



T.C.  
KIRSEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN  
MUSIELAK-ORLICZ-MORREY  
UZAYLARINDA SINIRLILIĞI**

**Kendal DORAK**

**DOKTORA TEZİ**

**KIRSEHİR**

**2025**



T.C.  
KIRSEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN  
MUSIELAK-ORLICZ-MORREY  
UZAYLARINDA SINIRLILIĞI**

**KENDAL DORAK**

**DOKTORA TEZİ**

**DANIŞMAN  
PROF. DR. FATİH DERİNGÖZ**

**KIRSEHİR  
2025**

**KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**DOKTORA TEZ ÇALIŐMASI**  
**ETİK BEYANI**

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etięi Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduęum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettięimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 17/06/2025

Öğrenci  
Kendal DORAK

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
<b>İÇİNDEKİLER DİZİNİ</b> . . . . .	<b>I</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .	<b>II</b>
<b>ÖZET</b> . . . . .	<b>III</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>IV</b>
<b>SİMGE VE KISALTMA DİZİNİ</b> . . . . .	<b>V</b>
<b>1. GİRİŞ</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1. Temel Kavramlar . . . . .	3
2.2. Musielak-Orlicz Fonksiyonları . . . . .	3
2.3. Musielak-Orlicz Uzayları . . . . .	5
2.4. Zayıf Musielak-Orlicz Uzayları . . . . .	8
<b>3. MATERYAL VE METOT</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>4. BULGULAR TARTIŞMA</b> . . . . .	<b>11</b>
4.1. Musielak-Orlicz-Morrey Uzayları . . . . .	11
4.2. Maksimal Operatörün Musielak-Orlicz-Morrey Uzaylarındaki Sınırlılığı . . . . .	12
4.3. Riesz Potansiyelinin Musielak-Orlicz-Morrey Uzaylarındaki Sınırlılığı . . . . .	15
4.4. Kesirli Maksimal Operatörün Musielak-Orlicz-Morrey Uzaylarındaki Sınırlılığı . . . . .	18
4.5. Zayıf Tipli Sonuçlar . . . . .	20
4.6. Özel Durumlar . . . . .	23
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>KAYNAKLAR</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> . . . . .	<b>35</b>

## **TEŞEKKÜR**

Yüksek öğrenim hayatım boyunca bir bilim insanının nasıl olması gerektiğini gösteren, çalışma tarzını örnek alabilmem için fırsat veren, bu tezin hazırlanmasında gösterdiği sabırlı ve anlayışlı hali ile yardımlarını ve tecrübelerini esirgemeyen, konu farketmeksizin bütün sorularıma derin bir içtenlikle cevap veren, karşılaştığım tüm zorluklarda tavsiye ve yardımlarını esirgemeyen, her anlamda rol model olarak benimsediğim ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ'e en içten şükranlarımı sunuyorum.

Doktora öğrenimim boyunca yanımda olan ve destekleyen arkadaşlarım Mücahit ÖZKAYA ve Emre KESKİNLİ'ye teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca motive eden ve sevgisinden güç aldığım kıymetli müstakbel hayat arkadaşım Semanur TEKELİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Öğrenim hayatım boyunca bugünlere gelmemde verdikleri emek ve sevgiyle bana destek olan aileme, bu yoldaki engebeleri daha aşılabilir hale getiren, maddi manevi yardımını ve desteğini esirgemeyen ağabeyim Serkan DORAK'a teşekkürlerimi iletirim.

Haziran, 2025

Kendal DORAK

## ÖZET

### DOKTORA TEZİ

# BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN MUSIELAK-ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Kendal DORAK

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ

Yıl: 2025 Sayfa: 35

Jüri: Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ

Prof. Dr. Emre TAŞ

Doç. Dr. Abdulhamit KÜÇÜKASLAN

Doç. Dr. Mahmut MAK

Dr. Öğr. Üyesi Faruk YILMAZ

Bu tezde, üçüncü tip Orlicz-Morrey uzaylarından hareketle, Musielak-Orlicz uzayları ile genelleştirilmiş Morrey uzaylarını bütünleştiren ve Musielak-Orlicz-Morrey uzayları olarak adlandırılan yeni bir fonksiyon uzayı sınıfı tanımlanmıştır. Tanıtılan bu yapı çerçevesinde, harmonik analizin klasik operatörlerinden maksimal operatör, kesirli maksimal operatör ve kesirli integral operatörlerin bu uzaylardaki sınırlılık davranışları sistematik olarak incelenmiştir. Ayrıca ulaşılan genel sonuçların, Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarının özel durumlarına indirgenmesiyle elde edilen özgün bulgular sunularak alana bu yönüyle de yeni katkılar sağlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Musielak-Orlicz uzayları, Orlicz-Morrey uzayları, Genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayları, Musielak-Orlicz-Morrey uzayları, Maksimal operatör, Kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyeli

## ABSTRACT

### PhD THESIS

# BOUNDEDNESS OF SOME CLASICAL OPERATORS IN MUSIELAK-ORLICZ-MORREY SPACES

Kendal DORAK

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY  
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

**Supervisor:** Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ

**Year:** 2025 **Pages:** 35

**Juries:** Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ

Prof. Dr. Emre TAŞ

Assoc. Prof. Dr. Abdulhamit KÜÇÜKASLAN

Assoc. Prof. Dr. Mahmut MAK

Asst. Prof. Dr. Faruk YILMAZ

In this thesis, based on Orlicz-Morrey spaces of the third type, a new class of function spaces - Musielak-Orlicz-Morrey spaces - has been defined by unifying Musielak-Orlicz spaces with generalized Morrey spaces. Within the framework of this structure, the boundedness behavior of the classical operators of harmonic analysis such as maximal operator, fractional maximal operator and fractional integral operator on these spaces have been systematically investigated. Furthermore, by reducing the obtained general results to special cases of Musielak-Orlicz-Morrey spaces, original findings have been presented, thereby providing new contributions to the field in this aspect as well.

**Keywords:** Musielak-Orlicz spaces, Orlicz-Morrey spaces, Generalized variable exponent Morrey spaces, Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Maximal operator, Fractional maximal operator, Riesz potential

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\mathcal{M}_w^{\Phi, \phi}(\mathbb{R}^n)$	: Ağırlıklı Orlicz-Morrey Uzayı
$L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$	: Ağırlıklı Değişken Üslü Lebesgue Uzayı
$\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi}(\mathbb{R}^n)$	: Değişken Üslü Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$	: Değişken Üslü Lebesgue Uzayı
$\mathcal{M}^{p, \phi}(\mathbb{R}^n)$	: Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
$M$	: Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü
$M_\alpha$	: Kesirli Maksimal Operatörü
$\mathcal{M}^{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$	: Morrey Uzayı
$\mathcal{M}^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)$	: Musielak-Orlicz-Morrey Uzayı
$L^\varphi(\mathbb{R}^n)$	: Musielak-Orlicz Uzayı
$\mathcal{M}^{\Phi, \phi}(\mathbb{R}^n)$	: Orlicz-Morrey Uzayı
$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$	: Orlicz Uzayı
$L^0(\mathbb{R}^n)$	: Ölçülebilir Fonksiyonlar Sınıfı
$I_\alpha$	: Riesz Potansiyeli
$W\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi}(\mathbb{R}^n)$	: Zayıf Değişken Üslü Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
$W\mathcal{M}^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)$	: Zayıf Musielak-Orlicz-Morrey Uzayı
$WL^\varphi(\mathbb{R}^n)$	: Zayıf Musielak-Orlicz Uzayı

## 1. GİRİŞ

Genelleştirilmiş Orlicz uzayları ya da Orlicz-Nakano uzayları olarak da adlandırılan Musielak-Orlicz uzaylarının teorisi 1931 yılında Orlicz [45] tarafından yapılan şu tespite dayanmaktadır: “ $L^p$  uzaylarındaki  $p$  kuvveti, teoremin özünü kaybetmeden bir fonksiyonla değiştirilebilir.” Daha açık bir ifadeyle, Orlicz bahsi geçen çalışmada

$$\int_0^1 |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir  $f$  fonksiyonlar sınıfını tanıtmıştır. Nitekim bu sınıf, son 20 yıldır aktif araştırma konusu olan ve literatürde binlerce makaleye esin kaynağı olan değişken üslü Lebesgue uzaylarıdır. Ne var ki Orlicz, bu tek makalenin ardından değişken üslü uzaylar alanındaki çalışmalarını terk ederek, günümüzde kendi adıyla bilinen fonksiyon uzayları teorisine yoğunlaşmıştır [46, 47]. Orlicz uzayları, klasik  $L^p$  uzaylarının bir genellemesidir. Bu uzaylarda,  $L^p$  uzaylarının tanımında kullanılan  $|\cdot|^p$  fonksiyonunun yerini Orlicz fonksiyonu (Bkz. Tanım 2.1.) olarak adlandırılan bir  $\Phi(\cdot)$  fonksiyonu alır.  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ölçü uzayı olmak üzere verilen bir Orlicz fonksiyonu  $\Phi$  için  $L^\Phi$  Orlicz uzayı, bazı  $\lambda > 0$  değerleri için

$$\rho(\lambda f) = \int_X \Phi(|\lambda f|) d\mu < \infty \quad (1.1)$$

şartını sağlayan ölçülebilir  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır. Musielak-Orlicz fonksiyon uzayları, Orlicz uzaylarının doğal bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Şöyle ki, (1.1) eşitliğindeki Orlicz fonksiyonu  $\Phi(\cdot)$  yerine bir  $x \in X$  parametresine bağlı olan Musielak-Orlicz fonksiyonu  $\varphi(x, \cdot)$  alınarak Musielak-Orlicz uzayları tanımlanır. Matematikte ortak konulardan biri soyutlaştırmadır. Diğer bir deyişle belli bir durumda söz konusu olan bir kavramın temel özelliklerini koruyarak onu daha genel bir duruma genişletmektir. Bu amaç doğrultusunda (1.1) ifadesindeki  $\rho$  fonksiyonelinin belirli temel özellikleri soyutlanılarak modüler fonksiyon uzayları adı verilen daha geniş bir sınıf Nakano [43, 44] tarafından sistematik bir biçimde çalışılmıştır. Musielak-Orlicz uzayları ilk olarak Nakano'nun bu çalışmasında modüler uzaylar bağlamında sunulmuş ve Musielak ve Orlicz [38] tarafından geliştirilmiştir. Musielak [37], 1983'te yayınlanan kitabında Musielak-Orlicz uzaylarına dair temel sonuçları derlemiştir. Bu uzaylarla ilgili daha fazla bilgi için genelleştirilmiş Orlicz uzaylarının modern teorisi ve harmonik analiz ilişkisini kapsamlı şekilde ele alan Harjulehto ve Hästö [27] tarafından yazılan kitap ve bu kitaptaki referanslar incelenebilir.

Morrey uzaylarının tarihsel gelişimine bakıldığında, ilk olarak Morrey [36] tarafından quasilineer eliptik diferansiyel denklemlerin çözüm analizi için tanımlandığı görülmektedir. Daha sonra Guliyev, Mizuhara ve Nakai [15, 35, 39] bu uzayların genelleştirilmiş versiyonlarını ortaya koymuşlardır. Orlicz-Morrey uzayları Deringöz vd. [6] tarafından, klasik Orlicz

uzayları ile genelleştirilmiş Morrey uzaylarının yapısal özelliklerini birleştiren bir çerçeve olarak tanımlanmıştır.

Literatürde, Orlicz-Morrey uzaylarının farklı tanımları mevcuttur. [21] numaralı çalışmada kullanılan terminolojiye göre, [6]'daki tanım "üçüncü tür", [40]'daki "birinci tür" ve [50]'deki ise "ikinci tür" olarak sınıflandırılmaktadır. [14] kapsamındaki örnekler, birinci ve ikinci tür ile ikinci ve üçüncü tür uzayların farklı yapılar olduğunu açıkça göstermektedir. Bununla birlikte, birinci ve üçüncü tür uzaylar arasındaki kesin ilişki halen açık bir problem olarak durmaktadır.

Temel bir ayırım olarak, üçüncü tür tanım yalnızca  $L^{\Phi}$  Orlicz uzayının normlu lineer uzay olma özelliğine dayanmakta ve modüler yapıdan bağımsızdır. Buna karşılık, birinci ve ikinci tür tanımlar modüler aileler kullanılarak inşa edilmiştir.

Bu tez, temel olarak üçüncü tür uzaylar çerçevesinde ilerlemektedir. Maksimal operatörler, singüler operatörler ve potansiyel operatörler gibi harmonik analizin klasik operatörlerinin bu uzaylarda ve ağırlıklı versiyonlarında sınırlı olduğu bilinmektedir. İlgili sonuçlar için [6, 8, 9, 10, 11, 12, 18, 19, 20] numaralı çalışmalar kaynak gösterilebilir. Dikkat çekelim ki sınırlılık çalışmaları, hem teorik derinlik hem de uygulama genişliği nedeniyle modern analizin canlı bir araştırma alanıdır.

[32, 34, 41] numaralı çalışmalarda çeşitli Musielak-Orlicz-Morrey uzay versiyonları tanıtılmıştır. [34, 41]'deki uzaylar birinci tür, [32]'deki uzaylar ise ikinci tür Musielak-Orlicz-Morrey uzayları olarak görülebilir. Üçüncü tür Musielak-Orlicz-Morrey uzayları ise şimdiye kadar incelenmemiştir.

Bu tezde üçüncü tip Orlicz-Morrey uzayı bakış açısıyla yukarıda bahsedilen tüm fonksiyon uzaylarını kapsayacak şekilde Musielak-Orlicz-Morrey uzayları tanıtılmış bu uzaylarda harmonik analizin klasik operatörlerinden Hardy-Littlewood maksimal operatörün, kesirli maksimal operatörün ve Riesz potansiyelinin sınırlılıkları araştırılmıştır. Matematiksel analizde, özellikle fonksiyon uzayları teorisinde, birçok temel norm eşitsizliğinin ispatı Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılık özelliğine dayanmaktadır (Bkz. Uyarı 2.14.). Çalışmamızda ele aldığımız kesirli maksimal operatörün ve Riesz potansiyelinin sınırlılıkları da esas olarak Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığına dayandığından, öncelikle bu operatörün Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki davranışı incelenmiş ve elde edilen sonuçların bir uygulaması olarak da kesirli maksimal operatörün ve Riesz potansiyelinin sınırlılıkları için gerek ve yeter koşullar elde edilmiş ve elde edilen bu sonuçların Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarının bazı özel hallerindeki yansımaları incelenmiştir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu kısımda, çalışmamızın teorik altyapısını oluşturan temel tanımlar, ilgili fonksiyon uzayları ve operatörler hakkında literatür bilgisi sunulmakta, aynı zamanda ana teoremlerimizin ispatında ihtiyaç duyulan yardımcı sonuçlara da değinilmektedir.

### 2.1. Temel Kavramlar

$B(x, r)$  ile  $\mathbb{R}^n$  Öklid uzayında  $x \in \mathbb{R}^n$  merkezli ve  $r > 0$  yarıçaplı yuvar ve  $\mathcal{B}$  ile de tüm bu yuvarların kümesi gösterilecektir. Ölçülebilir bir  $E \subset \mathbb{R}^n$  kümesinin (Lebesgue) ölçüsü için  $|E|$  ve bu kümenin karakteristik fonksiyonu için  $\chi_E$  gösterimi kullanılacaktır.  $L^0(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbb{R}^n$  üzerindeki bütün (Lebesgue) ölçülebilir fonksiyonların kümesidir. Bu çalışma boyunca,  $C > 0$  mutlak bir sabit olmak üzere  $A \lesssim B$  notasyonu ile  $A \leq CB$  eşitsizliğini ifade edeceğiz. Benzer şekilde, hem  $A \lesssim B$  hem de  $B \lesssim A$  sağlanıyorsa, bu durum  $A \approx B$  şeklinde gösterilecektir. "Neredeyse  $L$ -artan" ifadesi ile belli bir  $L \geq 1$  sabiti ve her  $s < t$  için  $f(s) \leq Lf(t)$  eşitsizliğini gerçekleyen bir fonksiyonu anlayacağız. "Neredeyse  $L$ -azalan" deyimi ile belli bir  $L \geq 1$  sabiti her  $s < t$  için  $f(s) \geq Lf(t)$  eşitsizliğini gerçekleyen bir fonksiyonu anlayacağız.

### 2.2. Musielak-Orlicz Fonksiyonları

Şimdi Musielak-Orlicz uzaylarını tanımlamak için kullanılan Musielak-Orlicz ( $MO$ ) fonksiyonlarının tanımı verilerek temel özellikleri incelenecektir. Bu bölüm [27] numaralı kaynak temel alınarak hazırlanmıştır.

**Tanım 2.1.** Eğer bir  $\varphi : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonu,

- Keyfi bir  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için  $x \mapsto \varphi(x, |f(x)|)$  fonksiyonu ölçülebilir,
- Her  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $t \mapsto \varphi(x, t)$  fonksiyonu artan,
- Her  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $\varphi(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x, t)$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = \infty$ ,
- $x$  noktasından bağımsız bir  $L$  sabiti ile  $t \mapsto \frac{\varphi(x, t)}{t}$  fonksiyonu  $(0, \infty)$  üzerinde neredeyse  $L$ -artan

koşullarını sağlıyorsa Musielak-Orlicz ( $MO$ ) fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer  $\varphi$  ( $MO$ ) fonksiyonu  $x$  değişkeninden bağımsız ise Orlicz fonksiyonu olarak adlandırılır.

**Tanım 2.2.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere,  $\varphi$  fonksiyonunun (genelleştirilmiş) tersi

$$\varphi^{-1}(x, \tau) := \inf\{t \geq 0 : \varphi(x, t) \geq \tau\}$$

ile tanımlanır.

**Tanım 2.3.**  $\varphi$  bir *MO* fonksiyonu olmak üzere,  $\varphi$  fonksiyonunun tümleyeni

$$\varphi^*(x, t) = \sup_{s \geq 0} (st - \varphi(x, u))$$

ile tanımlanır. Ayrıca  $\varphi$  fonksiyonunun tümleyeni tanımından her  $t, u \geq 0$  için

$$tu \leq \varphi(x, t) + \varphi^*(x, u)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Young eşitsizliği adı verilir.

Aşağıda tanımlanan koşullar maksimal operatörün sınırlılığını ve düzgün fonksiyonların yoğunluğunu garanti etmektedir.

**Tanım 2.4.**  $\varphi : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor denir:

(*aInc*)<sub>p</sub> Bir  $L_p \geq 1$  ve hemen her  $x \in \mathbb{R}^n$  için eğer  $t \mapsto \frac{\varphi(x, t)}{t^p}$  ( $p > 0$ ) fonksiyonu  $(0, \infty)$  üzerinde neredeyse  $L_p$ -artan oluyorsa.

(*aDec*)<sub>q</sub> Bir  $L_q \geq 1$  ve hemen her  $x \in \mathbb{R}^n$  için eğer  $t \mapsto \frac{\varphi(x, t)}{t^q}$  ( $q > 0$ ) fonksiyonu  $(0, \infty)$  üzerinde neredeyse  $L_q$ -azalan oluyorsa.

(A0) Eğer hemen her  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $\beta \leq \varphi^{-1}(x, 1) \leq \frac{1}{\beta}$  olacak şekilde  $\beta \in (0, 1]$  varsa.

(A1) Her  $t \in [1, \frac{1}{|B|}]$ , hemen her  $x, y \in B$ ,  $|B| \leq 1$  olacak şekildeki her  $B$  yuvarı için

$$\beta \varphi^{-1}(x, t) \leq \varphi^{-1}(y, t)$$

olacak şekilde  $\beta \in (0, 1)$  varsa.

(A2) Sırasıyla  $\varphi_\infty(t) \in [0, s]$  ve  $\varphi(x, t) \in [0, s]$  olduğunda hemen her  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$\varphi(x, \beta t) \leq \varphi_\infty(t) + h(x) \quad \text{ve} \quad \varphi_\infty(\beta t) \leq \varphi(x, t) + h(x)$$

olacak şekilde bir *MO* fonksiyonu  $\varphi_\infty$ ,  $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\beta \in (0, 1]$  ve  $s > 0$  varsa.

Eğer  $\varphi$  fonksiyonu bir  $p > 1$  için (*aInc*)<sub>p</sub> koşulunu sağlıyor ise  $\varphi$  fonksiyonu (*aInc*) koşulunu sağlar denir. Benzer olarak  $\varphi$  fonksiyonu bir  $q < \infty$  için (*aDec*)<sub>q</sub> koşulunu sağlıyor ise  $\varphi$  fonksiyonu (*aDec*) koşulunu sağlar denir.

**Tanım 2.5.**  $\varphi$  bir *MO* fonksiyonu olmak üzere olmak üzere

(i) Eğer her  $t \geq 0$  için

$$\varphi(2t) \leq c\varphi(t)$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir  $c$  sabiti varsa  $\varphi$ ,  $\Delta_2$  koşulunu sağlıyor denir. Bu durum  $\varphi \in \Delta_2$  ile gösterilir.

(ii) Eğer  $\varphi^* \in \Delta_2$  ise  $\varphi$ ,  $\nabla_2$  koşulunu sağlıyor denir. Bu durum  $\varphi \in \nabla_2$  ile gösterilir.

**Uyarı 2.6.** (*aInc*) ve (*aDec*) koşulları, sırasıyla, klasik Orlicz uzay teorisindeki  $\nabla_2$  ve  $\Delta_2$  koşullarına karşılık gelmekte olup sıklıkla problematik  $L^1$  ve  $L^\infty$  uzaylarını dışlamak için kullanılır.

### 2.3. Musielak-Orlicz Uzayları

Musielak-Orlicz uzayları; klasik Lebesgue uzayları, Orlicz uzayları ve değişken üslü uzaylar gibi yaygın olarak çalışılan fonksiyon uzaylarını özel durum olarak içermektedir. Bu uzaylar hem değişken üslü hem de Orlicz uzaylarında elde edilen sonuçları kapsayan doğal bir genelleme olmasının yanı sıra, lineer olmayan diferansiyel denklemler, görüntü işleme ve akışkanlar dinamiği gibi geniş uygulama alanlarına sahiptir.

**Tanım 2.7.**  $\varphi$  bir *MO* fonksiyonu olmak üzere Musielak-Orlicz uzayı  $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$ , belli bir  $\lambda > 0$  için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, \lambda|f(x)|)dx < \infty$$

koşulunu sağlayan  $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.  $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$ , üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L^\varphi} \equiv \|f\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)} := \inf\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, \frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1\}$$

(quasi) normu ile bir (quasi) Banach uzayıdır [27].

**Uyarı 2.8.** Yukarıdaki tanım,  $E \subset \mathbb{R}^n$  alt kümelerine

$$\|f\|_{L^\varphi(E)} \equiv \|f\chi_E\|_{L^\varphi}$$

anlamında kolaylıkla kısıtlanabilir.

**Lemma 2.9.**  $\varphi$  bir *MO* fonksiyonu olmak üzere  $f \in L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  ve  $g \in L^{\varphi^*}(\mathbb{R}^n)$  olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||g(x)|dx \leq 2\|f\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{\varphi^*}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği sağlanır [27, Lemma 3.2.11].

**Lemma 2.10.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere  $(A0)$ ,  $(A1)$  ve  $(A2)$  koşullarını sağlansın. Bu durumda bütün  $B \subset \mathbb{R}^n$  yuvarları için

$$\|\chi_B\|_{L^\varphi} \|\chi_B\|_{L^{\varphi^*}} \approx |B|$$

elde edilir [27, Önerme 4.4.8].

Şimdi bu tezde sınırlılık özellikleri incelenecek olan maksimal, kesirli maksimal, kesirli integral (Riesz potansiyeli) operatörler hakkında bilgi verilecektir.

**Tanım 2.11.**  $f$  lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, Hardy-Littlewood maksimal operatörü  $M$ ,

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlı operatördür.

Hardy-Littlewood maksimal operatörün Musielak-Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı Hästö [28] tarafından ispatlanmıştır.

**Teorem 2.12.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere  $(A0)$ ,  $(A1)$ ,  $(A2)$  ve  $(aInc)$  koşullarını sağlansın. Bu durumda her  $f \in L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  için

$$\|Mf\|_{L^\varphi} \lesssim \|f\|_{L^\varphi}$$

elde edilir.

**Tanım 2.13.**  $f, \mathbb{R}^n$  üzerinde lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve  $0 < \alpha < n$  için  $I_\alpha$  kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli) aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

**Uyarı 2.14.** Literatürde Hedberg eşitsizliği olarak bilinen ve  $I_\alpha$  ile  $M$  operatörlerini ilişkilendiren aşağıdaki noktasal eşitsizlik, ilk kez [29]'da ispatlanmıştır:

$$I_\alpha f(x) \lesssim Mf(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha p}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Bu eşitsizliğin önemli bir avantajı,  $I_\alpha$  operatörüyle ilişkili problemleri, genellikle çözümü daha kolay olan Hardy-Littlewood maksimal operatörü  $M$  ile ilişkili problemlere indirgeyebilmesidir. Örneğin,  $M$  operatörünün  $L^p(\mathbb{R}^n)$  uzaylarında sınırlı olması ve Hedberg eşitsizliği kullanılarak,  $I_\alpha$  operatörünün  $L^p(\mathbb{R}^n)$  üzerindeki sınırlılığı kolaylıkla elde edilebilir.

**Tanım 2.15.**  $\mathbb{R}^n$  üzerinde lokal integrallenebilir bir  $f$  fonksiyonu ve  $0 \leq \alpha < n$  parametresi için  $M_\alpha$  kesirli maksimal operatörü şöyle tanımlanır:

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Özellikle  $\alpha = 0$  alındığında  $M_0$  operatörü Hardy-Littlewood maksimal operatörü  $M$  ile çakışır.

**Uyarı 2.16.**  $I_\alpha$  ve  $M_\alpha$  operatörleri arasında  $0 < \alpha < n$ ,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  ve  $x \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere

$$M_\alpha(f)(x) \lesssim I_\alpha(|f|)(x) \tag{2.1}$$

ilişkisi vardır [33].

Aşağıda  $M$ ,  $I_\alpha$  ve  $M_\alpha$  operatörlerine ilişkin ana teoremlerin ispatında önemli rol oynayan standart eşitsizlikler sunulmaktadır. Literatürde yaygın olarak bilinen bu sonuçlar, çalışmanın bütünlüğünü sağlamak amacıyla basit ispatlarıyla birlikte verilecektir.

**Lemma 2.17.** Her  $z \in \mathbb{R}^n$  için

$$\chi_{B(x, 2r)}(z) \lesssim M\chi_{B(x, r)}(z)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

**İspat.**  $z \in B(x, 2r)$  olmak üzere  $B(x, r) \subset B(z, 3r)$  olduğu açıktır. Maksimal operatörün tanımı ve  $B(x, r) \subset B(z, 3r)$  olduğu dikkate alınırsa

$$M\chi_{B(x, r)}(z) \geq \frac{1}{|B(z, 3r)|} \int_{B(x, r)} \chi_{B(x, r)}(y) dy = \frac{|B(x, r)|}{|B(z, 3r)|} = 3^{-n}$$

elde edilir ve böylece istenilen eşitsizlik ispatlanmış olur. ■

**Lemma 2.18.**  $B_0 \subset \mathbb{R}^n$  keyfi fakat sabit bir yuvar olsun. Her  $x \in B_0$

$$M_\alpha(\chi_{B_0})(x) \gtrsim |B_0|^{\alpha/n}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

**İspat.**  $B_0 = B(x_0, r_0)$  olmak üzere  $x \in B_0$  için  $B_0 \subset B(x, 2r_0)$  olur. Kesirli maksimal operatörün tanımı ve bu kapsama dikkate alınırsa

$$M_\alpha \chi_{B_0}(x) \geq \frac{1}{|B(x, 2r_0)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x, 2r_0)} \chi_{B_0}(y) dy = \frac{|B_0|}{|B(x, 2r_0)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} = 2^{-n+\alpha} |B_0|^{\alpha/n}$$

elde edilir ve böylece istenilen eşitsizlik ispatlanmış olur. ■

**Lemma 2.19.**  $B_0 \subset \mathbb{R}^n$  keyfi fakat sabit bir yuvar olsun. Her  $x \in B_0$

$$I_\alpha(\chi_{B_0})(x) \gtrsim |B_0|^{\alpha/n}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

**İspat.**  $x, y \in B_0 := B(x_0, r_0)$  olmak üzere  $|x - y| \leq |x - x_0| + |x_0 - y| < 2r_0$  olur.  $|r_0|^{\alpha-n} \lesssim |x - y|^{\alpha-n}$  eşitsizliğinin her iki tarafı integre edilerek istenilen eşitsizlik ispatlanmış olur. ■

#### 2.4. Zayıf Musielak-Orlicz Uzayları

**Tanım 2.20.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere  $WL^\varphi(\mathbb{R}^n)$  ile göstereceğimiz zayıf Musielak-Orlicz uzayı

$$WL^\varphi(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{WL^\varphi} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\|f\|_{WL^\varphi}$  normu

$$\|f\|_{WL^\varphi} = \sup_{t>0} \|t\chi_{\{|f|>t\}}\|_{L^\varphi}$$

şeklinde verilir [27].

**Uyarı 2.21.**  $t\chi_{\{|f|>t\}} \leq |f|$  eşitsizliği dikkate alındığında  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere  $L^\varphi(\mathbb{R}^n) \subset WL^\varphi(\mathbb{R}^n)$  olur. Bunun yanı sıra  $\|f\|_{WL^\varphi} \leq \|f\|_{L^\varphi}$  eşitsizliği sağlanır.

Aşağıda maksimal operatörün Musielak-Orlicz uzaylarındaki zayıf sınırlılığı ile ilgili sonuç verilmiştir.

**Teorem 2.22.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere (A0), (A1) ve (A2) koşullarını sağlasın. Bu durumda her  $f \in L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  için

$$\|Mf\|_{WL^\varphi} \lesssim \|f\|_{L^\varphi}$$

elde edilir [27, Teorem 4.3.10].

### 3. MATERYAL VE METOT

Harmonik analizin klasik operatörlerinin Morrey tipli uzaylarda sınırlılığının araştırılması çalışmalarında kullanılan metotlardan birisi ilk olarak ilgili operatörün Morrey tipli uzayın temelini oluşturan normu üzerine lokal bir eşitsizlik elde edilmesi ve bu eşitsizlik yardımıyla sınırlılıkla ilgili sonucun ispatlanmasıdır. Örneğin  $\mathcal{M}^{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$  genelleştirilmiş Morrey uzayında maksimal operatörün sınırlılığı için ilgili eşitsizlik  $\|Mf\|_{L^p(B)}$  için elde edilirken  $\mathcal{M}^{\Phi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  Orlicz-Morrey uzayında bu eşitsizlik  $\|Mf\|_{L^\Phi(B)}$  için elde edilir. Ayrıca bu lokal eşitsizliğin ispatında ilgili operatörün Morrey tipli uzayın temelini oluşturan uzaydaki sınırlılığı kullanılmaktadır. Yukarıdaki örnekler için konuşacak olursak genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki çalışmalarda maksimal operatörün  $L^p$  uzaylarındaki sınırlılığına, Orlicz-Morrey uzaylarındaki çalışmalarda ise maksimal operatörün  $L^\Phi$  Orlicz uzaylarındaki sınırlılığına ihtiyaç duyulur. Bu ispat yöntemi Guliyev [15] tarafından 1994 yılındaki doktora tezinde ortaya konulmuş ve  $L^p$  Lebesgue normu üzerinden lokal eşitsizlikler elde edilerek sonuca ulaşılmıştır. Sonrasında 2015 yılında Deringöz [7] doktora tezinde bu yöntemi  $L^p$  Lebesgue normundan  $L^\Phi$  Orlicz normuna genelleştirilmiş ve bu sayede klasik operatörlerin Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılıkları elde edilmiştir. Bu tezde de bu ispat yöntemi baz alınacaktır. Daha açık yazacak olursak yukarıdaki tezlerde elde edilen sonuçları da kapsayacak şekilde  $\|Mf\|_{L^p(B)}$  Musielak-Orlicz normu üzerine lokal bir eşitsizlik elde edilecek ve bu sayede maksimal operatörün Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığı elde edilecektir. Bu eşitsizlik elde edilirken mevzubahis teknik gereği maksimal operatörün Musielak-Orlicz uzayındaki sınırlılığına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sınırlılık sonucu farklı yazarlar tarafından farklı yollar izlenerek elde edilmiştir. Bu konuda daha detaylı bilgi için [27] numaralı kaynaktaki Bölüm 7.3 incelenebilir. Biz bu tez çalışmasında çerçevesi Hästö [28] tarafından belirlenen yolu takip edeceğiz.

Morrey tipli uzaylarda kesirli integral operatörünün sınırlılığı konusunda öne çıkan iki önemli sonuç bulunmaktadır. Bunlardan birincisi Spanne [48] tarafından, ikincisi ise Adams [1] tarafından ortaya konmuştur. Adams'ın elde ettiği sonuç, Spanne'ninkine kıyasla daha güçlü olmakla birlikte, Spanne tipi sonuçların uygulama alanı daha geniştir. Özellikle, Adams tipi sonuçlar, Hedberg tipi noktasal eşitsizliklere (Uyarı 2.14.) dayandığından, lokal Morrey uzayları gibi bazı durumlarda kullanıma uygun değildir. Bu tezde kesirli integral operatörlerin Adams tipli sınırlılıkları araştırılmıştır. Daha kesin bir dille ifade edecek olursak genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlılığı için elde edilmiş 3 farklı Adams tipli sınırlılık vardır. Bunlar literatürde Adams-Guliyev, Adams-Gunawan ve Adams-Ding tipli sonuçlar olarak adlandırılmaktadır [17]. Bu tezin odak noktası ise Adams-Gunawan tipli sonuçlar olacaktır. Bu sonuçlar Riesz potansiyelinin maksimal operatörle kontrol edilebileceği gerçeğine dayanmaktadır. Genelleştirmiş Morrey uzaylarında uygulanan bu teknik Deringöz vd. [8] tarafından Orlicz-Morrey uzaylarına genişletilmiştir. Bu tezde ise

yukarıda elde edilen sonuçları kapsayacak şekilde bahsi geçen teknik Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarına taşınarak Riesz potansiyelinin bu uzaylardaki Adams-Gunawan tipli sınırlılığı araştırılmıştır.

Son olarak Uyarı 2.16. gereğince kesirli maksimal operatör  $M_\alpha$  ve Riesz potansiyeli  $I_\alpha$  arasındaki

$$M_\alpha(f)(x) \lesssim I_\alpha(|f|)(x)$$

ilişkisinden  $I_\alpha$  için elde edilmiş bu sonuçlar  $M_\alpha$  için de geçerlidir. Fakat  $M_\alpha$  operatörünün Morrey tipli uzaylardaki sınırlılığını daha zayıf koşullar altında incelemek mümkündür [3]. Bu gerçek göz önünde bulundurularak kesirli maksimal operatörün Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki davranışı ayrı bir bölümde incelenmiş ve elde edilen sonuç Riesz potansiyeli için elde edilmiş sonuçla mukayese edilmiştir.

Kullanılan makale ve kitaplar Kaynaklar bölümünde belirtilmiştir. Ek olarak, bu tezin yazımı için LaTeX programı kullanılmıştır.

## 4. BULGULAR TARTIŞMA

Bu bölümde literatürde daha önce tanımlanmamış olan üçüncü tip Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarının ve zayıf Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarının tanımları verilecek ve bu uzaylarda Hardy-Littlewood maksimal operatör, kesirli maksimal operatör ve Riesz potansiyelinin sınırlılıkları ile ilgili elde edilen sonuçlar sunulacaktır. Daha sonra elde edilen bu sonuçların Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarının özel hali olan genelleştirilmiş değişken üslü Morrey ve Musielak-Orlicz uzaylarındaki yansımaları incelenecektir.

### 4.1. Musielak-Orlicz-Morrey Uzayları

Şimdi  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarının tanımı verilerek bu uzayların yapısı incelenecektir.

**Tanım 4.1.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu ve  $\phi(x, r), \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun.  $f, \mathbb{R}^n$  üzerinde lokal integrallenir bir fonksiyon olmak üzere  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  ile göstereceğimiz Musielak-Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \equiv \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|f\|_{L^\varphi(B(x,r))}}{\phi(x, r) \|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\varphi}}$$

sonlu normuna sahip tüm ölçülebilir  $f$  fonksiyonlarının sınıfıdır.

**Tanım 4.2.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere  $\mathcal{G}_\varphi$  ile

$$\inf_{B \in \mathcal{B}; r_B \leq r_{B_0}} \phi(B) \gtrsim \phi(B_0), \quad \forall B_0 \in \mathcal{B}$$

ve

$$\inf_{B \in \mathcal{B}; r_B \geq r_{B_0}} \phi(B) \|\chi_B\|_{L^\varphi} \gtrsim \phi(B_0) \|\chi_{B_0}\|_{L^\varphi}, \quad \forall B_0 \in \mathcal{B},$$

olacak şekilde tüm  $\phi : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonlarının kümesi gösterilecektir. Burada  $r_B$  ve  $r_{B_0}$  sırasıyla  $B$  ve  $B_0$  yuvarlarının yarıçaplarıdır.

Aşağıda sunulan lemma,  $\phi \in \mathcal{G}_\varphi$  sınıfının teorik çalışmalardaki önemine ve pratik değerine ışık tutmaktadır.

**Lemma 4.3.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu ve  $B_0 := B(x_0, r_0) \in \mathcal{B}$  olsun. Eğer  $\phi \in \mathcal{G}_\varphi$  ise

$$\frac{1}{\phi(B_0)} \leq \|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \leq \frac{C}{\phi(B_0)}$$

olacak biçimde bir  $C > 0$  sabiti vardır.

**İspat.** Uzayın tanımı gereğince

$$\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} = \sup_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{\phi(B)} \frac{\|\chi_{B_0 \cap B}\|_{L^\varphi}}{\|\chi_B\|_{L^\varphi}}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece eşitsizliğin sol tarafının ispatı açıktır.

Şimdi sağ taraftaki eşitsizliğin de gerçekleştiğini gösterelim.  $B = B(x, r)$  keyfi bir yuvar olsun. Eğer  $r \leq r_0$  ise  $\phi(B_0) \leq C\phi(B)$  olur ve

$$\frac{1}{\phi(B)} \frac{\|\chi_{B_0 \cap B}\|_{L^\varphi}}{\|\chi_B\|_{L^\varphi}} \leq \frac{1}{\phi(B)} \lesssim \frac{1}{\phi(B_0)}$$

eşitsizlikleri sağlar.

Diğer yandan eğer  $r \geq r_0$  ise bu durumda  $\phi(B_0)\|\chi_{B_0}\|_{L^\varphi} \leq C\phi(B)\|\chi_B\|_{L^\varphi}$  olur ve

$$\frac{1}{\phi(B)} \frac{\|\chi_{B_0 \cap B}\|_{L^\varphi}}{\|\chi_B\|_{L^\varphi}} \lesssim \frac{\|\chi_B\|_{L^\varphi}}{\phi(B_0)\|\chi_{B_0}\|_{L^\varphi}} \frac{\|\chi_{B_0}\|_{L^\varphi}}{\|\chi_B\|_{L^\varphi}} \lesssim \frac{1}{\phi(B_0)}$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

**Örnek 4.4.**  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  Orlicz fonksiyonu,  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$ ,  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow (1, \infty)$  ölçülebilir fonksiyon ve  $w$  bir ağırlık fonksiyonu olsun.

- Eğer  $\varphi(x, t) = \Phi(t)$  ise  $\mathcal{M}^{\Phi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  Orlicz-Morrey uzayını göstermek üzere  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{\Phi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  olur.
- Eğer  $\varphi(x, t) = w(x)\Phi(t)$  ise  $\mathcal{M}_w^{\Phi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  ağırlıklı Orlicz-Morrey uzayını göstermek üzere  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_w^{\Phi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  olur.
- Eğer  $\varphi(x, t) = t^{p(x)}$  ise  $\mathcal{M}^{p(\cdot),\phi}(\mathbb{R}^n)$  değişken üslü genelleştirilmiş Morrey uzayını göstermek üzere  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{p(\cdot),\phi}(\mathbb{R}^n)$  olur.
- Eğer  $\phi(x, t) = \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1}$  ise  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n) = L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  olur.
- Eğer  $\phi(x, t) = \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1}$  ve  $\varphi(x, t) = t^r + a(x)t^q$ ,  $1 \leq r < q < \infty$  ise  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  "double phase" uzayı olur.
- Eğer  $\phi(x, t) = \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1}$  ve  $\varphi(x, t) = t^{p(x)}w(x)$  ise  $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  ağırlıklı değişken üslü uzayı göstermek üzere  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n) = L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  olur.

## 4.2. Maksimal Operatörün Musielak-Orlicz-Morrey Uzaylarındaki Sınırlılığ

Bu kısmın temel amacı, maksimal operatörün Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılık koşullarını belirlemektir. Bu incelemede, aşağıdaki lemmada ortaya konan lokal eşitsizlik kritik bir rol üstlenmektedir.

**Lemma 4.5.**  $\varphi$  bir *MO* fonksiyonu olmak üzere (A0), (A1), (A2) ve (aInc) koşullarını sağlasın. Bu durumda her  $f \in L_{\text{loc}}^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  and  $r > 0$  için

$$\|Mf\|_{L^{\varphi}(B(x,r))} \leq C \|\chi_{B(x,r)}\|_{L^{\varphi}} \sup_{t>2r} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^{\varphi}}^{-1} \|f\|_{L^{\varphi}(B(x,t))} \quad (4.1)$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir  $C$  sabiti vardır. Burada  $C > 0$ ,  $f$ ,  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir sabittir.

**İspat.**  $f$  fonksiyonunun

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 = f\chi_{B(x,2r)}, \quad f_2 = f\chi_{B^c(x,2r)}$$

gösterimi göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\|Mf\|_{L^{\varphi}(B(x,r))} \lesssim \|Mf_1\|_{L^{\varphi}(B(x,r))} + \|Mf_2\|_{L^{\varphi}(B(x,r))}$$

olur.  $M$  operatörünün  $L^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$  uzayı üzerindeki sınırlılığından (Bkz. Teorem 2.12.),

$$\|Mf_1\|_{L^{\varphi}(B(x,r))} \leq \|Mf_1\|_{L^{\varphi}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L^{\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^{\varphi}(B(x,2r))}$$

elde edilir.  $\|f\|_{L^{\varphi}(B(x,t))}$  fonksiyonunun monotonluğu kullanılarak

$$\begin{aligned} & \|\chi_{B(x,r)}\|_{L^{\varphi}} \sup_{t>2r} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^{\varphi}}^{-1} \|f\|_{L^{\varphi}(B(x,t))} \\ & \gtrsim \|f\|_{L^{\varphi}(B(x,2r))} \|\chi_{B(x,r)}\|_{L^{\varphi}} \sup_{t>2r} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^{\varphi}}^{-1} \\ & = \|f\|_{L^{\varphi}(B(x,2r))} \frac{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^{\varphi}}}{\|\chi_{B(x,2r)}\|_{L^{\varphi}}} \\ & \gtrsim \|f\|_{L^{\varphi}(B(x,2r))} \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte iyi bilinen " $\chi_{2B}(z) \lesssim M\chi_B(z), \forall z \in \mathbb{R}^n$ " noktasal eşitsizliği kullanılmıştır (Bkz. Lemma 2.17.). Sonuç olarak

$$\|Mf_1\|_{L^{\varphi}(B(x,r))} \lesssim \|\chi_{B(x,r)}\|_{L^{\varphi}} \sup_{t>2r} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^{\varphi}}^{-1} \|f\|_{L^{\varphi}(B(x,t))} \quad (4.3)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği görülür.

$y \in B(x,r)$  ve  $B(y,t) \cap B^c(x,2r) \neq \emptyset$  kabulleri altında aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

- $t > r$  ve  $B(y,t) \cap B^c(x,2r) \subset B(x,2t)$ : Gerçekten keyfi  $z \in B(y,t) \cap B^c(x,2r)$  için

$$t > |y - z| \geq |x - z| - |x - y| > 2r - r = r$$

ve aynı  $z$  için

$$|x - z| \leq |y - z| + |x - y| < t + r < 2t$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} Mf_2(y) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y, t)|} \int_{B(y, t) \cap \mathbb{R}^n \setminus B(x, 2r)} |f(z)| dz \\ &\leq 2^n \sup_{t>r} \frac{1}{|B(x, 2t)|} \int_{B(x, 2t)} |f(z)| dz \\ &= 2^n \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x, t)|} \int_{B(x, t)} |f(z)| dz \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her  $y \in B(x, r)$  için

$$Mf_2(y) \lesssim \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x, t)|} \int_{B(x, t)} |f(z)| dz$$

olur. Dolayısıyla Hölder eşitsizliği ve Lemma 2.10. kullanılarak

$$\begin{aligned} Mf_2(y) &\lesssim \sup_{t>2r} |B(x, t)|^{-1} \|f\|_{L^\varphi(B(x, t))} \|\chi_{B(x, t)}\|_{L^{\varphi^*}} \\ &\lesssim \sup_{t>2r} \|f\|_{L^\varphi(B(x, t))} \|\chi_{B(x, t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani  $Mf_2(y)$  fonksiyonu,  $y$  değişkeninden bağımsız bir ifade ile üstten sınırlanmaktadır. Elde edilen eşitsizliği  $B(x, r)$  üzerinden integre edersek

$$\|Mf_2\|_{L^\varphi(B(x, r))} \lesssim \|\chi_{B(x, r)}\|_{L^\varphi} \sup_{t>2r} \|f\|_{L^\varphi(B(x, t))} \|\chi_{B(x, t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \quad (4.4)$$

olur. Böylece (4.1) eşitsizliğinin doğruluğu (4.3) ve (4.4)'ten görülür. ■

**Teorem 4.6.**  $\varphi$  bir MO fonksiyonu olmak üzere (A0), (A1), (A2) ve (aInc) koşullarını sağlasın. Kabul edelim ki  $C > 0$  sabiti  $x$  ve  $r$  den bağımsız olmak üzere  $(\phi_1, \phi_2)$  ve  $\varphi$  fonksiyonları

$$\sup_{r<t<\infty} \left( \operatorname{ess\,inf}_{0<t<s<\infty} \phi_1(x, s) \|\chi_{B(x, s)}\|_{L^\varphi} \right) \|\chi_{B(x, t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \leq C \phi_2(x, r) \quad (4.5)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda  $M$  operatörü  $\mathcal{M}^{\varphi, \phi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $\mathcal{M}^{\varphi, \phi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat.**  $A$  üzerinde ölçülebilir her  $f$  fonksiyonu için

$$\left( \operatorname{ess\,inf}_{x \in A} f(x) \right)^{-1} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in A} \frac{1}{f(x)}$$

eşitliğinin doğruluğundan ve  $\|f\|_{L^\varphi(B(x,t))}$  nin  $t$  değişkeninin azalmayan bir fonksiyonu olması gerçeğinden

$$\begin{aligned} \frac{\|f\|_{L^\varphi(B(x,t))}}{\operatorname{ess\,inf}_{0<t<s<\infty} \phi_1(x,s)\|\chi_{B(x,s)}\|_{L^\varphi}} &= \operatorname{ess\,sup}_{0<t<s<\infty} \frac{\|f\|_{L^\varphi(B(x,t))}}{\phi_1(x,s)\|\chi_{B(x,s)}\|_{L^\varphi}} \\ &\leq \sup_{s>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|f\|_{L^\varphi(B(x,s))}}{\phi_1(x,s)\|\chi_{B(x,s)}\|_{L^\varphi}} = \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi, \phi_1}}. \end{aligned}$$

olduğuna dikkat çekelim.  $(\phi_1, \phi_2)$  ve  $\varphi$  fonksiyonları (4.5) koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned} &\sup_{r<t<\infty} \|f\|_{L^\varphi(B(x,t))}\|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \\ &\leq \sup_{r<t<\infty} \frac{\|f\|_{L^\varphi(B(x,t))}}{\operatorname{ess\,inf}_{0<t<s<\infty} \phi_1(x,s)\|\chi_{B(x,s)}\|_{L^\varphi}} \operatorname{ess\,inf}_{0<t<s<\infty} \phi_1(x,s)\|\chi_{B(x,s)}\|_{L^\varphi}\|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi, \phi_1}} \sup_{r<t<\infty} \left( \operatorname{ess\,inf}_{0<t<s<\infty} \phi_1(x,s)\|\chi_{B(x,s)}\|_{L^\varphi} \right) \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \\ &\lesssim \phi_2(x,r)\|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi, \phi_1}} \end{aligned}$$

olur. Böylece (4.1) lokal eşitsizliği de kullanılarak

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{\mathcal{M}^{\varphi, \phi_2}} &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \phi_2(x,r)^{-1} \sup_{t>r} \|f\|_{L^\varphi(B(x,t))}\|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi, \phi_1}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Sonuç 4.7.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere (A0), (A1), (A2) ve (aInc) koşullarını sağlasın. Eğer  $\phi \in \mathcal{G}_\varphi$  ise  $M$  operatörü  $\mathcal{M}^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayında sınırlıdır.

### 4.3. Riesz Potansiyelinin Musielak-Orlicz-Morrey Uzaylarındaki Sınırlılığ

Bu kısımda Riesz potansiyelinin Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığ için gerek ve yeter koşullar araştırılacaktır.

**Teorem 4.8.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere (A0), (A1), (A2) ve (aInc) koşullarını sağlasın.  $\beta \in (0, 1)$  olmak üzere  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^\beta$  ve  $\psi(x, t) \equiv \varphi(x, t^{1/\beta})$  olsun. Bu durumda (4.5) koşulu ile  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $t > 0$  için

$$t^\alpha \phi(x, t) + \int_t^\infty r^\alpha \phi(x, r) \frac{dr}{r} \lesssim \eta(x, t) \quad (4.6)$$

koşulu  $I_\alpha$  operatörünün  $\mathcal{M}^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $\mathcal{M}^{\psi, \eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için yeterlidir.

**İspat.**  $x \in \mathbb{R}^n$  keyfi fakat sabit bir nokta olmak üzere genelliği bozmadan  $f$  fonksiyonunu negatif olmayan bir fonksiyon ve  $I_\alpha f(x) < \infty$  varsayabiliriz. Dikkat çekelim ki

$$I_\alpha f(x) = 2 \int_{B(x,t_0)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = 2 \int_{\mathfrak{c}(B(x,t_0))} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olacak şekilde  $t_0 > 0$  vardır. Hedberg [29] yöntemi kullanılarak

$$I_\alpha f(x) = 2 \int_{B(x,t_0)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \lesssim t_0^\alpha Mf(x)$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliği ve Lemma 2.10. tatbik edilirse

$$\begin{aligned} I_\alpha f(x) &= 2 \int_{\mathfrak{c}(B(x,t_0))} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &\approx \int_{\mathfrak{c}(B(x,t_0))} |f(y)| \int_{|x-y|}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+1-\alpha}} dy \\ &\approx \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0 \leq |x-y| < r} |f(y)| dy \frac{dr}{r^{n+1-\alpha}} \\ &\lesssim \int_{t_0}^{\infty} \|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\varphi}^{-1} r^{\alpha-1} \|f\|_{L^\varphi(B(x,r))} dr \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak (4.6) koşulu kullanılırsa

$$I_\alpha f(x) \lesssim t_0^\alpha Mf(x) \lesssim \phi(x, t_0)^{\beta-1} Mf(x) \quad (4.7)$$

ve

$$\begin{aligned} I_\alpha f(x) &\lesssim \int_{t_0}^{\infty} \|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\varphi}^{-1} r^{\alpha-1} \|f\|_{L^\varphi(B(x,r))} dr \\ &\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \int_{t_0}^{\infty} r^\alpha \phi(x, r) \frac{dr}{r} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \phi(x, t_0)^\beta \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Buradan (4.7) ve (4.8) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} I_\alpha f(x) &\lesssim \min \{ \phi(x, t_0)^{\beta-1} Mf(x), \phi(x, t_0)^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \} \\ &\lesssim \sup_{s>0} \min \{ s^{\beta-1} Mf(x), s^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \} \\ &= (Mf(x))^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \end{aligned}$$

olur. Böylece her  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$I_\alpha f(x) \lesssim (Mf(x))^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \quad (4.9)$$

noktasal eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla (4.9) eşitsizliği kullanılarak keyfi bir  $B$  yuvarı için

$$\|I_\alpha f\|_{L^\psi(B)} \lesssim \|(Mf)^\beta\|_{L^\psi(B)} \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta}$$

eşitsizliği gerçeklenir.  $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  uzayının norm tanımından (Bkz. [27, s.108])

$$\|(Mf)^\beta\|_{L^\psi(B)} = \|Mf\|_{L^\varphi(B)}^\beta \quad (4.10)$$

olur. Sonuç olarak (4.10) kullanılarak

$$\|I_\alpha f\|_{L^\psi(B)} \lesssim \|Mf\|_{L^\varphi(B)}^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \quad (4.11)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Teorem 4.6. ve (4.11) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{\psi,\eta}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \eta(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\psi}^{-1} \|I_\alpha f\|_{L^\psi(B(x,t))} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \eta(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\psi}^{-1} \|Mf\|_{L^\varphi(B(x,t))}^\beta \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \phi(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \|Mf\|_{L^\varphi(B(x,t))} \right)^\beta \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \|Mf\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^\beta \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 4.3. yardımıyla Riesz potansiyelinin sınırlılığını karakterize eden aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

**Teorem 4.9.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere (A0), (A1), (A2) ve (aInc) koşullarını sağlasın ve  $\phi \in \mathcal{G}_\varphi$  olsun.  $\beta \in (0, 1)$  olmak üzere  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^\beta$  ve  $\psi(x, t) \equiv \varphi(x, t^{1/\beta})$  olsun ve

$$\int_t^\infty r^\alpha \phi(x, r) \frac{dr}{r} \lesssim t^\alpha \phi(x, t) \quad (4.12)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda

$$t^\alpha \phi(x, t) \lesssim \eta(x, t) \quad (4.13)$$

koşulu  $I_\alpha$  operatörünün  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $\mathcal{M}^{\psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir.

**İspat.** (4.13) koşulunun yeterliliği Teorem 4.8.'de ispatlandı. Şimdi gerekliliğini ispatlayacağız. Keyfi bir  $B_0 = B(x_0, t_0)$  yuvarı ve  $x \in B_0$  için Lemma 2.19. ve Lemma 4.3. yardımı ile

$$t_0^\alpha \lesssim \frac{\|I_\alpha \chi_{B_0}\|_{L^\psi(B_0)}}{\|\chi_{B_0}\|_{L^\psi}} \lesssim \eta(B_0) \|I_\alpha \chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\psi,\eta}} \lesssim \eta(B_0) \|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \lesssim \frac{\eta(B_0)}{\varphi(B_0)}$$

elde edilir.  $B_0$  keyfi seçildiğinden istenilen sonuç elde edilmiştir. ■

#### 4.4. Kesirli Maksimal Operatörün Musielak-Orlicz-Morrey Uzaylarındaki Sınırlılığı

Bu kısımda kesirli maksimal operatörün Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki Adams-tipli sınırlılığı için bir karakterizasyon verilecektir.

**Teorem 4.10.**  $\varphi$  bir MO fonksiyonu olmak üzere (A0), (A1), (A2) ve (aInc) koşullarını sağlasın.  $\beta \in (0, 1)$  olmak üzere  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^\beta$  ve  $\psi(x, t) \equiv \varphi(x, t^{1/\beta})$  olsun. Eğer (4.5) ve (4.13) koşulları gerçekleşiyorsa  $M_\alpha$  operatörü  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $\mathcal{M}^{\psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat.**  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  ve  $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}$  olsun. Maksimal operatörün tanımı ve (4.13) koşulu yardımıyla

$$\frac{t^\alpha}{|B(x, t)|} \int_{B(x, t)} |f(z)| dz \leq t^\alpha Mf(x) \lesssim \phi(x, t)^{\beta-1} Mf(x)$$

olur. Musielak-Orlicz-Morrey normu ile Lemma 2.9., Lemma 2.10. ve (4.13) koşulu göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} \frac{t^\alpha}{|B(x, t)|} \int_{B(x, t)} |f(z)| dz &\lesssim t^\alpha \frac{\|f\|_{L^\varphi(B(x, t))}}{\|\chi_{B(x, t)}\|_{L^\varphi}} \\ &\leq t^\alpha \phi(x, t) \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \\ &\lesssim \phi(x, t)^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sawano vd. [49, s. 6492] tarafından verilen teknik göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{t^\alpha}{|B(x, t)|} \int_{B(x, t)} |f(z)| dz &\lesssim \min\{\phi(x, t)^{\beta-1} Mf(x), \phi(x, t)^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}\} \\ &\lesssim \sup_{s>0} \min\{s^{\beta-1} Mf(x), s^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}\} \\ &= (Mf(x))^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \end{aligned}$$

olur. Buradan her  $x \in \mathbb{R}^n$  için

$$M_\alpha f(x) \lesssim (Mf(x))^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \quad (4.14)$$

olur. Böylece her  $B$  yuvarı için (4.14) eşitsizliğinden

$$\|M_\alpha f\|_{L^\psi(B)} \lesssim \|(Mf)^\beta\|_{L^\psi(B)} \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.10) kullanılarak

$$\|M_\alpha f\|_{L^\psi(B)} \lesssim \|Mf\|_{L^\varphi(B)}^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \quad (4.15)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Teorem 4.6. ve (4.15) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|M_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{\psi,\eta}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \eta(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\psi}^{-1} \|M_\alpha f\|_{L^\psi(B(x,t))} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \eta(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\psi}^{-1} \|Mf\|_{L^\varphi(B(x,t))}^\beta \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \phi(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \|Mf\|_{L^\varphi(B(x,t))} \right)^\beta \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \|Mf\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^\beta \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.11.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu ve  $\phi \in \mathcal{G}_\varphi$  olmak üzere (A0), (A1), (A2) ve (aInc) koşullarını sağlasın.  $\beta \in (0, 1)$  olmak üzere  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^\beta$  ve  $\psi(x, t) \equiv \varphi(x, t^{1/\beta})$  olsun. Bu durumda (4.13) koşulu  $M_\alpha$  operatörünün  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $\mathcal{M}^{\psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir.

**İspat.** (4.13) koşulunun yeterliliği Teorem 4.10.'da ispatlanmıştır. Şimdi gerekliliğini ispatlayacağız. Keyfi bir  $B_0 = B(x_0, t_0)$  yuvarı ve  $x \in B_0$  için Lemma 2.18. ve Lemma 4.3. yardımı ile

$$t_0^\alpha \lesssim \frac{\|M_\alpha \chi_{B_0}\|_{L^\psi(B_0)}}{\|\chi_{B_0}\|_{L^\psi}} \lesssim \eta(B_0) \|M_\alpha \chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\psi,\eta}} \lesssim \eta(B_0) \|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \lesssim \frac{\eta(B_0)}{\varphi(B_0)}$$

elde edilir.  $B_0$  keyfi seçildiğinden istenilen sonuç elde edilmiştir. ■

**Uyarı 4.12.** (2.1) eşitsizliğinde verilen  $M_\alpha$  ve  $I_\alpha$  operatörleri arasındaki ilişkiden dolayı  $I_\alpha$  için elde edilen sonuçlar  $M_\alpha$  için de geçerlidir. Fakat Teorem 4.10.'dan görüldüğü üzere  $M_\alpha$  operatörünün Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığını daha zayıf koşullar altında

incelemek mümkündür. Daha açık bir ifadeyle,  $M_\alpha$  operatörünün bu uzaylardaki sınırlılığı için (4.12) integral koşuluna ihtiyaç duyulmamaktadır.

#### 4.5. Zayıf Tipli Sonuçlar

Bu kısımda, tanıtılan Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarının zayıf hali incelenerek bu uzaylarda maksimal operatörünün, kesirli maksimal operatörünün ve Riesz potansiyelinin zayıf tipli sınırlılıkları ile ilgili sonuçlar verilecektir.

**Tanım 4.13.**  $\varphi$  bir MO fonksiyonu olmak üzere  $\phi(x, r), \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun.  $f, \mathbb{R}^n$  üzerinde lokal integrallenilir bir fonksiyon olmak üzere  $WM^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)$  ile göstereceğimiz zayıf Musielak-Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{WM^{\varphi, \phi}} \equiv \|f\|_{WM^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|f\|_{WL^\varphi(B(x, r))}}{\phi(x, r) \|\chi_{B(x, r)}\|_{L^\varphi}}$$

sonlu normuna sahip tüm ölçülebilir  $f$  fonksiyonların sınıfıdır.

Dikkat çekelim ki  $M^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n) \subset WM^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)$  kapsamı geçerlidir. Bunun yanı sıra

$$\|f\|_{WM^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{M^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)} \quad (4.16)$$

eşitsizliği sağlanır (Bkz. Uyarı 2.21.).

**Lemma 4.14.**  $\varphi$  bir MO fonksiyonu ve  $B_0 := B(x_0, r_0) \in \mathcal{B}$  olsun. Eğer  $\phi \in \mathcal{G}_\varphi$  ise

$$\frac{1}{\phi(B_0)} \leq \|\chi_{B_0}\|_{WM^{\varphi, \phi}} \leq \frac{C}{\phi(B_0)}$$

olacak biçimde bir  $C > 0$  sabiti vardır.

**İspat.** Lemma 4.3. ve (4.16) kullanılarak

$$\|\chi_{B_0}\|_{WM^{\varphi, \phi}} \leq \|\chi_{B_0}\|_{M^{\varphi, \phi}} \lesssim \frac{1}{\phi(B_0)}$$

elde edilir. Sonrasında  $WM^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayının tanımından her  $t \in (0, 1)$  için

$$\|\chi_{B_0}\|_{M^{\varphi, \phi}} \geq \frac{\|\chi_{B_0}\|_{WL^\varphi}}{\phi(B_0) \|\chi_{B_0}\|_{L^\varphi}} \geq \frac{t \|\chi_{\{\chi_{B_0} > t\}}\|_{L^\varphi}}{\phi(B_0) \|\chi_{B_0}\|_{L^\varphi}} = \frac{t}{\phi(B_0)}$$

olur. Böylece  $\|\chi_{B_0}\|_{M^{\varphi, \phi}} \geq \frac{1}{\phi(B_0)}$  olur ki bu da ispatı tamamlar. ■

Maksimal operatörün zayıf sınırlılığına ilişkin olan Teorem 4.16., aşağıda sunulan Lemma 4.15.'te elde edilen lokal eşitsizlik üzerine inşa edilmiştir.

**Lemma 4.15.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere  $(A0)$ ,  $(A1)$  ve  $(A2)$  koşullarını sağlasın. Bu durumda her  $f \in WL_{loc}^\varphi(\mathbb{R}^n)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  ve  $r > 0$  için

$$\|Mf\|_{WL^\varphi(B(x,r))} \leq C \|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\varphi} \sup_{t>2r} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \|f\|_{L^\varphi(B(x,t))} \quad (4.17)$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir  $C$  sabiti vardır. Burada  $C > 0$ ,  $f$ ,  $x$  ve  $r$  den bağımsız bir sabittir.

**İspat.**  $f$  fonksiyonunun

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 = f\chi_{B(x,2r)}, \quad f_2 = f\chi_{B^c(x,2r)}$$

gösterimi göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\|Mf\|_{WL^\varphi(B(x,r))} \lesssim \|Mf_1\|_{WL^\varphi(B(x,r))} + \|Mf_2\|_{WL^\varphi(B(x,r))}$$

olur.  $M$  operatörünün  $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $WL^\varphi(\mathbb{R}^n)$  uzayına olan sınırlılığında (bkz. Teorem 2.22.)

$$\|Mf_1\|_{WL^\varphi(B)} \leq \|Mf_1\|_{WL^\varphi(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^\varphi(B(x,2r))}$$

elde edilir. Böylece (4.17) eşitsizliğinin doğruluğu (4.2), (4.4) ve Uyarı 2.21.'den görülür. ■

Sıradaki teorem maksimal operatörün zayıf Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığı için yeterli koşulları ifade etmektedir.

**Teorem 4.16.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere  $(A0)$ ,  $(A1)$  ve  $(A2)$  koşullarını sağlasın. Kabul edelim ki  $(\phi_1, \phi_2)$  ve  $\varphi$  fonksiyonları (4.5) koşulunu sağlasın. Bu durumda  $M$  operatörü  $\mathcal{M}^{\varphi, \phi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $W\mathcal{M}^{\varphi, \phi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**İspat.** Maksimal operatörün Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığı (Bkz. Teorem 4.6.) gösterilirken uygulanan tekniğe benzer olarak ispatta kilit bir rol oynayan Lemma 4.5. yerine Lemma 4.15. kullanılarak maksimal operatörün zayıf tipli sınırlılığı elde edilir. ■

Bir sonraki teoremde  $M_\alpha$  operatörünün zayıf Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığı için gerek ve yeter koşul verilecektir.

**Teorem 4.17.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu ve  $\phi \in \mathcal{G}_\varphi$  olmak üzere  $(A0)$ ,  $(A1)$ ,  $(A2)$  ve  $(aInc)$  koşullarını sağlasın.  $\beta \in (0, 1)$  olmak üzere  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^\beta$  ve  $\psi(x, t) \equiv \varphi(x, t^{1/\beta})$  olsun. Bu durumda (4.13) koşulu  $M_\alpha$  operatörünün  $\mathcal{M}^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $W\mathcal{M}^{\psi, \eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir.

**İspat. Yeterlilik:**  $B = B(x, t)$  yuvarı için (4.14) eşitsizliği yardımıyla

$$\|M_\alpha f\|_{WL^\psi(B)} \lesssim \|(Mf)^\beta\|_{WL^\psi(B)} \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi, \phi}}^{1-\beta}$$

olur. Daha sonra (4.10) eşitliği yardımıyla

$$\|(Mf)^\beta\|_{WL^\psi(B)} = \|Mf\|_{WL^\varphi(B)}^\beta \quad (4.18)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.18) kullanılırsa

$$\|M_\alpha f\|_{WL^\psi(B)} \lesssim \|Mf\|_{WL^\varphi(B)}^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \quad (4.19)$$

olur. Teorem 4.16. ve (4.19) koşulu göz alınırsa

$$\begin{aligned} \|M_\alpha f\|_{W\mathcal{M}^{\psi,\eta}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \eta(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\psi}^{-1} \|M_\alpha f\|_{WL^\psi(B(x,t))} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \eta(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\psi}^{-1} \|Mf\|_{WL^\varphi(B(x,t))}^\beta \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \phi(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \|Mf\|_{WL^\varphi(B(x,t))} \right)^\beta \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \|Mf\|_{W\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^\beta \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

*Gereklilik:* Teorem 4.11.'in ispatında kullanılan tekniğe benzer olarak Lemma 4.3. yerine Lemma 4.14. kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Şimdi Riesz potansiyelinin zayıf Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığını ifade eden teorem verilecektir.

**Teorem 4.18.**  $\varphi$  bir MO fonksiyonu ve  $\phi \in \mathcal{G}_\varphi$  olmak üzere (A0), (A1) ve (A2) koşullarını sağlasın.  $\beta \in (0, 1)$  olmak üzere  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^\beta$  ve  $\psi(x, t) \equiv \varphi(x, t^{1/\beta})$  olsun. Eğer (4.12) koşulu sağlanıyor ise (4.13) koşulu  $I_\alpha$  operatörünün  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $W\mathcal{M}^{\psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir.

**İspat.** *Yeterlilik:*  $B = B(x, t)$  olmak üzere her  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $I_\alpha f(x) \lesssim (Mf(x))^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta}$  olduğu gerçeği göz önüne alınırsa

$$\|I_\alpha f\|_{WL^\psi(B)} \lesssim \|(Mf)^\beta\|_{WL^\psi(B)} \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta}$$

elde edilir. Dikkat edelim ki (4.10) eşitliğinden

$$\|(Mf)^\beta\|_{WL^\psi(B)} = \|Mf\|_{WL^\varphi(B)}^\beta$$

olur. Sonuç olarak son eşitlik yardımı ile

$$\|I_\alpha f\|_{WL^\psi(B)} \lesssim \|Mf\|_{WL^\varphi(B)}^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \quad (4.20)$$

eşitsizliği gerçeklenir. (4.20) eşitsizliği göz önüne alınır ve Teorem 4.16. kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{W\mathcal{M}^{\psi,\eta}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \eta(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\psi}^{-1} \|I_\alpha f\|_{WL^\psi(B)} \\
&\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \eta(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\psi}^{-1} \|Mf\|_{WL^\varphi(B)}^\beta \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}^{1-\beta} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \phi(x, t)^{-1} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \|Mf\|_{WL^\varphi(B)} \right)^\beta \\
&\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi,\phi}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

*Gereklilik:* Teorem 4.9.'un ispatında kullanılan tekniğe benzer olarak Lemma 4.3. yerine Lemma 4.14. kullanılarak ispat tamamlanır. ■

#### 4.6. Özel Durumlar

Bu kısımda Musielak-Orlicz-Morrey  $\mathcal{M}^{\varphi,\phi}$  uzaylarında elde edilen sonuçların, bu uzayların  $\varphi(x, t) = t^{p(x)}$  özel hali olan genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzaylarındaki ve  $\phi(x, t) = \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1}$  özel hali olan Musielak-Orlicz uzaylarındaki yansımaları incelenecektir.

Şimdi  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  değişken üslü Lebesgue uzaylarında iyi bilinen bazı kavramları hatırlatalım:

Ölçülebilir bir  $p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$  fonksiyonu için

$$p^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \quad \text{ve} \quad p^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x)$$

olarak tanımlanır.

Birbirinden farklı her  $x, y \in \Omega$  için

$$\left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)} \right| \leq \frac{c}{\log \left( e + \frac{1}{|x-y|} \right)}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\frac{1}{p}$  fonksiyonuna log-Hölder süreklidir denir ve  $\frac{1}{p} \in C^{\log}$  ile gösterilir.

Şimdi vereceğimiz koşul Nekvinda'nın decay koşulu olarak adlandırılır ve ifadesi şu şekildedir:

$$\int_{\{p(x) \neq p_\infty\}} c^{\left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty} \right|} dx < \infty$$

olacak şekilde  $c > 0$  ve  $p_\infty \in [1, \infty]$  vardır. Bu koşul ilk olarak Nekvinda [42] tarafından ortaya konulmuştur.

Değişken üslü Lebesgue uzayları hakkında daha fazla bilgi için [5, 13] numaralı çalışmalar ve bu çalışmalardaki referanslar incelenebilir.

Aşağıdaki tablo  $\varphi(x, t) = t^{p(x)}$  özel durumu için (A0), (A1), (A2), (aInc) ve (aDec) koşullarının nasıl davrandığına ilişkin sonuçları özetlemektedir [27].

**Tablo 4.1.** Değişken üslü durumunda koşullar

$\varphi(x, t)$	(A0)	(A1)	(A2)	(aInc)	(aDec)
$t^{p(x)}$	Doğru	$\frac{1}{p} \in C^{\log}$	Nekvinda	$p^- > 1$	$p^+ < \infty$

Bu çalışmada ulaşılan sonuçlar, özel bir durum olarak  $\varphi(x, t) = t^{p(x)}$  seçimiyle elde edilen genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzaylarına aşağıdaki şekilde uygulanabilir:

**Sonuç 4.19.** Kabul edelim ki  $\frac{1}{p}$  log-Hölder sürekli olsun ve Nekvinda'nın decay koşulu sağlansın. Bu durumda  $C > 0$  sabiti  $x$  ve  $r$  den bağımsız olmak üzere  $(\phi_1, \phi_2)$  fonksiyonları

$$\sup_{r < t < \infty} \left( \operatorname{ess\,inf}_{0 < t < s < \infty} \phi_1(x, s) \|\chi_{B(x,s)}\|_{L^{p(\cdot)}} \right) \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^{p(\cdot)}}^{-1} \leq C \phi_2(x, r) \quad (4.21)$$

koşulunu sağlıyorsa  $M$  operatörü  $\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $W\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi_2}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır. İlave olarak eğer  $p^- > 1$  ise  $M$  operatörü  $\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi_1}(\mathbb{R}^n)$  uzayına  $\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi_2}(\mathbb{R}^n)$  sınırlıdır.

**Sonuç 4.20.** Kabul edelim ki  $\frac{1}{p}$  log-Hölder sürekli olsun ve Nekvinda'nın decay koşulu sağlansın. Yine kabul edelim ki  $q(x) > p(x)$  olsun.  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^{\frac{p(x)}{q(x)}}$  olarak tanımlansın. Eğer (4.6) ve (4.21) koşulları sağlanıyorsa  $I_\alpha$  operatörü  $\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $W\mathcal{M}^{q(\cdot), \eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır. İlave olarak eğer  $p^- > 1$  ise bu durumda  $I_\alpha$  operatörü  $\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $\mathcal{M}^{q(\cdot), \eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

**Sonuç 4.21.** Kabul edelim ki  $\frac{1}{p}$  log-Hölder sürekli olsun ve Nekvinda'nın decay koşulu sağlansın. Yine kabul edelim ki  $q(x) > p(x)$  olsun.  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^{\frac{p(x)}{q(x)}}$  olarak tanımlansın. Eğer (4.13) koşulu ve (4.21) koşulu sağlanıyorsa  $M_\alpha$  operatörü  $\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $W\mathcal{M}^{q(\cdot), \eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır. İlave olarak eğer  $p^- > 1$  ise bu durumda  $M_\alpha$  operatörü  $\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $\mathcal{M}^{q(\cdot), \eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlıdır.

Tanım 4.2.'de verilen  $\mathcal{G}_{p(\cdot)} \equiv \mathcal{G}_{\varphi(x,t)=t^{p(x)}}$  sınıfı göz önüne alınırsa ilave  $\phi \in \mathcal{G}_{p(\cdot)}$  koşulu altında (4.13) koşulunun sınırlılık için aynı zamanda gerekli olduğu da aşağıdaki şekilde verilebilir.

**Sonuç 4.22.** Kabul edelim ki  $\frac{1}{p}$  log-Hölder sürekli olsun ve Nekvinda'nın decay koşulu sağlansın. Yine kabul edelim ki  $q(x) > p(x)$  ve  $\phi \in \mathcal{G}_{p(\cdot)}$  olsun.  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^{\frac{p(x)}{q(x)}}$  olarak tanımlansın. Eğer (4.12) koşulu sağlanıyorsa (4.13) koşulu  $I_\alpha$  operatörünün  $\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $W\mathcal{M}^{q(\cdot), \eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir. İlave olarak eğer  $p^- > 1$  ise bu durumda (4.13) koşulu  $I_\alpha$  operatörünün  $\mathcal{M}^{p(\cdot), \phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $\mathcal{M}^{q(\cdot), \eta}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir.

**Sonuç 4.23.** Kabul edelim ki  $\frac{1}{p}$  log-Hölder sürekli olsun ve Nekvinda'nın decay koşulu sağlansın. Yine kabul edelim ki  $q(x) > p(x)$  ve  $\phi \in \mathcal{G}_{p(\cdot)}$  olsun.  $\eta(x, t) \equiv \phi(x, t)^{\frac{p(x)}{q(x)}}$

olarak tanımlansın. Bu durumda (4.13) koşulu  $M_\alpha$  operatörünün  $\mathcal{M}^{p(\cdot),\phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $W\mathcal{M}^{q(\cdot),n}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir. İlave olarak eğer  $p^- > 1$  ise bu durumda (4.13) koşulu  $M_\alpha$  operatörünün  $\mathcal{M}^{p(\cdot),\phi}(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $\mathcal{M}^{q(\cdot),n}(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir.

**Uyarı 4.24.** Sonuç 4.19. ve Sonuç 4.20., Guliyev ve Samko [16] tarafından ispatlanmıştır. Sonuçlar 4.21., 4.22. ve 4.23. ise genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzaylarında elde edilmiş yeni sonuçlardır.

Elde edilen bulgular,  $\phi(x, t) = \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1}$  özel fonksiyonu için yani Musielak-Orlicz uzaylarında aşağıdaki sonuçları verir:

**Sonuç 4.25.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere (A0), (A1) ve (A2) koşullarını sağlasın.  $\beta \in (0, 1)$  olmak üzere  $\psi(x, t) \equiv \varphi(x, t^{1/\beta})$  olsun ve

$$\int_t^\infty r^\alpha \|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\varphi}^{-1} \frac{dr}{r} \lesssim t^\alpha \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi}^{-1} \quad (4.22)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda

$$t^\alpha \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\psi} \lesssim \|\chi_{B(x,t)}\|_{L^\varphi} \quad (4.23)$$

koşulu  $I_\alpha$  operatörünün  $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $WL^\psi(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir. Eğer ilave olarak  $\varphi$  fonksiyonu (*aInc*) şartını da sağlıyorsa (4.23) koşulu  $I_\alpha$  operatörünün  $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $L^\psi(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir.

**Sonuç 4.26.**  $\varphi$  bir  $MO$  fonksiyonu olmak üzere (A0), (A1) ve (A2) koşullarını sağlasın.  $\beta \in (0, 1)$  olmak üzere  $\psi(x, t) \equiv \varphi(x, t^{1/\beta})$  olsun. Bu durumda (4.23) koşulu  $M_\alpha$  operatörünün  $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $WL^\psi(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir. Eğer ilave olarak  $\varphi$  fonksiyonu (*aInc*) şartını da sağlıyorsa (4.23) koşulu  $M_\alpha$  operatörünün  $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$  uzayından  $L^\psi(\mathbb{R}^n)$  uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir.

**Uyarı 4.27.** [25] ve [31] çalışmalarında, Musielak-Orlicz uzaylarında Riesz potansiyeli ve kesirli maksimal operatörün sınırlılık koşulları incelenmiştir. Bizim burada elde ettiğimiz Sonuç 4.25. ve Sonuç 4.26. ise söz konusu çalışmalardan farklı nitelikte olup, bu alandaki mevcut literatüre yeni bir perspektif kazandırmaktadır.



## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, üçüncü tip Orlicz-Morrey uzayları temel alınarak, Musielak-Orlicz uzayları ile genelleştirilmiş Morrey uzaylarını birleştiren yeni bir yapı olan  $\mathcal{M}^{\varphi, \phi}(\mathbb{R}^n)$  Musielak-Orlicz-Morrey uzayları tanıtılmıştır. Harmonik analizin önemli araştırma problemlerinden biri olan "klasik operatörlerin farklı fonksiyon uzaylarındaki sınırlılık özelliklerinin incelenmesi" göz önüne alınarak, bu kapsamda maksimal operatör, kesirli maksimal operatör ve potansiyel operatör gibi temel operatörlerin söz konusu uzaylardaki sınırlılık koşullarına ilişkin sonuçlar elde edilmiştir. Ancak, önemli bir eksik olarak, singüler integral operatörlerin bu uzaylardaki sınırlılık problemi açık kalmıştır.

Morrey uzayları, kısmi diferansiyel denklemler (KDD) alanında Schrödinger denklemleri, potansiyel teorisi ve KDD çözümlerinin düzenlilik (regularity) analizlerinde yaygın uygulamalara sahiptir [51, 52]. Musielak-Orlicz uzayları (diğer adıyla genelleştirilmiş Orlicz uzayları), fonksiyon uzayları teorisinde giderek önem kazanan bir araştırma alanıdır. Bu uzaylar, değişken üslü Lebesgue uzayları ve klasik Orlicz uzaylarını kapsayan doğal bir genişleme sunmanın yanı sıra, lineer olmayan diferansiyel denklemler, görüntü işleme ve akışkanlar dinamiği gibi çeşitli uygulama alanlarına sahiptir [2, 4, 22, 23, 24, 26, 30, 53]. Dolayısıyla, bu tezde ele alınan problemlerin etkisi yalnızca analizle sınırlı kalmayıp matematiğin diğer disiplinlerine de uzanmaktadır.

Ayrıca ulaşılan genel sonuçların, Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarının özel durumlarına indirgenmesiyle elde edilen özgün bulgular sunularak literatüre yeni katkılar sağlanmıştır. Ancak Musielak-Orlicz-Morrey uzayları özel durumlarda ağırlıklı uzayları içermesine rağmen (Örnek 4.4.), çalışmada izlenen yöntem gereği, elde edilen sonuçların ağırlıklı özel durumlara yansımaları incelenememiştir. Daha açık ifadeyle, maksimal operatörün Musielak-Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı için Hästö'nün [28] belirlediği koşullar temel alınmıştır (Teorem 2.12.). Örneğin, ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayına karşılık gelen  $\varphi(x, t) = t^{p(x)}w(x)$  seçiminde, (A0) koşulunun sağlanması ancak ve ancak  $w \approx 1$  olmasıyla mümkündür. Bu da mevcut yöntemle yalnızca "ağırlıksız" durumların ele alınabileceği anlamına gelir. Bu kısıtlamayı aşmak için daha kapsayıcı yeni yaklaşımlar geliştirilmesi gerekmektedir.



## KAYNAKLAR

- [1]. Adams, D. R. (1975). A note on Riesz potentials. *Duke Mathematical Journal*, 42(4), 765–778. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-75-04265-9>
- [2]. Baruah, D. (2022). *Generalized Orlicz spaces and partial differential equations with application to image restoration* [Doktora tezi, University of Turku]. Urn.fi. <https://urn.fi/URN:ISBN:978-951-29-9036-8>
- [3]. Burenkov, V. I., Gogatishvili, A., Guliyev, V. S., & Mustafayev, R. C. (2010). Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 55(8-10), 739–758. <https://doi.org/10.1080/17476930903394697>
- [4]. Chlebicka, I. (2018). A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak-Orlicz spaces. *Nonlinear Analysis*, 175, 1–27. <https://doi.org/10.1016/j.na.2017.07.001>
- [5]. Cruz-Uribe, D. V., & Fiorenza, A. (2013). *Variable Lebesgue spaces: Foundations and harmonic analysis*. Birkhäuser. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0624-4>
- [6]. Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Samko, S. (2014). Boundedness of the maximal and singular operators on generalized Orlicz–Morrey spaces. In *Operator theory, operator algebras and application* (Vol. 242, pp. 139–158). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0816-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0816-3_7)
- [7]. Deringoz, F. (2015). *Harmonik analizinin integral operatörlerinin genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığı* [Doktora tezi, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi]. ProQuest Dissertations & Theses. <https://www.proquest.com/openview/ee40667634416f5dd8f46773cd68fc38>
- [8]. Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Hasanov, S. G. (2016). Characterizations for the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016, 1–22. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1192-z>
- [9]. Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Hasanov, S. G. (2017). A characterization for Adams-type boundedness of the fractional maximal operator on generalized Orlicz–Morrey spaces. *Integral Transforms and Special Functions*, 28(4), 284–299. <https://doi.org/10.1080/10652469.2017.1283312>
- [10]. Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Hasanov, S. G. (2018). Maximal operator and its commutators on generalized weighted Orlicz-Morrey spaces. *Tokyo Journal of Mathematics*, 41(2), 347–369. <https://doi.org/10.3836/tjm/1502179260>

- [11]. Deringoz, F., Guliyev, V. S., Nakai, E., Sawano, Y., & Shi, M. (2019). Generalized fractional maximal and integral operators on Orlicz and generalized Orlicz–Morrey spaces of the third kind. *Positivity*, 23(3), 727–757. <https://doi.org/10.1007/s11117-018-0635-9>
- [12]. Deringoz, F., Guliyev, V. S., Omarova, M. N., & Ragusa, M. A. (2023). Calderón–Zygmund operators and their commutators on generalized weighted Orlicz–Morrey spaces. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 13(01), 2250004. <https://doi.org/10.1142/S1664360722500047>
- [13]. Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., & Ruzicka, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents* (Vol. 2017). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-2>
- [14]. Gala, S., Sawano, Y., & Tanaka, H. (2015). A remark on two generalized Orlicz–Morrey spaces. *Journal of Approximation Theory*, 198, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2015.04.001>
- [15]. Guliyev, V. S. (1994). *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in  $\mathbb{R}^n$*  [Doktora tezi, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences].
- [16]. Guliyev, V. S., & Samko, S. G. (2013). Maximal, potential, and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets. *Journal of Mathematical Sciences*, 193(2), 228–248. <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1449-8>
- [17]. Guliyev, V., & Sawano, Y. (2013). Linear and sublinear operators on generalized Morrey spaces with non-doubling measures. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 3, 303–227. <https://doi.org/10.5486/PMD.2013.5649>
- [18]. Guliyev, V. S., & Deringoz, F. (2014). On the Riesz Potential and Its Commutators on Generalized Orlicz–Morrey Spaces. *Journal of Function Spaces*, 2014, 617414. <https://doi.org/10.1155/2014/617414>
- [19]. Guliyev, V. S., & Deringoz, F. (2015). Boundedness of fractional maximal operator and its commutators on generalized Orlicz–Morrey spaces. *Complex Analysis and Operator Theory*, 9(5), 1249–1267. <https://doi.org/10.1007/s11785-014-0428-1>
- [20]. Guliyev, V. S., & Deringoz, F. (2022). Riesz potential and its commutators on generalized weighted Orlicz–Morrey spaces. *Mathematische Nachrichten*, 295(4), 706–724. <https://doi.org/10.1002/mana.201900559>

- [21]. Guliyev, V. S., Hasanov, S. G., Sawano, Y., & Noi, T. (2016). Non-smooth atomic decompositions for generalized Orlicz–Morrey spaces of the third kind. *Acta Applicandae Mathematicae*, 145, 133–174. <https://doi.org/10.1007/s10440-016-0052-7>
- [22]. Gwiazda, P., Wittbold, P., Wróblewska, A., & Zimmermann, A. (2012). Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces. *Journal of Differential Equations*, 253(2), 635–666. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.04.004>
- [23]. Harjulehto, P., Hästö, P., Latvala, V., & Toivanen, O. (2013). Critical variable exponent functionals in image restoration. *Applied Mathematics Letters*, 26(1), 56–60. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.03.032>
- [24]. Harjulehto, P., & Hästö, P. (2021). Double phase image restoration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 501(1), 123832. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.123832>
- [25]. Harjulehto, P., & Hästö, P. (2017). The Riesz potential in generalized Orlicz spaces. *Forum Mathematicum*, 29(1), 229–244. <https://doi.org/10.1515/forum-2015-0239>
- [26]. Harjulehto, P., Hästö, P., & Klén, R. (2016). Generalized Orlicz spaces and related PDE. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 143, 155–173. <https://doi.org/10.1016/j.na.2016.05.002>
- [27]. Harjulehto, P., & Hästö, P. (2019). *Orlicz spaces and generalized Orlicz spaces*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15100-3>
- [28]. Hästö, P. A. (2016). Corrigendum to “The maximal operator on generalized Orlicz spaces” [J. Funct. Anal. 269 (2015) 4038–4048]. *Journal of Functional Analysis*, 271(1), 240–243. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.04.005>
- [29]. Hedberg, L. I. (1972). On certain convolution inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 36(2), 505–510. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1972-0312232-4>
- [30]. Kaminska, A. W. (2014). Existence result for the motion of several rigid bodies in an incompressible non-Newtonian fluid with growth conditions in Orlicz spaces. *Nonlinearity*, 27(4), 685–716. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/27/4/685>
- [31]. Karppinen, A. (2022). Fractional operators and their commutators on generalized Orlicz spaces. *Opuscula Mathematica*, 42(4), 583–604. <https://doi.org/10.7494/OpMath.2022.42.4.583>

- [32]. Liang, Y., Nakai, E., Yang, D., & Zhang, J. (2014). Boundedness of intrinsic Littlewood–Paley functions on Musielak–Orlicz Morrey and Campanato spaces. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 8(1), 221–268. <https://doi.org/10.15352/bjma/1393664082>
- [33]. Lu, S., Ding, Y., & Yan, D. (2007). *Singular integrals and related topics*. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/6305>
- [34]. Maeda, F. Y., Mizuta, Y., Ohno, T., & Shimomura, T. (2013). Boundedness of maximal operators and Sobolev’s inequality on Musielak–Orlicz–Morrey spaces. *Bulletin des sciences mathématiques*, 137(1), 76–96. <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2012.03.008>
- [35]. Mizuhara, T. (1991). Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces. In *ICM-90 Satellite Conference Proceedings: Harmonic Analysis* (pp. 183–189). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-4-431-68168-7\\_16](https://doi.org/10.1007/978-4-431-68168-7_16)
- [36]. Morrey, C. B. (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(1), 126–166. <https://doi.org/10.2307/1989917>
- [37]. Musielak, J. (1983). *Orlicz Spaces and Modular Spaces* (Vol. 1034, pp. 33–111). Springer. <https://doi.org/10.1007/BFb0069305>
- [38]. Musielak, J., & Orlicz, W. (1959). On modular spaces. *Studia Mathematica*, 18(1), 49–65. <https://doi.org/10.4064/sm-18-1-49-65>
- [39]. Nakai, E. (1994). Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces. *Mathematische Nachrichten*, 166(1), 95–103. <https://doi.org/10.1002/mana.19941660107>
- [40]. Nakai, E. (2004). Generalized fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces. In *Banach and Function Spaces* (pp. 323–333). Yokohama Publishers.
- [41]. Nakai, E. (2017). Pointwise Multipliers on Musielak-Orlicz-Morrey Spaces. In *Function Spaces and Inequalities: New Delhi, India* (pp. 257–281). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-10-6119-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-981-10-6119-6_13)
- [42]. Nekvinda, A. (2004). Hardy-Littlewood maximal operator on  $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ . *Mathematical Inequalities and Applications*, 7(2), 255–266. <https://doi.org/10.7153/mia-07-22>
- [43]. Nakano, H. (1950). *Modulared semi-ordered linear spaces*. Maruzen Company.
- [44]. Nakano, H. (1951). *Topology and linear topological spaces*. Maruzen Company.

- [45]. Orlicz, W. (1931). Über konjugierte Exponentenfolgen. *Studia Mathematica*, 3(1), 200–211. <https://doi.org/10.4064/sm-3-1-200-211>
- [46]. Orlicz, W. (1932). Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus  $B$ . *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Série A, Sciences Mathématiques*, 1932(8-9), 207–220.
- [47]. Orlicz, W. (1936). Über Räumen ( $L^M$ ). *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Série A, Sciences Mathématiques*, 1936, 93–107.
- [48]. Peetre, J. (1969). On the theory of  $\mathcal{L}_{p,\lambda}$  spaces. *Journal of Functional Analysis*, 4(1), 71–87. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(69\)90048-X](https://doi.org/10.1016/0022-1236(69)90048-X)
- [49]. Sawano, Y., Sugano, S., & Tanaka, H. (2011). Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(12), 6481–6503. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05294-3>
- [50]. Sawano, Y., Sugano, S., & Tanaka, H. (2012). Orlicz–Morrey spaces and fractional operators. *Potential Analysis*, 36(4), 517–556. <https://doi.org/10.1007/s11118-011-9239-8>
- [51]. Sawano, Y., Di Fazio, G., & Hakim, D. I. (2020). *Morrey spaces—Introduction and applications to integral operators and PDE's, Vol. I*. Monographs and Research Notes in Mathematics. <https://doi.org/10.1201/9781003042341>
- [52]. Sawano, Y., Di Fazio, G., & Hakim, D. I. (2020). *Morrey spaces—Introduction and applications to integral operators and PDE's, Vol. II*. Monographs and Research Notes in Mathematics. <https://doi.org/10.1201/9781003029076>
- [53]. Wróblewska-Kamińska, A. (2014). Existence result for the motion of several rigid bodies in an incompressible non-Newtonian fluid with growth conditions in Orlicz spaces. *Nonlinearity*, 27(4), 685. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/27/4/685>



## ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	Kendal DORAK
Uyruğu :	T.C.
Orcid Numarası:	0000-0002-7889-6869

EĞİTİM BİLGİLERİ	
<b>Lisans</b>	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Fakülte	Fen Edebiyat
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2015
<b>Yüksek Lisans</b>	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Enstitü	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Mezuniyet Yılı	2019
<b>Doktora</b>	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Enstitü	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Mezuniyet Yılı	2025

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler	
<p>[1] Dorak, K., Deringöz, F., &amp; Guliyev, V. (2025). Boundedness of the maximal operator and the Riesz potential on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, <i>Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics</i>, 1-12. <a href="https://doi.org/10.15672/hujms.1472848">https://doi.org/10.15672/hujms.1472848</a></p> <p>[2] Dorak, K., Deringöz, F., &amp; Guliyev, V. (2024). The Riesz potential in Musielak-Orlicz-Morrey spaces, <i>International Conference On Mathematics and Mathematics Education</i>, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi.</p> <p>[3] Dorak, K., Deringöz, F., &amp; Guliyev, V. (2024). Hardy-Littlewood maksimal operatörünün Musielak-Orlicz-Morrey uzaylarında sınırlılığı, 36. <i>Ulusal Matematik Sempozyumu</i>, Amasya Üniversitesi.</p>	