



T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL
OPERATÖRLERİN KOMÜTATÖRLERİNİN ORLICZ
UZAYLARINDA SINIRLILIĞI**

Alpgiray TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2021



T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL
OPERATÖRLERİN KOMÜTATÖRLERİNİN ORLICZ
UZAYLARINDA SINIRLILIĞI**

Alpgiray TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ

KIRŞEHİR / 2021

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Alpgiray TEKİN



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi’nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.



ÖNSÖZ

Bu tezi hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda yardımcı olan, değerli ve derin bilgileriyle bana ışık tutan, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyetiyle destekleyen ve bana emek veren saygı değer hocam; Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ'e; bugünlere ulaşmamda verdikleri emek ve sevgiyle bana destek olan aileme teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Nisan, 2021

Alpgiray TEKİN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. YOUNG FONKSİYONLARI VE ORLICZ UZAYLARI	4
3. M_p OPERATÖRÜNÜN ORLICZ UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI	14
4. YARDIMCI ÖNERMELER	18
5. TEMEL SONUÇLAR	24
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	33

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklamalar
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$L^0(\mathbb{R}^n)$	\mathbb{R}^n 'de ölçülebilir fonksiyonların sınıfı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$	Orlicz uzayı
$wL^\Phi(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Orlicz uzayı
$\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Campanato uzayı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatör
M^\sharp	Sharp maksimal operatör
M_α	Kesirli maksimal operatör
I_α	Kesirli integral operatör (Riesz potansiyeli)
I_ρ	Genelleştirilmiş kesirli integral operatör
M_ρ	Genelleştirilmiş kesirli maksimal operatör
$[b, I_\alpha]$	Riesz potansiyelinin komütatörü
$[b, I_\rho]$	Genelleştirilmiş kesirli integral operatörün komütatörü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİN KOMÜTATÖRLERİNİN ORLICZ UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Alpgiray TEKİN

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, literatürde bu konu ile ilgili araştırmaları olan birçok matematikçi hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın amacından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, Young fonksiyonları ve Orlicz uzayları ile ilgili gerekli bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı ile ilgili elde edilmiş sonuçlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, sharp maksimal operatör ile verilen noktasal ve norm eşitsizlikleri incelenmiştir. Çalışmamızın sonuncu bölümü olan beşinci bölümde, sembol fonksiyonları Campanato uzayına ait genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerin komütatörlerinin Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşul araştırılmıştır.

Nisan 2021, 33 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Orlicz Uzayları, Campanato Uzayları, Kesirli integral, Komütatör.

ABSTRACT

MSc THESIS

BOUNDEDNESS OF COMMUTATORS OF GENERALIZED FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS ON ORLICZ SPACES

Alpgiray TEKİN

**Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department**

Supervisor: Assoc. Prof. Fatih DERİNGÖZ

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, information is given about many mathematicians studying in this field in the literature and also about purpose of this study. In the second chapter, some basic definitions and theorems related to Young functions and Orlicz spaces are given. In the third chapter, the results obtained about the boundedness of generalized fractional maximal operator in Orlicz spaces are presented. In the fourth chapter, pointwise and norm estimates by sharp maximal operator are investigated. In the fifth chapter which is last part of this study, necessary and the sufficient condition for the boundedness of commutators of generalized fractional integral operator with symbol functions belong to Campanato spaces on Orlicz spaces is investigated.

April 2021, 33 Pages.

Keywords: Orlicz Spaces, Campanato Spaces, Fractional integral, Commutator.

1. GİRİŞ

\mathbb{R}^n n -boyutlu Öklid uzayı ve $\alpha \in (0, n)$ olmak üzere I_α kesirli integral operatörü

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlanır. İyi bilinen Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi, I_α operatörünün $\alpha \in (0, n)$, $p, q \in (1, \infty)$ ve $-n/p + \alpha = -n/q$ şartları altında $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğunu söylemektedir. Bu sınırlılık sonucu çeşitli yazarlar tarafından Orlicz uzaylarına genişletilmiştir. Bu çalışmalara örnek olarak [3, 5, 12, 17, 22, 23, 24] verilebilir. Chanillo [2] ise $b \in BMO$ için

$$[b, I_\alpha]f = bI_\alpha f - I_\alpha(bf)$$

komütatörünü ele alarak $[b, I_\alpha]$ operatörünün I_α operatörü ile aynı sınırlılığa sahip olduğunu ispatlamıştır. Bu sonuç Orlicz uzaylarına ise Fu vd. [6] ve Guliyev vd. [8] tarafından genişletilmiştir.

Bir $\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu için genelleştirilmiş kesirli integral operatör olarak adlandırılan I_ρ operatörü

$$I_\rho f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. Bu tanımda her zaman

$$\int_0^1 \frac{\rho(t)}{t} dt < \infty \quad (1.2)$$

koşulunun sağlandığı varsayılır. Çünkü bu şart dahilinde en azından (1.1) eşitliğindeki integral, kompakt desteğe sahip sınırlı f fonksiyonları için yakınsak olur. Eğer $\rho(r) = r^\alpha$, $0 < \alpha < n$ seçilirse I_ρ adi kesirli integral operatör I_α olur. Ayrıca bu çalışma boyunca her zaman

$$\sup_{r \leq t \leq 2r} \rho(t) \leq C \int_{K_1 r}^{K_2 r} \frac{\rho(t)}{t} dt, \quad r > 0 \quad (1.3)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği $C > 0$ ve $K_1 < K_2$ olmak üzere $K_1, K_2 > 0$ sabitlerinin var olduğu varsayılacaktır.

I_ρ operatörü ilk olarak Hardy-Littlewood-Sobolev teoremini Orlicz uzaylarına genişletmek amacıyla Nakai [15] tarafından tanıtılmıştır. Yakın zamanda Deringoz vd. [4] tarafından I_ρ operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir.

Bu tezde b fonksiyonu genelleştirilmiş Campanato uzayına ait olmak üzere $[b, I_\rho]$ komütatörleri göz önüne alınacak ve bu operatörlerin Shi vd. [14] tarafından elde edilen Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı sistematik bir şekilde incelenecektir. Bu sınırlılık sonucunun ispatlanabilmesi için tanımları aşağıda (1.4) ve (1.5) ile verilecek olan M^\sharp sharp maksimal operatörüne ve M_ρ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörlerine ihtiyaç vardır.

Şimdi sırası ile genelleştirilmiş Campanato uzayı, sharp maksimal ve genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörlerin tanımlarını verelim. $B(x, r)$ ile $x \in \mathbb{R}^n$ merkezli $r > 0$ yarıçaplı açık yuvarı, $G \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $|G|$ ile bu kümenin Lebesgue ölçüsünü ve χ_G ile de bu kümenin karakteristik fonksiyonunu göstereceğiz. Ayrıca $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun B yuvarı üzerindeki ortalaması için

$$f_B = \int_B f = \int_B f(y) = \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy$$

notasyonu kullanılacaktır.

$p \in [1, \infty)$ ve $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ için $\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Campanato uzayı aşağıdaki fonksiyonelin sonlu olduğu tüm f fonksiyonlarının kümesidir:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B=B(x,r)} \frac{1}{\psi(r)} \left(\int_B |f(y) - f_B|^p dy \right)^{1/p}.$$

Eğer $p = 1$ ve $\psi \equiv 1$ alınırsa $\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n) = BMO(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. Eğer $p = 1$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $\psi(r) = r^\alpha$ olarak seçilirse $\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$ ve $Lip_\alpha(\mathbb{R}^n)$ uzayları çakışır.

Sharp maksimal operatör M^\sharp

$$M^\sharp f(x) = \sup_{B \ni x} \int_B |f(y) - f_B| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

ile tanımlanır. Burada supremum x noktasını içeren bütün B yuvarları üzerinden alınmaktadır.

Bir $\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu için M_ρ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörü

$$M_\rho f(x) = \sup_{B(z,r) \ni x} \rho(r) \int_{B(z,r)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

olarak tanımlanır. M_ρ operatörünün tanımında (1.2) veya (1.3) koşuluna ihtiyaç duyulmamaktadır.

Eğer $\rho(r) = |B(0, r)|^{\alpha/n}$ seçilirse M_ρ , adi kesirli maksimal operator M_α olur. Eğer $\rho \equiv 1$ ise M_ρ , iyi bilinen Hardy-Littlewood maksimal operator M yani

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \int_B |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

olur. M_α ve I_α operatörleri arasında her $x \in \mathbb{R}^n$ için $M_\alpha f(x) \leq CI_\alpha |f|(x)$ ilişkisi vardır. Böylelikle M_α operatörünün sınırlılığı I_α operatörünün sınırlılığının direkt bir sonucudur. Fakat temel amacımız olan $[b, I_\rho]$ operatörünün sınırlılığını ispatlamak için M_ρ için I_ρ için elde edilmiş sonuçtan daha iyisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sonuç bu tezde ayrı bir bölüm olarak detaylı şekilde incelenecektir. Hemen belirtelim ki [14] çalışmasında elde edilmiş bu sonuç ayrıca M_ρ operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığı için [4] çalışmasında elde edilmiş sonucun bir iyileştirmesidir.

Bu tezin içeriği şu şekildedir. 2. Bölümde Young fonksiyonları ve genelleşmelerinin tanımı verilecek ve Orlicz uzayları bu genelleşmiş Young fonksiyonları yardımıyla tanımlanacaktır. 3. Bölümde M_ρ operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşullar verilecektir. 4. Bölümde sharp maksimal operatör ile verilen noktasal ve norm eşitsizlikleri incelenecektir. Son bölüm olan 5. Bölümde ise $[b, I_\rho]$ operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığı ispatlanacaktır.

2. YOUNG FONKSİYONLARI VE ORLICZ UZAYLARI

Bu bölümde Young fonksiyonları ve genelleşmelerinin tanımı verilecek ve Orlicz uzayları bu genelleşmiş Young fonksiyonları yardımıyla tanımlanacaktır.

Artan bir $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu için

$$a(\Phi) = \sup\{t \geq 0 : \Phi(t) = 0\}, \quad b(\Phi) = \inf\{t \geq 0 : \Phi(t) = \infty\}$$

olsun. Burada $\sup \emptyset = 0$ ve $\inf \emptyset = \infty$ olarak kabul edilmektedir. Açiktır ki $0 \leq a(\Phi) \leq b(\Phi) \leq \infty$ eşitsizliği doğrudur. $\bar{\Phi}$ kümesi

$$0 \leq a(\Phi) < \infty, \quad 0 < b(\Phi) \leq \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) = \Phi(0) = 0, \quad (2.1)$$

$$\Phi \text{ fonksiyonu } [0, b(\Phi)) \text{ üzerinde soldan süreklidir,} \quad (2.2)$$

$$\text{Eğer } b(\Phi) = \infty, \text{ ise } \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \Phi(\infty) = \infty, \quad (2.3)$$

$$\text{Eğer } b(\Phi) < \infty, \text{ ise } \lim_{t \rightarrow b(\Phi)-0} \Phi(t) = \Phi(b(\Phi)) (\leq \infty) \quad (2.4)$$

koşullarını sağlayan artan bütün $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonlarının kümesi olsun.

$\Phi \in \bar{\Phi}$ fonksiyonu için bu fonksiyonun O'Neil [17] anlamında genelleşmiş tersi aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.1. $\Phi \in \bar{\Phi}$ ve $u \in [0, \infty]$ için

$$\Phi^{-1}(u) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : \Phi(t) > u\}, & \text{eğer } u \in [0, \infty), \\ \infty, & \text{eğer } u = \infty. \end{cases}$$

$\Phi \in \overline{\Phi}$ olmak üzere Φ^{-1} sonlu, artan ve $[0, \infty)$ üzerinde sağdan sürekli ve pozitiftir. Eğer $\Phi, [0, \infty]$ kümesinden yine bu kümeye birebir örten ise Φ^{-1}, Φ fonksiyonunun adi tersinden başka bir şey değildir [14]. Ayrıca genelleşmiş ters fonksiyon için aşağıdaki özellik doğrudur.

Önerme 2.2. $\Phi \in \overline{\Phi}$ olsun. Bu durumda her $u \in [0, \infty]$ için

$$\Phi(\Phi^{-1}(u)) \leq u \leq \Phi^{-1}(\Phi(u)) \quad (2.5)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir [14].

İspat. İlk olarak her $t, u \in [0, \infty]$ için

$$\Phi(t) \leq u \implies t \leq \Phi^{-1}(u) \quad (2.6)$$

önermesinin doğru olduğu gösterilecektir. Eğer $\Phi(t) \leq u$ ise $\Phi(s) > u \implies \Phi(s) > \Phi(t) \implies s > t$ ve

$$\{s \geq 0 : \Phi(s) > u\} \subset \{s \geq 0 : s > t\}$$

olur. Böylece

$$\Phi^{-1}(u) = \inf\{s \geq 0 : \Phi(s) > u\} \geq \inf\{s \geq 0 : s > t\} = t$$

olur ki bu da (2.6) önermesinin doğru olduğunu gösterir. $\Phi(t) = u$ alınır ve (2.6) kullanılırsa $t \leq \Phi^{-1}(u) = \Phi^{-1}(\Phi(t))$ elde edilir. Bu ise (2.5) eşitsizliklerinden ikincisidir.

Şimdi ise her $t \in (0, \infty]$ ve $u \in [0, \infty]$ için

$$\Phi(t) > u \implies t > \Phi^{-1}(u), \quad (2.7)$$

$$t \leq \Phi^{-1}(u) \implies \Phi(t) \leq u \quad (2.8)$$

olduğu gösterilecektir. (2.8) önermesi (2.7) önermesine denk olduğundan sadece (2.7) önermesinin doğruluğu gösterilecektir. Eğer $\Phi(t) > u$ ise (2.2)-(2.4) özelliklerinden bir $s < t$ için

$\Phi(s) > u$ olur. Φ^{-1} tanımından $s \geq \Phi^{-1}(u)$ elde edilir. Yani $t > \Phi^{-1}(u)$ olur ki bu da (2.7) demektir. Eğer $\Phi^{-1}(u) = 0$ ise (2.5) eşitsizliklerinden birincisi (2.1) özelliği yardımıyla gerçekleşir. Eğer $t = \Phi^{-1}(u) > 0$ ise (2.8) kullanılarak $\Phi(\Phi^{-1}(u)) = \Phi(t) \leq u$ olduğu görülür ki bu da (2.5) eşitsizliklerinden birincisidir. ■

$\Phi, \Psi \in \overline{\Phi}$ fonksiyonları için $\Phi \approx \Psi$ notasyonu

$$\Phi(C^{-1}t) \leq \Psi(t) \leq \Phi(Ct), \quad t \in [0, \infty]$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde pozitif bir C sabiti vardır anlamında kullanılacaktır. $P, Q : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonları için $P \sim Q$ notasyonu ise

$$C^{-1}P(t) \leq Q(t) \leq CP(t), \quad t \in [0, \infty]$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde pozitif bir C sabiti vardır anlamında kullanılacaktır. Aşağıda ispatı verilecek Lemma yardımıyla bu tanımlar arasında $\Phi, \Psi \in \overline{\Phi}$ olmak üzere

$$\Phi \approx \Psi \iff \Phi^{-1} \sim \Psi^{-1} \tag{2.9}$$

ilişkisinin olduğunu söyleyebiliriz.

Lemma 2.3. $\Phi, \Psi \in \overline{\Phi}$ ve C pozitif bir sabit olsun.

$$\Phi(t) \leq \Psi(Ct), \quad t \in [0, \infty]$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\Psi^{-1}(u) \leq C\Phi^{-1}(u), \quad u \in [0, \infty]$$

olmasıdır [14].

İspat. Her $t \in [0, \infty]$ için $\Phi(t) \leq \Psi(Ct)$ olsun. Eğer $t = \Psi^{-1}(u)$ alınırsa Önerme 2.2. yardımıyla $\Psi(t) = \Psi(\Psi^{-1}(u)) \leq u$ elde edilir ve dolayısıyla

$$\Psi^{-1}(u)/C = t/C \leq \Phi^{-1}(\Phi(t/C)) \leq \Phi^{-1}(\Psi(t)) \leq \Phi^{-1}(u)$$

olur. Tersine, kabul edelim ki her $u \in [0, \infty]$ için $\Psi^{-1}(u) \leq C\Phi^{-1}(u)$ olsun. Eğer $u = \Psi(t)$ ise Önerme 2.2. yardımıyla $t \leq \Psi^{-1}(\Psi(t)) = \Psi^{-1}(u)$ elde edilir ve dolayısıyla

$$\Phi(t/C) \leq \Phi(\Psi^{-1}(u)/C) \leq \Phi(\Phi^{-1}(u)) \leq u = \Psi(t)$$

olur. ■

Şimdi ise Young fonksiyonu ve genelleşmesinin tanımları verilecektir.

Tanım 2.4. Eğer $\Phi \in \overline{\Phi}$ fonksiyonu $[0, b(\Phi))$ üzerinde konveks ise Young fonksiyonu olarak adlandırılır.

Φ Young fonksiyonu konveks olması hasebiyle $[0, b(\Phi))$ üzerinde sürekli ve $[a(\Phi), b(\Phi)]$ üzerinde kesin artandır. Dolayısıyla Φ , $[a(\Phi), b(\Phi)]$ kümesinden $[0, \Phi(b(\Phi))]$ kümesine birebir ve örten bir fonksiyondur. Ayrıca Φ Young fonksiyonu $[0, b(\Phi))$ aralığının her alt aralığı üzerinde mutlak sürekli. Yani Φ' türevi hemen her yerde mevcuttur ve

$$\Phi(t) = \int_0^t \Phi'(s)ds, \quad t \in [0, b(\Phi)) \quad (2.10)$$

eşitliği gerçekleşir [14].

Tanım 2.5.

(i) Φ_Y ile bütün Young fonksiyonlarının kümesi gösterilecektir.

(ii) Bir $\Psi \in \Phi_Y$ için $\Phi \approx \Psi$ olacak şekilde bütün $\Phi \in \overline{\Phi}$ fonksiyonlarının kümesi $\overline{\Phi}_Y$ ile gösterilecektir.

(iii) \mathcal{Y} ile de $a(\Phi) = 0$ ve $b(\Phi) = \infty$ koşullarını sağlayan bütün Young fonksiyonlarının kümesi gösterilecektir.

Şimdi $\Phi \in \overline{\Phi}$ fonksiyonu için $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ Orlicz uzayı ve $wL^\Phi(\mathbb{R}^n)$ zayıf Orlicz uzayı tanımlanacaktır.

Aşağıdaki tanımlarda kullanılan $L^0(\mathbb{R}^n)$ notasyonu \mathbb{R}^n üzerinde ölçülebilir bütün kompleks değerli fonksiyonlar kümesini göstermektedir. Ayrıca $m(f, t) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}|$ olarak tanımlanacaktır.

Tanım 2.6. Bir $\Phi \in \overline{\Phi}_Y$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} L^\Phi(\mathbb{R}^n) &= \left\{ f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \exists \epsilon > 0, \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\epsilon|f(x)|) dx < \infty \right\}, \\ \|f\|_{L^\Phi} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}, \\ wL^\Phi(\Omega) &= \left\{ f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \exists \epsilon > 0, \sup_{t \in (0, \infty)} \Phi(t)m(\epsilon f, t) < \infty \right\}, \\ \|f\|_{wL^\Phi} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \sup_{t \in (0, \infty)} \Phi(t)m\left(\frac{f}{\lambda}, t\right) \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$\|\cdot\|_{L^\Phi}$ ve $\|\cdot\|_{wL^\Phi}$ quasi-normlardır ve $L^\Phi(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ kapsamaları vardır. Eğer $\Phi \in \overline{\Phi}_Y$ ise $\|\cdot\|_{L^\Phi}$ bir normdur ve $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ bir Banach uzayıdır. $\Phi, \Psi \in \overline{\Phi}_Y$ olmak üzere $\Phi \approx \Psi$ ise denk normlar ile $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ ve $wL^\Phi(\mathbb{R}^n) = wL^\Psi(\mathbb{R}^n)$ olur. Orlicz uzayları Orlicz tarafından [18, 19] çalışmalarında tanıtılmıştır. Orlicz uzayları hakkında daha detaylı bilgi için Bkz. [13, 21]. Zayıf Orlicz uzayı için ise Bkz. [9].

Dikkat çekelim ki herhangi bir Young fonksiyonu için

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \Phi(t)m(f, t) = \sup_{t \in (0, \infty)} tm(\Phi(|f|), t)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|f\|_{wL^\Phi} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \sup_{t \in (0, \infty)} \Phi(t)m\left(\frac{f}{\lambda}, t\right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \sup_{t \in (0, \infty)} tm\left(\Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right), t\right) \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

eşitliği doğrudur [11].

Tanım 2.7.

(i) Eğer

$$\Phi(2t) \leq C\Phi(t), \quad t > 0$$

eşitsizliği gerçekleşecek biçimde $C > 0$ sabiti var ise $\Phi \in \overline{\Phi}$ fonksiyonu Δ_2 - koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \overline{\Delta}_2$ ile gösterilir.

(ii) Eğer

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2k}\Phi(kt), \quad t > 0 \quad (2.11)$$

eşitsizliği gerçekleşecek biçimde $k > 1$ sabiti var ise $\Phi \in \overline{\Phi}$ fonksiyonu ∇_2 - koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \overline{\nabla}_2$ ile gösterilir.

(iii) $\Delta_2 = \Phi_Y \cap \overline{\Delta}_2$ ve $\nabla_2 = \Phi_Y \cap \overline{\nabla}_2$ olarak tanımlanır.

Uyarı 2.8.

(i) $\Delta_2 \subset \mathcal{Y}$ ve $\overline{\nabla}_2 \subset \overline{\Phi}_Y$ kapsamaları geçerlidir [12].

(ii) $\Phi \in \overline{\Phi}_Y$ olsun. Bu durumda " $\Phi \in \overline{\Delta}_2$ ancak ve ancak bir $\Psi \in \Delta_2$ için $\Phi \approx \Psi$ " ve " $\Phi \in \overline{\nabla}_2$ ancak ve ancak bir $\Psi \in \nabla_2$ için $\Phi \approx \Psi$ " önermeleri doğrudur [14].

(iii) $\Phi \in \Phi_Y$ olsun. Bu durumda " $\Phi \in \Delta_2$ ancak ve ancak $C_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğundur" ve " $\Phi \in \nabla_2$ ancak ve ancak M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır" önermeleri doğrudur [12].

(iv) $\Phi \in \Phi_Y$ olsun. Φ^{-1} fonksiyonu konkav olması sebebiyle "doubling" koşulu olarak da adlandırılan

$$\Phi^{-1}(u) \leq \Phi^{-1}(2u) \leq 2\Phi^{-1}(u), \quad u \in [0, \infty]$$

eşitsizliklerini sağlar [4].

Aşağıdaki teorem Hardy-Littlewood maksimal operatörünün Orlicz uzaylarındaki zayıf ve güçlü tipli sınırlılığı ile ilgilidir.

Teorem 2.9. $\Phi \in \overline{\Phi}_Y$ olmak üzere M operatörü $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $wL^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır, yani öyle pozitif bir C_0 sabiti vardır ki, her $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{wL^\Phi} \leq C_0 \|f\|_{L^\Phi}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Ayrıca eğer $\Phi \in \overline{\nabla}_2$ ise M operatörü $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır, yani öyle pozitif bir C_0 sabiti vardır ki, her $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L^\Phi} \leq C_0 \|f\|_{L^\Phi}$$

eşitsizliği gerçekleşir [12].

Tanım 2.10. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, Φ fonksiyonunun tümleyeni

$$\tilde{\Phi}(r) = \begin{cases} \sup\{rs - \Phi(s) : s \in [0, \infty)\} & , r \in [0, \infty) \\ \infty & , r = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır [21].

$\tilde{\Phi}$ fonksiyonunun da bir Young fonksiyonu olduğu ve Young eşitsizliği olarak adlandırılan

$$tu \leq \Phi(t) + \tilde{\Phi}(u), \quad t, u \in [0, \infty)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği iyi bilinmektedir [21].

Örnek 2.11. Aşağıda tümleyen Young fonksiyon çiftlerine bazı örnekler verilmiştir [20]:

$$(i) \quad \Phi(t) = \frac{t^p}{p}, \quad \tilde{\Phi}(s) = \frac{t^{p'}}{p'}, \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$(ii) \quad \Phi(t) = t, \quad \tilde{\Phi}(s) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq s \leq 1 \\ \infty & , s > 1 \end{cases}$$

$$(iii) \quad \Phi(t) = e^t - t - 1, \quad \tilde{\Phi}(s) = (1 + s) \log(1 + s) - s$$

$$(iv) \quad \Phi(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 1 \\ t \log t & , t > 1 \end{cases}, \quad \tilde{\Phi}(s) = \begin{cases} s & , s < 1 \\ e^{s-1} & , s \geq 1 \end{cases}$$

Önerme 2.12. Φ bir Young fonksiyonu ve $\tilde{\Phi}$ onun tümleyeni olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$$t \leq \Phi^{-1}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t) \leq 2t \quad (2.12)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir [17].

Young eşitsizliği yardımıyla

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq 2\|f\|_{L^\Phi}\|g\|_{L^{\tilde{\Phi}}} \quad (2.13)$$

genelleşmiş Hölder eşitsizliğinin sağlandığı görülebilir [17].

Lemma 2.13. $\Phi \in \Phi_Y$ olsun. $G \subset \mathbb{R}^n$ sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir küme olmak üzere

$$\|\chi_G\|_{L^\Phi} = \|\chi_G\|_{wL^\Phi} = \frac{1}{\Phi^{-1}(1/|G|)}$$

olur [20].

Dikkat çekelim ki (2.12) yardımıyla B yuvarının karakteristik fonksiyonu olan χ_B için

$$\|\chi_B\|_{L^{\tilde{\Phi}}} = \frac{1}{\tilde{\Phi}^{-1}(1/|B|)} \leq |B|\Phi^{-1}(1/|B|) \quad (2.14)$$

eşitsizliğinin doğruluğu elde edilir.

Lemma 2.14. $\Phi \in \Delta_2$ ise Φ' türev fonksiyonu için

$$\Phi'(2t) \leq C_\Phi \Phi'(t) \quad \text{h.h. } t \in [0, \infty)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada C_Φ sabiti t değişkeninden bağımsızdır [14].

İspat. Φ fonksiyonunun konvekslik ve $\Phi(0) = 0$ özelliklerinden hemen her $t \in [0, \infty)$ için $\Phi'_+(t)$ sağ türevinin varlığı ve artanlığı elde edilir. Hemen her yerde $\Phi' = \Phi'_+(t)$ olduğundan

(2.10) eşitliği de göz önüne alınarak

$$\Phi(t) = \int_0^t \Phi'(s)ds = \int_0^t \Phi'_+(s)ds$$

olduğu görülür. Bu durumda her $t \in (0, \infty)$ için

$$\Phi'_+(2t) \leq \frac{1}{t} \int_{2t}^{3t} \Phi'_+(s)ds \leq \frac{1}{t} \Phi(3t) \leq \frac{C_\Phi}{t} \Phi(t) \leq C_\Phi \Phi'_+(t)$$

olur ki bu da gösterilmek istenen eşitsizliktir. ■

Lemma 2.15. $\Phi \in \overline{\nabla}_2$ olsun. Bu durumda bir $\theta \in (0, 1)$ için $\Phi((\cdot)^\theta) \in \overline{\nabla}_2$ olur [14].

İspat. $\Phi \in \overline{\nabla}_2$ ise

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2k} \Phi(kt)$$

eşitsizliği doğru olacak şekilde $k > 1$ sabiti vardır. $\theta \in (0, 1)$ alalım öyle ki $k^{2(1/\theta-1)} \leq 2$ olsun. Bu durumda $k^2 \leq (2k^2)^\theta$ ve

$$\Phi(t^\theta) \leq \frac{1}{2k} \Phi(kt^\theta) \leq \frac{1}{(2k)^2} \Phi(k^2 t^\theta) \leq \frac{1}{2(2k^2)} \Phi((2k^2 t)^\theta)$$

olur ki bu da $\Phi((\cdot)^\theta) \in \overline{\nabla}_2$ olması demektir. ■

Uyarı 2.16. Herhangi bir $\theta \in (0, 1)$ için $\Phi((\cdot)^\theta) \notin \Phi_Y$ olacak şekilde bir $\Phi \in \nabla_2$ bulunabilir. Gerçekten,

$$\Phi(r) = \max(r^2, 3r - 2) = \begin{cases} r^2 & \text{if } 0 \leq r \leq 1, \\ 3r - 2 & \text{if } 1 < r < 2, \\ r^2 & \text{if } 2 \leq r \end{cases}$$

olsun. O zaman Φ fonksiyonu konvekstir ve $k = 8$ için (2.11) eşitsizliğini sağlar. Oysa ki, hiçbir $\theta \in (0, 1)$ için $3r^\theta - 2$ konveks olmaz [14].

Aşağıdaki teorem genelleştirilmiş kesirli integral operatörün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığını göstermektedir ve Deringoz vd. [4] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.17. $\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu (1.2) ve (1.3) koşullarını sağlasın ve $\Phi, \Psi \in \overline{\Phi}_Y$ olsun. Kabul edelim ki her $r \in (0, \infty)$ için

$$\int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt \Phi^{-1}(1/r^n) + \int_r^\infty \frac{\rho(t)\Phi^{-1}(1/t^n)}{t} dt \leq A\Psi^{-1}(1/r^n) \quad (2.15)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir A pozitif sabiti olsun. Bu durumda her pozitif C_0 sabiti için öyle bir pozitif C_1 sabiti vardır ki her $f \not\equiv 0$ olacak biçimdeki $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\Psi\left(\frac{|I_\rho f(x)|}{C_1 \|f\|_{L^\Phi}}\right) \leq \Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0 \|f\|_{L^\Phi}}\right)$$

olur. Sonuç olarak $I_\rho, L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $wL^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca eğer $\Phi \in \overline{\nabla}_2$ ise o zaman $I_\rho, L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olur.

$\Phi \in \mathcal{Y}$ fonksiyonu eğer

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$$

şartlarını sağlıyorsa N -fonksiyon olarak adlandırılır.

Eğer $r, s \in (0, \infty)$ için

$$\theta(r) \leq C\theta(s) \quad (\theta(s) \leq C\theta(r)) \quad \text{eğer } r < s.$$

eşitsizliği gerçekleşecek şekilde bir pozitif C sabiti varsa $\theta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonuna neredeyse artan (neredeyse azalan) denir.

Bu tanımlardan sonra Teorem 2.17.'in bir sonucu olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Sonuç 2.18. $1 < s < \infty$ ve $\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ olsun. ρ (1.2) koşulunu sağlasın ve bir pozitif ϵ sabiti için $r \mapsto \rho(r)/r^{n/s-\epsilon}$ neredeyse azalan olsun. Bu durumda bir Ψ N -fonksiyonu ve pozitif C sabiti vardır ki her $r > 0$ için

$$C^{-1}\Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \leq \frac{1}{r^{n/s}} \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt \leq C\Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \quad (2.16)$$

olur. Ayrıca I_ρ operatörü $L^s(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [14].

3. M_ρ OPERATÖRÜNÜN ORLICZ UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI

Bu bölümde daha önce (1.5) ile tanımlanan M_ρ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörün Orlicz uzayında sınırlılığı detaylı bir şekilde incelenecektir. İlk olarak bu teoremin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki yardımcı önermeyi verelim.

Lemma 3.1. $\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r \in (0, \infty)$ için

$$\left(\sup_{0 < t \leq r} \rho(t) \right) \chi_{B(0,r)}(x) \leq (M_\rho \chi_{B(0,r)})(x) \quad (3.1)$$

olur [14].

İspat. $x \in B(0, r)$ olsun. Eğer $t \leq r$ ise $x \in B(z, t) \subset B(0, r)$ olacak biçimde $B(z, t)$ yuvarı seçebiliriz. Böylece

$$\rho(t) = \rho(t) \int_{B(z,t)} \chi_{B(0,r)}(y) dy \leq (M_\rho \chi_{B(0,r)})(x)$$

olur ve istenilen gösterilmiş olur. ■

Shi vd. [14] tarafından elde edilmiş aşağıdaki sonuç M_ρ operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığı için Deringoz vd. [4] tarafından elde edilmiş sonucun bir iyileştirmesidir. Daha açık yazacak olursak, [4] çalışmasında $\Phi, \Psi \in \Phi_Y$, ρ fonksiyonunun artan ve $r \mapsto \rho(r)/r^n$ fonksiyonunun azalanlığı şartları altında M_ρ operatörünün sınırlılığı için bir gerek ve yeter koşul verilmiştir.

Teorem 3.2. $\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ve $\Phi, \Psi \in \overline{\Phi}_Y$ olsun.

(i) Kabul edelim öyle bir A sabiti vardır ki her $r \in (0, \infty)$

$$\left(\sup_{0 < t \leq r} \rho(t) \right) \Phi^{-1}(1/r^n) \leq A \Psi^{-1}(1/r^n) \quad (3.2)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda her pozitif C_0 sabiti için öyle bir pozitif C_1 sabiti vardır ki her $f \neq 0$ olacak biçimdeki $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\Psi\left(\frac{M_\rho f(x)}{C_1 \|f\|_{L^\Phi}}\right) \leq \Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0 \|f\|_{L^\Phi}}\right). \quad (3.3)$$

olur. Sonuç olarak $M_\rho, L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $wL^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca eğer $\Phi \in \overline{\mathbb{V}}_2$ ise o zaman $M_\rho, L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olur.

(ii) Tersine, eğer M_ρ operatörü $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $wL^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise (3.2) eşitsizliği belli bir A ve her $r \in (0, \infty)$ için sağlanır.

İspat. (i) (2.9) dolayısıyla $\Phi, \Psi \in \Phi_Y$ kabul edebiliriz. $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) > 0$ olduğunu da kabul edelim. Herhangi $x \in \mathbb{R}^n$ ve $B = B(z, r) \ni x$ yuvarı için, eğer

$$\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right) \geq \frac{1}{r^n}$$

oluyorsa (2.13), $\|f\|_{L^\Phi} = 1$, (2.14), Φ^{-1} fonksiyonunun doubling özelliği ve (3.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} \rho(r) \int_B |f| &\leq 2 \frac{\rho(r)}{|B|} \|\chi_B\|_{L^{\tilde{\Phi}}} \leq 2 \frac{\rho(r)}{|B|} |B| \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \\ &\lesssim \rho(r) \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \leq A \Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \leq A \Psi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Tersine eğer

$$\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right) \leq \frac{1}{r^n}$$

ise

$$\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right) = \frac{1}{t_0^n}$$

olacak şekilde $t_0 \geq r$ seçilirse ve (3.2) ile (2.5) kullanılırsa

$$\rho(r) \leq \sup_{0 < t \leq t_0} \rho(t) \leq A \frac{\Psi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right)\right)}{\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right)\right)} \leq A \frac{\Psi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right)\right)}{\frac{Mf(x)}{C_0}}$$

elde edilir ki bu da

$$\rho(r) \int_B |f| \leq AC_0 \frac{\Psi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right)\right)}{Mf(x)} \int_B |f| \leq AC_0 \Psi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right)\right)$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$M_\rho f(x) \leq C_1 \Psi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0}\right)\right)$$

olur. (2.5) kullanılırsa (3.3) elde edilmiş olur.

Şimdi ikinci kısmı ispatlayalım. Lemma 3.1. ve M_ρ operatörünün $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $wL^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olmasından

$$\left(\sup_{0 < t \leq r} \rho(t)\right) \|\chi_{B(0,r)}\|_{wL^\Psi} \leq \|M_\rho \chi_{B(0,r)}\|_{wL^\Psi} \lesssim \|\chi_{B(0,r)}\|_{L^\Phi}$$

elde edilir. Böylece Lemma 2.13. ve Φ^{-1} ile Ψ^{-1} fonksiyonlarının doubling özelliği kullanılarak sonuca ulaşılır. ■

Örnek 3.3. Eğer $\rho(r) = r^\alpha$, $p, q \in [1, \infty)$ olmak üzere $\Phi(t) = t^p$ ve $\Psi(t) = t^q$ ve $0 \leq \alpha \leq n/p$ alınırsa

$$\rho(r)\Phi^{-1}(1/r^n) \sim r^{\alpha-n/p} \quad \text{ve} \quad \Psi^{-1}(1/r^n) = r^{-n/q}$$

elde edilir. Bu durumda

$$(3.2) \iff r^{\alpha-n/p} \lesssim r^{-n/q}, \quad r \in (0, \infty) \iff \alpha - n/p = -n/q$$

olur. Bu örnekte eğer $\alpha = 0$ ise M_ρ Hardy-Littlewood maksimal operatör M olup
(3.2) $\iff p = q$ olur. Eğer $\alpha - n/p = 0$ ise M_ρ kesirli maksimal operatör M_α olur ve

$$\Psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } r \in [0, 1], \\ \infty & \text{eğer } r \in (1, \infty] \end{cases} \quad \text{and} \quad \Psi^{-1}(r) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } r \in [0, \infty), \\ \infty & \text{eğer } r = \infty \end{cases} \quad (3.4)$$

alınabileceğinden bu operatörün $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı elde edilir.

4. YARDIMCI ÖNERMELER

Bu bölümde ana teoremin ispatında önemli bir rol oynayan sharp maksimal operatör M^\sharp ile ilişkili iki yardımcı önerme detaylı bir şekilde incelenecektir.

Şimdi bu önermelerin ispatlarında ihtiyaç duyacağımız bazı bilinen sonuçlar verilecektir. İlk olarak Campanato uzayları için John-Nirenberg tipli teoremi ifade edelim.

Teorem 4.1. $p \in (1, \infty)$ ve $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ olsun. ψ fonksiyonunun neredeyse artan olduğu kabul edilsin. Bu durumda eşdeğer normlar ile $\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$ olur [1, 16].

Şimdi ise yine yardımcı önermenin ispatında kullanılacak olan ve [1] çalışmasında ispatlanan aşağıdaki sonucu verelim.

Lemma 4.2. $p \in [1, \infty)$ olsun. ψ fonksiyonunun neredeyse artan olduğunu kabul edelim. Bu durumda öyle bir pozitif C sabiti bulunabilir ki her $f \in \mathcal{L}_{1,\psi}$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r, s \in (0, \infty)$ için

$$\left(\int_{B(x,s)} |f(y) - f_{B(x,r)}|^p dy \right)^{1/p} \leq C \left(1 + \log_2 \frac{s}{r} \right) \psi(s) \|f\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}}, \quad r \leq s$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Ana teoremin ispatında kullanılacak olan birinci önerme ve ispatı aşağıdaki gibidir. Bu önermede kullanılan $p^*(r)$ fonksiyonu

$$p^*(r) = \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt \quad (4.1)$$

olarak tanımlanmıştır.

Önerme 4.3. $\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu (1.2) koşulunu sağlasın. Kabul edelim ki ψ neredeyse artan, bir $\epsilon > 0$ için $r \mapsto \rho(r)/r^{n-\epsilon}$ neredeyse azalan olsun ve (5.3) koşulu sağlansın. Bu durumda $\eta \in (1, \infty)$ keyfi olmak üzere öyle pozitif bir C sabiti vardır ki her

$b \in \mathcal{L}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M^\sharp([b, I_\rho]f)(x) \leq C \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \left((M_{\psi^n}(|I_\rho f|^\eta)(x))^{1/\eta} + (M_{(p^*\psi)^\eta}(|f|^\eta)(x))^{1/\eta} \right)$$

eşitsizliği gerçekleşir [14].

İspat. $B = B(x, t)$ keyfi yuvarı için $f_1 = \chi_{2B}$, $f = f_1 + f_2$ ve $y \in B$ olmak üzere

$$F_1(y) = (b(y) - b_{2B})I_\rho f(y), F_2(y) = I_\rho((b - b_{2B})f_1)(y), F_3(y) = I_\rho((b - b_{2B})f_2)(y) - C_B$$

olsun. Burada $C_B = I_\rho((b - b_{2B})f_2)(x)$ ve

$$I_\rho((b - b_{2B})f_2)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|y - z|)}{|y - z|^n} (b(z) - b_{2B})f_2(z) dz, \quad y \in B$$

ile verilmiştir. Bu durumda

$$[b, I_\rho]f + C_B = [b - b_{2B}, I_\rho]f + C_B = F_1 - F_2 - F_3$$

olur.

$$\int_B |F_i(y)| dy \leq C \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \left((M_{\psi^n}(|I_\rho f|^\eta)(x))^{1/\eta} + (M_{(p^*\psi)^\eta}(|f|^\eta)(x))^{1/\eta} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği gösterilirse sonuca ulaşılır.

Şimdi $1/\eta + 1/\eta' = 1$ için Hölder eşitsizliği ve Teorem 4.1. kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_B |F_1(y)| dy &\leq \left(\int_B |b(y) - b_{2B}|^{\eta'} dy \right)^{1/\eta'} \left(\int_B |I_\rho f(y)|^\eta dy \right)^{1/\eta} \\ &= \frac{1}{\psi(t)} \left(\int_B |b(y) - b_{2B}|^{\eta'} dy \right)^{1/\eta'} \left(\psi(t)^\eta \int_B |I_\rho f(y)|^\eta dy \right)^{1/\eta} \\ &\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} (M_{\psi^n}(|I_\rho f|^\eta)(x))^{1/\eta} \end{aligned}$$

elde edilir. $n/v - \epsilon/2 \geq n - \epsilon$ olacak şekilde $v \in (1, \eta)$ seçilsin. O zaman $r \mapsto \rho(r)/r^{n-\epsilon}$ fonksiyonunun neredeyse azalanlığından $r \mapsto \rho(r)/r^{n/v-\epsilon/2}$ fonksiyonunun neredeyse azalan olduğu görülür. Böylece Sonuç 2.18. bize I_ρ operatörü $L^v(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olacak şekilde bir Ψ N -fonksiyonunun varlığını söyler. (2.13) genelleştirilmiş Hölder

eşitsizliği, (2.14), (2.16) ve I_ρ operatörünün sınırlılığından

$$\begin{aligned} \int_B |F_2(y)| dy &\leq \frac{2}{|B|} \|\chi_B\|_{L^{\tilde{\psi}}(\mathbb{R}^n)} \|F_2\|_{L^{\tilde{\psi}}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \Psi^{-1}(1/|B|) \|(b - b_{2B})f_1\|_{L^v(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \frac{\rho^*(t)}{|B|^{1/v}} \|(b - b_{2B})f\|_{L^v(2B)} \end{aligned}$$

olur. $1/v = 1/u + 1/\eta$ olmak üzere Hölder eşitsizliği ve Teorem 4.1. kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_B |F_2(y)| dy &\lesssim \rho^*(t) \left(\int_{2B} |b(y) - b_{2B}|^v dy \right)^{1/v} \left(\int_{2B} |f(y)|^\eta dy \right)^{1/\eta} \\ &\lesssim \frac{1}{\psi(2t)} \left(\int_{2B} |b(y) - b_{2B}|^v dy \right)^{1/v} \left((\rho^*(2t)\psi(2t))^\eta \int_{2B} |f(y)|^\eta dy \right)^{1/\eta} \\ &\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} (M_{(\rho^*\psi)^\eta}(|f|^\eta)(x))^{1/\eta} \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $y \in B$ ve $z \notin 2B$ için

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|y - z|}{|x - z|} \leq 2$$

olması ve (5.3) yardımıyla

$$\begin{aligned} |F_3(y)| &= |I_\rho((b - b_{2B})f_2)(y) - I_\rho((b - b_{2B})f_2)(x)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\rho(|y - z|)}{|y - z|^n} - \frac{\rho(|x - z|)}{|x - z|^n} \right) (b(z) - b_{2B})f_2(z) dz \right| \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2B} \frac{|x - y| \rho^*(|x - z|)}{|x - z|^{n+1}} |b(z) - b_{2B}| |f(z)| dz \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{j+2}B \setminus 2^{j+1}B} \frac{|x - y| \rho^*(|x - z|)}{|x - z|^{n+1}} |b(z) - b_{2B}| |f(z)| dz \end{aligned}$$

elde edilir. ρ^* fonksiyonunun doubling koşulunu sağlamasından, Hölder eşitsizliğinden ve Lemma 4.2.'den

$$\begin{aligned}
& \int_{2^{j+2}B \setminus 2^{j+1}B} \frac{|x-y|\rho^*(|x-z|)}{|x-z|^{n+1}} |b(z) - b_{2B}| |f(z)| dz \\
& \lesssim \frac{t\rho^*(2^{j+2}t)}{(2^{j+2}t)^{n+1}} \int_{2^{j+2}B \setminus 2^{j+1}B} |b(z) - b_{2B}| |f(z)| dz \\
& \lesssim \frac{\rho^*(2^{j+2}t)}{2^{j+2}} \left(\int_{2^{j+2}B} |b(z) - b_{2B}|^{\eta'} dz \right)^{1/\eta'} \left(\int_{2^{j+2}B} |f(z)|^\eta dz \right)^{1/\eta} \\
& \leq \frac{j+2}{2^{j+2}} \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \left((\rho^*(2^{j+2}t)\psi(2^{j+2}t))^\eta \int_{2^{j+2}B} |f(z)|^\eta dz \right)^{1/\eta}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|F_3(y)| & \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+2}{2^{j+2}} \left((\rho^*(2^{j+2}t)\psi(2^{j+2}t))^\eta \int_{2^{j+2}B} |f(z)|^\eta dz \right)^{1/\eta} \\
& \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} (M_{(\rho^*\psi)^\eta}(|f|^\eta)(x))^{1/\eta}
\end{aligned}$$

olur ki bu da

$$\int_B |F_3(y)| dy \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} (M_{(\rho^*\psi)^\eta}(|f|^\eta)(x))^{1/\eta}$$

olması demektir. Böylece (4.2) ve dolayısıyla istenilen gösterilmiş oldu. ■

Ana teoremin ispatında kullanılacak olan ikinci önermeyi vermeden önce bu önermenin ispatı için gerekli olan tanım ve sonuçları verelim.

Tanım 4.4. M^{dy} dyadic maksimal operatörü

$$M^{\text{dy}} f(x) = \sup_{R \in \mathcal{Q}, R \ni x} \int_R |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlanır. Burada supremum x noktasını içeren bütün $R \in \mathcal{Q}^{\text{dy}}$ küpleri üzerinden alınmaktadır ve \mathcal{Q}^{dy} ise bütün dyadic küplerin kümesi olup

$$\mathcal{Q}^{\text{dy}} = \left\{ Q_{j,k} = \prod_{i=1}^n [2^{-j}k_i, 2^{-j}(k_i + 1)) : j \in \mathbb{Z}, k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

ile verilmektedir.

Lemma 4.5. Her $\gamma > 0$, $\lambda > 0$, lokal integrallenebilir f için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\text{dy}} f(x) > 2\lambda, M^{\sharp} f(x) \leq \gamma\lambda\}| \leq 2^n \gamma |\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\text{dy}} f(x) > \lambda\}|.$$

eşitsizliği gerçekleşir [7].

Ana teoremin ispatında kullanılacak olan ikinci önerme ve ispatı aşağıdaki gibidir.

Önerme 4.6. $\Phi \in \Delta_2$ olsun. Eğer $M^{\text{dy}} f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\|M^{\text{dy}} f\|_{L^{\Phi}} \leq C \|M^{\sharp} f\|_{L^{\Phi}} \quad (4.3)$$

olur. Burada C pozitif sabiti yalnızca n sayısı ve Φ fonksiyonuna bağlıdır [14].

İspat. N pozitif reel sayısı için

$$I_N = \int_0^N \Phi'(\lambda) |\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\text{dy}} f(x) > \lambda\}| d\lambda$$

tanımını yapalım. $I_N \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(M^{\text{dy}} f(x)) dx < \infty$ olduğuna dikkat çekelim. Lemma 2.14. kullanılarak

$$\begin{aligned} I_N &= 2 \int_0^{N/2} \Phi'(2\lambda) |\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\text{dy}} f(x) > 2\lambda\}| d\lambda \\ &\leq 2C_{\Phi} \int_0^{N/2} \Phi'(\lambda) |\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\text{dy}} f(x) > 2\lambda\}| d\lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi ise Lemma 4.5. kullanılırsa

$$\begin{aligned} I_N &\leq 2C_{\Phi} \int_0^{N/2} \Phi'(\lambda) |\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\text{dy}} f(x) > 2\lambda, M^{\sharp} f(x) \leq \gamma\lambda\}| d\lambda \\ &\quad + 2C_{\Phi} \int_0^{N/2} \Phi'(\lambda) |\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\sharp} f(x) > \gamma\lambda\}| d\lambda \\ &\leq 2^{n+1} C_{\Phi} \gamma \int_0^{N/2} \Phi'(\lambda) |\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\text{dy}} f(x) > \lambda\}| d\lambda \\ &\quad + 2C_{\Phi} \int_0^{N/2} \Phi'(\lambda) |\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\sharp} f(x) > \gamma\lambda\}| d\lambda \\ &\leq 2^{n+1} C_{\Phi} \gamma + 2C_{\Phi} \frac{1}{\gamma} \int_0^{N/2} \Phi'(\lambda/\gamma) |\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\sharp} f(x) > \lambda\}| d\lambda \end{aligned}$$

olur. Bu noktada $2^{n+1}C_\Phi\gamma = 1/2$ olsun. I_N sonlu olduğundan eşitsizliğin her iki tarafından $I_N/2$ çıkartılarak

$$\begin{aligned} I_N &\leq 2^{n+4}C_\Phi^2 \int_0^{N/(2^{n+3}C_\Phi)} \Phi'(2^{n+2}C_\Phi\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : M^\sharp f(x) > \lambda\}|d\lambda \\ &\leq C_{n,\Phi} \int_0^\infty \Phi'(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : M^\sharp f(x) > \lambda\}|d\lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(M^{\text{dy}} f(x))dx \leq C_{n,\Phi} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(M^\sharp f(x))dx$$

olur. Bu ise (4.3) eşitsizliğinin doğruluğu demektir. ■

5. TEMEL SONUÇLAR

Bu bölümde tezin temel araştırma alanı olan aşağıdaki teorem yani $[b, I_\rho]$ operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığı incelenecektir. Bu teorem [14] çalışmasında ispatlanmıştır.

Teorem 5.1. $\rho, \psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ve $\Phi, \Psi \in \overline{\Phi}_Y$ olsun. Kabul edelim ki ρ (1.2) koşulunu sağlasın ve $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

(i) $\Phi, \Psi \in \overline{\Delta}_2 \cap \overline{\nabla}_2$, ψ neredeyse artan ve bir $\epsilon \in (0, n)$ için $r \mapsto \rho(r)/r^{n-\epsilon}$ neredeyse azalan olsun. Yine kabul edelim ki her $r \in (0, \infty)$

$$\int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt \Phi^{-1}(1/r^n) + \int_r^\infty \frac{\rho(t) \Phi^{-1}(1/t^n)}{t} dt \leq A \Theta^{-1}(1/r^n), \quad (5.1)$$

$$\psi(r) \Theta^{-1}(1/r^n) \leq A \Psi^{-1}(1/r^n) \quad (5.2)$$

olacak şekilde A sabiti ve $\Theta \in \overline{\nabla}_2$ fonksiyonu ve her $r, s \in (0, \infty)$ için

$$\left| \frac{\rho(r)}{r^n} - \frac{\rho(s)}{s^n} \right| \leq C_\rho |r - s| \frac{\rho^*(r)}{r^{n+1}} \quad \text{eğer } \frac{1}{2} \leq \frac{r}{s} \leq 2 \quad (5.3)$$

olacak şekilde C_ρ pozitif sabiti var olsun. Eğer $b \in \mathcal{L}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$ ise $[b, I_\rho]$ operatörü $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır ve her $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|[b, I_\rho]f\|_{L^\Psi} \leq C \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \|f\|_{L^\Phi} \quad (5.4)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği bir C pozitif sabiti vardır.

(ii) Tersine, kabul edelim ki öyle bir A pozitif sabiti vardır ki her $r \in (0, \infty)$ için

$$\Psi^{-1}(1/r^n) \leq A r^\alpha \psi(r) \Phi^{-1}(1/r^n)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Eğer $[b, I_\rho]$ iyi tanımlı ve $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise bu durumda b fonksiyonu $\mathcal{L}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir ve b fonksiyonundan bağımsız öyle bir

A pozitif sabiti vardır ki

$$\|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \leq C \| [b, I_\alpha] \|_{L^\Phi \rightarrow L^\Psi}$$

olur. Burada $\| [b, I_\alpha] \|_{L^\Phi \rightarrow L^\Psi}$ ile $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına $[b, I_\alpha]$ operatörünün operator normu gösterilmektedir.

Örnek 5.2. $\alpha \in (0, n)$, $\beta \in [0, 1]$ ve $p, q \in (1, \infty)$ olmak üzere

$$\rho(r) = r^\alpha, \quad \psi(r) = r^\beta, \quad \Phi(r) = r^p, \quad \Psi(r) = r^q$$

olsun. Kabul edelim ki $-n/p + \alpha + \beta = -n/q$ eşitliği geçerli olsun. $-n/\tilde{q} = -n/p + \alpha$ olmak üzere $\Theta(r) = r^{\tilde{q}}$ alınsın. Bu durumda (5.1), (5.2) ve (5.3) koşulları sağlanır yani $[b, I_\alpha]$ operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ to $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Burada eğer $\beta \in (0, 1]$ ise $b \in \text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ ve eğer $\beta = 0$ ise $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir.

Detaylı incelemeye geçmeden önce $\theta \in (0, \infty)$ için

$$\| |g|^\theta \|_{L^\Phi} = (\|g\|_{L^\Phi(\cdot)^\theta})^\theta \quad (5.5)$$

olduğuna dikkat çekelim.

Asıl teoremin ispatında aşağıdaki önermeye ihtiyaç duymaktayız.

Lemma 5.3. Teorem 5.1. (i) hipotezleri altında eğer $f \in L^\infty_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$ ise $I_\rho f \in L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ olur [14].

İspat. $L^\infty_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n) \subset L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ olduğundan eğer $f \in L^\infty_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$ ise $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ olur. (5.1) ve Teorem 2.17.'den I_ρ , $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Theta(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Bu durumda $I_\rho f$ fonksiyonu $L^\Theta(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir. Diğer yandan $r \mapsto \rho(r)/r^n$ neredeyse azalan olduğundan eğer f fonksiyonunun desteği $B(0, R)$ yuvarında ise

$$|I_\rho f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} = \int_{B(0,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy \lesssim \|f\|_{L^\infty} \int_0^R \frac{\rho(t)}{t} dt < \infty$$

elde edilir. Böylece $I_\rho f$ fonksiyonu $L^\Theta(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ kümesine aittir.

Devam edersek (5.2) ve ψ fonksiyonunun neredeyse artanlığından

$$\Theta^{-1}(1/r^n) \lesssim \frac{\psi^{-1}(1/r^n)}{\psi(r)} \lesssim \frac{\psi^{-1}(1/r^n)}{\psi(1)}, \quad r \geq 1$$

olur. Dolayısıyla

$$\Theta^{-1}(u) \lesssim \Psi^{-1}(u), \quad u \leq 1$$

eşitsizliği gerçekleşir. Sonuç olarak

$$\Psi(t) \leq \begin{cases} \Theta(Ct), & \text{eğer } t \leq 1, \\ \infty, & \text{eğer } t > 1 \end{cases}$$

elde edilir ki bu da $L^\Theta(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ olması demektir. ■

Teorem 5.1. (i) İspatı: $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve $\Theta \in \Delta_2$ olduğunu kabul edebiliriz. $[b, I_\rho]f$, b fonksiyonuna göre lineer ve $\|\mathfrak{R}(b)\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}}, \|\mathfrak{S}(b)\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \leq \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}}$ olduğundan b fonksiyonunu da reel değerli kabul edebiliriz.

$$b_k(x) = \begin{cases} k, & \text{if } b(x) > k, \\ b(x), & \text{if } -k \leq b(x) \leq k, \\ -k, & \text{if } b(x) < -k \end{cases}$$

olsun.

Bu durumda $b_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $\|b_k\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \leq (9/4)\|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}}$ olur. $f \in C_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ için $b_k f \in L_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayındadır böylece Lemma 5.3. sebebiyle $I_\rho(b_k f)$ fonksiyonu $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayındadır. Aynı şekilde $b_k I_\rho f$ fonksiyonu da $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir. $\Psi \in \nabla_2$ olduğundan $M^{\text{dy}}[b, I_\rho]f$ yine $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayındadır. Bu gerçek ve Önermeler 4.3. ve 4.6. kullanılarak

$$\begin{aligned} \|[b_k, I_\rho]f\|_{L^\Psi} &\leq \|M^{\text{dy}}([b_k, I_\rho]f)\|_{L^\Psi} \lesssim \|M^\#([b_k, I_\rho]f)\|_{L^\Psi} \\ &\lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \left(\left\| (M_{\psi^\eta}(|I_\rho f|^\eta))^{1/\eta} \right\|_{L^\Psi} \right) + \left(\left\| (M_{(\rho^* \psi)^\eta}(|f|^\eta))^{1/\eta} \right\|_{L^\Psi} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ki burada Lemma 2.15. yardımıyla $\Phi((\cdot)^{1/\eta})$, $\Psi((\cdot)^{1/\eta})$ ve $\Theta((\cdot)^{1/\eta})$ fonksiyonları $\overline{\nabla}_2$ koşulunu sağlayacak şekilde $\eta \in (1, \infty)$ seçebiliriz. Şimdi

$$\left\| (M_{\psi^\eta} |I_\rho f|^\eta)^{1/\eta} \right\|_{L^\Psi} + \left\| (M_{(\rho^* \psi)^\eta} (|f|^\eta))^{1/\eta} \right\|_{L^\Psi} \lesssim \|f\|_{L^\Phi}$$

olduğunu göstereceğiz. İşleme başlamadan önce ψ^η ve $(\rho^* \psi)^\eta$ fonksiyonlarının neredeyse artan olduğuna dikkat çekelim.

Teoremler 2.17. ve 3.2. yardımıyla sırasıyla I_ρ operatörünün $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Theta(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve M_{ψ^η} operatörünün $L^{\Theta((\cdot)^{1/\eta})}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{\Psi((\cdot)^{1/\eta})}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğu görülebilir. Bu durumda (5.5) kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\| (M_{\psi^\eta} (|I_\rho f|^\eta))^{1/\eta} \right\|_{L^\Psi} &= \left(\|M_{\psi^\eta} (|I_\rho f|^\eta)\|_{L^{\Psi((\cdot)^{1/\eta})}} \right)^{1/\eta} \\ &\lesssim \left(\| |I_\rho f|^\eta \|_{L^{\Theta((\cdot)^{1/\eta})}} \right)^{1/\eta} = \|I_\rho f\|_{L^\Theta} \lesssim \|f\|_{L^\Phi} \end{aligned}$$

elde edilir. (5.1) ve (5.2) koşullarından

$$(\rho^*(r)\psi(r))^\eta (\Phi^{-1}(1/r^n))^\eta \leq A^{2\eta} (\Psi^{-1}(1/r^n))^\eta$$

olur. Teorem 3.2. kullanılarak $M_{(\rho^* \psi)^\eta}$ operatörünün $L^{\Phi((\cdot)^{1/\eta})}$ uzayından $L^{\Psi((\cdot)^{1/\eta})}$ uzayına sınırlılığını elde edilir. Yani

$$\left\| (M_{(\rho^* \psi)^\eta} (|f|^\eta))^{1/\eta} \right\|_{L^\Psi} = \left(\|M_{(\rho^* \psi)^\eta} (|f|^\eta)\|_{L^{\Psi((\cdot)^{1/\eta})}} \right)^{1/\eta} \lesssim \left(\| |f|^\eta \|_{L^{\Phi((\cdot)^{1/\eta})}} \right)^{1/\eta} = \|f\|_{L^\Phi}$$

olur. Böylece her $f \in C_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|[b_{k_j}, I_\rho]f\|_{L^\Psi} \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \|f\|_{L^\Phi}$$

elde etmiş olduk. Bu aşamadan sonra standart yol izlenirse (Bkz. [7]) tamsayıların bir k_j altdizisi için hemen her yerde $[b_{k_j}, I_\rho]f \rightarrow [b, I_\rho]f$ sonucu elde edilir. $j \rightarrow \infty$ için limite geçilir ve Fatou lemması kullanılırsa her $f \in C_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|[b, I_\rho]f\|_{L^\Psi} \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \|f\|_{L^\Phi}$$

elde edilir. $C_{\text{comp}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğundan komütatörün (5.4) eşitsizliğini sağlayan $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı bir genişlemesi vardır.

Teorem 5.1. (ii) İspatı: Janson [10] çalışmasındaki metot kullanılacaktır. $|z|^{n-\alpha}$ bir açık kümede her mertebeden diferansiyellenebilir olduğundan $|z|^{n-\alpha}$, $|z-z_0| < 2\delta$ komşuluğunda mutlak yakınsak bir Fourier serisi ile temsil edilecek şekilde yani $|z|^{n-\alpha} = \sum a_j e^{iv_j \cdot z}$ olacak şekilde $z_0 \neq 0$ ve $\delta > 0$ seçebiliriz. (v_j vektörlerinin net formu bizi ilgilendirmemektedir.)

$z_1 = z_0/\delta$ olarak alınsın. Eğer $|z - z_1| < 2$ ise

$$|z|^{n-\alpha} = \delta^{-n+\alpha} |\delta z|^{n-\alpha} = \delta^{-n+\alpha} \sum a_j e^{iv_j \cdot \delta z}$$

açılımı vardır. Şimdi keyfi $B = B(x_0, r)$ yuvarı seçilsin. $y_0 = x_0 - rz_1$ ve $B' = B(y_0, r)$ olarak tanımlansın. Bu durumda eğer $x \in B$ ve $y \in B'$ ise

$$\left| \frac{x-y}{r} - z_1 \right| \leq \left| \frac{x-x_0}{r} \right| + \left| \frac{y-y_0}{r} \right| \leq 2$$

elde edilir. $sgn(f(x) - f_{B'})$, $s(x)$ ile gösterilsin. O zaman

$$\begin{aligned} \int_B |b(x) - b_{B'}| dx &= \int_B (b(x) - b_{B'}) s(x) dx = \frac{1}{|B'|} \int_B \int_{B'} (b(x) - b(y)) s(x) dy dx \\ &= \frac{1}{|B'|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) \frac{r^{n-\alpha} \left| \frac{x-y}{r} \right|^{n-\alpha}}{|x-y|^{n-\alpha}} s(x) \chi_B(x) \chi_{B'}(y) dy dx \\ &= \frac{r^{n-\alpha} \delta^{n-\alpha}}{|B'|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b(x) - b(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \sum a_j e^{iv_j \cdot \delta \frac{x}{r}} s(x) \chi_B(x) \chi_{B'}(y) dy dx \end{aligned}$$

elde edilir. $C = \delta^{-n+\alpha} |B(0, 1)|^{-1}$ ve

$$g_j(y) = e^{-iv_j \cdot \delta \frac{x}{r}} \chi_{B'}(y), \quad h_j(x) = e^{iv_j \cdot \delta \frac{x}{r}} s(x) \chi_B(x)$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_B |b(x) - b_{B'}| dx &= Cr^{-\alpha} \sum a_j \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b(x) - b(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} g_j(y) h_j(x) dy dx \\
&= Cr^{-\alpha} \sum a_j \int_{\mathbb{R}^n} ([b, I_\alpha] g_j)(x) h_j(x) dx \\
&\leq Cr^{-\alpha} \sum |a_j| \int_{\mathbb{R}^n} |([b, I_\alpha] g_j)(x)| |h_j(x)| dx \\
&= Cr^{-\alpha} \sum |a_j| \int_B |([b, I_\alpha] g_j)(x)| dx \\
&\leq 2Cr^{-\alpha} \sum |a_j| \|\chi_B\|_{L^\Psi} \| [b, I_\alpha] g_j \|_{L^\Psi} \\
&\leq 2Cr^{-\alpha} \| [b, I_\alpha] \|_{L^\Phi \rightarrow L^\Psi} |B| \Psi^{-1}(|B|^{-1}) \sum |a_j| \|g_j\|_{L^\Psi}
\end{aligned}$$

olur. $\|g_j\|_{L^\Phi} = \|\chi_{B'}\|_{L^\Phi} = 1/\Phi^{-1}(|B'|^{-1}) \sim 1/\Phi^{-1}(r^{-n})$ olduğundan

$$\frac{1}{\psi(B)} \int_B |b(x) - b_{B'}| dx \lesssim \| [b, I_\alpha] \|_{L^\Phi \rightarrow L^\Psi} \frac{\Psi^{-1}(r^{-n})}{r^\alpha \psi(B) \Phi^{-1}(r^{-n})} \lesssim \| [b, I_\alpha] \|_{L^\Phi \rightarrow L^\Psi}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Yani $\|b\|_{\mathcal{L}_{1,\psi}} \lesssim \| [b, I_\alpha] \|_{L^\Phi \rightarrow L^\Psi}$ olur ve istenilen gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1]. Arai, R. and Nakai, E., 2018, *Commutators of Calderón-Zygmund and generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces*, Rev. Mat. Complut. 31, no. 2, 287-331.
- [2]. Chanillo, S., 1982, *A note on commutators*, Indiana Univ. Math. J. 31, no. 1, 7-16.
- [3]. Cianchi, A., 1999, *Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces*, J. London Math. Soc., 2, 1, 187-202.
- [4]. Deringoz, F., Guliyev, V. S., Nakai, E., Sawano, Y., Shi M., 2019, *Generalized fractional maximal and integral operators on Orlicz and generalized Orlicz–Morrey spaces of the third kind*, Positivity. 23, no. 3, 727-757.
- [5]. Edmunds, D. E., Gurka, P. and Opic, B., 1995, *Double exponential integrability of convolution operators in generalized Lorentz-Zygmund spaces*, Indiana Univ. Math. J. 44, no. 1, 19-43.
- [6]. Fu, X., Yang, D. and Yuan, W., 2014, *Generalized fractional integrals and their commutators over non-homogeneous metric measure spaces*, Taiwanese J. Math. 18, no. 2, 509-557.
- [7]. Grafakos, L., 2004, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.
- [8]. Guliyev, V. S., Deringoz, F., and Hasanov, S. G., 2017, *Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces*, J. Inequal. Appl., no. 75, 18 pp.
- [9]. Iaffei, B., 1996, *Comparison of two weak versions of the Orlicz spaces*, Rev. Un. Mat. Argentina 40, no. 1–2, 191-202.
- [10]. Janson, S., 1978, *Mean oscillation and commutators of singular integral operators*, Ark. Mat. 16, no. 2, 263-270.

- [11]. Kawasumi, Ryota., Eiichi, Nakai., 2020, *Pointwise multipliers on weak Orlicz spaces*, Hiroshima Math. J. 50, no. 2, 169-184.
- [12]. Kokilashvili, V., Krbeč, M. M., 1991, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, World Scientific, Singapore.
- [13]. Krasnoselskii, M. A., Rutickii, Ya. B., 1961, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, English translation P. Noordhoff Ltd., Groningen.
- [14]. Minglei, Shi., Ryutaro, Arai., Eiichi, Nakai., 2019, *Generalized fractional integral operators and their commutators with functions in generalized Campanato spaces on Orlicz spaces*, Taiwanese J. Math. 23, no. 6, 1339-1364.
- [15]. Nakai, E., 2001, *On generalized fractional integrals*, Taiwanese J. Math. 5, no. 3, 587-602.
- [16]. Nakai, E., 2008, *A generalization of Hardy spaces H^p by using atoms*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 24, no. 8, 1243-1268.
- [17]. O'Neil, R., 1965, *Fractional integration in Orlicz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 115, 300-328.
- [18]. Orlicz, W., 1988, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus, B*, Bull. Acad. Polon. A, 207-220 ; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, 217-230.
- [19]. Orlicz, W., 1988, *Über Räume (L^M)*, B. Bull. Acad. Polon. A, 93-107 ; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, 345-359.
- [20]. Pick, Luboš., Kufner, Alois., John, Oldřich., Fučík, Svatopluk., 2013, *Function spaces*, Vol. 1. Second revised and extended edition. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 14. Walter de Gruyter & Co., Berlin, xvi+479 pp. ISBN: 978-3-11-025041-1; 978-3-11-025042-8.
- [21]. Rao, M. M., Ren, Z. D., 1991, *Theory of Orlicz Spaces*, M. Dekker, Inc., New York.
- [22]. Strichartz, R. S., 1972., *A note on Trudinger's extension of Sobolev's inequalities*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 841-842.

- [23]. Torchinsky, A., 1976., *Interpolation of operations and Orlicz classes*, Studia Math. 59, no. 2, 177-207.
- [24]. Trudinger, N. S., 1967, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 17, 473-483.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Alpgiray TEKİN
Doğum Yeri	Nevşehir
Uyruğu	T.C.

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Gazi Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2000

Yüksek Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	2021