ifadesi ispatlanmış olur. Burada A_p;

$$A_p=2\left(\frac{5^p p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}},\qquad 1<p<\infty$$

ile verilir.

2.2 $B-$Maksimal Fonksiyon

Bu bölümde $n = 1$ için Stempak (1991) [25] ve $n > 1$ için de Guliev (1998) [7] tarafından tanımlanan $M_\gamma f$ $B-$maksimal fonksiyonu tanımlanıp varlık ve sınırlılık özellikleri incelenecektir.

E'nin γ ölçüsü,

$$|E(0,r)|_\gamma = \int_{E(0,r)} x_n^\gamma dx$$

şeklindedir.

Tanım 2.3 $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$M_\gamma f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|E(0,r)|_\gamma} \int\limits_{E(0,r)} T^y |f(x)| \, y_n^\gamma dy$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $B-$maksimal fonksiyon denir (Guliyev 1998) [7].

Teorem 2.4 (i) $f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $\forall\alpha > 0$ için

$$|\{x : M_\gamma f(x) > \alpha\}|_\gamma \leq \frac{c}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)| \, x_n^\gamma dx$$

dir. Burada $c > 0$ dır ve f den bağımsızdır.

(ii) $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $1 < p \leq \infty$ için $M_\gamma f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\|M_\gamma f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq c_p \|f\|_{L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}, \qquad c_p > 0$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. İlk olarak homojen tipli bir uzay üzerinde tanımlı bir maksimal fonksiyon tanımlayacağız. Teoremin ispatını bu fonksiyonun sınırlılığını kullanarak elde edeceğiz. (X, ρ, μ) homojen tipli bir topolojik uzay olsun. Bu durumda ρ bir sürekli bir psedo metriktir ve μ $\mu(E(x,2r)) \leq C\mu(E(x,r)$ duble koşulunu sağlayan bir ölçüdür.

X homojen uzayı üzerinde maksimal fonksiyon $E(x,r) = \{y \in R_+^n : |x-y| < r\}$ olmak üzere

$$M_\mu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(E(x,r))} \int\limits_{E(x,r)} |f(y)| \, d\mu(y)$$

ile tanımlanır.

M_μ operatörünün zayıf $(1,1)$ tipinden olduğu ve $L_p(X,d\mu)$ üzerinde sınırlı olduğu bilinmektedir. Bu sonucu $X=R_+^n$, $\rho=|x-y|$ ve $d\mu(x)=x_n^\gamma dx$ durumu içn kullanacağız. Eğer $M_\gamma f(x)\le cM_\mu f(x)$ olduğunu gösterirsek M_γ fonksiyonunun $(1,1)$ zayıf tipinden olduğu ve aynı şekilde $L_{p,\gamma}(R_+^n)$ üzerinde sınırlı olduğu görülür.

Aşağıda teoremin ispatında kullanacağımız bazı eşitsizlikler elde edilmiştir.

$$\mu(E(x,r))=|E(x,r)|_\gamma=\int\limits_{\left\{y\in\mathbb{R}_+^n:|x-y|<r\right\}} y_n^\gamma dy\le cr^{n+\gamma}\max\left\{1,\left(\frac{x_n}{r}\right)^\gamma\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$|E(x,r)|_\gamma\le cr^{n+\gamma}\max\left\{1,\left(\frac{x_n}{r}\right)^\gamma\right\}$$

elde ederiz. Şimdi $T^y\chi_{E_+(0,r)}(x)$ için bir eşitsizlik elde edeceğiz.

$$T^yf(x)=\pi^{\frac{-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)}\int_0^\pi f\left(x'-y',...,\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha_n+y_n^2}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

den dolayı

$$\begin{aligned}
T^y\chi_{E(0,r)}(x)&\le c\int\limits_{\left\{\alpha\in(0,\pi):\left(x_1^2+...+x_{n-1}^2+x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2\right)<r^2\right\}}\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha\\
&=c\prod_{i=1}^n\int\limits_{\left\{\alpha\in(0,\pi):\left(x_1^2+...+x_{n-1}^2+x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2\right)<r^2\right\}}\sin^{\gamma-2}\alpha\, d\cos\alpha\\
&=c\int\limits_{\max\left\{-1,\frac{x_n^2+y_n^2-r^2}{2x_ny_n}\right\}}\left(1-t^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1}dt\\
&\le c\min\left\{1,\frac{r^{\frac{\gamma}{2}}\left(r-|x_n-y_n|\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{(x_ny_n)^{\frac{\gamma}{2}}}\right\}\le c\min\left\{1,\left(\frac{r}{x_n}\right)^{-\gamma}\right\}
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak, $c>0$, $x\in\mathbb{R}_+^n$, $r>0$ ve $y\in E(x,r)$

$$T^y\chi_{E(0,r)}(x)\le c\min\left\{1,\left(\frac{r}{x_n}\right)^\gamma\right\}$$

bulunur.

$$M_\gamma f(x)\le\sup_{\substack{r>x_j,j=\overline{1,k}\\ r\le x_j,,j=\overline{k+1,n}\\ i_j\ne i_p,j\ne p}}|E(0,r)|_\gamma^{-1}\int\limits_{E(x,r)}|f(y)|\,T^y\chi_{E(0,r)}(x)\,y^\gamma dy$$

burada

$$M_{\gamma,0}f(x)=\sup_{r\le x_j,,j=\overline{1,n}}|E_+(0,r)|_\gamma^{-1}\int\limits_{E_+(x,r)}|f(y)|\,T^y\chi_{E_+(0,r)}(x)\,y^\gamma dy$$

ile verilir.

$$M_{\gamma,n}f(x)=\sup_{r>x_j,,j=\overline{1,n}}|E_+(0,r)|_\gamma^{-1}\int\limits_{E(x,r)}|f(y)|\,T^y\chi_{E_+(0,r)}(x)\,y^\gamma dy$$

Genelliği kaybetmeden $i_j\equiv j$, $j=1,2,...,n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$M_\gamma f(x)=\sup_{\substack{r>x_j,,j=\overline{1,k}\\ r\le x_j,,j=\overline{k+1,n}}}|E(0,r)|_\gamma^{-1}\int\limits_{E(x,r)}|f(y)|\,T^y\chi_{E(0,r)}(x)\,y^\gamma dy$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\mu(E(x,r))\le cr^{n+\gamma},\qquad |E(0,r)|_\gamma=r^{n+\gamma}$$

ve

$$T^y\chi_{E(0,r)}(x)\le 1$$

olduğundan

$$\mu(E(x,r)\le cr^{n+\gamma}\max\left\{1,\left(\frac{x_n}{r}\right)^\gamma\right\}=cr^{n+\gamma}\left(\frac{x_n}{r}\right)^\gamma$$

dir. Buradan

$$T^y\chi_{E(0,r)}\le c\min\left\{1,\left(\frac{r}{x_n}\right)^\gamma\right\}=\left(\frac{r}{x_i}\right)^{\gamma_i}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}M_\gamma f(x)&\le c\sup_{\substack{r>x_j,,j=\overline{1,k}\\ r\le x_j,,j=\overline{k+1,n}}}|E(0,r)|_\gamma^{-1}r^{n+\gamma}\left(\frac{x_n}{r}\right)^\gamma\left(\frac{r}{x_n}\right)\frac{1}{\mu(E(x,r))}\int\limits_{E(x,r)}|f(y)|\,y_n^\gamma dy\\&\le cM_\mu f(x)\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3 LAPLACE-BESSEL DİFERENSİYEL OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU GENELLEŞTİRİLMİŞ B-MAKSİMAL FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $B-$konvolüsyon için O'Neil tipinden bir eşitsizlik ispat edilecek bu eşitsizlik yardımıyla Laplace-Bessel diferensiyel operatörüne karşılık gelen (rough) kaba çekirdekli kesirli maksimal fonksiyon (genelleştirilmiş kesirli $B-$maksimal fonksiyon) ve kesirli integral (genelleştirilmiş $B-$kesirli integral) operatörlerinin sınırlılığı ispat edilecektir.

Aşağıdaki Hardy eşitsizlikleri ana sonuçlarımızın ispatı için önemli bir role sahiptir.

Lemma 3.1 $1 < p \leq q < \infty$ olsun. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde φ fonksiyonundan bağımsız bir c sabiti vardır.

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \varphi(s)\, ds \right)^q \omega(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^\infty \varphi(t)^p \nu(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.1}$$

$$\Leftrightarrow K = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty \omega(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r \nu(t)^{1-p'}\, dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \tag{5.2}$$

Burada $p + p' = pp'$ dir. Ayrıca (5.2) yi sağlayan en iyi c sabiti ise

$$K \leq c \leq k(p,q)\, K \tag{5.3}$$

dir. (5.4) teki $k(p,q)$ sabiti,

$$k(p,q) = p^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{p'}}, \quad k(p,q) = q^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{p'}} \quad \text{veya} \quad k(p,q) = \left(1 + \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

gibi çeşitli biçimlerde verilir (Guliyev, Serbetci and Safarov 2007) [12,13,14].

Lemma 3.2 $1 < p \leq q < \infty$, ν ve ω ölçülebilir, $(0,\infty)$ üzerinde pozitif iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde φ fonksiyonundan bağımsız bir c sabiti vardır.

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(s)\, ds \right)^q \omega(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^\infty \varphi(t)^p \nu(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.4}$$

$$\Leftrightarrow K_1 = \sup_{r>0} \left(\int_r^r \omega(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_r^\infty \nu(t)^{1-p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

(5.5) i sağlayan en iyi c sabiti $K_1 \leq c \leq k(p,q) K_1$ aralığındadır (Guliyev, Serbetci and Safarov 2007) [12,13,14].

3.1 $B-$ Konvolüsyonun $\gamma-$ Yeniden Düzenlemesi İçin O'Neil Tipli Eşitsizlik

Aşağıdaki teoremde $B-$ konvolüsyonun $\gamma-$yeniden düzenlenmesi için O'Neil tipli eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 3.3 f ve g, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde pozitif ölçülebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda $0 < t < \infty$ için,

$$(f \otimes g)^{**}(t) \leq c_\gamma \left(f_\gamma^{**}(t) \int_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du + \int_t^\infty f_\gamma^*(u)\, g_\gamma^{**}(u)\, du \right) \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır (Guliyev, Serbetci and Safarov 2007) [12,13,14].

İspat. $t > 0$ için bir E_t kümesi seçebiliriz öyleki,

$$\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > f_\gamma^*(t)\right\} \subset E_t \subset \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| \geq f_\gamma^*(t)\right\}$$

kapsama bağıntısı gerçeklenir.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \left(f(x) - f_\gamma^*(t)\right) \chi_{E_t}(x) \\ f_2(x) &= f(x) - f_1(x) \end{aligned}$$

ile verilsin. Herhangi ölçülebilir $A \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesi için $|A|_\gamma = t$ olsun.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} (g \otimes f_1)(x)\, x_n^\gamma dx &= \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y)\, T^y g(x)\, y_n^\gamma x_n^\gamma dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_{\mathcal{A}} f_1(y)\, T^y g(x)\, y_n^\gamma x_n^\gamma dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y)\, y_n^\gamma dy \int_{\mathcal{A}} T^y g(x)\, x_n^\gamma dx \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 5.1.4 ten;

$$\int_{\mathcal{A}} (g \otimes f_1)(x)\, x_n^{\gamma} dx \leq c_\gamma \int_0^t g_\gamma^*(u)\, du \int_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y)\, y_n^{\gamma} dy$$

$$\leq c_\gamma \int_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du \int_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y)\, y_n^{\gamma} dy$$

olduğu görülür. f_1 değeri yerine yazıldığında;

$$\int_{\mathcal{A}} (g \otimes f_1)(x)\, x_n^{\gamma} dx \leq c_\gamma \int_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(f(y) - f_\gamma^*(t)\right) \chi_{E_t}(y)\, y_n^{\gamma} dy$$

$$= c_\gamma \int_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du \left(\int_{E_t} f(y)\, y_n^{\gamma} dy - f_\gamma^*(t)\, t \right)$$

elde edilir. Böylece (5.1.2) eşitliğinden,

$$(g \otimes f_1)^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{|A|_\gamma = t} \int_A (g \otimes f_1)(x)\, x_n^{\gamma} dx$$

$$\leq \sup_{|A|_\gamma = t} c_\gamma \int_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du \left(\frac{1}{t} \int_{E_t} f(y)\, y_n^{\gamma} dy - f_\gamma^*(t) \right)$$

$$\leq c_\gamma \left(f_\gamma^*(t) - f_\gamma^*(t)\right) \int_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du$$

elde edilir. Lemma 5.1.4 ve (5.1.2) eşitliğini kullanarak,

$$(Tg(x))^*(s) \leq (Tg(x))^{**} = \frac{1}{t} \sup_{|A|_\gamma = t} \int_{\mathcal{A}} T^y g(x)\, y_n^{\gamma} dy = \frac{1}{t} c_\gamma \int_0^t g_\gamma^*(s)\, ds = c_\gamma g_\gamma^{**}(s) \tag{5.1.2}$$

elde edilir. Lemma 5.1.3 ten,

$$(g \otimes f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f_2(y)\, T^y g(x)\, y_n^{\gamma} dy \leq \int_0^\infty f_{\gamma,2}^*(u)\, (Tg)^{**}(u)\, du \leq \int_0^\infty f_{\gamma,2}^*(u)\, g_\gamma^{**}(u)\, du$$

$$= c_\gamma \left(f_\gamma^*(t) \int_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du + \int_t^\infty f_\gamma^*(u)\, g_\gamma^{**}(u)\, du \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak (5.1.2) eşitliğinden,

$$(g \otimes f_2)^{**}(t) \leq c_\gamma \left(f_\gamma^*(t) \int_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du + \int_t^\infty f_\gamma^*(u)\, g_\gamma^{**}(u)\, du \right)$$

ve

$$f_\gamma^*(t) \le f_\gamma^{**}(t)$$

olduğundan,

$$(g \otimes f_2)^{**}(t) \le c_\gamma \left(f_\gamma^{**}(t) \int\limits_0^t g_\gamma^{**}(u)\, du + \int\limits_t^\infty f_\gamma^*(u)\, g_\gamma^{**}(u)\, du \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.4 $g \in WL_{r,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $1 < r < \infty$ olsun.

$$(f \otimes g)^*(t) \le (f \otimes g)^{**}(t) \le c_1 \|g\|_{WL_{r,\gamma}} \left(t^{-\frac{1}{r}} \int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\, ds + \int\limits_t^\infty s^{-\frac{1}{r}} f_\gamma^*(s)\, ds \right) \quad (5.1.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $c_1 = c_\gamma r' (1 + r')$ eşitliği ile verilir.

İspat.

$$\|g\|_{WL_{p,\gamma}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_\gamma^*(t)$$

biçimindedir. Buradan

$$t^{\frac{1}{r}} g_\gamma^*(t) \le \|g\|_{WL_{r,\gamma}}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$g^*(t) \le t^{-\frac{1}{r}} \|g\|_{WL_{r,\gamma}}$$

elde edilir. Son bulduğumuz eşitsizlikte her iki tarafın integralini alırsak,

$$\frac{1}{t} \int\limits_0^t g_\gamma^*(t)\, dt \le \|g\|_{WL_{r,\gamma}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t t^{-\frac{1}{r}} dt$$

olduğundan

$$g_\gamma^{**}(t) \le \frac{r}{r-1} \|g\|_{WL_{r,\gamma}} t^{-\frac{1}{r}}$$

sağlanır. Buradan

$$g_\gamma^{**}(t) \le r' \|g\|_{WL_{r,\gamma}} t^{-\frac{1}{r}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Teorem 5.1.1 den

$$(f\otimes g)^{**}(t)\le c_\gamma\left(f_\gamma^{**}(t)\int_0^t g_\gamma^{**}(u)\,du+\int_t^\infty f^*(u)\,g_\gamma^{**}(u)\,du\right)$$

$$\le c_\gamma\left(\frac{1}{t}\int_0^t f_\gamma^*(s)\,ds\int_0^t r'\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}}u^{-\frac{1}{r}}du+\int_t^\infty f_\gamma^*(u)\,r'\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}}u^{-\frac{1}{r}}du\right)$$

$$\le c_\gamma\left(\frac{1}{t}\int_0^t f_\gamma^*(s)\,dsr'\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}}\int_0^t u^{-\frac{1}{r}}du+r'\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}}\int_t^\infty u^{-\frac{1}{r}}f_\gamma^*(u)\,du\right)$$

$$\le c_1\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f_\gamma^*(s)\,ds+\int_t^\infty u^{-\frac{1}{r}}f_\gamma^*(u)\,du\right)$$

istenilen eşitsizlik elde edilir.

3.2 $B-$ Konvolüsyon İçin O'Neil Tipli Eşitsizlik

Bu kısımda $B-$konvolüsyon için O'Neil tipli eşitsizlik ispatlayacağız.

Teorem 3.5 (i) $1<p<q<\infty$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, $f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $g\in WL_{r,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun. Bu durumda $f\otimes g\in L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\left\|f\otimes g\right\|_{L_{q,\gamma}}\le A_1\left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}}\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}} \tag{3.2}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada

$$A_1=c_\gamma r'\left(1+r'\right)\left(p^{\frac{1}{q}}q^{\frac{1}{p'}}+\left(p'\right)^{\frac{1}{q}}\left(q'\right)^{\frac{1}{p'}}\right)$$

ile verilir.

(ii) $p=1$, $1<q<\infty$, $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $g\in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun. Bu durumda $f\otimes g\in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\left\|f\otimes g\right\|_{WL_{q,\gamma}}\le A_1\left\|f\right\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}\left\|g\right\|_{L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \tag{3.3}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada

$$A_1=2c_\gamma r'\left(1+r'\right)$$

ile verilir (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007) [12,13,14].

İspat. (i) (5.1.1) eşitliğini kullanarak,

$$\left\|f\otimes g\right\|_{L_{q,\gamma}}=\left\|(f\otimes g)^*\right\|_{L_q(0,\infty)}=\left(\int_0^\infty\left((f\otimes g)^*\right)^q(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. (5.1.7) eşitsizliğinde her iki tarafın q. kuvvetini alalım. Bu durumda

$$((f\otimes g)^{*})^{q}(t)\leq c^{q}\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}}^{q}\left(t^{-\frac{1}{r}}\int_{0}^{t}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds+\int_{t}^{\infty}s^{-\frac{1}{r}}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. Şimdi her iki tarafın integralini alalım.

$$\left(\int_{0}^{\infty}((f\otimes g)^{*})^{q}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\leq c\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}}\left[\int_{0}^{\infty}\left(t^{-\frac{1}{r}}\int_{0}^{t}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds+\int_{t}^{\infty}s^{-\frac{1}{r}}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds\right)^{q}dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}}\left[\int_{0}^{\infty}t^{-\frac{q}{r}}\left(\int_{0}^{t}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds\right)^{q}dt\right]^{\frac{1}{q}}+c\left\|g\right\|_{WL_{r,\gamma}}\left[\int_{0}^{\infty}\left[\int_{t}^{\infty}s^{-\frac{1}{r}}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds\right]^{q}dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini Hölder eşitsizliğini kullanarak elde ederiz. (5.1.1) ve (5.1.7) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\left\|f\otimes g\right\|_{L_{q,\gamma}}=\left\|(f\otimes g)^{*}\right\|_{L_{q}(0,\infty)}$$

$$\leq c_{1}\left(\int_{0}^{\infty}t^{-\frac{1}{r}}\left(\int_{0}^{t}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds\right)^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}+c_{1}\left(\int_{0}^{\infty}\left(\int_{t}^{\infty}s^{-\frac{1}{r}}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds\right)^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz.

Lemma 5.4 te $\omega(t)=t^{-\frac{1}{r}}$ ve $\nu(t)=1$ alalım.

$$\left(\int_{0}^{\infty}t^{-\frac{1}{r}}\left(\int_{0}^{t}f_{\gamma}^{*}(s)\,ds\right)^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\leq c_{2}\left(\int_{0}^{\infty}\left(f_{\gamma}^{*}(t)\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Leftrightarrow c_{2}=\sup_{t>0}\left(\int_{t}^{\infty}s^{-\frac{q}{r}}ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{0}^{t}ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$=\sup_{t>0}\left(\frac{s^{1-\frac{q}{r}}}{1-\frac{q}{r}}\Big|_{t}^{\infty}\right)^{\frac{1}{q}}t^{\frac{1}{p'}}$$

elde edilir.

Öncelikle $\frac{q}{r}>1$ olduğunu gösterelim.

$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}\Rightarrow 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}\Rightarrow q-\frac{q}{p}+\frac{q}{q}=\frac{q}{r}\Rightarrow q\left(1-\frac{1}{p}\right)+1=\frac{q}{r}$$

$q\left(1-\frac{1}{p}\right)\geq 0$ olduğundan $\frac{q}{r}>1$ dir. Ohalde c_2 yi yeniden yazarsak,

$$c_{2}=\sup\left(\frac{q}{r}-1\right)^{-\frac{1}{q}}\left(t^{1-\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}}t^{\frac{1}{p'}}=\left(\frac{q}{r}-1\right)^{-\frac{1}{q}}\sup_{t>0}t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+\frac{1}{p'}}=\left(\frac{q}{r}-1\right)^{-\frac{1}{q}}$$

eşitliği t nin kuvvetinin sıfır olmasıyla elde edilir. Ayrıca Lemma 5.5 $**$ ten,

$$\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_t^\infty s^{-\frac{1}{r}}f_\gamma^*(s)\,ds\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\leq c_3\left(\int\limits_0^\infty f_\gamma^*(t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\Leftrightarrow \sup\nolimits_{t>0}\left(\int\limits_0^t ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_t^\infty s^{-\frac{p'}{r}}ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$=\left(\frac{p'}{r}-1\right)^{-\frac{1}{p'}}\sup_{t>0}t^{\frac{1}{r'}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}<\infty$$

Burada

$$c_3\leq\left(\frac{p'}{r}-1\right)^{-\frac{1}{p'}}p^{\frac{1}{q}}\left(p'\right)^{\frac{1}{p'}}=p^{\frac{1}{q}}q^{\frac{1}{p'}}$$

eşitsizliğini sağlar ve $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{r'}$ dir.

Son olarak bulunan bu eşitsizlikler yerlerine yazılırsa,

$$\|f\otimes g\|_{L_{q,\gamma}}\leq c_1\left(c_2+c_3\right)\|f\|_{L_{p,\gamma}}\|g\|_{WL_{q,\gamma}}$$

elde edilir.

(ii) $p=1,\ 1<q<\infty,\ f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $g\in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun.

$$\begin{aligned}\|f\otimes g\|_{WL_{q,\gamma}}&=\sup\nolimits_{t>0}t^{\frac{1}{q}}\left(f\otimes g\right)^*(t)\\&\leq\sup_{t>0}t^{\frac{1}{q}}\left\{c_1\|g\|_{WL_{q,\gamma}}\left(t^{-\frac{1}{r}}\int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds+\int\limits_t^\infty s^{-\frac{1}{r}}f_\gamma^*(s)\,ds\right)\right\}\\&=c_1\|g\|_{WL_{q,\gamma}}\sup_{t>0}t^{\frac{1}{q}}\left(t^{-\frac{1}{r}}\int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds+\int\limits_t^\infty s^{-\frac{1}{r}}f_\gamma^*(s)\,ds\right)\\&=c_1\|g\|_{WL_{q,\gamma}}\left(\sup_{t>0}\int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds+\sup_{t>0}t^{\frac{1}{q}}t^{-\frac{1}{q}}\int\limits_t^\infty f_\gamma^*(s)\,ds\right)\\&=2c_1\|g\|_{WL_{q,\gamma}}\left\|f_\gamma^*\right\|_{L_1(0,\infty)}=2c_1\|g\|_{WL_{q,\gamma}}\|f\|_{L_1(0,\infty)}\end{aligned}$$

elde edilir.

3.3 $L_{p,\gamma}$ Uzaylarında Genelleştirilmiş $B-$Maksimal Operatörlerinin Sınırlılığı

$\Omega\in L_{s,\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)$; $s\geq 1,\ S_+^{n-1}=\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|x|=1\right\}$ ve Ω, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen yani, $\forall t>0,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^n$ için $\Omega(tx)=\Omega(x)$ olsun.

Tanım 3.6 Genelleştirilmiş kesirli $B-$maksimal operatör

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n+\gamma-\alpha}}\int\limits_{B(0,r)}|\Omega(y)|\,T^y|f(x)|\,y_n^\gamma dy\tag{3.4}$$

olarak tanımlanır (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007) [12,13,14].

Tanım 3.7 Genelleştirilmiş $B-$Riesz potansiyeli veya $B-$kesirli integral operatörü

$$I_{\Omega,\alpha,\gamma}f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^{n+\gamma-\alpha}}T^yf(x)\,y_n^\gamma dy \tag{5.3.2}$$

ile tanımlanır (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007) [12,13,14].

Yukarıda $\Omega\equiv 1$ olduğu zaman $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$, $B-$maksimal operatörü $M_{\alpha,\gamma}$ kesirli maksimal fonksiyonu ve $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$, $B-$Riesz Potansiyeli $I_{\alpha,\gamma}$ olur. Kolayca gösterilebilir ki

$$g(x)=|x|^{\alpha-n-\gamma}\in WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right),\quad 0<\alpha<n$$

dir. Ayrıca bu durum için;

$$\begin{aligned}
g_{*,\gamma}(t) &= \omega(n,\gamma)\,t^{-\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}\\
g_\gamma^*(t) &= \left(\omega(n,\gamma)\,t^{-1}\right)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}\\
\|g\|_{WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} &= (\omega(n,\gamma))^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\omega(n,\gamma)=|B(0,1)|_\gamma$ ve $B(0,1)=\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|x|<1\right\}$ biçimindedir.

Eğer $g(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^{n+\gamma-\alpha}}$, $0<\alpha<n$,

Burada Ω, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega\in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
g_{*,\gamma}(t) &= \frac{A}{n+\gamma}t^{-\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}\\
g_\gamma^*(t) &= \left(\frac{A}{(n+\gamma)t}\right)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}\\
g_\gamma^{**}(t) &= \frac{n+\gamma}{\alpha}g_\gamma^*(t)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Burada $A=\|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)}^{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}$ biçimindedir. Ayrıca $g\in WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\|g\|_{WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}=\left(\frac{A}{(n+\gamma)}\right)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 3.8 $0<\alpha<n+\gamma$ olmak üzere Ω, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega\in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^*(t) &\le \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right)^{**}(t)\\
&\le c_4\|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)}\left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}\int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds+\int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}f_\gamma^*(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada

$$c_4 = \alpha^{-2} (n+\gamma)^{\frac{\alpha}{n+\gamma}+1} c_\gamma$$

ile verilir (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007) [12,13,14].

İspat. Teorem 5.1.2 de $g(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^{n+\gamma-\alpha}}$ olarak seçelim.

$$\|g\|_{WL_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} = \left(\frac{A}{n+\gamma}\right)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}} = \left[\frac{\|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}}{n+\gamma}\right]^{\frac{n+\gamma-\alpha}{n+\gamma}} = \frac{\|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}}{(n+\gamma)^{1-\frac{\alpha}{n+\gamma}}}$$

Burada

$$A = \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}^{\frac{(n+\gamma)}{n+\gamma-\alpha}}$$

dir. Teorem 5.1.2 de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}&(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f)^*(t) \leq (I_{\Omega,\alpha,\gamma} f)^{**}(t)\\ &\leq c_4 (n+\gamma)^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \left[t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}\int_0^t f_\gamma^*(s)\,ds + \int_t^\infty t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f_\gamma^*(t)\,dt\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.9 $\Omega \in L_{s,\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)$, $s \geq 1$, $0 < \alpha < n+\gamma$ olsun. Bu durumda

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma} f(x) \leq \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}(|f|)(x)$$

eşitsizliği vardır (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007) [12,13,14].

İspat.

$$I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}(|f|)(x) = \int_{B(0,2^j)\backslash B(0,2^{j-1})} \frac{|\Omega(y)|}{|y|^{n+\gamma-\alpha}} T^y |f(x)|\, y_n^\gamma dy$$

ve

$$I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}(|f|)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\Omega(y)|}{|y|^{n+\gamma-\alpha}} T^y |f(x)|\, y_n^\gamma dy$$

olsun.

$$I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}(|f|)(x) = \sum_{j\in z} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}(|f|)(x) \tag{5.3.3}$$

$$I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}\left(|f|\right)(x) \geq \left(2^{j}\right)^{(\alpha-n-\gamma)} \int\limits_{\frac{B(0,2^{j})}{B(0,2^{j-1})}} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy$$

$$= \left(2^{j}\right)^{(\alpha-n-\gamma)} \left[\int\limits_{B(0,2^{j})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy - \int\limits_{B(0,2^{j-1})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy \right]$$

$$= \frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}} \int\limits_{B(0,2^{j})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy$$

$$- \frac{2^{\alpha-n-\gamma}}{2^{(j-1)(n+\gamma-\alpha)}} \int\limits_{B(0,2^{j-1})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy$$

olduğundan

$$I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}\left(|f|\right)(x) + \frac{2^{\alpha-n-\gamma}}{2^{(j-1)(n+\gamma-\alpha)}} \int\limits_{B(0,2^{j-1})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy$$

$$\geq \frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}} \int\limits_{B(0,2^{j})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy$$

elde edilir. $j \in \mathbb{Z}$ üzerinden supremum alırsak,

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}\left(|f|\right)(x) + \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{\alpha-n-\gamma}}{2^{(j-1)(n+\gamma-\alpha)}} \int\limits_{B(0,2^{j-1})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy$$

$$\geq \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}} \int\limits_{B(0,2^{j})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy$$

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}\left(|f|\right)(x) \geq \left(1-2^{\alpha-n-\gamma}\right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}} \int\limits_{B(0,2^{j})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy \quad (5.3.4)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$M_{|\Omega|,\alpha,\gamma} f(x) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{j(n+\gamma-\alpha)}} \int\limits_{B(0,2^{j})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy$$

$$\leq 2^{(n+\gamma-\alpha)} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(2^{j}\right)^{(n+\gamma-\alpha)}} \int\limits_{B(0,2^{j})} |\Omega(y)|\, T^{y}|f(x)|\, y_{n}^{\gamma} dy \qquad (3.5)$$

elde ederiz.

Sonuç olarak (5.3.3) ve (5.3.5) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$M_{|\Omega|,\alpha,\gamma} f(x) \leq \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}} \sup_{j\in\mathbb{Z}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma,j}\left(|f|\right)(x) \leq \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}\left(|f|\right)(x)$$

elde ederiz.

Sonuç 3.10 Ω, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)$, $0 < \alpha < n+\gamma$ olsun. Bu durumda her $0 < t < \infty$ için;

$$(M_{\Omega,\alpha}f)^*(t) \leq (M_{\Omega,\alpha,\gamma}f)^{**}(t) \leq c_4' t^{\frac{n}{n+\gamma}-1} \int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds + \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f_\gamma^*(s)\,ds$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$c_4' = \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}} c_4$$

ile verilir.

Sonuç 3.11 Ω, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}\left(S_+^{n-1}\right)$, $0 < \alpha < n$ olsun. Bu durumda

(i) $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$, $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $I_{\Omega,\alpha,\gamma}f \in L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} \leq A_3 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}\left(S_+^{n-1}\right)} \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$A_3 = c_\gamma \alpha^{-2} (n+\gamma)^{\frac{\alpha}{n+\gamma}+1} \left(p^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{p'}} + (p')^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{p'}}\right)$$

ile verilir.

(ii) $p = 1$, $f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $I_{\Omega,\alpha,\gamma}f \in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} \leq A_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)} \|f\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$A_4 = c_\gamma c^{-2} (n+\gamma)^{\frac{\alpha}{n+\gamma+1}}$$

ile verilir.

İspat. (i) Lemma 5.3.1 den,

$$\begin{aligned}(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f)^*(t) &\leq (I_{\Omega,\alpha,\gamma}f)^{**}(t) \\ &\leq c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)} \left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} \int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds + \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f_\gamma^*(s)\,ds\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte önce her iki tarafın p. kuvveti alınıp integre edilirse ve daha sonra da Lemma 5.4 ve Lemma 5.5 kullanılırsa,

$$\left(\int\limits_0^\infty \left[(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f)^*(t)\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}}$$

$$\left[\left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}\right)^p \left(\int_0^t f_\gamma^*(s)\,ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f_\gamma^*(s)\,ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\leq c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \left\{\left(\int_0^\infty \left(f_\gamma^*(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \left(f_\gamma^*(s)\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$= 2c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \left\|f_\gamma^*\right\|_{L_{p,\gamma}} = 2c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

elde ederiz.

(ii) Lemma 5.3.1 den,

$$\begin{aligned}(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f)^*(t) &\leq (I_{\Omega,\alpha,\gamma}f)^{**}(t)\\ &\leq c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}\int_0^t f_\gamma^*(s)\,ds + \int_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f_\gamma^*(s)\,ds\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $t^{\frac{1}{q}}$ ile çarpıp supremum alırsak,

$$\begin{aligned}t^{\frac{1}{q}}(I_{\Omega,\alpha,\gamma}f)^*(t) &\leq c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \left(t^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1+\frac{1}{q}}\int_0^t f_\gamma^*(s)\,ds + t^{\frac{1}{q}}\int_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f_\gamma^*(s)\,ds\right)\\ &\leq c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha}}} \left(\int_0^t f_\gamma^*(s)\,ds + \int_t^\infty s^{\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n+\gamma}-1} f_\gamma^*(s)\,ds\right)\\ &\leq 2c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \left\|f_\gamma^*\right\|_{L_{1,\gamma}} = 2c_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \|f\|_{L_{1,\gamma}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.12 $0<\alpha<n$ olsun.

(i) $1<p<\frac{n+\gamma}{\alpha}$, $f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $I_{\alpha,\gamma}f\in L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\|I_{\alpha,\gamma}f\|_{L_{q,\gamma}} \leq A_5 \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$A_5 = c_\gamma \left(\frac{pq}{(q-p)^2}\right) \omega(n,\gamma)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \left(p^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{p'}} + (p')^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{p'}}\right)$$

ile verilir.

(ii) $p=1$, $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $1-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. Bu durumda $I_{\alpha,\gamma}f\in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve

$$\|I_{\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} \leq A_6 \|f\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$A_6 = c_\gamma \left(pq + q - p\right) \left(\frac{pq}{\left(q-p\right)^2}\right) \omega \left(n, \gamma\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}$$

ile verilir.

Teorem 3.13 $0 < \alpha < n+\gamma$ olmak üzere, Ω, $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S^{n-1}_+\right)$, olsun. Bu durumda

(i) $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ koşulu $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ den $L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ye giden $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ nın sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur.

(ii) $p = 1$ olsun. Bu durumda $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ koşulu $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ den $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ye giden $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ nın sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur.

İspat. $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. Sonuç 5.3.3 ten

$$\left\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\right\|_{L_{q,\gamma}} \leq A_3 \left\|\Omega\right\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \left\|f\right\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $f \in L_{p,\gamma}$ ise $\|f\|_{L_{p,\gamma}} < \infty$ olduğundan $\left\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\right\|_{L_{q,\gamma}} < \infty$ olacaktır. Bu da bize $I_{\Omega,\alpha,\gamma} \in L_{q,\gamma}$ olduğunu gösterir. Yani $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{p,\gamma}$ uzayından $L_{q,\gamma}$ uzayına giden sınırlı bir operatördür.

Şimdi tersini gösterelim. Kabul edelim ki $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ uzayına giden sınırlı bir operatör ve $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$ olsun. $t > 0$ için $f_t\left(x\right) f\left(tx\right)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan kolayca görülebilir ki

$$\|f_t\|_{L_{p,\gamma}} = t^{-\left(\frac{n+\gamma}{p}\right)} \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$
$$\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\right)(x) = t^{-\alpha} I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\left(tx\right)$$

ve

$$\left\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\right\|_{L_{q,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}} \left\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\right\|_{L_{q,\gamma}}$$

eşitlikleri vardır. İlk olarak

$$\|f_t\|_{L_{p,\gamma}} = t^{-\left(\frac{n+\gamma}{p}\right)} \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}\|f_t\|_{L_{p,\gamma}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f_t(x)|^p x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(tx)|^p x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(u)|^p \frac{t^\gamma x_n^\gamma}{t^\gamma}\frac{du}{t^n}\right)^{\frac{1}{p}} = t^{-\frac{(n+\gamma)}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(u)|^p u^\gamma du\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= t^{-\frac{(n+\gamma)}{p}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de

$$(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t)(x) = t^{-\alpha} I_{\Omega,\alpha,\gamma} f(tx)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^{n+\gamma-\alpha}} T^y f_t(x)\, y_n^\gamma dy = t^{n+\gamma-\alpha}\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\Omega(u)}{|u|^{n+\gamma-\alpha}} T^y f(u)\frac{u^\gamma}{t^\gamma}\frac{du}{t^n} \\ &= t^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\Omega(u)}{|u|^{n+\gamma-\alpha}} T^y f(u)\, u^\gamma du = t^{-\alpha} I_{\Omega,\alpha,\gamma} f(tx)\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak;

$$\begin{aligned}\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\|_{L_{q,\gamma}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t(x)|^q x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(t^{-\alpha} I_{\Omega,\alpha,\gamma} f(tx)\right)^q x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= t^{-\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (I_{\Omega,\alpha,\gamma} f(u))^q \frac{u^\gamma}{t^\gamma}\frac{du}{t^n}\right)^{\frac{1}{q}} = t^{-\alpha} t^{-\frac{n+\gamma}{q}} \|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{L_{q,\gamma}}\end{aligned}$$

elde edilir. $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$, $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayına sınırlı bir operatör olduğundan

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\|_{L_{q,\gamma}} \le c\,\|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c, f den bağımsız bir sabittir.

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{L_{q,\gamma}} = t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}} \|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\|_{L_{q,\gamma}} \le c t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}} t^{-\frac{n+\gamma}{p}} \|f\|_{L_{p,\gamma}} = c t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}-\frac{n+\gamma}{p}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

elde edilir. İki durum söz konusudur.

1. durum: $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $\forall f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ için $t \to \infty$ iken $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{L_{q,\gamma}} = 0$ olacaktır. Çünkü

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n+\gamma} > 0 \Rightarrow \frac{n+\gamma}{q} - \frac{n+\alpha}{p} + \alpha > 0$$

olduğundan t nin kuvveti pozitiftir.

2. durum: $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $\forall f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ için $t \to \infty$ iken $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{L_{q,\gamma}} = 0$ olacaktır. Çünkü

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n+\gamma} < 0 \Rightarrow \frac{n+\gamma}{q} - \frac{n+\alpha}{p} + \alpha < 0$$

olduğundan t nin kuvveti negatiftir.

Sonuç olarak $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ eşitliğini elde ederiz.

(ii) $p = 1$, $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. Sonuç 5.3.3 ten

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{WL_{q,\gamma}} \leq A_4 \|\Omega\|_{L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}} \|f\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği vardır. Eğer $f \in L_{1,\gamma}$ ise $\|f\|_{L_{1,\gamma}} < \infty$ olduğundan $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{WL_{q,\gamma}} < \infty$ olur. Yani $I_{\Omega,\alpha,\gamma} \in WL_{q,\gamma}$ dır. Bunu her f için yazabileceğimizden $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayına giden sınırlı bir operatör olur.

Aksine, kabul edelim ki $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayına sınırlı bir operatör olsun. Kolayca görülebilir ki,

$$\|f_t\|_{L_{1,\gamma}} = t^{-n-\gamma} \|f\|_{L_{1,\gamma}}$$
$$\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\right)(x) = t^{-\alpha} \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\right)(tx)$$

ve

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\|_{WL_{q,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}} \|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{WL_{q,\gamma}}$$

eşitlikleri sağlanır. $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayına $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlılığından;

$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{WL_{q,\gamma}} \leq c \|f_t\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c, f den bağımsız bir sabittir.

$$\left(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\right)_* (\tau) = t^{-n-\gamma} \left(I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\right)_* (t^{\alpha} \tau)$$
$$\|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\|_{WL_{q,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}} \|I_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{WL_{q,\gamma}}$$

ve

$$\begin{aligned}\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} &= t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f_t\|_{WL_{q,\gamma}} \\ &\le ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\|f_t\|_{L_{1,\gamma}} = ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}t^{-n-\gamma}\|f\|_{L_{1,\gamma}}\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer $1 < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $\forall f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için $t \to 0$ iken $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} = 0$ elde edilir.

Eğer $1 > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise $\forall f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için $t \to \infty$ iken $\|I_{\Omega,\alpha,\gamma}f\|_{WL_{q,\gamma}} = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak $1 = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ elde ederiz.

Sonuç 3.14 $0 < \alpha < n + \gamma$ olsun.

(i) $1 < p < \frac{n+\gamma}{\alpha}$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ koşulu $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayına giden $I_{\alpha,\gamma}$ nın sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur.

(ii) $p = 1$ olsun. Bu durumda $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ koşulu $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayına giden $I_{\alpha,\gamma}$ nın sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur (Guliyev, Şerbetçi and Safarov 2007) [12,13,14].

Sonuç 3.15 $0 < \alpha < n + \gamma$, Ω, $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_{\frac{n+\gamma}{n+\gamma-\alpha},\gamma}\left(S_+^{n-1}\right)$ olsun.

(i) $1 < p < r'$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ koşulu $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayına giden $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur.

(ii) $p = 1$ olsun. Bu durumda $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ koşulu $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayına giden $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur.

İspat. (i) $1 < p < r'$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlı olduğunu göstereceğiz. Teorem 5.3.2 (i) den $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlı olduğu görülür. Lemma 5.3.2 den

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma}f(x) \le \frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}} I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}(|f|)(x)$$

eşitsizliği sağlanır. $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü sınırlı olduğundan $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün de yukarıdaki eşitsizlikten dolayı sınırlı olduğu görülür.

Karşıt olarak, $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayına giden sınırlı bir operatör ve $1 < p < r'$ olsun. $t > 0$ için $f_t(x) = f(tx)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t(x) = t^{-\alpha} M_\gamma^\alpha f(tx)$$

ve

$$\|M_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\|_{L_{q,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}} \|M_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{L_{p,\gamma}}$$

olduğu kolayca görülür. $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayından $L_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayına giden sınırlı bir operatör olduğundan

$$\|M_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\|_{L_{q,\gamma}} \leq c \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitsizliği gerçeklenecek şekilde f den bağımsız bir c sabiti vardır.

$$\begin{aligned}
\|M_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{L_{q,\gamma}} &= t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}} \|M_{\Omega,\alpha,\gamma} f_t\|_{L_{q,\gamma}} \leq c t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}} \|f_t\|_{L_{q,\gamma}} \\
&= c t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}} t^{-\frac{n+\gamma}{q}} \|f\|_{L_{p,\gamma}} = c t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}-\frac{n+\gamma}{p}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}
\end{aligned}$$

olduğu

$$\|f_t\|_{L_{p,\gamma}} = t^{-\frac{n+\gamma}{p}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

eşitliğinin sağlanmasıyla kolaylıkla görülür.

Eğer $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise ozaman her $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için $t \to 0$ iken

$$\|M_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{L_{q,\gamma}} = 0$$

olduğu görülür. Çünkü $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n+\gamma} > 0$ iken $\frac{n+\gamma}{q} - \frac{n+\alpha}{p} + \alpha > 0$ olduğundan t nin kuvveti pozitiftir.

Eğer $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise ozaman her $f \in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için $t \to \infty$ iken

$$\|M_{\Omega,\alpha,\gamma} f\|_{L_{q,\gamma}} = 0$$

olur. Çünkü $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n+\gamma} < 0$ iken $\frac{n+\gamma}{q} - \frac{n+\alpha}{p} + \alpha < 0$ olduğundan t nin kuvveti negatiftir. Bu nedenle $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n+\gamma}$ eşitliği sağlanır.

(ii) $p = 1$ ve $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+\gamma}$ olsun. Göstereceğiz ki $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayına giden $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlıdır. Teorem 5.3.2 (ii) den $I_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlı olduğu görülür. Lemma 5.3.2 deki

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\left(x\right)\leq\frac{2^{n+\gamma-\alpha}}{1-2^{\alpha-n-\gamma}}I_{|\Omega|,\alpha,\gamma}\left(|f|\right)\left(x\right)$$

eşitsizliğinin kullanılmasıyla $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün de sınırlı olduğu kolayca görülür.

Tersine $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörü $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayına giden sınırlı bir operatör olsun.

$$M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_{t}\left(x\right)=t^{-\alpha}M_{\Omega,\alpha,\gamma}^{\alpha}f\left(tx\right)$$

ve

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_{t}\right\|_{WL_{q,\gamma}}=t^{-\alpha-\frac{n+\gamma}{q}}\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}$$

eşitlikleri sağlanır. $L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayından $WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayına giden $M_{\Omega,\alpha,\gamma}$ operatörünün sınırlılığından

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}\leq c\left\|f\right\|_{L_{1,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}=t^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f_{t}\right\|_{WL_{q,\gamma}}\leq ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}\left\|f_{t}\right\|_{L_{1,\gamma}}=ct^{\alpha+\frac{n+\gamma}{q}}t^{-n-\gamma}\left\|f\right\|_{L_{1,\gamma}}$$

olduğu görülür. Eğer $1<\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise her $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ için $t\to 0$ iken

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}=0$$

olur. Eğer $1>\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n+\gamma}$ ise her $f\in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ için $t\to\infty$ iken

$$\left\|M_{\Omega,\alpha,\gamma}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}=0$$

olur. Bu nedenle $1=\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n+\gamma}$ eşitliği gerçeklenir.

KAYNAKLAR

[1] Aliev, I.A. ; Gadjiev, A.D. *On classes of operators of potential types, generated by a generalized shift, Reports of enlarged Session of the Semi nors of I.N. Vekua Inst. of Applied Mathematics, Tbilisi*, **1988**. 3, 2, 21-24.

[2] Dyn'kin, E.M. *Methods of the theory of singular integrals: Hilbert transform and Calderon Zygmund theory.*

[3] Ekincioğlu, İ. *Genelleştirilmiş öteleme ile elde edilen Riesz dönüşümler*, 1994.

[4] Gadjiev, A. D.; Guliyev, V. S.; Serbetci, A. *The Stein-Weiss type inequalities for the B-Riesz potentials. J. Math. Inequal.* **2011**, 5 no. 1, 87-106.

[5] Garakhanova, N.N. *Integral characteristics of maximal functions. Proc. Inst. Math. Mech. Acad. Sci. Azerb.* **2000**, 13 , 50–54, 184.

[6] Grafakos, L. ; Stefanov, A. *L^p bounds for singular integrals and maximal singular integrals with rough kernels*, 1997.

[7] Guliev V. S. *Sobolev's theorem for Riezs B-potentials. (Russian) Dokl. Akad. Nauk.* **1998**, 358 no. 4, 450-451.

[8] Guliyev, V. S. *Some properties of the anisotropic Riezs-Bessel potential. Anal. Math.* **2000**, 26, no. 2, 99-118.

[9] Guliyev, Vagif S. *On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator. Math. Inequal. Appl.* **2003**, 6 no. 2, 317-330.

[10] Guliyev, Vagif S.; Serbetci, Ayhan; Ekincioglu, I. *Necessary and sufficient conditions for the boundedness of rough B-fractional integral operators in the Lorentz spaces. J. Math. Anal. Appl.* **2007**, 336 no. 1, 425-437.

[11] Guliyev, V. S.; Serbetci, A.; Ekincioglu, I. *On boundedness of the generalized B-potential integral operators in the Lorentz spaces. Integral Transforms Spec. Funct.* **2007**, 18 no. 11-12, 885-895.

[12] Guliyev, V. S.; Serbetci, A.; Safarov, Z. V. *Inequality of O'Neil- type for convolitions associated with the Laplace-Bessel differential operator and applications. Math. Inequal. Appl.* **2008**, 11 no.1, 99-112.

[13] Guliyev, V. S.; Safarov, Z. V.; Serbetci, A. *On the rearrangement estimates and yhe boundedness of the generalized fractional integrals associated with the Laplace-Bessel differential operator. Acta Math. Hungar.* **2008**, 119 no. 3, 201-217.

[14] Guliyev, V. S.; Serbetci, A.; Safarov, Z. V. *Meda inequality for rearrangements of the B- convolutions and some applications. J. Math. Inequal.* **2008**, 2 no. 4, 437-447.

[15] Guliyev. V. S.; Garakhanova, N. N.; Zeren, Yu. *Pointwise and integral estimates for the Riezs B-potential in terms of B-maximal and B- fractionally maximal functions. Russian, Sibirsk. Mat. Zh.* **2008**, 49 no. 6, 1263–1279; translation in Sib. Math. J. 49 (2008), no. 6, 1008-1022

[16] Guliyev, V. S.; Garakhanova, N. N. *The Sobolev-Il' in theorem for the Riesz B-potential. Russian, Sibirsk. Mat. Zh. 50 (2009), no. 1, 63–74; translation in Sib. Math. J.* **2009**, 50 no. 1, 49-59.

[17] Kipriyanov, I.A. *Fourier-Bessel transformations and imbedding theorems, Trudy Math. Inst. Steklov*, **1967**, 89, 130-213.

[18] Kristiansson, E. *Decreasing rearragement and Lorentz $L(p,q)$ spaces*, 2002.

[19] Levitan, B.M. *Bessel function expansions in series and Fourier integrals, Us pekhi Mat. Nauk*, **1951**, 6, 2(42), 102-143 .

[20] Lyakhov, L.N. *Multipliers of the mixed Fourier-Bessel transformation, Proc. Steklov Inst. Math.* **1997**, 214, 234-249 .

[21] Muckenhoupt, B. ; Stein, E.M. *Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc.*, **1965**, 118, 17-92.

[22] Neri,U. *Singular Integrals, Springer Verlag, New York*, 1971.

[23] Serbetci, A. ; Ekincioglu, I. *Boundedness of Riesz potential generated by generalized shift operator on Ba spaces, Czech. Math. J.*, **2004**, Vol. 54, No.3, 579-589.

[24] Stein, E.M. ; Weiss, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press*, 1971.

[25] Stempak, K. *The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform, Mathematical Institute of Wroslaw, Preprint* **1985**, no. 45 .

[26] Torchinsky, A. *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, Orlando*, 1986.

[27] Trimeche, K. *Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets, Applied and Computational Harmonic Analysis*, **1997**, 4, 97-112.

ÖZGEÇMİŞ

24 Eylül 1978 yılında doğdu. İlkokulu Kırşehir Süleyman Tükmani İlköğretim okulunda, ortaokul Merkez Kale Ortaokulu ve liseyi Kırşehir Lisesinde okudu. 1997 yılında Marmara Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı. 2003 yılında aynı bölümden mezun oldu. 2003-2010 yılları arasında özel eğitim kurumlarında çalıştı. Halen bir kamu kuruluşunda çalışmaktadır.