T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK VE KABA KÜMELERİN KARMA YAPILARI VE UYGULAMALAR

Savcı Rahman ARGÜN

DOKTORA TEZİ

KIRŞEHİR
2025

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK VE KABA KÜMELERİN KARMA YAPILARI VE UYGULAMALAR

Savcı Rahman ARGÜN

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

KIRŞEHİR
2025

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Öğrenci

Savcı Rahman ARGÜN

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

İÇİNDEKİLER DİZİNİ I
TEŞEKKÜR III
ÖZET IV
ABSTRACT V
SİMGE VE KISALTMA DİZİNİ VI
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 5
2.1. Temel Kavramlar 5
2.2. Benzerlik Ölçüleri ve Aggregation Operatör 13
3. MATERYAL VE METOT 21
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 23
4.1. Esnek Kümeler Üzerinde Yeni Bir Benzerlik Ölçüsü 23
4.1.1. Ters pozitif esnek kümeler 23
4.1.2. Esnek benzerlik ölçüsü 25
4.1.3. Ürünlerin karşılaştırılması 26
4.1.4. Esnek kümeler üzerinde benzerlik ölçülerinin karşılaştırılması 30
4.1.5. Esnek kümeler ile üretilen bulanık kümeler 32
4.1.6. Esnek benzerlik ölçüsü ile bulanık benzerlik ölçülerinin karşılaştırılması 35
4.2. Kaba Kümelerin Bir Karakterizasyonu: Denklik Kümesi 41
4.3. Denklik Değeri ve $\mathfrak{R}$-Benzerlik Ölçüsü 43
4.4. $\mathfrak{R}$-Benzerlik Ölçüsünün Uygulamaları 46
4.4.1. Zaman çizelgelerinin hesaplanması 46
4.4.2. Denk kümeler yardımıyla acil müdahale ekiplerinin organizasyonu . . . 47
4.5. Uyum 54
4.5.1. Bulanık kümelerde uyum 54
4.5.2. Bulanık kümelerde uyumun uygulanması 55
4.5.3. Bulanık esnek kümelerde uyum 62
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 65

KAYNAKLAR 67
EKLER 73
Ek 1. 74
ÖZGEÇMİŞ 75

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim süresi boyunca bana bir akıl hocasının nasıl olması gerektiğini gösteren, çalışma azmi ile yolumu aydınlatan, bu tezin hazırlanma sürecinde gösterdiği sabırlı ve anlayışlı hali ile yardımlarını esirgemeyen, tecrübesiyle işlerimi kolaylaştıran, daima desteğini hissettiğim çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e en içten şükranlarımı sunuyorum.

Tez çalışmam boyunca fikirlerini ve görüşlerini benimle paylaşan sayın tez izleme komitesi hocalarım Doç. Dr. Nil MANSUROĞLU ve Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Hayatım boyunca sonsuz bir sevgiyle bugünlere gelmemde en büyük rol sahibi olan, bana olan desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, gerektiğinde zihnimin açılmasına yardımcı olan sevgili annem Gülfer ARGÜN'e ve babam Ziya ARGÜN'e teşekkürlerimi sunuyorum

Temmuz, 2025 Savcı Rahman ARGÜN

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ESNEK VE KABA KÜMELERİN KARMA YAPILARI VE UYGULAMALAR

Savcı Rahman ARGÜN

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: **Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN**
Yıl: 2025 Sayfa: 75
Jüri: **Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN**
Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN
Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ
Doç. Dr. Nil MANSUROĞLU
Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL

Bu tez çalışmasında, ters pozitif esnek küme kavramı tanımlanmış, bu kavram yardımıyla bir benzerlik ölçüsü ve esnek kümeler tarafından üretilmiş bulanık kümeler kavramı elde edilmiştir. Esnek kümelerde tanımlanmış benzerlik ölçüsü, esnek kümeler üzerinde tanımlı olan diğer benzerlik ölçüleri ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu benzerlik ölçüsü esnek kümeler tarafından üretilmiş bulanık kümeler yardımı ile bulanık benzerlik ölçüleriyle de karşılaştırıl mıştır. Denklik kümesi kavramı tanımlanmış ve bu kavram yardımıyla kaba kümeler yeniden karakterize edilmiştir. Sonrasında kaba kümeler üzerinde benzerlik ölçüsü tanımlanmış ve benzerlik ölçüsü ile deprem anında arama kurtarma ekiplerinin nasıl dağıtılacağına yönelik bir uygulama yapılmıştır. Uyum kavramının matematiksel modellemesi bulanık kümeler yardımıyla elde edilmiş ve uygulaması yapılmıştır. Son olarak uyum kavramı bulanık esnek kümelere genişletilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, Esnek küme, Kaba küme, Benzerlik ölçüleri, Denklik kümesi, Bulanık uyum modellemesi

ABSTRACT

DOCTORAL THESIS

HYBRID STRUCTURES OF SOFT AND ROUGH SETS AND APPLICATIONS

Savcı Rahman ARGÜN

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor:	**Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN**
	Year: 2025 Pages: 75
Juries:	**Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN**
	Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN
	Assoc. Prof. Dr. Hürmet Fulya AKIZ
	Assoc. Prof. Dr. Nil MANSUROĞLU
	Assist. Prof. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL

In this thesis, the concept of inverse positive soft set is defined and with the help of this concept, a similarity measure and the concept of fuzzy sets generated by soft sets are obtained. The similarity measure defined in soft sets is compared with other similarity measures defined on soft sets. In addition, this similarity measure is compared with fuzzy similarity measures with the help of fuzzy sets generated by soft sets. The concept of equivalence set is defined and rough sets are recharacterized with the help of this concept. Then, similarity measure is defined on rough sets and its applied to modeling on how to distribute search and rescue teams in case of an earthquake with the similarity measure. The mathematical modeling of the concept of fitting is obtained with the help of fuzzy sets and its application is made. Finally, the concept of fitting is expanded to fuzzy soft sets.

Keywords: Fuzzy set, Soft set, Rough set, Similarity measure, Equivalence set, Fuzzy fitting modeling

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$Sim(A,B)$	Benzerlik ölçüsü
$\mathfrak{R}$	Denklik bağıntısı
(F,A)	Esnek küme
$\mathfrak{U}$	Evrensel küme (Alternatiflerin kümesi)
P_F	(F,A) esnek kümesinin ters pozitif esnek kümesi
N_F	(F,A) esnek kümesinin ters negatif esnek kümesi
$\mathfrak{U}\|_{F_A}$	(F,A) esnek kümesinin kullanışlı alternatiflerinin kümesi
$supp(F,A) = S_{F_A}$	(F,A) esnek kümesinin destek kümesi
$A = (\mathfrak{U};\mathfrak{R})$	Pawlak yaklaşım uzayı
$\widetilde{F}(\mathfrak{U})$	$\mathfrak{U}$ kümesi üzerindeki bulanık kümelerin kümesi
$\widetilde{\mathfrak{SU}}$	$\mathfrak{U}$ kümesi üzerindeki esnek kümelerin kümesi
$\mathfrak{R}_*(X)$	X kümesinin alt yaklaşımı
$\mathfrak{R}^*(X)$	X kümesinin üst yaklaşımı

1. GİRİŞ

Küme teorisinde küme kavramı, nesneleri (elemanları) tek türlü tanımlandırır. Evrensel küme tarafından ihtiva edilen tüm nesneler bir kümenin içinde olup olmadıkları ilişkisi ile sınıflandırılırlar, yani bütün elemanlar kümeye ait olanlar ve kümeye ait olmayanlar olarak ayrıştırılırlar. Dolayısıyla küme teorisi siyah ve beyazdan oluşur ve aradaki renkleri barındırmaz. Bu ise küme kavramına kesinlik kazandırır. Fakat gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin neredeyse hepsi belirsizlikler içerir. Bir hastaya uygulanılacak olan tedavi ve tedavide kullanılacak olan ilacın belirlenmesi, bir şirketin yapacağı personel alımında adayların seçilmesi, bir kurumun belli bir alanda açacağı ihalede katılımcılar arasından hangisi ile ortaklık kuracağı gibi problemlerin hepsi belirsizlikler içermektedir. Böyle problemlerde belirsizliklerin temelinde karar verme sürecinde hangi parametrelerin durumu etkileyeceğinin öngürülemez olması bulunmaktadır. Bu sebeple belirsizlik içeren problemlerin modellenmesinde ve çözülmesinde klasik matematik yetersiz kalır. Bu yetersizlikleri gidermek amacı ile bulanık küme teorisi, kaba küme teorisi ve esnek küme teorisi ile bu teorilerden türemiş olan sezgisel bulanık küme teorisi, hyper esnek küme teorisi gibi bir çok yaklaşım geliştirilmiştir.

Bulanık küme kavramı ilk olarak Zadeh [70] tarafından belirsizlik içeren problemler ile başa çıkmak amacı ile bir nesnenin belli bir özelliğine $[0, 1]$ aralığında değer atayarak ortaya konmuştur. Bir nesnenin aitlik derecesinin 0 olması nesnenin o özelliği taşımadığını belirtirken, nesnenin aitlik derecesinin 1 olması nesnenin o özelliğe tam olarak sahip olması anlamına gelir. Bulanık küme teorisi ortaya konulduğundan bu yana birçok alanda başarıyla uygulanmıştır. Trabia ve ark. [61], izole bir trafik kavşağı için bir sinyal denetleyicisine bulanık mantığı uygulamıştır. Xie ve Beni [67], bulanık kümeler için geçerlilik ölçütlerini incelemiştir. Zhan ve Xu [71] iki tür örtü tabanlı çoklu granülasyonlu kaba bulanık küme modeli tanıtmıştır ve bu modeli kullanarak, çoklu kriter grubu karar verme problemine bir yaklaşım sunmuşlardır. Ayrıca, Zhang ve Zhan [72, 73] bulanık esnek β-örtüler, bulanık esnek β-komşuluklar, bulanık esnek tamamlayıcı β-komşuluklar, kavramlarını tanımlayıp incelemişlerdir. Pedrycz [51] çalışmasında bulanık kümelerle örüntü tanımayı incelemiştir. Zadeh'in [70] çalışmasından sonra, bulanık kümeler, karmaşık bulanık kümeler, bipolar karmaşık bulanık kümeler, resim bulanık kümeleri ve Pisagor bulanık kümeleri gibi diğer bulanık kavramlarına genişletilmiştir. Ashraf ve ark. [5] Pisagor bulanık kümelerine dayalı bulanık karar destek modellemesini ve Mahmood ve Ur Rehman, [40] çalışmasında, bipolar kompleks bulanık kümeler üzerinde genelleştirilmiş benzerlik ölçümlerini incelemişlerdir. Atagün ve Kamacı [8] çalışmasında, aitlik derecelerinin $[0, 1]$'deki kesin değerler yerine $[0, 1]$'in parçalanışları olan aralıklar olarak temsil etmişler ve tanımladıkları bu yapılara strait bulanık küme adını vermişlerdir.

Pawlak [47] 1980'lerde belirsizlik sorunuyla başa çıkmak adına üzerinde denklik bağıntısı bulunan bir kümeyi kullanarak klasik küme kavramından farklı olarak kaba küme teorisini tanımlamıştır. Kaba küme teorisi, özellikle günümüzde teknolojik gelişimin inşa edildiği yapay zeka ve bilişsel bilimlerde, makine öğrenimi, akıllı sistemler, tümevarımsal akıl yürütme, örüntü tanıma, karar verme ve expert sistemler gibi araştırma alanlarında temel bir öneme sahiptir [47, 50, 48, 49, 46]. Bunların yanı sıra kaba kümeler aracılığı ile kaba kümeler üzerinde bazı cebirsel yapılar da birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir [13, 26, 55].

Belirsizlik içeren problemlerin modellenmesi adına ortaya konulmuş olan diğer bir teori 1999 yılında Molodtsov'un [44] esnek küme teorisidir. Bu yaklaşım aitlik fonksiyonu gibi bir kavram barındırmadığından fonksiyonların düzgünlüğü, oyun teorisi, operasyon araştırması, Riemann integrali, Perron integrali, olasılık teorisi ve ölçüm teorisi dahil olmak üzere birçok farklı alana kolayca uygulanabilir. Bu uygulamalardan bazıları Molodtsov'un [44] çalışmasında esnek küme teorisi kullanılarak gösterilmiştir. Günümüzde, esnek küme teorisi üzerine çalışmalar hem teorik hem de uygulama alanında hızla devam etmektedir. Aktaş ve Çağman [2, 3]'de esnek kümeleri bulanık kümeler ve kaba kümelerle karşılaştırmışlar, esnek küme teorisi üzerinde bazı yeni temel kavramları ve esnek grup kavramını tanımlamışlardır. Maji ve ark. [42] esnek kümeleri bir karar verme problemine uygulamışlardır. Maji ve ark. [41] esnek kümeler üzerinde yeni işlemler tanımlamışlardır. Ali ve ark. [4], kısıtlanmış kesişim, kısıtlanmış birleşim ve genişletilmiş kesişim gibi esnek kümeler üzerinde yeni işlemler tanıtmışlardır. [4] çalışmasının ardından diğer matematikçiler de esnek kümeler üzerinde yeni işlemler ortaya koymuşlardır [53, 58]. Atagün ve Aygün [6], esnek kümeler üzerinde iki yeni işlem tanımlamışlardır. [2] çalışmasından bu yana, birçok matematikçi esnek cebirsel yapıları incelemiştir. Acar ve ark. [1] esnek halkalar, Feng ve ark. [22] esnek yarı halkalar, Jun [28] esnek BCK/BCI-cebirleri, Jun ve Park [29] esnek BCK/BCI-cebirlerinin ideal teorisi, Jun ve ark. [30] esnek BCI-cebirlerinin esnek p-idealleri, Kazancı ve ark. [33] esnek BCH-cebirleri, Sezgin ve Atagün [57] esnek yakın-halkalar ve idealist esnek yakın-halkalar, Sezer ve ark. [59] esnek kesişim yarı grupları incelenen esnek cebirsel yapılardan bazılarıdır. Esnek matris teorisi Çağman ve Enginoğlu [14] tarafından esnek kümeleri matris şeklinde yazmak amacı ile ortaya konmuştur. Bu çalışmada esnek matrisleri ve bazı işlemlerini tanımladıktan sonra belirsizlik içeren bir problemi çözmek adına esnek max-min karar verme yöntemini tanımlamışlardır. Esnek kümeler ve esnek matrisler teorisi karar verme problemlerine bir çok matematikçi tarafından başarıyla uygulanmıştır. Atagün ve ark. [7] indirgenmiş esnek matrisleri tanımlayıp, bu kavramı karar verme problemlerinde kullanmışlardır. Kamacı ve ark. [32] kardinalite ters esnek matris teorisini inceleyerek çok kriterli karar verme (MCDM) üzerinden uygulamışlardır. Petchimuthu ve ark. [54] iki bulanık esnek matrisin çarpımlarını genelleştirip, farklı tiplere sahip üç veya daha fazla bulanık esnek matrisin çarpılabileceğini göstermilerdir. Atagün ve Kamacı [9], kaba kümeler ve esnek kümelerin yapıları arasında strait esnek küme ve strait kaba küme olmak üzere iki yeni kavram tanımlamışlardır.

Bu çalışmanın diğer bir konusu olan benzerlik ölçüsü, alternatiflerin sıralama dereceleri, örüntü tanıma, çok nitelikli grup karar verme (MADM) problemleri, makine öğrenimi, piyasa tahmini gibi birçok alanda kullanılan önemli matematiksel araçlardan biridir [38, 60, 63, 66]. Benzerlik ölçüleri, esnek kümeler, bulanık kümeler, kaba kümeler ve bunların hibrit yapıları gibi belirsizlik modelleme yöntemlerinde birçok farklı şekilde tanımlanır. Benzerlik ölçüleri, bulanık küme teorisindeki önemli çalışmalarda ortaya çıkar. Wang [64] iki bulanık küme arasında bir benzerlik ölçüsü tanımlamıştır. Bulanık kümeler arasındaki kosinüs benzerlik ölçüsü, Salton ve McGill [56] tarafından tanıtılmıştır ve bir dokümandan belli bir bilgiyi aramak için kullanılmıştır. Zwick ve ark. [74] geometrik uzaklık ve Hausdorff metrikleri gibi kavramları kullanarak bulanık kümeler üzerinde benzerlik ölçüleri elde etmişlerdir. [17, 45]'te geometrik model, teorik küme yaklaşım, eşleşen fonksiyonlar ve birleşim, kesişim, fark ve toplam gibi işlemler kullanılarak bulanık kümeler için bazı benzerlik ölçümleri önerilmiştir. [65]'te bulanık kümeler ve kümelerin elemanları arasındaki iki benzerlik ölçüsü verilmiştir. [21, 39] çalışmalarında ise bulanık kümeler için benzerlik ölçüsünün aksiyomatik bir tanımı ortaya konmuştur.

Bulanık kümelere benzer bir şekilde esnek kümeler arasındaki benzerlik ölçüleri de birçok farklı şekilde tanımlanmıştır. Bazıları uzaklık tabanlı, ağırlıklı, eşleşen fonksiyon tabanlı ve küme teorisi tabanlıdır. Hem parametre kümesinin hem de yaklaşık değer kümesinin benzerliğini ölçen iki esnek küme arasındaki benzerlik ölçüsü Majumdar ve Samanta [43] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra [43]'de verilmiş olan esnek kümeler üzerindeki benzerlik ölçülerini iyileştirme amacı ile yeni bir benzerlik ölçüsü Kharal [35] tarafından tanıtılmıştır. Ancak Yang [69], [35]'te tanımlanan benzerlik ölçüsünün bir hata içerdiğini karşı örnek ile göstermiş ve daha sonra bu hatanın arındırıldığı yeni bir benzerlik ölçüsünü öne sürmüştür. Esnek matrisler için [24, 31] çalışmalarında bazı benzerlik ölçüleri tanıtılmıştır. Aygün ve Kamacı [10], [6] çalışmasında ortaya koydukları ters çarpım işlemini genelleştirerek, yeni bir benzerlik ölçüsü elde etmişlerdir. Daha sonra Aygün ve Kamacı [11], esnek kümeler arasındaki belirsizlik ölçüleri için aksiyomlar tanıtmışlar ve iki esnek küme arasında benzerlik ve uzaklık ölçümlerinin karşılaştırmalarını ve performans analizlerini sunmuşlardır. Ghosh ve ark. [23], kaba çoklu granülasyon yaklaşımı altında sezgisel bulanık esnek küme tabanlı benzerlik ölçüsünü kullanarak kanser aracılı insan biyobelirteçlerini tanımlayan bir model önermişlerdir. Atagün ve Kamacı, [8, 9]'daki kaba kümelerin hibrit yapıları üzerindeki benzerliği incelemişlerdir. Kaba kümeler üzerinde çok fazla benzerlik ölçüsü tanımlanmamış olmasına rağmen, Lenarčič, [37] kaba kümeler üzerinde kullanılabilecek ölçüleri incelemiştir.

Bu çalışma, "Giriş", "Önceki Çalışmalar", "Materyal ve Metot", "Bulgular ve Tartışma" ve "Sonuç ve Öneriler" başlıkları ile toplamda beş (5) bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın Önceki Çalışmalar bölümünde çalışma boyunca kullanılacak olan temel kavramlar ve hakkında ön bilgiye ihtiyaç olan aggregation operatörler ve benzerlik ölçüleri yer almaktadır. Materyal ve Metot bölümünde ulaşılmak istenen bulgulara nasıl yaklaşdığından söz edilmiştir. Bulgular ve Tartışma bölümünde çalışmamızın asıl bulgularına yer verilmiştir. Son olarak Sonuç ve Öneriler bölümünde elde edilen bulguların çalışma alanına katkıları ve ne tür çalışmalar ile devam edilebileceği tartışılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, bulanık kümeler, kaba kümeler, esnek kümeler gibi temel kavramlardan ve aggregation operatörleri, benzerlik ölçüleri gibi ön bilgiye ihtiyaç duyulan kavramlardan söz edilmiştir.

2.1. Temel Kavramlar

Bulanık küme kavramı, bir grup alternatifin belli bir özelliğe dair $[0, 1]$ aralığında eşleşmesi ile elde edilir.

Tanım 2.1. ([70]) $\mathfrak{U} \neq \emptyset$ evrensel küme olsun. Bu durumda $\mathfrak{U}$ üzerinde η bulanık kümesi, $\eta : \mathfrak{U} \to [0, 1]$ aitlik fonksiyonu olmak üzere $\eta = \{(x, \eta(x))|x \in \mathfrak{U}\}$ sıralı ikilisidir.

$\mathfrak{U}$ üzerindeki bütün bulanık kümelerin kümesi $\widetilde{F}(\mathfrak{U})$ ile gösterilir. Aşağıdaki tanım klasik küme kavramındaki alt küme kavramının bulanık küme teorisine aktarılmış halidir.

Tanım 2.2. ([70]) $\eta, \zeta \in \widetilde{F}(\mathfrak{U})$ olsun. Her $x \in \mathfrak{U}$ için $\eta(x) \leq \zeta(x)$ ise η ya ζ nın bulanık alt kümesidir denir ve $\eta \subseteq \zeta$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.3. $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ alternatiflerin kümesi, $\eta = \{(x_1, 0.23), (x_2, 0.42), (x_3, 0.58)$ $, (x_4, 0.12)\}$ ve $\zeta = \{(x_1, 0.26), (x_2, 0.46), (x_3, 0.87), (x_4, 0.35)\}$ iki bulanık küme olmak üzere, her $x_i \in \mathfrak{U}$ için, $\eta(x_i) \leq \zeta(x_i)$ olduğundan $\eta \subseteq \zeta$.

Bulanık kümeler üzerinde alt küme kavramının yanı sıra kesişim, birleşim ve tümleyen kavramlarıda bulanık kümelere aktarılmıştır.

Tanım 2.4. ([70]) $\eta, \zeta \in \widetilde{F}(\mathfrak{U})$ olsun. Bu durumda

i) η ve ζ bulanık kümelerinin kesişimi her $x \in \mathfrak{U}$ için, $(\eta \cap \zeta)(x) = \eta(x) \wedge \zeta(x) = min\{\eta(x), \zeta(x)\}$ şeklinde tanımlanır.

ii) η ve ζ kümelerinin birleşimi her $x \in \mathfrak{U}$ için, $(\eta \cup \zeta)(x) = \eta(x) \vee \zeta(x) = max\{\eta(x), \zeta(x)\}$ şeklinde tanımlanır.

iii) η bulanık kümesinin tümleyeni her $x \in \mathfrak{U}$ için, $\eta^c(x) = 1 - \eta(x)$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.5. $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, x_3\}$ alternatiflerin kümesi, $\eta = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.42), (x_3, 0.64)\}$ ve $\zeta = \{(x_1, 0.24), (x_2, 0.46), (x_3, 0.56)\}$ olmak üzere

- $\eta \cap \zeta = \{(x_1, 0.24), (x_2, 0.42), (x_3, 0.56)\}$
- $\eta \cup \zeta = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.46), (x_3, 0.64)\}$
- $\eta^c = \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.58), (x_3, 0.36)\}$

olarak elde edilir.

Bulanık kümeler üzerinde tahmin edilebilir işlemler dışında da işlemler mevcuttur.

Tanım 2.6. ([70]) $\eta, \zeta \in \widetilde{F}(\mathfrak{U})$ olmak üzere, bulanık kümeler üzerinde cebirsel çarpım, cebirsel toplam, sınırlı çarpım ve sınırlı toplam işlemleri sırası ile

i) $\eta \cdot \zeta = \{\eta(x) \times \zeta(x) \mid x \in \mathfrak{U}\}$,

ii) $\eta + \zeta = \{\eta(x) + \zeta(x) - \eta(x) \times \zeta(x) \mid \ x \in \mathfrak{U}\}$,

iii) $\eta \odot \zeta = \{0 \vee (\eta(x) + \zeta(x) - 1) \mid \ x \in \mathfrak{U}\}$,

iv) $\eta \oplus \zeta = \{1 \wedge (\eta(x) + \zeta(x) - 1) \mid \ x \in \mathfrak{U}\}$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.7. $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, x_3\}$ alternatiflerin kümesi, $\eta = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.42), (x_3, 0.64)\}$ ve $\zeta = \{(x_1, 0.24), (x_2, 0.46), (x_3, 0.56)\}$ olmak üzere

- $\eta \cdot \zeta = \{(x_1, 0.072), (x_2, 0.1932), (x_3, 0.3584)\}$
- $\eta + \zeta = \{(x_1, 0.468), (x_2, 0.6868), (x_3, 0.8416)\}$
- $\eta \odot \zeta = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0.2)\}$
- $\eta \oplus \zeta = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 0.2)\}$

olarak elde edilir.

Aşağıda tanımı verilen t-düzey kümesi, bulanık bir kümenin hiç bir elemanın belli bir düzeyin altında kalıp kalmayacağını değerlendirmek için kullanılan bir araçtır.

Tanım 2.8. ([52]) $\eta \in \widetilde{F}(\mathfrak{U})$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere, η bulanık kümesinin t-düzey kümesi $\mathfrak{U}$ üzerinde (ya da t-kesim) $\eta_t = \{x \in \eta | \eta(x) \geq t\}$ şeklinde tanımlanır.

Kaba küme kavramının temelinde bir kümenin elemanlarını sahip oldukları özellikler aracılığıyla birbirlerine bir denklik bağıntısıyla (ayırt edilemezlik bağıntısı) ilişkilendirme yatmaktadır. Ayrıca ayırt edilemezlik bağıntısı yardımı ile tanımlanan alt yaklaşım ve üst yaklaşım kavramları da kaba kümelerin tanımlanmasında önemli rol oynar.

Tanım 2.9. ([47]) $\mathfrak{U}$ bir evrensel küme ve $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ ikilisine yaklaşım uzayı denir. Eğer $x, y \in \mathfrak{U}$ ve $(x, y) \in \mathfrak{R}$ ise x ve y, A üzerinde ayırt edilemez denir.

Yaklaşım uzayında $\mathfrak{R}$ bağıntısı, ayırt edilmezlik bağıntısı olarak da adlandırılır.

Tanım 2.10. ([47]) $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ bir yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda $\mathfrak{R}$ bağıntısının denklik sınıflarına, elementer kümeler (atomlar) denir. A daki bütün atomların kümesi $\mathfrak{U}/\mathfrak{R}$ ile gösterilir.

Tanım 2.11. ([47]) $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq \mathfrak{U}$ olsun. Bu durumda

- $\mathfrak{R}_* X = \{x \in \mathfrak{U} : [x]_{\mathfrak{R}} \subseteq X\}$ kümesine X in $\mathfrak{U}$ içindeki alt yaklaşımı denir.
- $\mathfrak{R}^* X = \{x \in \mathfrak{U} : [x]_{\mathfrak{R}} \cap X \neq \emptyset\}$ kümesine X in $\mathfrak{U}$ içindeki üst yaklaşımı denir.

Eğer $\mathfrak{R}_* X = \mathfrak{R}^* X$ ise $X \subseteq \mathfrak{U}$ alt kümesine tanımlanabilir küme denir. Aksi takdirde X e kaba küme denir.

$x \in \mathfrak{U}$ için $x \in \mathfrak{R}_*(X)$ ise "x kesinlikle X e aittir" denir. Diğer taraftan $x \in \mathfrak{R}^*(X)$ ise "x, X e ait olabilir" denir.

Uyarı 2.12. Bir küme üzerinde tanımlanan her denklik bağıntısına karşılık kümenin bir parçalanışı ve kümenin her parçalanışına karşılık bir denklik bağıntısının mevcut olduğunu unutmamak gerekir.

Örnek 2.13. $\mathfrak{U} = \mathbb{Z}_8$ ve $\mathfrak{R}$ bağıntısı, $\mathfrak{U}$ yu $\{1, 3, 6\}$, $\{2, 4, 5, 7\}$, $\{0\}$ şeklinde üç parçaya ayırsın. $X = \{0, 1, 3, 6\} \subset \mathfrak{U}$ için $\mathfrak{R}_* X = \{0, 1, 3, 6\}$ ve $\mathfrak{R}^* X = \{0, 1, 3, 6\}$ olup $\mathfrak{R}_* X = \mathfrak{R}^* X$ elde edilir. Dolayısıyla, X e tanımlanabilir bir kümedir. Diğer taraftan $Y = \{0, 2, 5, 7\}$ kümesi incelenirse $\mathfrak{R}_* Y = \{0\}$ ve $\mathfrak{R}^* Y = \{0, 2, 4, 5, 7\}$ olduğundan $\mathfrak{R}_* Y \neq \mathfrak{R}^* Y$. Dolayısıyla, Y bir kaba kümedir.

Teorem 2.14. te Pawlak'ın [47] çalışmasında alt ve üst yaklaşımlara dair doğruluklarını gösterdiği temel özellikler verilmiştir.

Teorem 2.14. ([47]) $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ bir yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq \mathfrak{U}$ olsun. $-X = \mathfrak{U} \backslash X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $\mathfrak{R}_*(X) \subseteq X \subseteq \mathfrak{R}^*(X)$

ii) $\mathfrak{R}_*(\emptyset) = \emptyset = \mathfrak{R}^*(\emptyset)$

iii) $\mathfrak{R}_*(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U} = \mathfrak{R}^*(\mathfrak{U})$

iv) $\mathfrak{R}_*(\mathfrak{R}_*(X)) = \mathfrak{R}_*(X)$

v) $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{R}^*(X)) = \mathfrak{R}^*(X)$

vi) $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{R}_*(X)) = \mathfrak{R}_*(X)$

vii) $\mathfrak{R}_*(\mathfrak{R}^*(X)) = \mathfrak{R}^*(X)$

viii) $\mathfrak{R}_*(X) = -(\mathfrak{R}^*(-X))$

ix) $\mathfrak{R}^*(X) = -(\mathfrak{R}_*(-X))$

x) $\mathfrak{R}_*(X \cap Y) = \mathfrak{R}_*(X) \cap \mathfrak{R}_*(Y)$

xi) $\mathfrak{R}^*(X \cap Y) \subseteq \mathfrak{R}^*(X) \cap \mathfrak{R}^*(Y)$

xii) $\mathfrak{R}_*(X) \cup \mathfrak{R}_*(Y) \subseteq \mathfrak{R}_*(X \cup Y)$

xiii) $\mathfrak{R}^*(X) \cup \mathfrak{R}^*(Y) = \mathfrak{R}^*(X \cup Y)$

xiv) $X \subseteq Y$ ise $\mathfrak{R}^*(X) \subseteq \mathfrak{R}^*(Y)$ ve $\mathfrak{R}_*(X) \subseteq \mathfrak{R}^*(Y)$

Tanım 2.15. ([47]) $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq \mathfrak{U}$ olsun. Bu durumda $\tilde{\mathfrak{R}_X} = \mathfrak{R}^*(X) - \mathfrak{R}_*(X)$ kümesine, X in $\mathfrak{U}$ içindeki sınırı denir.

Tanım 2.16. ([47]) $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq \mathfrak{U}$ olsun. $\overline{\mathfrak{R}_X} = \mathfrak{R}^*(X) - X$ ve $\underline{\mathfrak{R}_X} = X - \mathfrak{R}_*(X)$ kümeleri sırasıyla X in $\mathfrak{U}$ içindeki dış kenarı ve iç kenarı olarak adlandırılır.

$\tilde{\mathfrak{R}_X} = \overline{\mathfrak{R}_X} \cup \underline{\mathfrak{R}_X}$ eşitliğinin sağlandığı açıkça görülebilir.

Tanım 2.17. ([47]) $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq \mathfrak{U}$ olsun. $\underline{\rho}(X)$, $\mathfrak{R}_*(X)$ tarafından ihtiva edilen atomların sayısı ve $\overline{\rho}(X)$, $\mathfrak{R}^*(X)$ tarafından ihtiva edilen atomların sayısı olmak üzere, $\underline{\rho}(X)$ ve $\overline{\rho}(X)$ e sırasıyla X in $\mathfrak{U}$ içindeki iç ve dış ölçüsü denir.

Bulanık kümeler, bir nesne topluluğunun tek bir parametreyi ne derece sağladığını belirtmek amacı ile kullanılırken, esnek kümeler bir nesne topluluğun hangi parametreleri sağlayıp sağlamadığını görmek için kullanılır. Bu kısımda esnek küme kavramı ve bu kavramın temel özelliklerinin yanında esnek kümeler üzerinde tanımlanmış işlemlerden de söz edilecektir.

Tanım 2.18. ([41]) $\mathfrak{U}$ bir evrensel küme, E parametrelerin kümesi, $P(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}$ nun kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. Bu durumda $F : A \to P(\mathfrak{U})$ şeklinde tanımlı dönüşüm için (F, A) sıralı ikililerin kümesine $\mathfrak{U}$ üzerinde bir esnek küme denir. $\mathfrak{U}$ üzerinde tanımlı esnek küme (F, A) ya da F_A şeklinde gösterilir.

Dolayısıyla esnek küme kısaca alternatiflerin parametrelendirilmiş kümesidir. Her $e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ ise (F, A) ya boş esnek küme denir. Diğer taraftan her $e \in A$ için $F(e) = \mathfrak{U}$ ise (F, A) ya evrensel esnek küme denir. $\mathfrak{U}$ üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi $\widetilde{\mathfrak{S}\mathfrak{U}}$ ile gösterilir.

Örnek 2.19. (F, A) esnek kümesi bir iş yerindeki boş bir pozisyon için adayların kapasitelerini tanımlasın. Bu pozisyon için yedi aday olsun ve bu adaylar

$$\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$$

evrensel kümesini oluştursun.

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

parametrelerin kümesi olmak üzere e_i için $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ parametreleri sırasıyla, ”iletişim becerisi”, ”ikna kabiliyeti”, ”yabancı dil bilgisi”, ”yaş durumu” ve ”öğrenim durumu” olsun. $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ve $F(e_1) = \{u_1, u_4\}$, $F(e_2) = \{u_2, u_3, u_5\}$, $F(e_3) = \{u_2, u_4, u_6\}$, $F(e_4) = \{u_1, u_3, u_6\}$, $F(e_5) = \mathfrak{U}$ alınsın. Bu durumda (F, A) esnek kümesi

$$(F, A) = \{(e_1, \{u_1, u_4\}), (e_2, \{u_2, u_3, u_5\}), (e_3, \{u_2, u_4, u_6\}), (e_4, \{u_1, u_3, u_6\}), (e_5, \mathfrak{U})\}$$

şeklinde oluşturulur. Burada $(e_1, \{u_1, u_4\}) \in (F, A)$ olması u_1 ve u_4 adaylarının iletişim becerisine sahip olduğunu göstermektedir.

Tanım 2.20. ([53]) (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda

i) $A \subseteq B$ ve her $e \in A$ için, $F(e) \subseteq G(e)$ ise (F, A), (G, B) nin esnek alt kümesidir denir ve $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ şeklinde gösterilir.

ii) $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ ve $(G, B)\tilde{\subseteq}(F, A)$ ise (F, A) ve (G, B) esnek kümelerine eşit esnek kümeler denir ve $(F, A) = (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.21. $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ alternatiflerin kümesi, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametrelerin kümesi, $A = \{e_1, e_3\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_3, e_4\} \subset E$ olsun. (F, A) ve (G, B) sırasıyla $(F, A) = \{(e_1, \{u_1\}), (e_3, \{u_1, u_3\})\}$ ve $(G, B) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_3, \{u_1, u_3\}), (e_4, \emptyset)\}$ olacak şekilde iki esnek küme olmak üzere $A \subset B$, $F(e_1) \subset G(e_1)$ ve $F(e_3) \subseteq G(e_3)$ olduğundan $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$.

Esnek kümeler üzerinde bir çok işlem tanımlanmıştır. Bunlardan en çok kullanılan esnek küme işlemlerine aşağıda yer verilmiştir.

Tanım 2.22. ([41]) (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda

i) $C = A \cup B$,

ii) Her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A \setminus B \text{ ise} \\ G(e), & e \in B \setminus A \text{ ise} \\ F(e) \cup G(e), & e \in A \cap B \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H, C) esnek kümesine (F, A) ile (G, B) nin birleşimi denir ve $(F, A)\tilde{\cup}(G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.23. ([58]) (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda

i) $C = A \cap B$,

ii) Her $e \in C$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$

şeklinde tanımlanan (H, C) esnek kümesine (F, A) ile (G, B) nin kısıtlanmış birleşimi denir ve $(F, A) \cup_R (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.24. ([4]) (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda

i) $C = A \cap B$,

ii) Her $e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$

şeklinde tanımlanan (H, C) esnek kümesine (F, A) ile (G, B) nin kısıtlanmış kesişimi denir ve $(F, A) \cap_R (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.25. ([53]) (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda

i) $C = A \cup B$,

ii) Her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A \setminus B \text{ ise} \\ G(e), & e \in B \setminus A \text{ ise} \\ F(e) \cap G(e), & e \in A \cap B \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H, C) esnek kümesine (F, A) ile (G, B) nin genişletilmiş kesişimi denir ve $(F, A) \sqcap_\epsilon (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.26. ([4]) (F, A), $\mathfrak{U}$ üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in A$ için

$$F^r : A \to P(\mathfrak{U})$$

şeklinde bir dönüşüm olmak üzere

$$F^r(x) = \mathfrak{U} - F(x)$$

ifadesi ile tanımlanan esnek kümeye (F, A) esnek kümesinin tümleyeni denir. (F, A) esnek kümesinin tümleyeni $(F, A)^r = (F^r, A) = F_A^r$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.27. ([10]) (F, A), $\mathfrak{U}$ üzerinde bir esnek küme ve $\alpha \subseteq A$ olsun. $F^{r_\alpha} : A \to P(\mathfrak{U})$,

$$F^{r_\alpha}(e) = \begin{cases} \mathfrak{U} - F(e), & e \in A \ \text{ ise} \\ F(e), & e \in A \setminus \alpha \ \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu ile ifade edilen esnek kümeye (F, A) nın α-tümleyeni denir ve $F_A^{r_\alpha}$ ile gösterilir.

Tanım 2.28. ([10]) (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer (H, C) esnek kümesi

i) $C = A \cup B$,

ii) Her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A \setminus B \ \text{ ise} \\ \emptyset, & e \in B \setminus A \ \text{ ise} \\ F(e) - G(e), & e \in A \cap B \ \text{ ise} \end{cases}$$

şartlarını sağlıyorsa (H, C) ye (F, A) ile (G, B) nin yarı ters çarpımı denir ve $H_{A \oslash B} = (F, A) \oslash (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.29. ([10]) (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer (H, C) esnek kümesi

i) $C = A \cup B$,

ii) Her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A \setminus B \ \text{ ise} \\ G(e), & e \in B \setminus A \ \text{ ise} \\ (F(e) - G(e)) \cup (G(e) - F(e)), & e \in A \cap B \ \text{ ise} \end{cases}$$

şartlarını sağlıyorsa (H, C) ye (F, A) ile (G, B) nin genelleştirilmiş ters çarpımı denir ve $H_{A \otimes B} = (F, A) \otimes (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Yarı ters çarpım ile genelleştirilmiş ters çarpım arasında

$$(F,A)\otimes(G,B)=((F,A)\oslash(G,B))\sqcup((G,B)\oslash(F,A))$$

ilişkisi vardır.

Örnek 2.30. $\mathfrak{U}=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ alternatiflerin kümesi, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametrelerin kümesi, $A=\{e_1,e_3\}\subset E$, $B=\{e_1,e_3,e_4\}\subset E$ ve $\alpha=\{e_1\}\subset A$ olsun. (F,A) ve (G,B) sırasıyla $(F,A)=\{(e_1,\{u_1,u_4\}),(e_3,\{u_2,u_3\})\}$ ve $(G,B)=\{(e_1,\{u_1,u_2\}),(e_3,\{u_1,u_3,u_4\}),(e_4,\emptyset)\}$ olacak şekilde iki esnek küme olmak üzere;

- $(F,A)\widetilde{\cup}(G,B)=\{(e_1,\{u_1,u_2,u_4\}),(e_3,\{u_1,u_2,u_3,u_4\}),(e_4,\emptyset)\}$
- $(F,A)\cup_R(G,B)=\{(e_1,\{u_1,u_2,u_4\}),(e_3,\{u_1,u_2,u_3,u_4\})\}$
- $(F,A)\cap_R(G,B)=\{(e_1,\{u_1\}),(e_3,\{u_3\})\}$
- $(F,A)\sqcap_\epsilon(G,B)=\{(e_1,\{u_1\}),(e_3,\{u_3\}),(e_4,\emptyset)\}$
- $(F,A)^r=\{(e_1,\{u_2,u_3,u_5\}),(e_3,\{u_1,u_4,u_5\})\}$
- $F_A^{r_\alpha}=\{(e_1,\{u_2,u_3,u_5\}),(e_3,\{u_2,u_3\})\}$
- $(F,A)\oslash(G,B)=\{(e_1,\{u_4\}),(e_3,\{u_2\}),(e_4,\emptyset)\}$
- $(F,A)\otimes(G,B)=\{(e_1,\{u_1,u_4\}),(e_3,\{u_1,u_2,u_4\}),(e_4,\emptyset)\}$

Tanım 2.31. ([22]) (F,A), $\mathfrak{U}$ üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda

$$supp(F,A)=\{e\in A|F(e)\neq\emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye (F,A) esnek kümesinin destek kümesi denir.

Tanım 2.32. ([24]) (F,A), $\mathfrak{U}$ üzerinde bir esnek küme ve A boştan farklı bir parametre kümesi olsun. Eğer (F,A)

i) $\bigcup_{e\in A}F(e)=\mathfrak{U}$,

ii) Her $e_i,e_j\in A$ ve $e_i\neq e_j$ iken $F(e_i)\cap F(e_j)=\emptyset$

şartlarını sağlıyorsa (F,A) ya bijektif esnek küme denir.

Örnek 2.33. $\mathfrak{U}=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}$ bir evrensel küme ve $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametrelerin kümesi, $F(e_1)=\{u_1,u_2,u_3\}$, $F(e_2)=\{u_4,u_5,u_6\}$, $F(e_3)=\{u_7\}$, $F(e_4)=\{u_4,u_5,u_6,u_7\}$ olsun. Bu durumda aynı F fonksiyonu altında $A=\{e_1,e_2,e_3\}$ ve $B=\{e_1,e_4\}$ için sırasıyla (F,A) ve (F,B) birer bijektif esnek kümedir. Fakat $C=\{e_1,e_3\}$ için (F,C) bir bijektif esnek küme değildir.

Tanım 2.34. ([68]) $\mathfrak{U}$ bir başlangıç uzayı ve E parametrelerin kümesi olsun. $A \subseteq E$ için $F : A \to \widetilde{F}(\mathfrak{U})$ dönüşümü göz önünde bulundurulduğunda (F, A) ikilisine bulanık esnek küme denir.

Örnek 2.35. $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2\}$ kümesi bir şirkete başvuran çalışan adaylarının kümesi olsun. e_1:ekip çalışmasına uygun, e_2:liderlik becerisine sahip, e_3:hemen adapte olabilen, ifadeleri parametreler ve E kümeside parametrelerin kümesi olmak üzere aday personellere ait bulanık esnek küme $F(e_1) = \{(u_1, 0.4)\}$, $F(e_2) = \{(u_1, 0.36), (u_2, 0.6)\}$ ve $F(e_3) = \{(u_2, 0.8)\}$ olsun. Bu durumda $F(e_1) = \{(u_1, 0.4)\}$ ifadesi ile esas olarak bahsedilmek istenen, adaylar arasından seçim yapan kişinin u_1 adayının ekip çalışmasına uygunuğu becerisine 0 ila 1 arasında 0.4 vererek u_1 adayının ekip çalışmasına uygun olduğunu ama bu beceriye orta düzeyde sahip olduğunu anlatmaktır. Aslında bulanık esnek kümeler parametreler ile eşleştirilen alternatiflerin belirlenen parametreyi ne derecede sağladığını temsil eden yapılardır.

Bir başka esnek küme tanımı ise Çağman ve Enginoğlu tarafından [15] çalışmasında verilmiştir.

Tanım 2.36. ([15]) $\mathfrak{U}$ bir evrensel küme, E parametrelerin kümesi, $P(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}$ nun kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F : E \to P(\mathfrak{U})$, $e \notin A$ için $F(e) = \emptyset$ olacak şekilde bir dönüşüm olmak üzere

$$(F, A) = \{(e, F(e)) | e \in E, F(e) \in P(\mathfrak{U})\},$$

sıralı ikililerin kümesine esnek küme denir. $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek küme (F, A) ya da F_A şeklinde gösterilir.

Tanım 2.37. ([34]) E parametrelerin kümesi, $P(E)$ parametrelerin kuvvet kümesi ve $\mathfrak{U}$ alternatifler kümesi olsun. Bu durumda $F : \mathfrak{U} \to P(E)$, $F(e) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir dönüşüm olmak üzere

$$(F, \mathfrak{U}) = \{(x, F(x)) | e \in \mathfrak{U}, F(x) \in P(E)\}$$

sıralı ikililerin kümesine ters esnek küme denir.

Dolayısıyla, ters esnek küme kısaca parametrelerin alternatiflendirilmiş kümesidir.

2.2. Benzerlik Ölçüleri ve Aggregation Operatör

Bir şirkette bulunan iki farklı ekibin aynı işi yapabiliyor olup olmadıklarını, iki ilacın aynı semptomlara karşı kullanılıp kullanılamayacağı ya da iki ürünün birbirlerinin muadili olup olmadıkları, söz konusu iki ekibin, iki ilacın ya da iki ürünün birbirlerine ne kadar benzeyip benzemediklerine bağlıdır. Bulanık ve esnek kümelerde benzerlik ölçüleri bu tip problemlerde sıkça kullanılan önemli bir araçtır. Çalışmanın bu kısmında bulanık kümeler, esnek kümeler ve kaba kümeler üzerinde tanımlanmış olan bazı benzerlik ölçülerinden söz edilecektir.

Aşağıdaki tanım bir dönüşümün bulanık kümeler üzerinde benzerlik ölçüsü olabilmesi için hangi şartları sağlaması gerektiğinden söz etmektedir.

Tanım 2.38. ([39]) $\mathfrak{U}$ alternatiflerin kümesi ve A, B ve C kümeleri $\mathfrak{U}$ da bulanık kümeler olsun. Bu durumda $\widetilde{F}(\mathfrak{U})$ üzerinde tanımlı S dönüşümünün bulanık kümeler üzerinde bir benzerlik ölçüsü olması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir:

i) $S(A, B) = S(B, A)$

ii) A için, $S(A, A^c) = 0$

iii) Her $E \in \widetilde{F}(\mathfrak{U})$ için, $S(E, E) = max_{A,B \in \widetilde{F}(\mathfrak{U})} S(A, B)$

iv) $A \subseteq B \subseteq C$ ise $S(A, C) \leq S(A, B)$ ve $S(A, C) \leq S(B, C)$

Aşağıda bulanık kümeler üzerinde benzerlik ölçüsü aksiyomlarını sağlayan bazı benzerlik ölçüleri verilmiştir.

Tanım 2.39. ([45]) $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı alternatiflerin kümesi η_A ve η_B, $\mathfrak{U}$ üzerinde A ve B nin aitlik fonksiyonları olsun. Bu durumda $i = 1, 2, ..., n$ için,

$$Sim(A, B) = 1 - max_i(|\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bulanık kümeler üzerinde bir benzerlik ölçüsüdür.

Tanım 2.40. ([45]) $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı alternatiflerin kümesi η_A ve η_B, $\mathfrak{U}$ üzerinde A ve B nin aitlik fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$Sim(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} min(\eta_A(x_i), \eta_B(x_i))}{\sum_{i=1}^{n} max(\eta_A(x_i), \eta_B(x_i))}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bulanık kümeler üzerinde bir benzerlik ölçüsüdür.

Tanım 2.41. ([45]) $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı alternatiflerin kümesi η_A ve η_B, $\mathfrak{U}$ üzerinde A ve B nin aitlik fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$Sim(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|}{\sum_{i=1}^{n} |\eta_A(x_i) + \eta_B(x_i)|}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bulanık kümeler üzerinde bir benzerlik ölçüsüdür.

Tanım 2.42. ([65]) $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı alternatiflerin kümesi η_A ve η_B, $\mathfrak{U}$ üzerinde A ve B nin aitlik fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$Sim(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [\frac{min(\eta_A(x_i), \eta_B(x_i))}{max(\eta_A(x_i), \eta_B(x_i))}]}{n}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bulanık kümeler üzerinde bir benzerlik ölçüsüdür.

Tanım 2.43. (([65]) $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı alternatiflerin kümesi η_A ve η_B, $\mathfrak{U}$ üzerinde A ve B nin aitlik fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$Sim(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [1 - |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|]}{n}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bulanık kümeler üzerinde bir benzerlik ölçüsüdür.

Bazen benzerlik ölçüsüleri metrik anlamda var olan uzaklık ölçüleri yardımıyla da elde edilebilir. Aşağıdaki tanımda bulanık kümeler üzerinde kullanılan bazı uzaklık ölçüleri verilmiştir.

Tanım 2.44. ([25]) ,$\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı alternatiflerin kümesi η_A η_B, $\mathfrak{U}$ nun altkümeleri olan A ve B nin aitlik fonksiyonları olsun. Bu durumda bazı iyi bilinen uzaklık ölçüleri;

i) Hamming uzaklığı:
$d(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|$.

ii) Normalize edilmiş Hamming uzaklığı:
$l(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|$.

iii) Euclidean uzaklığı:
$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2}$.

iv) Normalize edilmiş Euclidean uzaklığı:
$q(A, B) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2}$

şeklindedir.

Tanım 2.45. ([36]) A ve B, $\mathfrak{U}$ üzerinde iki bulanık küme olsun. Eğer $DM(A, B)$ A ve B nin aralarındaki uzaklık ise $SM(A, B) = \frac{1}{1+DM(A,B)}$ bir benzerlik ölçüsüdür.

Kaba kümeler, benzerlik problemlerinin fazla modellenmediği bir yapı olsa da, kaba kümeler üzerinde benzerlik ölçüsü olarak kullanılabilecek bazı ölçüler mevcuttur. Aşağıda bu ölçülerden bazılarına yer verilmiştir.

- Jaccard indeks [27]: $Sim_J(X,Y) = \frac{|X\cap Y|}{|X\cup Y|}$
- Dice-Sorensen indeks [20]: $Sim_D(X,Y) = \frac{2|X\cap Y|}{|X|+|Y|} = \frac{2|X\cap Y|}{|X\cap Y|+|X\cup Y|}$
- Tversky indeks [62]: $Sim_T(X,Y) = \frac{|X\cap Y|}{|X\cup Y|+\alpha|X-Y|+\beta|Y-X|}, \alpha,\beta \geq 0$
- Braun-Blanquet indeks [19]: $Sim_{BB}(X,Y) = \frac{|X\cap Y|}{max(|X|,|Y|)}$

Eğer Braun-Blanquet indeksinde $\alpha = \beta = 1$ ise, $Sim_{BB}(X,Y) = Sim_J(X,Y)$ ve $\alpha = \beta = 0.5$ ise, $Sim_{BB}(X,Y) = Sim_{DS}(X,Y)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.46. ([37]) $Sim : P(\mathfrak{U}) \times P(\mathfrak{U}) \to [0,1]$ dönüşümü $A, B \subseteq \mathfrak{U}$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa Sim e benzerlik ölçüsü denir:

i) $Sim(A,B) = 1 \Leftrightarrow A = B$

ii) $Sim(A,B) = Sim(B,A)$

iii) $Sim(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

iv) $x \in B - A$ ise $Sim(A,B) < Sim(A \cup \{x\}, B)$

v) $x \notin A \cup B$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ ise $Sim(A,B) > Sim(A \cup \{x\}, B)$

Lenarčič [37] çalışmasında aynı zamanda şart (v) in zayıf bir halini de tanımlamıştır.

v') $x \notin B$ ise $Sim(A,B) > Sim(A \cup \{x\}, B)$

Lenarčič [37] çalışmasında Dice-Sorensen ve Tversky indekslerinin tüm aksiyomları sağladığını göstermiştir. Braun-Blanquet indeksi ise ilk dört aksiyon ile beşinci aksiyomun zayıf halini sağladını elde etmiştir.

Diğer taraftan, esnek kümeler üzerinde tanımlanmış bir çok benzerlik ölçüsü mevcuttur. Bu benzerlik ölçülerinden bazılarına bu çalışmada yer verilmiştir.

Tanım 2.47. ([35]) (F,A), (G,B) ve (H,C), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek kümeler olsun. $Sim : \widetilde{\mathfrak{S}\mathfrak{U}} \times \widetilde{\mathfrak{S}\mathfrak{U}} \to [0,1]$ dönüşümü

i) $0 \leq Sim((F,A),(G,B) \leq 1$

ii) $(F,A) = (G,B)$ ise $Sim((F,A),(G,B)) = 1$

iii) $Sim((F,A),(G,B)) = Sim((G,B),(F,A))$

iv) $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)\widetilde{\subseteq}(H,C)$ ise $Sim((F,A),(G,B)) = Sim((F,A),(H,C))$ ve $Sim((F,A),(H,C)) = Sim((G,B),(H,C))$

şartlarını sağlıyorsa Sim bir benzerlik ölçüsüdür.

Tanım 2.48. ([35]) (F,A) ve (G,B), $\mathfrak{U}$ üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda

$$Sim((F,A),(G,B)) = \frac{|A\cap B|}{max(|A|,|B|)} + \frac{\sum_{e\in A\cap B}|F(e)\cap G(e)|}{\sum_{e\in A\cap B} max(|F(e)|,|G(e)|)}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bir benzerlik ölçüsü olarak tanımlanmıştır. Fakat bu dönüşüm 1 den büyük değerler aldığından Kharal [35] ın kendi aksiyomlarını sağlamamaktadır.

Bunun üzerine Yang [69] aksiyomdaki sıkıntıyı gidermek adına yeni aksiyomatik bir yapı kurmuştur.

Tanım 2.49. ([69]) (F,A), (G,B) ve (H,C), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek kümeler olsun. $(\eta,\zeta):\widetilde{\mathfrak{S}\mathfrak{U}}\times\widetilde{\mathfrak{S}\mathfrak{U}}\to[0,1]\times[0,1]$ dönüşümü

i) $\eta(F,F) = 1$ ve $\eta(\emptyset_E,\mathfrak{U}_A) = 0$; $\zeta(A,A) = 1$ ve $\zeta(\emptyset,E) = 0$

ii) $\eta(F,G) = \eta(G,F)$ ve $\zeta(A,B) = \zeta(B,A)$

iii) $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)\widetilde{\subseteq}(H,C)$ ise $\eta(F,H) \leq \eta(F,G)\wedge\eta(G,H)$ ve $\zeta(A,C) \leq \eta(A,B)\wedge\eta(B,C)$

şartlarını sağlıyorsa (η,ζ) bir benzerlik ölçüsüdür.

Bu tanım üzerinde Yang [69], Kharal'ın [35] tanımını revize ederek esnek kümeler üzerinde iki yeni benzerlik ölçüsü tanımlamıştır.

Tanım 2.50. ([69]) (F,A) ve (G,B), $\mathfrak{U}$ üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda

$$(\eta,\zeta)((F,A),(G,B)) = (\frac{|A\cap B|}{max(|A|,|B|)}, \frac{\sum_{e\in A\cap B}|F(e)\cap G(e)|}{\sum_{e\in A\cap B} max(|F(e)|,|G(e)|)})$$

şeklinde tanımlı dönüşüm Yang'ın [69] aksiyomlarına göre bir benzerlik ölçüsüdür.

Tanım 2.51. ([69]) (F,A) ve (G,B), $\mathfrak{U}$ üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda

$$(\eta,\zeta)((F,A),(G,B)) = (\frac{|A\cap B|}{(|A\cup B|)}, \frac{\sum_{e\in A\cap B}|F(e)\cap G(e)|}{\sum_{e\in A\cap B}(|F(e)\cup G(e)|)})$$

şeklinde tanımlı dönüşüm Yang'ın [69] aksiyomlarına göre bir benzerlik ölçüsüdür.

Bu benzerlik ölçüsü uygulanırken $(\eta, \zeta)((F, A), (G, B)) \geq (\alpha, \beta)$ olacak şekilde (α, β) ikilisine göre kıyaslama yapılır.

Tanım 2.52. ([10]) (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda

i) $Sim((F, A), (F, A)) = 1$

ii) $Sim((F, A), (F^r, A)) = 0$

iii) $Sim((F, A), (G, B)) = Sim((G, B), (F, A))$

iv) $0 \leq Sim((F, A), (G, B) \leq 1$

şartlarını sağlayan dönüşüme benzerlik ölçüsü denir.

Tanım 2.53. ([10]) (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde iki esnek küme olsun. $I = \{i : e_i \in A \cup B\}$

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{|H_{A \otimes B}(e_i)|}{|H_{A \sqcup B}(e_i)|} & , i \in I \text{ için } H_{A \sqcup B} \neq \emptyset \text{ ise} \\ 0 & , i \in I \text{ için } H_{A \sqcup B} = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$Sim(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}(1 - \sum_{i \in I} \theta_i)$$

ifadesi bir benzerlik ölçüsüdür.

Bir kurum, bir spor kulübü, bir şirket ya da yüklü miktarda veri ile uğraşmak durumunda kalan herhangi bir yapılanma çok sayıda veri ile uğraşmak yerine bu verilerin konsantre hale getirilmiş bir veri ile uğraşmayı tercih eder. Kelime anlamı "toplama" olan aggregation operatörlerinin amacı $[0, 1]$ arasında değer alan yüklü miktarda veriyi yine $[0, 1]$ aralığında değer alan tek bir sayıya indirgemektir.

Tanım 2.54. [16] $f : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]^n \to [0, 1]$, n-li işlemi $f(0, 0, ..., 0) = 0$ ve $f(1, 1, ..., 1) = 1$ şartlarını sağlıyor ise f sınırları korur denir.

Aslında yukarıdaki tanımda anlatılmak istenen sınırları koruyan bir n-li işlemde girilen verilerin hepsinin olabilecek en düşük değerde olması durumunda çıktının da olabilecek en düşük değerde olması gerektiğidir. Benzer şekilde eğer girilen veriler hepsi olabilecek en yüksek değerde ise çıktı da olabilecek en yüksek değerde olmalıdır.

Tanım 2.55. [16] $f : \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} [0,1]^n \to [0,1]$, n-li işlemi $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$,...,$x_n \leq y_n$ şartlarını sağlayan her $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(y_1, y_2, ..., y_n) \in [0,1]^n$ için

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f(y_1, y_2, ..., y_n)$$

oluyorsa f, n-li işlemine monotondur denir.

Tanım 2.56. [16] $f : \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} [0,1]^n \to [0,1]$, n-li işlemi monoton ve sınırları koruyor ise f bir aggregation operatörü denir.

Aşağıda bilinen ve sıklıkla kullanılan bazı aggregation operatörleri verilmiştir.

Tanım 2.57. [16] $f_\Sigma : [0,1]^n \to [0,1]$ olmak üzere

$$f_\Sigma(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

şeklinde tanımlanan n-li işleme aritmetik orta denir.

Tanım 2.58. [16] $f_G : [0,1]^n \to [0,1]$ olmak üzere

$$f_G(x_1, x_2, ..., x_n) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$$

şeklinde tanımlanan n-li işleme geometrik orta denir.

Tanım 2.59. [16] $f_\Pi : [0,1]^n \to [0,1]$ olmak üzere

$$f_\Pi(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

şeklinde tanımlanan n-li işleme çarpım fonksiyonu denir.

Tanım 2.60. [16] $f_H : [0,1]^n \to [0,1]$ olmak üzere

$$f_H(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{xi}}$$

şeklinde tanımlanan n-li işleme harmonik orta denir.

Tanım 2.61. [16] $f_q : [0,1]^n \to [0,1]$ olmak üzere

$$f_q(x_1, x_2, ..., x_n) = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{n}}$$

şeklinde tanımlanan n-li işleme kuadratik orta denir.

Teorem 2.62. [16] f_Σ, f_G, f_Π, f_H, f_q dönüşümleri aggregation operatörleridir.

Ayrıca $f_\phi : [0,1]^n \to [0,1]$ olmak üzere f_ϕ dönüşümü

$$f_\phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n x_i + \prod_{i=1}^n (1 - x_i)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f_ϕ dönüşümü de bir aggregation operatörüdür.

3. MATERYAL VE METOT

Esnek kümeler üzerinde ters pozitif esnek küme P_F ve ters negatif esnke küme N_F gibi kavramların tanımlanmasının sebebi, esnek kümelerde bir parametrenin görüntüsü alternatiflerin bir kümesi iken ters esnek kümelerde alternatifler ile parametrelerin görevlerini değiştirmesidir. Böylece, benzerlik ölçüsü tanımlanırken esnek küme ve ters esnek küme kavramlarından yararlanılarak hem alternatiflerin hem de parametrelerin kıyaslanması sağlanacaktır. Benzerlik ölçülerinin esas amacı nesne topluluklarını kıyaslamak olduğundan birden fazla türde hazır gıda üreten bir şirketin aynı türlerde hazır gıda ürünü üreten üç şirketten hangisi ile benzeştiği bu çalışmada tanımlanan benzerlik ölçüsü ve Γ ikincil benzerlik değeri yardımı ile kıyaslanacaktır. Bu algoritmaların işlevselliği dolayısıyla benzerlik ölçüsünün etkinliği yine esnek kümeler üzerinde daha önce tanımlanmış olan benzerlik ölçüleri ile aynı problem çözüldükten sonra sonuçlar karşılaştırılarak kıyaslanacaktır. Daha sonra, yine ters pozitif esnek küme P_F ve ters negatif esnek küme N_F gibi kavramlar yardımı ile esnek kümeler bulanık kümelere dönüştürülecektir. Tanımlanan benzerlik ölçüsü esnek kümeler tarafından üretilen bulanık kümeler yardımı ile bulanık kümeler üzerinde uzaklık yardımıyla tanımlanan benzerlik ölçüleriyle kıyaslanacaktır.

Çalışmanın devamında Pawlak [47] ın tanımladığı yaklaşım uzayları üzerinde denklik kümesi adı verilen bir kavram tanıtılacak ve bu kavram aracılığıyla kaba küme kavramı birkaç farklı şekilde karakterize edilecektir. Bu karakterizasyonun sonucunda bir kümenin alt ve üst yaklaşımları incelenmeden kümenin kaba olup olmadığı belirlenebilecektir. Ardından denklik kümesi kavramı üzerinde küme işlemlerinin özellikleri incelenecektir. Sonrasında denklik kümeleri yardımıyla denklik değeri kavramı tanımlanarak, bu kavramın temel özellikleri incelendikten sonra kaba kümelerde büyük bir eksiklik olan $\mathfrak{R}$-benzerlik ölçüsü ve ağırlıklı $\mathfrak{R}$-benzerlik ölçüsü tanımlanacaktır. Bu yolla, deprem olması durumunda bir bölgenin deprem alanına aktaracağı personellerin seçimine ve olay yerinde arama kurtarma ekiplerinin vardiyalarının nasıl oluşturulacağına dair bir problem ortaya konulup, bu problem benzerlik ölçüsü yardımıyla çözüme kavuşturulacaktır. Bu süreç ulaşım sürelerine göre deprem bölgesine istenen sürede ulaşabilecek personelin ulaşım sürelerine göre nasıl esnek küme yardımı ile sınıflandırılacağını ve deprem bölgesinde bina türlerine göre arama kurtarma ekiplerinin vardiyalı çalışma sisteminin benzerlik ölçüsü yardımı ile nasıl oluşturulacağını belirten bir algoritma yardımı ile sağlanacaktır.

Son olarak uyum kavramı, tamamlayıcı uyum ve benzerlik uyumu olarak iki konsepte ayrılarak bu yapılar bulanık kümeler üzerinde matematiksel olarak modellenecektir. Modelle menin ardından ise bu iki uyum türüne ait veriler kendi içlerinde aggregation operatörler yardımı ile tek bir veriye indirgendikten sonra sonuçta elde edilen tamamlayıcı uyuma ve benzerlik uyumuna ait veriler tekrar aggregation opertörler yardım ile uyum adı verilen tek bir veriye indirgenecektir.

Kullanılan makale ve kitaplar Kaynaklar bölümünde belirtilmiştir. Ek olarak, bu tezin yazımı için LaTeX programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Çalışmanın bu bölümünde, özgün bulgulara, bulgulara dair görüş ve düşüncelere yer verilmiştir.

4.1. Esnek Kümeler Üzerinde Yeni Bir Benzerlik Ölçüsü

4.1.1. Ters pozitif esnek kümeler

Tanım 4.1. (F, A), $\mathfrak{U}$ üzerinde bir esnek küme ve $A \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda;

a. $P_F : \mathfrak{U} \to F^{-1}(P(\mathfrak{U})) \subseteq A$ olmak üzere $P_F(u_i) = \{e_j | u_i \in F(e_j)\}$ şeklinde tanımlanan kümeye $\mathfrak{U}$ nun (F, A) ya karşılık gelen ters pozitif esnek kümesi (IPSS) denir.

b. $N_F : \mathfrak{U} \to F^{-1}(P(\mathfrak{U})) \subseteq A$ olmak üzere $N_F(u_i) = \{e_j | u_i \notin F(e_j)\}$ şeklinde tanımlanan kümeye $\mathfrak{U}$ nun (F, A) ya karşılık gelen ters negatif esnek kümesi (INSS) denir.

c. Her $u_i \in \mathfrak{U}$ elemanı için $Y_F(u_i)$ kümesi u_i yi içeren kardinalitesi en yüksek $F(e_k)$ kümesidir. Eğer bu şartı sağlayan birden fazla $F(e_k)$ kümesi varsa şartı sağlayan kümelerden yalnızca biri alınır.

d. Her $u_i \in \mathfrak{U}$ için $Z_F(u_i)$ kümesi u_i yi içermeyen kardinalitesi en yüksek $F(e_k)$ kümesidir. Eğer bu şartı sağlayan birden fazla $F(e_k)$ kümesi varsa şartı sağlayan kümelerden yalnızca biri alınır.

e. $I_F : A \to F(A)$ olmak üzere $I_F(e_i) = \{u_j \in \mathfrak{U} | u_j \in F(e_i)\}$.

f. $\mathfrak{U}|_{F_A} = \{u_i \in \mathfrak{U} | u_i \in F(e_j), e_j \in A\}$ kümesine (F, A) nın kullanışlı alternatiflerinin kümesi denir.

Bu bölümde $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı bir başlangıç uzayı, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, m elemanlı parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olarak kabul edilecektir.

Bu durumda, eğer $(F, A) \in \widetilde{\mathfrak{S}\mathfrak{U}}$, ise aşağıdaki notasyonlar mevcuttur:

- P_{Fx}: Bir $x \in F(e)$ elemanına karşılık gelen e parametrelerinin sayısı, diğer bir değişle, $P_{Fx} = |P_F(x)|$.
- N_{Fx}: Bir $x \notin F(e)$ elemanına karşılık gelen e parametrelerinin sayısı, diğer bir değişle, $N_{Fx} = |N_F(x)|$.
- Y_{Fx}: Bir $x \in \mathfrak{U}$ için $x \in F(e)$ olacak şekildeki $|F(e)|$ sayılarının en büyüğü, diğer bir değişle $Y_{Fx} = |Y_F(x)|$.

- Z_{Fx}: Bir $x \in \mathfrak{U}$ için $x \notin F(e)$ olacak şekildeki $|F(e)|$ sayılarının en büyüğü, diğer bir değişle $Z_{Fx} = |Z_F(x)|$.

- I_{Fe}: $e \in A$ olmak üzere $x \in F(e)$ olacak şekildeki x alternatiflerinin sayısı, diğer bir değişle $I_{Fe} = |I_F(e)|$.

- $\overline{I_{Fe}}$: $e \in A$ olmak üzere $x \notin F(e)$ olacak şekildeki x alternatiflerinin sayısı, diğer bir değişle $\overline{I_{Fe}} = |\mathfrak{U} - I_F(e)|$.

- $\mathfrak{U}_{(F,A)}$: Her $e \in A$ için $x \in F(e)$ şartını sağlayan farklı $x \in F(e)$ elemanlarının sayısı, yani $\mathfrak{U}_{(F,A)} = |\mathfrak{U}|_{F_A}|$.

Tanım 4.1. deki kavramların daha iyi anlaşılabilmesi amacı ile Örnek 4.2. verilmiştir.

Örnek 4.2. $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ alternatiflerin kümesi, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, $A = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_7\} \subseteq E$ ve A ya karşılık gelen esnek küme $F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_4, u_6\}), (e_2, \{u_3, u_4, u_5, u_7\}), (e_4, \{u_1, u_3, u_6\}), (e_5, \{u_2, u_7\}), (e_6, \{u_1, u_2, u_3, u_5\}), (e_7, \{u_2, u_4, u_7\})\}$. olsun. Bu durumda F_A ya ait ters pozitif esnek küme (IPSS) ve ters negatif esnek küme (INSS) aşağıdaki gibidir.

i	1	2	3	4	5	6	7
$P_F(u_i)$	$\{e_1, e_4, e_6\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7\}$	$\{e_2, e_4, e_6\}$	$\{e_1, e_2, e_7\}$	$\{e_2, e_6\}$	$\{e_1, e_4\}$	$\{e_2, e_5, e_7\}$
$N_F(u_i)$	$\{e_2, e_5, e_7\}$	$\{e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_5, e_7\}$	$\{e_4, e_5, e_6\}$	$\{e_1, e_4, e_5, e_7\}$	$\{e_2, e_5, e_6, e_7\}$	$\{e_1, e_4, e_6\}$

Ayrıca, $Y_F(u_i)$ ve $Z_F(u_i)$ kümeleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

i	1	2	3	4	5	6	7
$Y_F(u_i)$	$\{u_1, u_2, u_4, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_4, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$	$\{u_3, u_4, u_5, u_7\}$	$\{u_3, u_4, u_5, u_7\}$	$\{u_1, u_2, u_4, u_6\}$	$\{u_3, u_4, u_5, u_7\}$
$Z_F(u_i)$	$\{u_3, u_4, u_5, u_7\}$	$\{u_3, u_4, u_5, u_7\}$	$\{u_1, u_2, u_4, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$	$\{u_1, u_2, u_4, u_6\}$	$\{u_3, u_4, u_5, u_7\}$	$\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$

$Y_F(u_i)$ nın tanımı gereğince, $Y_F(u_1) = \{u_1, u_2, u_4, u_6\}$ yerine $Y_F(u_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ kümeside kullanılabilirdi. Benzer şekilde $Z_F(u_i)$ kümeleride değişebilir.

Lemma 4.3. $F_A, G_B \in \widetilde{\mathfrak{S}\mathfrak{U}}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a. Her $x \in \mathfrak{U}$ için, $0 \leq P_{Fx} \leq |S_F A|$.

b. Her $x \in \mathfrak{U}$ için, $0 \leq Y_{Fx} \leq \mathfrak{U}_{(F,A)}$.

c. Bir $x \in \mathfrak{U}$ için, $P_{Fx} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $Y_{Fx} = 0$ olmasıdır.

d. Bir $x \in \mathfrak{U}$ için, $(F, A)\widetilde{\subseteq}(G, B)$ ise $P_{Fx} \leq P_{Gx}$ ve $Y_{Fx} \leq Y_{Gx}$ dır.

e. $x \in \mathfrak{U}$ ve $e \in A$ için, $F(e) = \mathfrak{U}$ olması için gerek ve yeter şart $Y_{Fx} = \mathfrak{U}_{(F,A)} = |\mathfrak{U}|$ olmasıdır.

f. (F,A) tam (ya da bijektif) esnek küme ise $\mathfrak{U}_{(F,A)} = |\mathfrak{U}|$.

g. (F,A) bijektif esnek küme ise $x \in \mathfrak{U}$ için, $P_{Fx} \leq Y_{Fx}$.

h. (F,A), $A = S_F A$ olacak şekilde bijective esnek küme ise her $x \in \mathfrak{U}$ için, $P_{Fx} = 1$.

Lemma 4.4. $F_A, G_B \in \widetilde{\mathfrak{SU}}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a. $x \in \mathfrak{U}$ için $0 \leq Z_{Fx} \leq |\mathfrak{U}| - 1$.

b. $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)$ ise her $x \in \mathfrak{U}$ için, $Z_{Gx} \leq Z_{Fx}$.

c. (F,A) boş esnek küme olması için gerek ve yeter şart her $x \in \mathfrak{U}$ için, $Z_{Fx} = Y_{Fx} = 0$ olmasıdır.

d. $x \in \mathfrak{U}$ için, $P_{Fx} + N_{Fx} = |A|$.

e. F^r_A, F_A nın tümleyeni ise $x \in \mathfrak{U}$ için, $P_{Fx} = N_{F^r x}$ ve $N_{Fx} = P_{F^r x}$.

4.1.2. Esnek benzerlik ölçüsü

$x \in \mathfrak{U}$ olmak üzere, $\Im : \widetilde{\mathfrak{SU}} \times \widetilde{\mathfrak{SU}} \to [0,1]$ dönüşümü göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned}\Im(F_A, G_B) &= 1 - \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[max\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\} - min\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\}] \\ &= 1 - \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}|P_{Fu_i} - P_{Gu_i}|\end{aligned}$$

Teorem 4.5. $\Im$ dönüşümü $\widetilde{\mathfrak{SU}}$ üzerinde bir benzerlik dönüşümüdür.

İspat. $F_A, G_B \in \widetilde{\mathfrak{SU}}$ olsun.

s1. Lemma 4.3. gereğince $0 \leq P_{Fx} \leq |S_F A| \leq |E|$ ve $0 \leq P_{Gx} \leq |S_F B| \leq |E|$ dır. Bu durumda $0 \leq \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[max\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\} - min\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\}] \leq 1$ ilişkisi sağlanır. Dolayısıyla, $0 \leq 1 - \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[max\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\} - min\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\}] \leq 1$ olarak elde edilir.

s2. $(F,A) = (G,B)$ olsun. O zaman $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)$ ve $(G,B)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ olur. Lemma 4.3. gereğince her $x \in \mathfrak{U}$ için $P_{Fx} \leq P_{Gx}$ ve $P_{Gx} \leq P_{Fx}$, yani $P_{Fx} = P_{Gx}$ dır. Bu durumda $[max\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\} - min\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\}] = P_{Fu_i} - P_{Fu_i} = 0$ elde edilir. Böylece, $1 - \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[max\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\} - min\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\}] = 1$.

s3. $\Im$ dönüşümünün simetrikliği tanımından açıktır.

s4. $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)\widetilde{\subseteq}(H,C)$ ve her $x \in \mathfrak{U}$ için $P_{Fx} \leq P_{Gx} \leq P_{Hx}$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\Im((G,B),(H,C)) &= 1 - \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[max\{P_{Hu_i}, P_{Gu_i}\} \\
&- min\{P_{Hu_i}, P_{Gu_i}\}] \\
&= 1 - \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[P_{Hu_i} - P_{Gu_i}] \\
&= 1 - \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[P_{Hu_i} - P_{Fu_i} + P_{Fu_i} - P_{Gu_i}] \\
&= 1 - \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[P_{Hu_i} - P_{Fu_i}] + 1 \\
&- [1 - \frac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[P_{Gu_i} - P_{Fu_i}]] \\
&= \Im((F,A),(H,C)) + 1 - \Im((F,A),(G,B))
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, $\Im((F,A),(G,B)) + \Im((G,B),(H,C)) = 1 + \Im((F,A),(H,C))$ olur. $0 \leq \Im((F,A),(G,B)) \leq 1, 0 \leq \Im((G,B),(H,C)) \leq 1$ ve $0 \leq \Im((F,A),(H,C)) \leq 1$ olduğundan

$$\Im((F,A),(H,C)) \leq \Im((F,A),(G,B))\text{ve}\Im((F,A),(H,C)) \leq \Im((G,B),(H,C))$$

şartları sağlanır.

■

4.1.3. Ürünlerin karşılaştırılması

Ürünleri karşılaştırmak için aşağıdaki adımlar izlenir:

İlk Karşılaştırma Algoritması:

Adım 1 Karşılaştırılmak istenen A ürünün (F,A) esnek kümesi oluşturulur.
Adım 2 Karşılaştırma yapılmak istenen diğer $A_1, A_2, ..., A_k$ ürünlere ait (F_1, A_1),(F_2, A_2),..., (F_k, A_k) esnek kümeler oluşturulur.
Adım 3 $\Im((F,A),(F_1,A_1))$, $\Im((F,A),(F_2,A_2))$,...,$\Im((F,A),(F_k,A_k))$ değerleri hesaplana-

rak ürünler sıralanır.

İlk algoritma kullanıldıktan sonra A ürününe benzerliği eşit olan bir ya da birden fazla ürün olması halinde bu eşitliği bozacak yeni bir yöntem gerekecektir. Aşağıdaki tanım bu eşitliği bozmak amacı ile kullanılacak olan benzerlik aracına aittir.

Tanım 4.6. (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda F_A ile G_B arasındaki ikincil benzerlik değeri

$$\Gamma_{F_A G_B} = \sum_{i=1}^{|A \cup B|} \frac{||F(e_i) \cap G(e_i)| - |F(e_i) \triangle G(e_i)||}{|A \cup B||\mathfrak{U}|}$$

şeklinde tanımlanır. F_A, G_B ve H_C esnek kümeleri için $\Gamma_{F_A G_B} > \Gamma_{F_A H_C}$ dolayısıyla $C > B$ ise A, C ye B den daha fazla benzer denir.

İkincil Karşılaştırma Algoritması:

Adım 1 İlk algoritmanın 3. adımından sonra $\Im((F, A), (G, B)) = \Im((F, A), (H, C))$ olacak şekildeki G_B ve H_C esnek kümeleri belirlenir.
Adım 2 Bu esnek kümeler için $\Gamma_{F_A G_B}$ ve $\Gamma_{F_A H_C}$ değerleri hesaplanıp son sıralama belirlenir.

Eğer ikinci karşılaştırma algoritmasının sonunda $\Gamma_{F_A G_B} = \Gamma_{F_A H_C}$ ise B ve C ürünleri A ürününe eşit derecede benzer denir.

Örnek 4.7. Bir X şirketi sahip olduğu on çeşit A türünden ürününü karşılaştırmak istiyor. Aynı ürünleri üreten rakip firmalar B, C ve D ürünleri ile hazır gıda sektöründe üretim yapmaktadır. Bu durumda onların ortak evrensel kümesi $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$ dır. X şirketi kendi belirlemiş olduğu parameterelere göre ürünleri inceliyor.e_1 :Düşük bütceye cazip fiyat aralığı, e_2 :Orta düzey bütçeye ait fiyat aralığı, e_3 :Yüksek bütçeye ait fiyat aralığı, e_4 :Hanımlar tarafından tercih edilen ürünler, e_5 :Beyler tarafından tercih edilen ürünler, e_6 :Gençler tarafından tercih edilen ürünler, e_7 :Orta yaş tarafından tercih edilen ürünler, e_8 :Yaşlılar tarafından tercih edilen ürünler, e_9 :Yüksek müşteri memnuniyetine sahip ürünler, e_{10} :Düşük satış oranı olan ürünler, e_{11} :Yüksek satış oranına sahip ürünler. Ortak parametrelerin kümesi $E = \{e_1, e_2, ..., e_{11}\}$ olsun. Şirketlerin ürettikleri ürünlere ve parametreler ait esnek kümeleri F_A, G_B, H_C, ve K_D aşağıdaki tablolardaki gibi olsun.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
F_A	u_3 u_8 u_{10}	u_1 u_5 u_7	u_2 u_4 u_6 u_9	u_1 u_2 u_3 u_4 u_7 u_8 u_9 u_{10}	u_1 u_3 u_5 u_6 u_7 u_9 u_{10}	u_1 u_3 u_4 u_6 u_8 u_{10}	u_1 u_2 u_3 u_7 u_9 u_{10}	u_1 u_3 u_5 u_9 u_{10}	u_1 u_2 u_3 u_7 u_9 u_{10}	u_2 u_4 u_5 u_6 u_8	u_1 u_3 u_7 u_9 u_{10}

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
G_B	u_2 u_6 u_8	u_3 u_5 u_7 u_9 u_{10}	u_1 u_4	u_2 u_3 u_4 u_5 u_7 u_{10}	u_1 u_2 u_3 u_6 u_8 u_9	u_1 u_3 u_4 u_7 u_{10}	u_2 u_3 u_6 u_8 u_{10}	u_2 u_5 u_6 u_9	u_1 u_3 u_4 u_6 u_8	u_2 u_4 u_5 u_7 u_{10}	u_1 u_3 u_6 u_8 u_9

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
H_C	u_2 u_3 u_5 u_6	u_1 u_7 u_8 u_9 u_{10}	u_4	u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_8 u_{10}	u_1 u_3 u_4 u_6 u_7 u_8 u_9	u_1 u_4 u_6 u_7 u_9 u_{10}	u_2 u_3 u_6 u_8 u_9	u_2 u_5 u_7 u_8 u_9 u_{10}	u_1 u_3 u_4 u_6	u_1 u_2 u_5 u_7 u_8 u_{10}	u_3 u_4 u_6 u_9

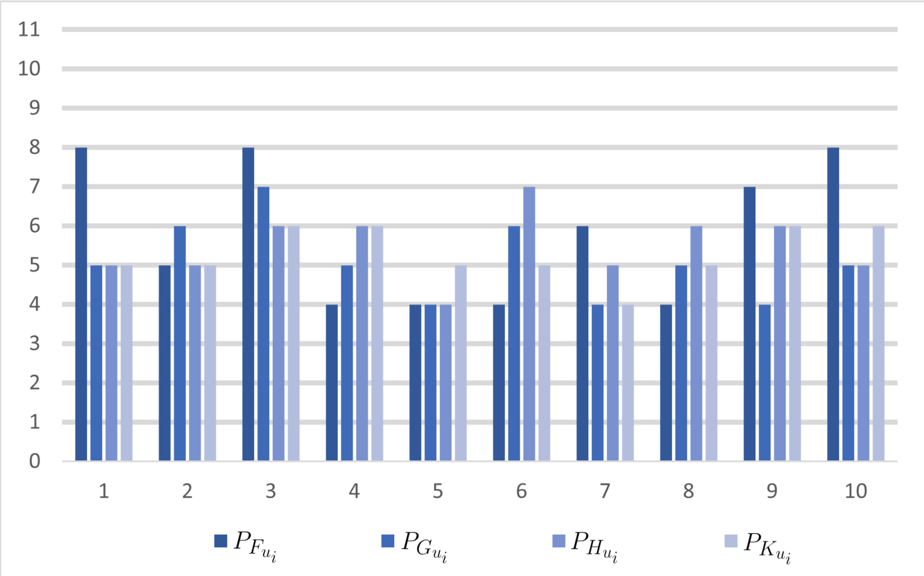
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
K_D	u_2 u_{10}	u_3 u_5 u_6	u_1 u_4 u_7 u_8 u_9	u_2 u_3 u_5 u_7 u_8 u_9	u_1 u_3 u_4 u_6 u_9 u_{10}	u_2 u_4 u_5 u_6 u_9 u_{10}	u_1 u_3 u_4 u_8 u_{10}	u_2 u_5 u_7 u_8 u_9 u_{10}	u_1 u_3 u_4 u_6	u_1 u_2 u_5 u_7 u_8 u_{10}	u_3 u_4 u_6 u_9

u_1 ürünü $F(e_2)$, $F(e_4)$, $F(e_5)$, $F(e_6)$, $F(e_7)$, $F(e_8)$, $F(e_9)$ ve $F(e_{11})$ kümeleri tarafından ihtiva edildiğinden Tanım 4.1. gereğince $P_F(u_1) = \{e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{11}\}$ ve $\mid P_F(u_1) \mid = P_{Fu_1} = 8$ olarak elde edilir. Benzer şekilde her $x \in U$ için P_{Fx}, P_{Gx}, P_{Hx} ve P_{Kx} değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.1. Alternatiflere Karşılık Gelen Parametre Sayıları

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_{Fu_i}	8	5	8	4	4	4	6	4	7	8
P_{Gu_i}	5	6	7	5	4	6	4	5	4	5
P_{Hu_i}	5	5	6	6	4	7	5	6	6	5
P_{Ku_i}	5	5	6	6	5	5	4	5	6	6

Şekil 4.1. Alternatiflere Karşılık Gelen Parametre Grafiği

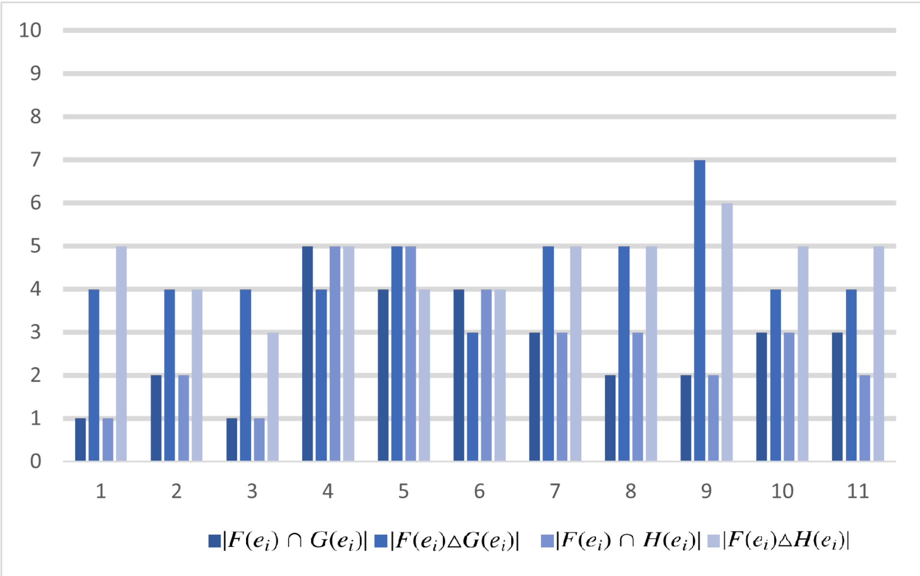


Bu durumda, $\Im(F_A, G_B) = 0.84$, $\Im(F_A, H_C) = 0.84$ ve $\Im(F_A, K_D) = 0.86$. Dolayısıyla, A ürününün diğer ürünler ile benzerlik karşılaştırılması; $D > B = C$ şeklindedir. İlk algoritmanın sonucunda $\Im(F_A, G_B) = \Im(F_A, H_C)$ olduğundan, eşitliği bozmak için ikinci benzerlik algoritması uygulanması gerektiğinde $|F(e_i) \cap G(e_i)|$, $|F(e_i) \triangle G(e_i)|$, $|F(e_i) \cap H(e_i)|$ ve $|F(e_i) \triangle H(e_i)|$ değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.2. Esnek Kümelerin Kesişim ve Simetrik Farklarının Eleman Sayısı

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\lvert F(e_i) \cap G(e_i)\rvert$	1	2	1	5	4	4	3	2	2	3	3
$\lvert F(e_i) \triangle G(e_i)\rvert$	4	4	4	4	5	3	5	5	7	4	4
$\lvert F(e_i) \cap H(e_i)\rvert$	1	2	1	5	5	4	3	3	2	3	2
$\lvert F(e_i) \triangle H(e_i)\rvert$	5	4	3	5	4	4	5	5	6	5	5

Şekil 4.2. Esnek Kümelerin Kesişim ve Simetrik Farklarının Eleman Grafiği



Tablo 4.2 deki değerler göz önünde bulundurulduğunda B ve C nin A ile arasındaki ikincil benzerlik değerleri

$$\Gamma_{F_A G_B} = \sum_{i=1}^{|A\cup B|} \frac{||F(e_i) \cap G(e_i)| - |F(e_i) \triangle G(e_i)||}{|A \cup B||\mathfrak{U}|} = 19/110$$

ve

$$\Gamma_{F_A H_C} = \sum_{i=1}^{|A\cup C|} \frac{||F(e_i) \cap H(e_i)| - |F(e_i) \triangle H(e_i)||}{|A \cup C||\mathfrak{U}|} = 20/110.$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, ikincil benzerlik algoritmasıda göz önüne alındığında $\Gamma_{F_A G_B} < \Gamma_{F_A H_C}$ olup $B > C$ sonucuna varılır. İlk ve ikinci benzerlik algoritmaları sonucunda B, C ve D ürünlerinin A ürününe benzerlik sıralaması $D > B > C$ olur.

4.1.4. Esnek kümeler üzerinde benzerlik ölçülerinin karşılaştırılması

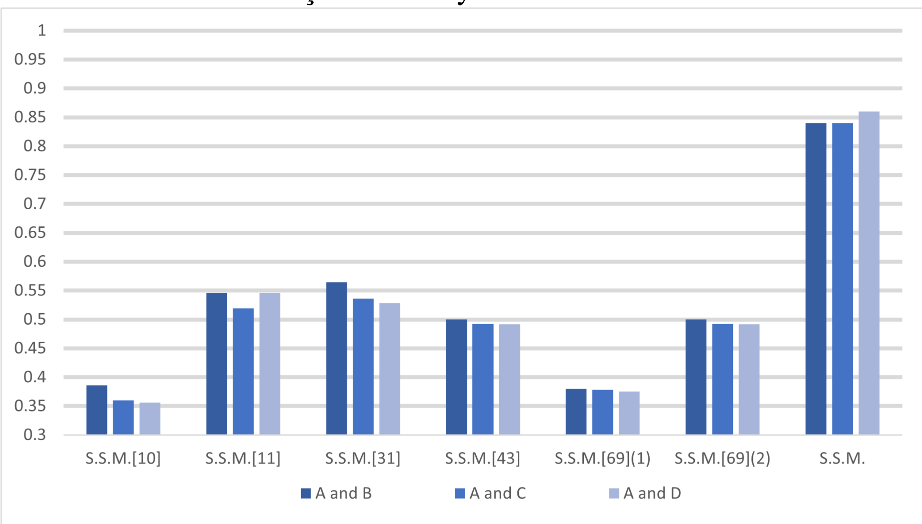
Esnek kümelerde yeni bir benzerlik ölçüsü tanıtılmış olsa da, tanımlanan ölçünün işlevselliğini anlamak için bu yeni benzerlik ölçüsünü mevcut benzerlik ölçüleriyle karşılaştırmak önemlidir. Aşağıdaki tablo, [10, 11, 31, 43, 69]'da tanımlanan benzerlik ölçüleriyle bu çalışmada önerilen benzerlik ölçüsünün Örnek 4.7. de verilen problem üzerinde elde edilen sonuçların karşılaştırılmasını vermektedir.

Tablo 4.3. Esnek benzerlik ölçülerinin karşılaştırılması.

Yöntem	Sıralama	En İyi
Aygün and Kamacı[10]	$B > C > D$	B
Aygün and Kamacı[11]	$D = B > C$	D ve B
Kamacı[31]	$B > C > D$	B
Majumdar and Samanta [43]	$B > C > D$	B
Yang(1) [69]	$B > C > D$	B
Yang(2) [69]	$B > C > D$	B
$\Im$	$D > B = C$	D
$\Im + \Gamma$	$D > B > C$	D

Benzerlik ölçüsü $\Im$ e göre ürünlerin sıralaması $D > B = C$ dir; ancak ikincil benzerlik değeri Γ yardımıyla sıralamalar son olarak $D > B > C$ olarak elde edilmiştir. Ayrıca, $\Im + \Gamma$ ile yakın sonuçlar (sıralamalar açısından) veren tek benzerlik ölçüsü [11] deki benzerlik ölçüsüdür. Bu çalışmada önerilen benzerlik ölçüsüyle elde edilen sonuçların incelenen diğer benzerlik ölçülerinin verdiği sonuçlardan farklı olmasının başlıca nedeni, $\Im + \Gamma$ nın benzerliği belirlerken parametreleri hesaba katması, diğer benzerlik ölçülerinin ise parametreleri hesaba katmamasıdır.

Şekil 4.3. Esnek Benzerlik Ölçülerinin KıyaslanmasıS.S.M.: Esnek Benzerlik Ölçüsü



$\Im + \Gamma$ ve Aygün ve Kamacının [11] deki benzerlik ölçüleri yakın sonuçlar vermesine rağmen, bu benzerlik ölçülerinin sayısal değerleri Şekil 4.3 te görülebileceği üzere farklılık göstermektedir.

Öte yandan, esnek benzerlik ölçüsü $\Im$, [69] çalışmasındaki finansal teşhis problemine uygulandığında, sonuç Yang'ın [69] çalışmasında bulduğu bulgularla aynı olarak elde edilmiştir. Yani, ABC ve XYZ adlı iki şirket arasında, XYZ $\Im$ benzerlik ölçüsüne göre bir likidite problemi yaşamaktadır. Bunun sebebi ise (F, A) ve (G, B), ABC ve XYZ şirketlerine karşılık gelen esnek kümeler ve likidite problemi yaşayan bir şirket model için esnek küme (H, C) olmak üzere $\Im((F, A), (H, C)) = 0.94$ ve $\Im((G, B), (H, C)) = 0.98$ olarak elde edildiğinden şirketlerin benzerlik sıralamaları $B > C$ şeklinde bulunmuştur. Bu sonuç, önerilen benzerlik ölçüsünün karşılaştırma problemleri için kullanılabilecek güvenilir bir araç olduğunu göstermektedir.

4.1.5. Esnek kümeler ile üretilen bulanık kümeler

Tanım 4.8. $A \subseteq E$ ve (F, A), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda (F, A) esnek kümesi için

$$\mu : \mathfrak{U} \to [0, 1], \mu(x) = \frac{P_{Fx}Y_{Fx}}{\mathfrak{U}_{(F,A)}|S_F A|}$$

ifadesine (F, A) esnek kümesi tarafında üretilen karakteristik bulanık küme denir ve μ_{F_A} şeklinde gösterilir.

$$\nu : \mathfrak{U} \to [0, 1], \nu(x) = \frac{P_{Fx}}{|A|}$$

ifadesine (F, A) esnek kümesi tarafında üretilen parametrik bulanık küme denir ve ν_{F_A} şeklinde gösterilir.

$$g : \mathfrak{U} \to [0, 1], g(x) = \frac{P_{Fx}}{|E||\mathfrak{U}|}$$

ifadesine (F, A) esnek kümesi tarafında üretilen genel bulanık küme denir ve g_{F_A} şeklinde gösterilir.

Teorem 4.9. (F, A), $\mathfrak{U}$ üzerinde esnek küme olmak üzere μ_{F_A}, ν_{F_A} ve g_{F_A} ifadeleri bulanık kümelerdir.

İspat. (F, A), $\mathfrak{U}$ üzerinde bir esnek küme olduğundan $F : A \to P(\mathfrak{U})$ bir dönüşümdür. Dolayısıyla, $0 \leq P_{Fx} \leq |S_F A|$ ve $0 \leq Y_{Fx} \leq \mathfrak{U}_{(F,A)}$ dır. Böylece, her $x \in \mathfrak{U}$ için $0 \leq \mu_{F_A}(x) = \frac{P_{Fx}Y_{Fx}}{\mathfrak{U}_{(F,A)}|S_F A|} \leq 1$ olur. Ayrıca $0 \leq P_{Fx} \leq |S_F A| \leq |A|$ olduğundan her $x \in \mathfrak{U}$ için $0 \leq \nu_{F_A}(x) = \frac{P_{Fx}}{|A|} \leq 1$ olarak elde edilir. Son olarak $0 \leq P_{Fx} \leq |A| \leq |E|$ olduğundan her $x \in \mathfrak{U}$ için $0 \leq g_{F_A}(x) = \frac{P_{Fx}}{|E||\mathfrak{U}|} \leq 1$. ■

Örnek 4.10. F_A, G_B, H_C ve K_D Örnek 4.7. deki esnek kümeler olsun. Bu durumda $A = B = C = D = E = \{e_1, e_2, ..., e_{11}\}$, $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$ ve her $u_i \in U$ $P_{Fu_i}, P_{Gu_i}, P_{Hu_i}$ ve P_{Ku_i} değerleri Örnek 4.7. de elde edildikleri gibi olmak üzere F_A, G_B, H_C ve K_D esnek kümeleri tarafından elde edilen karakteristik bulanık kümeler;

x	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_{F_A}(x)$	$64/110$	$40/110$	$64/110$	$32/110$	$28/110$	$28/110$	$48/110$	$32/110$	$56/110$	$64/110$
$\mu_{G_B}(x)$	$30/110$	$36/110$	$42/110$	$30/110$	$24/110$	$36/110$	$24/110$	$30/110$	$24/110$	$30/110$
$\mu_{H_C}(x)$	$35/110$	$35/110$	$42/110$	$42/110$	$28/110$	$49/110$	$35/110$	$42/110$	$42/110$	$35/110$
$\mu_{K_D}(x)$	$30/110$	$30/110$	$36/110$	$36/110$	$30/110$	$30/110$	$24/110$	$30/110$	$36/110$	$36/110$

Benzer şekilde sıradaki tablolar sırasıyla bu esnek kümeler tarafından üretilen parametrik ve genel bulanık kümeleri göstermektedir.

x	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\nu_{F_A}(x)$	$8/11$	$5/11$	$8/11$	$4/11$	$4/11$	$4/11$	$6/11$	$4/11$	$7/11$	$8/11$
$\nu_{G_B}(x)$	$5/11$	$6/11$	$7/11$	$5/11$	$4/11$	$6/11$	$4/11$	$5/11$	$4/11$	$5/11$
$\nu_{H_C}(x)$	$5/11$	$5/11$	$6/11$	$6/11$	$4/11$	$7/11$	$5/11$	$6/11$	$6/11$	$5/11$
$\nu_{K_D}(x)$	$5/11$	$5/11$	$6/11$	$6/11$	$5/11$	$5/11$	$4/11$	$5/11$	$6/11$	$6/11$

x	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$g_{F_A}(x)$	$8/110$	$5/110$	$8/110$	$4/110$	$4/110$	$4/110$	$6/110$	$4/110$	$7/110$	$8/110$
$g_{G_B}(x)$	$5/110$	$6/110$	$7/110$	$5/110$	$4/110$	$6/110$	$4/110$	$5/110$	$4/110$	$5/110$
$g_{H_C}(x)$	$5/110$	$5/110$	$6/110$	$6/110$	$4/110$	$7/110$	$5/110$	$6/110$	$6/110$	$5/110$
$g_{K_D}(x)$	$5/110$	$5/110$	$6/110$	$6/110$	$5/110$	$5/110$	$4/110$	$5/110$	$6/110$	$6/110$

Teorem 4.11. (F, A), $\mathfrak{U}$ üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda $\nu_{(F^r,A)} = \nu^c_{F_A}$, yani (F, A)'nın tümleyenin ürettiği parametrik bulanık küme (F, A)'nın ürettiği parametrik bulanık kümenin tümleyenine eşittir. Ancak, bu durum ne karakteristik bulanık kümeler ne de genel bulanık kümeler için geçerli değildir.

İspat. $x \in \mathfrak{U}$ ve $P_{F^r x}$, $x \in F^r(e)$ olacak şekildeki e parametrelerinin sayısı olsun. Tanım 2.26. gereğince her $e \in A$ için $F^r(e) = \mathfrak{U} - F(e)$ dır. Bu durumda $P_{F^r x} = |A| - P_{Fx}$ ve P_{Fx} de $x \in F(e)$ olacak şekildeki e parametrelerinin sayısı olduğundan $\nu^c_{F_A}(x) = 1 - \nu_{F_A}(x) = 1 - \frac{P_{Fx}}{|A|} = \frac{|A|-P_{Fx}}{|A|} = \frac{P_{F^r x}}{|A|}$ olarak elde edilir. İspatın geri kalanı için Örnek 4.12. verilmiştir. ■

Örnek 4.12. Let $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, ..., u_8\}$ alternatiflerin kümesi, $E = \{e_1, e_2, ..., e_{12}\}$ parametrelerin kümesi ve $A = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, e_9, e_{11}\} \subseteq E$ olsun. A ya karşılık gelen esnek küme

$$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_7\}), (e_2, \emptyset), (e_3, \{u_6, u_7\}), (e_5, \{u_1, u_2\}), (e_6, \emptyset), (e_9, \{u_7\}), (e_{11}, \{u_8\})\}$$

olmak üzere, F_A nın destek kümesi,

$$S_F A = supp(F, A) = \{e_1, e_3, e_5, e_9, e_{11}\}$$

dır. Ayrıca $|A| = 7$, $|S_F A| = 5$, $\mathfrak{U}_{(F,A)} = 5$, $P_{Fu_1} = 2$, $P_{Fu_2} = 2$, $P_{Fu_3} = 0$, $P_{Fu_4} = 0$, $P_{Fu_5} = 0$, $P_{Fu_6} = 1$, $P_{Fu_7} = 3$, ve $P_{Fu_8} = 1$. $Y_{Fu_1} = 3$, $Y_{Fu_2} = 3$, $Y_{Fu_3} = 0$, $Y_{Fu_4} = 0$, $Y_{Fu_5} = 0$, $Y_{Fu_6} = 2$, $Y_{Fu_7} = 3$, ve $Y_{Fu_8} = 1$ olarak elde edilir.
Dolayısıyla, F_A nın ürettiği karakteristik, parametrik ve genel bulanık kümeler sırasıyla

x	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\mu_{F_A}(x)$	6/25	6/25	0	0	0	2/25	9/25	1/25
$\nu_{F_A}(x)$	2/7	2/7	0	0	0	1/7	3/7	1/7
$g_{F_A}(x)$	2/96	2/96	0	0	0	1/96	3/96	1/96

olarak elde edilir. Bu tablo bize esnek kümeler hakkında bazı bilgiler vermektedir. Örneğin alternatifler u_1 ve u_2 nin aynı etki değerine sahip olması; alternatifler u_3, u_4 ve u_5 in herhangi bir parametreyi sağlamaması; alternatif u_7 nin ya en fazla parametreye karşılık gelmesi ya da diğer alternatiflerle en fazla ortak özelliklere sahip olması gibi.
Teorem 4.11. in ispatını tamamlamak için öncelikle (F, A) esnek kümesinin tümleyeninin belirlenmesi gerekmektedir.

$(F^r, A) = \{(e_1, \{u_3, u_4, u_5, u_6, u_8\}), (e_2, \mathfrak{U}), (e_3, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_8\}), (e_5, \{u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}), (e_6, \mathfrak{U}), (e_9, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_8\}), (e_{11}, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\})\}$.

Bu durumda, $|S_{F^r} A| = |supp(F^r, A)| = 7$, $\mathfrak{U}_{(F^r,A)} = 8$, $P_{F^r u_1} = 5 = |A| - P_{Fu_1}$, $P_{F^r u_2} = 5$, $P_{F^r u_3} = 7$, $P_{F^r u_4} = 7$, $P_{F^r u_5} = 7$, $P_{F^r u_6} = 6$, $P_{F^r u_7} = 4$, $P_{F^r u_8} = 6$, ve $Y_{F^r u_1} = Y_{F^r u_2} = ... = Y_{F^r u_8} = 8$ olur. Dolayısıyla, (F^r, A) tarafından üretilen karakteristik, parametrik ve genel bulanık kümeler sırasıyla

x	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\mu_{(F^r,A)}(x)$	40/56	40/56	1	1	1	48/56	32/56	48/56
$\nu_{(F^r,A)}(x)$	5/7	5/7	1	1	1	6/7	4/7	6/7
$g_{(F^r,A)}(x)$	5/96	5/96	7/96	7/96	7/96	6/96	4/96	6/96

olup, dolayısıyla $\nu_{(F_r,A)} = \nu^c_{F_A}$, fakat $\mu_{(F_r,A)} \neq \mu^c_{F_A}$ ve $g_{(F_r,A)} \neq g^c_{F_A}$ olarak elde edilir.

4.1.6. Esnek benzerlik ölçüsü ile bulanık benzerlik ölçülerinin karşılaştırılması

Bu kısımda, bu çalışmada tanıtılan esnek kümeler arasındaki benzerlik ölçüsü ve esnek kümeler tarafından üretilen parametrik (genel) bulanık kümeler üzerinde (normalize edilmiş) Hamming ve diğer uzaklık kavramlarından yararlanılarak elde edilen benzerlik ölçüleri problemlerde kullanışlılık açısından incelenecektir.

Teorem 4.13. (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde $A = B = E$ olacak şekilde iki esnek küme olsun. Bu durumda;

i. Esnek kümeler arasındaki benzerlik ölçüsü $\Im(F_A, G_B)$ ve parametrik bulanık kümenin benzerlik ölçüsü $l(\nu_F, \nu_G) = \frac{1}{|\mathfrak{U}|}\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|} |\nu_F(x_i) - \nu_G(x_i)|$ olmak üzere $S_l(\nu_F, \nu_G)$ ve $S_l(\nu_F, \nu_G) = \frac{1}{1+l(\nu_F,\nu_G)}$ karşılaştırma problemlerinde aynı sonucu verir.

ii. (F, A) tarafından üretilmiş genel bulanık küme g_F için $d(g_F, g_G) = l(\nu_F, \nu_G)$ ve dolayısıyla $S_d(g_F, g_G) = S_l(\nu_F, \nu_G)$ dır. Burada $d(g_F, g_G)$, g_F ve g_G bulanık kümelerinin arasındaki Hamming uzaklığıdır.

iii. Eğer $S_F A = A$, $S_G B = B$, her $e_i \in A$ ve $e_j \in B$ için $F(e_i) = \mathfrak{U}$ ve $G(e_j) = \mathfrak{U}$ ise $d(g_F, g_G) = l(\nu_F, \nu_G) = l(\mu_F, \mu_G)$.

İspat. i.) $\nu_{Fu_i} = \frac{P_{Fu_i}}{|A|} = \frac{P_{Fu_i}}{|E|}$ ve $\nu_{Gu_i} = \frac{P_{Gu_i}}{|B|} = \frac{P_{Gu_i}}{|E|}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Im(F_A, G_B) &= 1 - \tfrac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\textstyle\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}[max\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\} - min\{P_{Fu_i}, P_{Gu_i}\}] \\ &= 1 - \tfrac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\textstyle\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}|P_{Fu_i} - P_{Gu_i}| \\ &= 1 - l(\nu_F, \nu_G)\end{aligned}$$

$0 \leq l \leq 1$ olmak üzere $\Im_l = 1 - l$ ve $S_l = \frac{1}{1+l}$ dır. Eğer $l_1 \leq l_2$ ise $S_{l_2} \leq S_{l_1}$ ve $\Im_{l_2} \leq \Im_{l_1}$. Dolayısıyla, $\Im(F_A, G_B)$ ve $S_l(\nu_F, \nu_G)$ karşılaştırma problemlerinde aynı sonucu verir.

ii.) $g_{Fu_i} = \frac{P_{Fu_i}}{|\mathfrak{U}||E|}$ ve $g_{Gu_i} = \frac{P_{Gu_i}}{|\mathfrak{U}||E|}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}d(g_F, g_G) &= \tfrac{1}{|\mathfrak{U}||E|}\textstyle\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}|P_{Fu_i} - P_{Gu_i}| \\ &= \tfrac{1}{|\mathfrak{U}|}\textstyle\sum_{i=1}^{|\mathfrak{U}|}\left|\frac{P_{Fu_i}}{|E|} - \frac{P_{Gu_i}}{|E|}\right| \\ &= l(\nu_F, \nu_G)\end{aligned}$$

iii.) Eğer $e_i \in A$ ve $e_j \in B$ için $F(e_i) = \mathfrak{U}$ ve $G(e_j) = \mathfrak{U}$ ise Lemma 4.3. gereğince her $x \in \mathfrak{U}$ için $Y_{Fx} = \mathfrak{U}_{(F,A)} = |\mathfrak{U}|$, $Y_{Gx} = \mathfrak{U}_{(G,B)} = |\mathfrak{U}|$. $S_F A = A$ ve $S_G B = B$ olduğundan her $x \in \mathfrak{U}$ için $\mu_F(x) = \frac{P_{Fx}Y_{Fx}}{\mathfrak{U}_{(F,A)}|S_F A|} = \frac{P_{Fx}}{|A|} = \nu_F(x)$ elde edilir. Benzer şekilde $\mu_G(x) = \frac{P_{Gx}}{|B|} = \nu_G(x)$ olur. İspatın kalanı (ii) nin ispatına benzer olduğundan ihmal edilmiştir. ■

Örnek 4.14. F_A, G_B, H_C ve K_D esnek kümeleri Örnek 4.7. deki esnek kümeler olsun. Bu durumda $A = B = C = D = E = \{e_1, e_2, ..., e_{11}\}$, $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$ ve her $u_i \in \mathfrak{U}$ $P_{Fu_i}, P_{Gu_i}, P_{Hu_i}, P_{Ku_i}$ Örnek 4.7. de elde edilmişti.
O zaman F_A, G_B, H_C ve K_D esnek kümeleri tarafından üretilen parametrik bulanık kümeleri sırasıyla aşağıdaki tabloda verilmektedir.

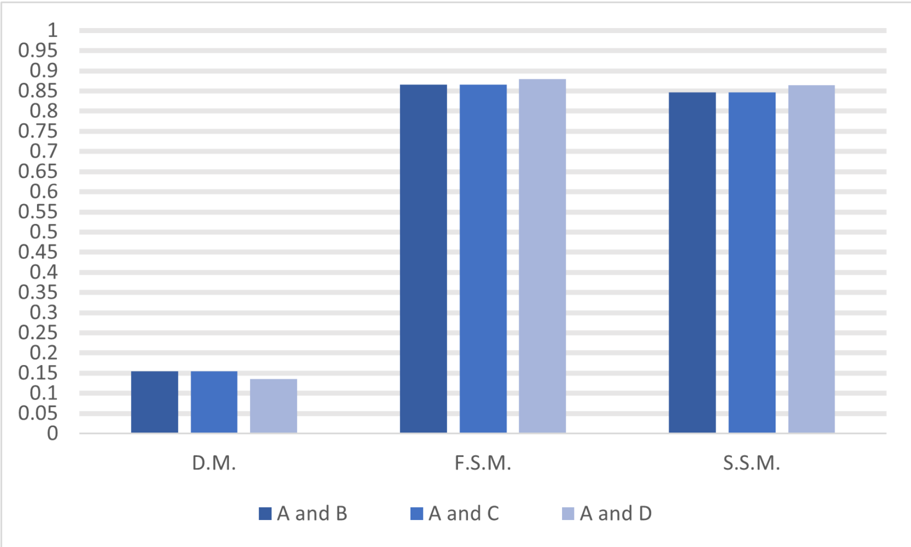
x	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\nu_{F_A}(x)$	$8/11$	$5/11$	$8/11$	$4/11$	$4/11$	$4/11$	$6/11$	$4/11$	$7/11$	$8/11$
$\nu_{G_B}(x)$	$5/11$	$6/11$	$7/11$	$5/11$	$4/11$	$6/11$	$4/11$	$5/11$	$4/11$	$5/11$
$\nu_{H_C}(x)$	$5/11$	$5/11$	$6/11$	$6/11$	$4/11$	$7/11$	$5/11$	$6/11$	$6/11$	$5/11$
$\nu_{K_D}(x)$	$5/11$	$5/11$	$6/11$	$6/11$	$5/11$	$5/11$	$4/11$	$5/11$	$6/11$	$6/11$

Elde edilen bulanık kümelere ait uzaklık ölçüleri ve bu ölçülerle özdeşleşmiş benzerlik olçüleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

ν ile A ve B	Uzaklık Ölçüsü	Benzerlik Ölçüsü	$\Im(F_A, G_B)$
	$l(\nu_F, \nu_G) = 0,154$	$S_l(\nu_F, \nu_G) = 0.866$	0.846
ν ile A ve C	Uzaklık Ölçüsü	Benzerlik Ölçüsü	$\Im(F_A, H_C)$
	$l(\nu_F, \nu_H) = 0,154$	$S_l(\nu_F, \nu_H) = 0.866$	0.846
ν ile A ve D	Uzaklık Ölçüsü	Benzerlik Ölçüsü	$\Im(F_A, K_D)$
	$l(\nu_F, \nu_K) = 0,136$	$S_l(\nu_F, \nu_K) = 0.880$	0.864

Bu sonuçlara bağlı olarak, esnek kümeler üzerindeki benzerlik ölçüsü ile Hamming uzaklık ölçüsü ile elde edilen benzerlik ölçülerinin karşılaştırılmasının aynı sonuca ulaştığı yani $D > B = C$ olduğunu görülmektedir. Şekil 4.4 ten de görüleceği üzeri iki benzerlik ölçümünde de sonuçların son derece yakın olduğu kolayca görülebilir.

Şekil 4.4.Esnek Benzerlik Ölçüleri ile Parametrik Bulanık Küme Üzerindeki Uzaklık ve Benzerlik Ölçülerinin Kıyas Grafiği.
D.M.: Uzaklık Ölçüsü.
F.S.M.: Bulanık Benzerlik Ölçüsü.
S.S.M.: Esnek Benzerlik Ölçüsü.



Aşağıdaki teorem, Teorem 4.13.(i) de verilen ve normalize edilmiş Hamming uzaklığına uygulanan ifadelerin, Hamming uzaklığında, Euclidean uzaklığında ve normalize edilmiş Euclidean uzaklığında geçerli olduğunu verir.

Teorem 4.15. (F, A) ve (G, B), $\mathfrak{U}$ üzerinde $A = B = E$ olacak şekilde iki esnek küme olsun. Bu durumda

i. Esnek kümeler üzerindeki $\Im(F_A, G_B)$ benzerlik ölçüsü ile bu esnek kümeler ile üretilmiş parametrik bulanık kümeler üzerinde $d(\nu_F, \nu_G) = \sum_{i=1}^{|U|} |\nu_F(x_i) - \nu_G(x_i)|$ Hamming uzaklığıyla elde edilen $S_d(\nu_F, \nu_G) = \frac{1}{1+d(\nu_F,\nu_G)}$ benzerlik ölçüsü $S_d(\nu_F, \nu_G)$ karşılaştırma problemlerinde aynı sonucu verir.

ii. Esnek kümeler üzerindeki $\Im(F_A, G_B)$ benzerlik ölçüsü ile bu esnek kümeler ile üretilmiş parametrik bulanık kümeler üzerinde $e(\nu_F, \nu_G) = \sqrt{\sum_{i=1}^{|U|} (\nu_F(x_i) - \nu_G(x_i))^2}$ Euclidean uzaklığıyla elde edilen $S_e(\nu_F, \nu_G) = \frac{1}{1+e(\nu_F,\nu_G)}$ benzerlik ölçüsü $S_e(\nu_F, \nu_G)$ karşılaştırma problemlerinde aynı sonucu verir.

iii. Esnek kümeler üzerindeki $\Im(F_A, G_B)$ benzerlik ölçüsü ile bu esnek kümeler ile üretilmiş parametrik bulanık kümeler üzerinde $q(\nu_F, \nu_G) = \sqrt{\frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} (\nu_F(x_i) - \nu_G(x_i))^2}$ normalize edilmiş Euclidean uzaklığıyla elde edilen $S_q(\nu_F, \nu_G) = \frac{1}{1+q(\nu_F,\nu_G)}$ benzerlik ölçüsü $S_q(\nu_F, \nu_G)$ karşılaştırma problemlerinde aynı sonucu verir.

iv. (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri ile üretilmiş parametrik bulanık kümeler üzerindeki normalize edilmiş Euclidean uzaklığı $\Im(F_A, G_B)$ benzerlik ölçüsüne $S_d(\nu_F, \nu_G)$, $S_l(\nu_F, \nu_G)$ ve $S_e(\nu_F, \nu_G)$ benzerlik ölçülerinden daha yakın değerler verir.

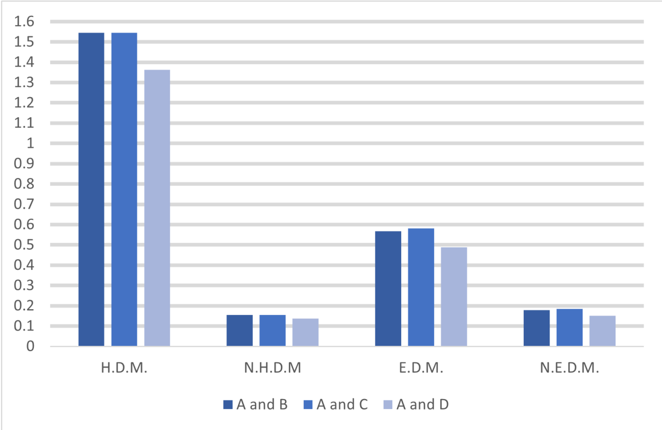
İspat. (i), (ii) ve (iii) ün doğrulukları Theorem $4.13.$ dekine benzer şekilde gösterilir. (iv) ü ispatlamak için $|S_d(\nu_F, \nu_G) - \Im(F_A, G_B)| \geq |S_e(\nu_F, \nu_G) - \Im(F_A, G_B)| \geq |S_l(\nu_F, \nu_G) - \Im(F_A, G_B)| \geq |S_q(\nu_F, \nu_G) - \Im(F_A, G_B)|$ elde edilir. ■

Örnek 4.16. Esnek kümeler tarafından üretilmiş bulanık kümeler Örnek 4.14. deki bulanık kümeler olsun. Bu durumda bulanık kümeler üzerindeki uzaklık ölçüleri ve bu uzaklık ölçülerinden elde edilen benzerlik ölçüleri için

	Uzaklık Ölçüsü	Benzerlik Ölçüsü	$\Im$
	$d(\nu_F, \nu_G) = 1.545$	$S_d(\nu_F, \nu_G) = 0.392$	0.846
ν ile A ve B	$l(\nu_F, \nu_G) = 0,154$	$S_l(\nu_F, \nu_G) = 0.866$	
	$e(\nu_F, \nu_G) = 0.567$	$S_e(\nu_F, \nu_G) = 0.638$	
	$q(\nu_F, \nu_G) = 0.179$	$S_q(\nu_F, \nu_G) = 0.848$	
	$d(\nu_F, \nu_H) = 1.545$	$S_d(\nu_F, \nu_H) = 0.392$	0.846
ν ile A ve C	$l(\nu_F, \nu_H) = 0,154$	$S_l(\nu_F, \nu_H) = 0.866$	
	$e(\nu_F, \nu_H) = 0.582$	$S_e(\nu_F, \nu_H) = 0.632$	
	$q(\nu_F, \nu_H) = 0.184$	$S_q(\nu_F, \nu_H) = 0.844$	
	$d(\nu_F, \nu_K) = 1.363$	$S_d(\nu_F, \nu_K) = 0.423$	0.864
ν ile A ve D	$l(\nu_F, \nu_K) = 0,136$	$S_l(\nu_F, \nu_K) = 0.88$	
	$e(\nu_F, \nu_K) = 0.488$	$S_e(\nu_F, \nu_K) = 0.672$	
	$q(\nu_F, \nu_K) = 0.151$	$S_q(\nu_F, \nu_K) = 0.868$	

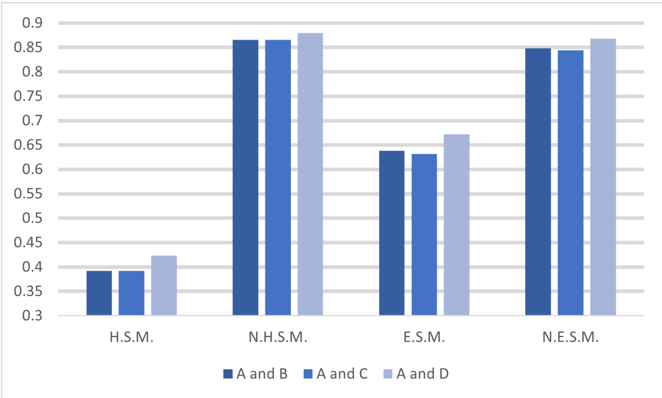
olur. Şekil 4.5 Hamming, normalize edilmiş Hamming, Euclidean ve normalize edilmiş Euclidean uzaklıkları arasındaki farklılıkları göstermektedir.

Şekil 4.5.Parametrik Bulanık Kümeler Üzerinde Uzaklık Ölçüleri Grafiği.
H.D.M.: Hamming Uzaklık Ölçüsü.
N.H.D.M.: Normalize Edilmiş Hamming Uzaklık Ölçüsü.
E.D.M.: Euclidean Uzaklık Ölçüsü.
N.E.D.M.: Normalize Edilmiş Euclidean Uzaklık Ölçüsü.



olur. Şekil 4.5 Hamming, normalize edilmiş Hamming, Euclidean ve normalize edilmiş Euclidean uzaklıkları ile elde edilen benzerlik ölçülerinin arasındaki farklılıkları göstermektedir.

Şekil 4.6.Parametrik Bulanık Kümeler Üzerinde Benzerlik Ölçüleri Grafiği.
H.S.M.: Hamming Benzerlik Ölçüsü.
N.H.S.M.: Normalize Edilmiş Hamming Benzerlik Ölçüsü.
E.S.M.: Euclidean Benzerlik Ölçüsü.
N.E.S.M.: Normalize Edilmiş Euclidean Benzerlik Ölçüsü.



Bu sonuçlara dayanarak esnek kümelerdeki benzerlik ölçüsü ile uzaklık ölçüleri ile elde edilen benzerlik ölçülerinin karşılaştırılması aşağıdaki tablo ile verilmiştir:
ν ye göre ;

S_d	S_l	S_e	S_q	$\Im$
$D > B = C$	$D > B = C$	$D > B > C$	$D > B > C$	$D > B = C$

Bulanık kümeler üzerindeki benzerlik ölçülerinin $\Im(F_A, G_B)$, $\Im(F_A, H_C)$ ve $\Im(F_A, K_D)$ değerlerine olan yakınlıkları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Tüm bu durumlar için uzaklıkların

Tablo 4.4. Esnek Benzerlik Ölçüsü ile Bulanık Benzerlik Ölçüleri Arasındaki Uzaklık

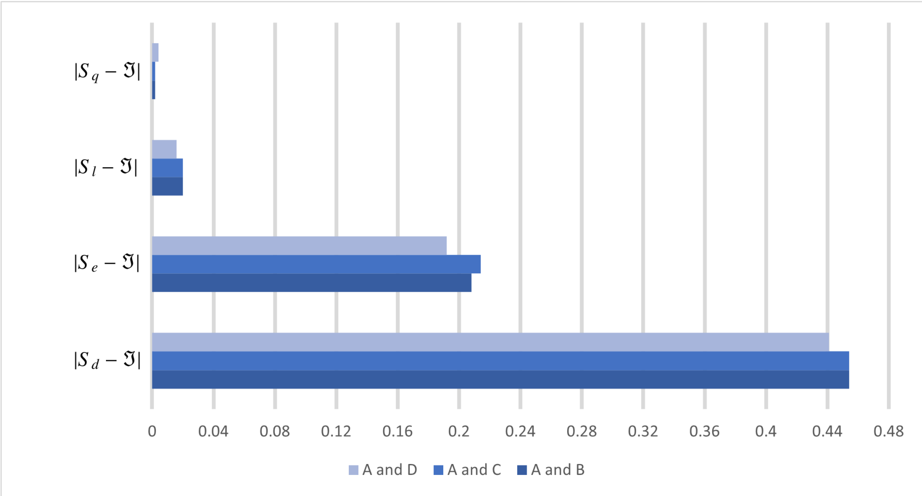
A ve B için	$\lvert S_d - \Im\rvert$	$\lvert S_e - \Im\rvert$	$\lvert S_l - \Im\rvert$	$\lvert S_q - \Im\rvert$
	0.454	0.208	0.02	0.002
A ve C için	$\lvert S_d - \Im\rvert$	$\lvert S_e - \Im\rvert$	$\lvert S_l - \Im\rvert$	$\lvert S_q - \Im\rvert$
	0.454	0.214	0.02	0.002
A ve D için	$\lvert S_d - \Im\rvert$	$\lvert S_e - \Im\rvert$	$\lvert S_l - \Im\rvert$	$\lvert S_q - \Im\rvert$
	0.441	0.192	0.016	0.004

sıralaması

$$|S_d - \Im| \geq |S_e - \Im| \geq |S_l - \Im| \geq |S_q - \Im|,$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak S_q bulanık kümeler üzerinde kullanılan benzerlik ölçüleri arasında esnek kümeler üzerindeki benzerlik ölçüsüne en yakın değeri veren benzerlik ölçüsüdür. Aşağıdaki Şekil 4.7 $|S_d - \Im|$, $|S_e - \Im|$, $|S_l - \Im|$ ve $|S_q - \Im|$ değerleri arasındaki farkı göstermektedir.

Şekil 4.7.Esnek Benzerlik Ölçüsü ile Bulanık Benzerlik Ölçüleri Arasındaki Uzaklık Grafiği.



4.2. Kaba Kümelerin Bir Karakterizasyonu: Denklik Kümesi

$\mathfrak{U} \neq \emptyset$ ve $\{C_i | i = 1, 2, ..., r, ...\}$, $\mathfrak{U}$ nun (sonlu veya sonsuz) bir parçalanması ise, C_i yerine (i, j) gösterimi kullanılır; burada $j = |C_i|$, C_i içindeki eleman sayısıdır. $\mathfrak{U}$ üzerindeki her denklik bağıntısına $\mathfrak{U}$ nun bir parçalanması karşılık geldiği ve bunun tersinin de geçerli olduğu iyi bilinmektedir. Çalışmanın geri kalanında, $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bir n-elemanlı başlangıç evreni, $\mathfrak{R}$ bir denklik bağıntısı olmak üzere $\emptyset \neq X \subseteq \mathfrak{U}$ ve $[x]_{\mathfrak{R}}$, x'in bir denklik sınıfı olsun. $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. $|^{(i,j)}[x]_{\mathfrak{R}}|$, $x \in U$'in i. sıradaki j-elemanlı elementer kümesinin $[x]_{\mathfrak{R}}$ denklik sınıfının eleman sayısını belirtsin. Burada denklik sınıflarının sırası önemli değildir, asıl amaç sıra gözetmeksizin j elemanlı i. denklik sınıfını belirlemektir.

Tanım 4.17. $\emptyset \neq X \subseteq \mathfrak{U}$ ve $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ olsun. Bu durumda X içindeki her $u_i \in X$ yerine $[u_i]_{\mathfrak{R}}$ içindeki bir u_j elemanı yazılarak elde edilen Y kümesine X'in A içindeki denklik kümesi denir ve $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ ile gösterilir. $\mathfrak{R}$ denklik bağıntısına göre boş küme yalnızca kendisine denktir.

Eğer $\emptyset \neq Y \subseteq \mathfrak{U}$, $X \neq Y$ ve $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ ise, o zaman en az bir $u_j \in Y \cap [u_i]_{\mathfrak{R}}$ elemanı vardır öyle ki $u_i \in X$ ve $u_i \notin Y$ dir. X e denklik kümelerinin sayısı $|X|_{\mathfrak{R}}$ ile gösterilir. Bu durumda $1 \leq |X|_{\mathfrak{R}} \leq \prod_{i=1}^{r} |^{(i,j)}[u]_{\mathfrak{R}}|$ ve r, $\mathfrak{R}$'de birbirine karşılık gelen farklı denklik sınıflarının sayısıdır. r sonsuz olabilir. Ayrıca, $\equiv_R$ bağıntısı $P(\mathfrak{U})$ üzerinde A ya bağlı bir denklik bağıntısıdır.

Örnek 4.18. $\mathfrak{U} = \mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$ ve $\mathfrak{R}$ bağıntısı her $x, y \in \mathbb{Z}_8$ için "$x\mathfrak{R}y$ olması için gerek ve yeter şart $3|x - y$ olmasıdır" şeklinde tanımlanmış olsun. O halde $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Pawlak yaklaşım uzayı $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ olsun. Bu durumda uzaydaki tüm denklik sınıfları şöyledir: $(1,3) := [0]_{\mathfrak{R}} = \{0,3,6\}$, $(2,3) := [1]_{\mathfrak{R}} = \{1,4,7\}$ ve $(3,2) := [2]_{\mathfrak{R}} = \{2,5\}$. $X = \{2,3,5\} \subseteq \mathfrak{U}$ ise, o zaman $X_1 = \{0,2,5\}$, $X_2 = \{2,5,6\}$. olmak üzere $X \equiv_{\mathfrak{R}} X$, $X \equiv_{\mathfrak{R}} X_1$ ve $X \equiv_{\mathfrak{R}} X_2$ dir.

Önerme 4.19. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı, $\emptyset \neq X \subseteq \mathfrak{U}$, ve $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ olsun. O halde X in $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ da bir kaba küme olması için gerek ve yeter şart Y nin, $A = (U; \mathfrak{R})$ da bir kaba küme olmasıdır.

İspat. $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ ise, Tanım 4.17. e göre $\mathfrak{R}^*X = \mathfrak{R}^*Y$ ve $\mathfrak{R}_*X = \mathfrak{R}_*Y$ olduğu kolaylıkla görülür. ■

Denklik küme kavramını kullanarak, $\mathfrak{U}$ üzerindeki $\mathfrak{R}$ denklik bağıntısı varsa, X kümesinin bir kaba küme olup olmadığını belirlemek için alt ve üst yaklaşımları kullanmaya gerek yoktur. Aşağıdaki teorem kaba kümelerin yeni bir karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 4.20. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı ve $\emptyset \neq X \subseteq \mathfrak{U}$ olsun. Bu durumda X in $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ da bir kaba küme olması için gerek ve yeter şart $X \neq Y$ ve $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ olacak şekilde en az bir $Y \subseteq \mathfrak{U}$ var olmasıdır.

İspat. $X \neq Y$ ve $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ olacak şekilde bir $\emptyset \neq Y \subseteq \mathfrak{U}$ kümesinin var olduğunu kabul edelim. Tanım 2.11. gereğince $\mathfrak{R}_*X = \{x \in \mathfrak{U} \mid [x]_{\mathfrak{R}} \subseteq X\}$ olduğundan, ya $\mathfrak{R}_*X = \emptyset$ veya $\mathfrak{R}_*X \neq \emptyset$.
Eğer $\mathfrak{R}_*X = \emptyset$ ise, o zaman açıkça görüleceği üzere $\mathfrak{R}_*X \subseteq X \subseteq \mathfrak{R}^*X$ olduğundan $\mathfrak{R}^*X \setminus \mathfrak{R}_*X \neq \emptyset$ olup X, A üzerinde kaba bir kümedir.
Diğer taraftan $\mathfrak{R}_*X \neq \emptyset$ ise, $\mathfrak{U}$'da $[u_i]_{\mathfrak{R}} \subseteq X$ olacak şekilde bir u_i elemanı vardır. $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ ve $[u_i]_{\mathfrak{R}} \subseteq Y$ olduğundan, $\mathfrak{U}$'da $u_k \notin [u_i]_{\mathfrak{R}}$, $u_k \in [u_t]_{\mathfrak{R}}$, $u_k \in Y$ ve $u_k \notin X$ olacak şekilde $u_k \in \mathfrak{U}$ vardır. Dolayısıyla, $\mathfrak{R}^*X \setminus \mathfrak{R}_*X \neq \emptyset$, yani X, A üzerinde bir kaba kümedir.
Şimdi ise X in $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ da bir kaba küme olduğunu kabul edelim. O zaman $\mathfrak{R}^*X \setminus \mathfrak{R}_*X \neq \emptyset$ olduğundan $u_i \notin \mathfrak{R}_*X$ ve $u_i \in \mathfrak{R}^*X$ şartlarını sağlayacak bir eleman vardır. Bu durumda $u_s \in [u_i]_{\mathfrak{R}}$ ve $u_s \notin X$ şartlarını sağlayan en az bir eleman vardır. O zaman $X \subsetneqq \mathfrak{R}^*X$ olarak elde edilir. Çünkü aksi halde X denklik sınıflarının bir birleşimi olup bu durumda, X, A üzerinde tanımlanabilir bir küme olurdu. Bu durumda, $u_s \in [u_i]_{\mathfrak{R}} \subseteq \mathfrak{R}^*X$. Dolayısıyla, $u_j \in X \cap [u_i]_{\mathfrak{R}}$ elemanları yerine $u_s \in [u_i]_{\mathfrak{R}}$ biçimindeki elemanlar ile yazılabilen bir Y kümesi vardır. Bu durumda, $X \neq Y$ ve $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ olacak şekilde bir en az bir$Y$ kümesi vardır.
■

Örnek 4.21. $\mathfrak{U} = \mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$ ve $\mathfrak{R}$ bağıntısı her $x, y \in \mathbb{Z}_8$ için "$x\mathfrak{R}y$ olması için gerek ve yeter şart $3|x-y$ olmasıdır" şeklinde tanımlanmış olsun. Örnek 4.18. den $X = \{2,3,5\} \subseteq \mathfrak{U}$ olsun. $X \neq X_1$ ve $X \equiv_{\mathfrak{R}} X_1$ şeklinde bir $X_1 \subset \mathfrak{U}$ mevcut olduğundan, burada $X_1 = \{0,2,5\}$ ise X, Teorem 4.20. e göre $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ da bir kaba kümedir. Aslında, $\mathfrak{R}^*X = [0]_{\mathfrak{R}} \cup [2]_{\mathfrak{R}} = \{0,2,3,5,6\}$ ve $\mathfrak{R}_*X = [2]_{\mathfrak{R}} = \{2,5\}$.

Sonuç 4.22. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı ve $\emptyset \neq X \subseteq \mathfrak{U}$ olsun. Bu durumda X, A da bir tanımlanabilir küme olması için gerek ve yeter şart $|X|_{\mathfrak{R}} = 1$ olmasıdır.

İspat. X in A da tanımlanabilir bir küme olması için gerek ve yeter şart X in A daki denklik sınıflarının birleşimi yani $|X|_{\mathfrak{R}} = 1$ olmasıdır. ■

Eğer $X \subseteq \mathfrak{U}$ ise, o zaman X in tümleyeni $\mathfrak{U} \backslash X$ kümesidir ve X^c ile gösterilir. Denklik kümelerinin birleşim, kesişim, simetrik fark ve tümleyen işlemlerine göre özellikleri aşağıdaki önermelerle verilmiştir:

Önerme 4.23. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı ve $X, Y \subseteq \mathfrak{U}$ olsun. O halde $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ olması için gerek ve yeter şart $X^c \equiv_{\mathfrak{R}} Y^c$ olmasıdır.

İspat. $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ ve $x' \in X^c$ olsun. Bu durumda, $[x']_R \cap X^c \neq \emptyset$. Eğer $[x']_R \nsubseteq X^c$ ise $x \in [x']_R$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. $X \equiv_R Y$ olduğundan $y \in Y$ ve $[x']_R \nsubseteq Y$ şartlarını sağlayan $y \in [x']_R$ mevcuttur. Dolayısıyla, bir $y' \in [x']_R$ için $y' \in Y^c$ dır. Bu bulgular doğrultusunda $X^c \equiv_R Y^c$ elde edilir. Diğer taraftan $[x']_R \subseteq X^c$ olsun. Since $X \equiv_R Y$ olduğundan $y \in Y$ olacak şekilde bir $y \in [x']_R$ bulunamaz. Dolayısıyla, $y' \in [x']_R$ ve $y' \in Y^c$ olacak şekilde y' elemanı vardır. Benzer şekilde teoremin yeter kısmının doğruluğuda gösterilebilir. ■

Önerme 4.24. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda $X, Y, X_1, Y_1 \subseteq \mathfrak{U}$, kümeleri için $X \equiv_{\mathfrak{R}} X_1$, $Y \equiv_{\mathfrak{R}} Y_1$, $X \cap Y = \emptyset$ $X_1 \cap Y_1 = \emptyset$ ise,

$$X \cup Y \equiv_{\mathfrak{R}} X_1 \cup Y_1.$$

İspat. $u_i \in X \cup Y$ olsun. Bu durumda, $u_i \in X$ ya da $u_i \in Y$. Eğer $u_i \in X$ ve $X \equiv X_1$ ise $u_j \in [u_i]_R \cap X_1$ olacak şekilde u_j elemanı vardır. Diğer taraftan, eğer $u_i \in Y$ ve $Y \equiv Y_1$ ise $u_j \in [u_i]_R \cap Y_1$ olacak şekilde u_j mevcuttur. Dolayısıyla, $X \cup Y \equiv_R X_1 \cup Y_1$ ifadesi sağlanır. ■

Sonuç 4.25. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda $X, Y, X_1, Y_1 \subseteq \mathfrak{U}$ kümeleri için$X \equiv_{\mathfrak{R}} X_1$, $Y \equiv_{\mathfrak{R}} Y_1$, $X \cap Y = \emptyset$ and $X_1 \cap Y_1 = \emptyset$ ise

a. $X \triangle Y \equiv_{\mathfrak{R}} X_1 \triangle Y_1$.

b. $X^c \cap Y^c \equiv_{\mathfrak{R}} X_1^c \cap Y_1^c$.

4.3. Denklik Değeri ve $\mathfrak{R}$-Benzerlik Ölçüsü

Bu kısımda $\mathfrak{U}$ sonlu bir küme $\emptyset \neq X \subseteq \mathfrak{U}$ ve $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

Tanım 4.26. $u \in \mathfrak{U}$ elemanı için X ve ${}^{(i,j)}[u]_{\mathfrak{R}}$ daki elemanların sayısı P_X^{ij} ile gösterilsin. Yani

$$P_X^{ij} = |^{(i,j)}[u]_{\mathfrak{R}} \cap X|.$$

Burada, P_X^{ij} ye X kümesinin i. denklik değeri olarak adlandırılır.

Lemma 4.27. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı, $\emptyset \neq X, Y \subseteq \mathfrak{U}$ ve $r = |\mathfrak{U}/\mathfrak{R}|$, $\mathfrak{R}$ bağıntısına göre farklı denklik sınıflarının sayısı olsun. Bu durumda

a. Her $i = 1, 2, ..., r$ için $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ olması için gerek ve yeter şart $P_X^{ij} = P_Y^{ij}$ olmasıdır.

b. $X \subseteq Y$ ise $P_X^{ij} \leq P_Y^{ij}$.

c. Her $i = 1, 2, ..., r$ için $P_X^{ij} \leq |X|$.

d. Her $i = 1, 2, ..., r$ için $P_{\mathfrak{U}}^{ij} = |^{(i,j)}[u]_{\mathfrak{R}}| = j$ ve $\sum_{i=1}^{r} P_{\mathfrak{U}}^{ij} = |\mathfrak{U}|$.

e. Her $i = 1, 2, ..., r$ için $P_{\emptyset}^{ij} = 0$.

Önerme 4.28. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı, $X, Y \subseteq \mathfrak{U}$ ve $r = |\mathfrak{U}/\mathfrak{R}|$ farklı denklik sınıflarının sayısı olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, ..., r$ için, aşağıdaki ifadeler sağlanır;

a. $P_{X\cup Y}^{ij} \leq P_X^{ij} + P_Y^{ij}$.

b. $X \cap Y = \emptyset$ ise $P_{X\cup Y}^{ij} = P_X^{ij} + P_Y^{ij}$.

c. $P_{X^c}^{ij} = |^{(i,j)}[u]_{\mathfrak{R}}| - P_X^{ij}$.

Teorem 4.29. ile X kümesinin kaba küme olup olmadığını P_X^{ij} sayısını kullanarak belirlenebilidiği görülmektedir. Bu nedenle kaba kümeler için yeni bir karakterizasyon elde edilmiş olur.

Teorem 4.29. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı, $\emptyset \neq X, Y \subseteq \mathfrak{U}$ ve $r = |\mathfrak{U}/\mathfrak{R}|$, $\mathfrak{R}$ bağıntısına göre farklı denklik sınıflarının sayısı olsun. O zaman en az bir $i = 1, 2, ..., r$ için, $P_X^{ij} \neq 0$ ve $P_{X^c}^{ij} \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart X in $A = (\mathfrak{U}; \mathfrak{R})$ da kaba küme olmasıdır.

İspat. En az bir $i = 1, 2, ..., r$ için $P_X^{ij} \neq 0$ ve $P_{X^c}^{ij} \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Öncelikle $P_X^{ij} = 1$ ve $P_{X^c}^{ij} = 1$ olsun. Bu durumda Önerme 4.28.(c) geregince $|^{(i,j)}[u]_R| = 2$. Dolayısıyla, $u_k \in {}^{(i,j)}[u]_R \cap X$ ve $u_t \in {}^{(i,j)}[u]_R \cap X^c$ elemanları vardır. Görüleceği üzere $u_k \neq u_t$ ve ${}^{(i,j)}[u]_R = {}^{(i,j)}[u_k]_R = {}^{(i,j)}[u_t]_R$ olur. Bu durumda $Y \cap X = X \setminus \{u_k\}$ ve $Y \cap X^c = \{u_t\}$ olacak şekilde Y kümesi mevcuttur. Öyleyse Y kümesi $Y \neq X$ ve $X \equiv_R Y$ şartlarını sağlar. O zaman X Teorem 4.20. gereğince bir kaba kümedir. Diğer durumlar içinde benzer yöntem uygulanabilir. Çünkü X in kaba bir küme olduğunu göstermek için, en az bir eleman için Y kümesinin varlığını göstermek yeterlidir.

Şimdi ise X in $A = (U; R)$ de bir kaba küme olduğunu kabul edelim. Bu durumda $R_*X \subset X \subset R^*X$ olduğundan $u_k \neq u_t$ ve ${}^{(i,j)}[u]_R = {}^{(i,j)}[u_k]_R = {}^{(i,j)}[u_t]_R$ olacak şekilde $u_t \in R^*X \setminus X$ ve $u_k \in X \setminus R_*X$ elemanları mevcuttur. Bu durumda en az bir $i = 1, 2, ..., r$ için $u_k \in {}^{(i,j)}[u]_R \cap X$, $u_t \in {}^{(i,j)}[u]_R \cap X^c$ elde edilir. Dolayısıyla, $P_X^{ij} \geq 1$ ve $P_{X^c}^{ij} \geq 1$. ■

Tanım 4.30. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda $P(\mathfrak{U}) \times P(\mathfrak{U})$ dan $[0,1]$ aralığına tanımlı $S_{\mathfrak{R}}$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlarsa $S_{\mathfrak{R}}(X, Y)$ ye $\mathfrak{R}$-benzerlik ölçüsü denir. $\emptyset \neq X, Y, Z \in P(\mathfrak{U})$ için

s1. $0 \leq S_{\mathfrak{R}}(X, Y) \leq 1$;

s2. $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ olması için gerek ve yeter şart $S_{\mathfrak{R}}(X, Y) = 1$ olmasıdır;

s3. $S_{\mathfrak{R}}(X, Y) = S_{\mathfrak{R}}(Y, X)$;

s4. $X \subset Y \subset Z$ ise $S_{\mathfrak{R}}(X, Z) < S_{\mathfrak{R}}(X, Y)$ ve $S_{\mathfrak{R}}(X, Z) < S_{\mathfrak{R}}(Y, Z)$.

$\Psi : P(\mathfrak{U}) \times P(\mathfrak{U}) \to [0, 1]$ olmak üzere

$$\Psi(X, Y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{max\{|X|,|Y|\}} \sum_{i=1}^{r} |P_X^{ij} - P_Y^{ij}| & , \emptyset \neq X \in P(\mathfrak{U}) \text{ veya } \emptyset \neq Y \in P(\mathfrak{U}) \\ 1 & , X = \emptyset \text{ ve } Y = \emptyset \end{cases}$$

dönüşümü göz önüne alınsın.

Teorem 4.31. Ψ, $P(\mathfrak{U})$ de bir $\mathfrak{R}$-benzerlik dönüşümüdür.

İspat. $X, Y, Z \in P(\mathfrak{U})$ olsun.

s1.s2. $\Psi(\mathfrak{U}, \emptyset) = 1 - \frac{1}{max\{|\mathfrak{U}|,0\}} \sum_{i=1}^{r} |P_{\mathfrak{U}}^{ij} - P_{\emptyset}^{ij}| = 1 - \frac{|\mathfrak{U}|}{|\mathfrak{U}|} = 0.$
$X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ olsun. Lemma 4.27. gereğince her $i = 1, 2, ..., r$ için, $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ olması için gerek ve yeter şart $P_X^{ij} = P_Y^{ij}$ olmasıdır. Dolayısıyla,
$\Psi(X, Y) = 1 - \frac{1}{max\{|X|,|Y|\}} \sum_{i=1}^{r} |P_X^{ij} - P_Y^{ij}| = 1 - \frac{0}{max\{|X|,|Y|\}} = 1.$
$\Psi(X, Y) = 1$ ise her $i = 1, 2, ..., r$ için, $P_X^{ij} = P_Y^{ij}$ olup $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$.
$\emptyset \neq X \subsetneq Y \subsetneq \mathfrak{U}$ elde edilir. Lemma 4.27. gereğince her $i = 1, 2, ..., r$ için $P_X^{ij} \leq P_Y^{ij}$ ve $P_Y^{ij} \leq |Y|$ olduğundan $0 < \Psi(X, Y) < 1$.

s3. Simetri Ψ dönüşümünün tanımı gereği açıktır.

s4. $X \subset Y \subset Z$ olsun. Lemma 4.27. gereğince her $i = 1, 2, ..., r$ $P_X^{ij} < P_Y^{ij} < P_Z^{ij}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\Psi(X,Z) &= 1 - \tfrac{1}{max\{|X|,|Z|\}} \textstyle\sum_{i=1}^{r} |P_X^{ij} - P_Z^{ij}| \\
&= 1 - \tfrac{1}{|Z|} \textstyle\sum_{i=1}^{r} P_Z^{ij} - P_X^{ij} \\
&= 1 - \tfrac{1}{|Z|} \textstyle\sum_{i=1}^{r} P_Z^{ij} - P_Y^{ij} + P_Y^{ij} - P_X^{ij} \\
&= 1 - \tfrac{1}{|Z|} \textstyle\sum_{i=1}^{r} P_Z^{ij} - P_Y^{ij} - 1 + 1 - \tfrac{1}{|Z|} \textstyle\sum_{i=1}^{r} P_Y^{ij} - P_X^{ij} \\
&\geq 1 - \tfrac{1}{|Z|} \textstyle\sum_{i=1}^{r} P_Z^{ij} - P_Y^{ij} - 1 + 1 - \tfrac{1}{|Y|} \textstyle\sum_{i=1}^{r} P_Y^{ij} - P_X^{ij} \\
&= \Psi(Y,Z) - 1 + \Psi(X,Y)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, $1 + \Psi(X,Z) \geq \Psi(X,Y) + \Psi(Y,Z)$ dır. $0 \leq \Psi(X,Y) < 1$, $0 \leq \Psi(Y,Z) < 1$ ve $0 \leq \Psi(X,Z) < 1$ olduğundan $\Psi(X,Z) < \Psi(X,Y)$ ve $\Psi(X,Z) < \Psi(Y,Z)$ ifadeleri sağlanmış olur.

■

Ağırlıklı $\mathfrak{R}$-benzerlik ölçüsü:

Bu yöntemde, ağırlık değerleri denklik sınıflarına göre $\mathfrak{U}$ nun sonlu parçalanışlarına verilir. C_i denklik sınıfının ağırlık değeri ω_i ise $0 < \omega_i < 1$ ve $\sum_{i=1}^{r} \omega_i = 1$.

Şimdi $\Psi_\omega : P(\mathfrak{U}) \times P(\mathfrak{U}) \to [0,1]$ olmak üzere her $X, Y \in P(\mathfrak{U})$ için

$$\Psi_\omega(X,Y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{max\{|X|,|Y|\}} \sum_{i=1}^{r} \omega_i |P_X^{ij} - P_Y^{ij}| & , X \neq \emptyset \text{ veya } Y \neq \emptyset \\ 1 & , X = \emptyset \text{ ve } Y = \emptyset \end{cases}$$

dönüşümü göz önüne alınsın.

Teorem 4.32. Ψ_ω, $P(\mathfrak{U})$ üzerinde bir $\mathfrak{R}$-benzerlik ölçüsüdür.

İspat. $0 < \omega_i < 1$ ve $\sum_{i=1}^{r} \omega_i = 1$ olduğundan ispat Teorem 4.31. den açıktır. ■

4.4. $\mathfrak{R}$-Benzerlik Ölçüsünün Uygulamaları

Bu bölümde denk kümeler için bir benzerlik uygulaması ve deprem sonrası sürenin kısaltılmasında acil müdahale organizasyonunun rolünü gösteren bir uygulama sunulacaktır.

4.4.1. Zaman çizelgelerinin hesaplanması

Aşağıdaki örnekte bir firmanın iş yüküne göre denk kümeler ve benzerlik ölçüsü kullanılarak zaman çizelgelerinin hesaplanması sunulmaktadır.

Örnek 4.33. Bir teknoloji şirketi, personelini aldıkları bir işin eğitimi için alınan personelleri 5 ekibe ayırıyor ve iş yükünü paylaştırıyor. Şirkette 10 bilgisayar programcısı, 2 teknisyen, 4 satış personeli ve 3 kurye çalışmaktadır. $(1, 10) := C = \{c_1, c_2, ..., c_{10}\}$, $(2, 2) := T =$

$\{t_1, t_2\}$, $(3,4) := S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ve $(4,3) := K = \{k_1, k_2, k_3\}$ kümeleri sırası ile yazılımcıları, teknisyenleri, satış personellerini, kuryeleri temsil etsin.

Bu durumda $\mathfrak{U} = \{c_1, c_2, ..., c_{10}, t_1, t_2, s_1, s_2, s_3, s_4, k_1, k_2, k_3\}$ kümesi şirkette bulanan tüm personellerin kümesidir. O zaman $\{C, T, S, K\}$ kümesi $\mathfrak{U}$ nun bir parçalanmasıdır. Dolayısıyla, bu parçalanmaya karşılık bir $\mathfrak{R}$ denklik bağıntısı vardır. Şirket işin $\frac{1}{5}$ ni 10 günde tamamlayan $X = \{c_1, c_2, t_1, s_1, k_1\}$ çalışan grubunu seçsin. Geriye kalan personellerin oluşturdukları gruplar: $Y = \{c_3, c_4, t_2, s_2, k_2\}$, $Z = \{c_5, c_6, s_3, k_3\}$, $Q = \{c_7, c_8, s_4\}$ ve $W = \{c_9, c_{10}\}$ olsun. Personel sayısı az olan takımlar için geri dönüş süresi daha uzun olacaktır. Bu süreler Ψ ile tanımlanan benzerlik ölçüsü kullanılarak hesaplanabilir.

Elementer Küme (i,j)	Küme	$P^{1j}_{\text{küme}}$	$P^{2j}_{\text{küme}}$	$P^{3j}_{\text{küme}}$	$P^{4j}_{\text{küme}}$
$(1,10) := C = \{c_1, c_2, ..., c_{10}\}$	$X = \{c_1, c_2, t_1, s_1, k_1\}$	2	1	1	1
$(2,2) := T = \{t_1, t_2\}$	$Y = \{c_3, c_4, t_2, s_2, k_2\}$	2	1	1	1
$(3,4) := S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$Z = \{c_5, c_6, s_3, k_3\}$	2	0	1	1
$(4,3) := K = \{k_1, k_2, k_3\}$	$Q = \{c_7, c_8, s_4\}$	2	0	1	0
	$W = \{c_9, c_{10}\}$	2	0	0	0

ve

Küme	$\Psi(X, \text{küme})$	Beklenen Süre
$Y = \{c_3, c_4, t_2, s_2, k_2\}$	1	10 gün
$Z = \{c_5, c_6, s_3, k_3\}$	$4/5$	12 gün
$Q = \{c_7, c_8, s_4\}$	$3/5$	14 gün
$W = \{c_9, c_{10}\}$	$2/5$	16 gün

Burada $X \equiv_{\mathfrak{R}} Y$ ve

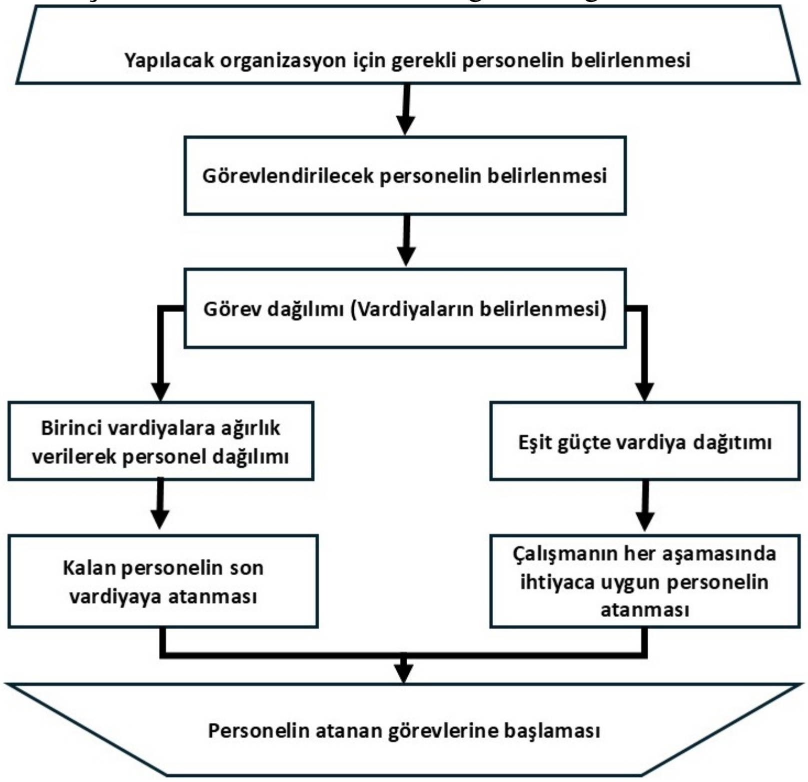
$$\begin{aligned}\Psi(X,Z) &= 1 - \tfrac{1}{max\{|X|,|Z|\}} \textstyle\sum_{i=1}^{4} |P_X^{ij} - P_Z^{ij}| \\ &= 1 - \tfrac{1}{5}((2-2) + (1-0) + (1-1) + (1-1)) \\ &= 1 - \tfrac{1}{5} \\ &= \tfrac{4}{5}.\end{aligned}$$

Bu durumda şirket müşterilerine işin 16 günde tamamlanacağını belirtir.

4.4.2. Denk kümeler yardımıyla acil müdahale ekiplerinin organizasyonu

Bu kısımda bir deprem bölgesine gönderilecek olan arama kurtarma ekiplerinin belirlenmesi ve görevli personellerin vardiyalara ayrılması, denk kümeler ve $\mathfrak{R}$-benzerlik bağıntısı yardımı ile ele alınacaktır. Söz konusu olan problemin denk kümeler ve $\mathfrak{R}$-benzerlik bağıntısı yardımı ile çözümü aynı zamanda başka organizsyonel iş dağılımında da kullanılabilir. Genel bir personel dağılımının kaba kümeler ile nasıl yapılabileceği aşağıdaki şekilden görülebilir.

Şekil 4.8. Personel Görev Dağılımı Algoritması



Aşağıdaki tanım depremde acil müdahele ekiplerinin nasıl seçileceğini anlatmak amacı ile kriter olarak verilmiştir.

Tanım 4.34. $\mathfrak{U}$, personellerin bir kümesi olsun. O zaman ulaşım süresi fonksiyonu $t : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $t(u)$ bir u personelinin gideceği yere ulaşma süresi olmak üzere tanımlanmıştır.

$n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $n - 1 < t(u) \leq n$ olsun, o zaman u personeline n.inci zaman dilimindeki personel denir. n.inci saat dilimindeki tüm elemanların kümesi T_n ile gösterilsin. Zaman dilimi tanımı gereği, tüm zaman dilimleri kümesi $\mathfrak{U}$ nun bir parçalanmasını verir. Dolayısıyla, bu parçalanmaya karşılık gelen bir denklik bağıntısı vardır.

$u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$ $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olsun. O halde $\mathfrak{U}$'nun parçalanmalarına karşılık gelen Δ_T bağıntısı "$u_1 \Delta_T u_2$ olması için gerek ve yeter şart $u_1, u_2 \in T_n$ olmasıdır" olarak tanımlanır.

Bu durumda Δ_T bir denklik bağıntısıdır ve Δ_T'nin denklik sınıfları T_n lerdir.

Minimum nitelikli personel ihtiyacını ve vardiyalı çalışmalarını zaman kaybetmeden organize etmek için denk kümeler etkin bir şekilde kullanılabilir. Depremle ilgili bilgi alınır alınmaz deprem hasarının boyutu, yıkılan bina sayısı ve yıkılan binaların altında kalan depremzede sayısının tespiti için bölgeye uzman karar vericiler gönderilmelidir. Ölüm ve yaralanmaların yanı sıra acil tehlike altında olmayan ancak çöken binalardan kolayca kaçamayan kişileri tahmin etmek için karar vericiler depremde mahsur kalan insanlara yönelik farklı değerlendirme modellerini (PTE) kullanabilirler.

Durum değerlendirmesi yapıldıktan sonra PTE modellerine göre bölgeye kaç personelin transfer edileceği belirlenerek, arama kurtarma operasyonunun başlatılması gerekmektedir. Personeller bölgeye intikal ettikten sonra arama kurtarma çalışmalarının nasıl işleyeceği organize edilmelidir. Aşağıdaki örnek böyle bir durumda söz konusu organizasyonun denk kümeler ve benzerlik ölçüsü ile nasıl yapılabileceğini anlatmaktadır.

Örnek 4.35. Bir şehirde meydana gelen deprem sonucunda bölgeye arama kurtarma çalışmala rında görev almak üzere personel gönderilecektir. Şehirde yıkılan toplam da 118 binada; 10 ve üzeri katlara sahip 13, 7-9 katlar arası 27, 5-7 katlar arası 44, 4 katlı 30, 3 katlı olan 16 ve 2 katlı olan 8 bina bulunmaktadır. Durumun tespiti için deprem bölgesine gönderilen karar vericilerin uyguladığı PTE modeline göre, yıkılan bina sayısı, bu binaların kat sayısı ve depremin meydana geldiği zaman dikkate alındığında 6480 can kaybının olduğu tahmin edilmektedir. Meydana gelen deprem sonucunda sorumlu devlet kurumu, arama kurtarma faaliyetlerinde görev alabilecek personelin belirlenerek deprem bölgesine gönderilmesini ve arama kurtarma çalışmaları için saha organizasyonunu düzenlemek istiyor.

Kurum, yıkılan binalara gönderilecek olan ekiplerin kaç personelden oluşması gerektiği ni belirlemiştir. Buna göre arama kurtarma takımlarının nasıl oluşturulması gerektiği aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Kat Sayısı	Sağlık Personeli	Arama Kurtarma Personeli	Makine Operatörleri
10 kat ve üstü	6	14	2
7-9 kat	5	12	2
5-7 kat	5	10	1
4 kat	4	10	1
3 kat	3	8	1
2 kat	3	7	–

Arama kurtarma faaliyetlerinin en hızlı şekilde gerçekleştirilebilmesi amacıyla ülkedeki tüm sağlık personeli, arama kurtarma personeli ve makine operatörleri arasından deprem bölgesine 1-7 saat aralığı içinde ulaşabilecek personelin transfer edilmesi planlanmaktadır. M, S ve O sırasıyla ülkedeki tüm sağlık personeli, arama kurtarma personeli ve makine operatörlerinin kümesi olsun. O zaman $U = M \cup S \cup O$ olmak üzere $\{M, S, O\}$ kümesi $\mathfrak{U}$ nun bir parçalanmasıdır. Bu parçalanmaya karşılık gelen denklik bağıntısı R olsun. Bu durumda deprem bölgesine 1-7 saat aralığı içerisinde taşınabilecek personel miktarı "ulaşım süresi fonksiyonu" yardımı ile belirlenip aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Tablo 4.5. Zaman Aralıklarındaki Personel Sayıları

Ulaşma Süresi	M	S	O
$1-2$ saat	$\lvert M \cap T_2 \rvert = 154$	$\lvert S \cap T_2 \rvert = 426$	$\lvert O \cap T_2 \rvert = 21$
$2-3$ saat	$\lvert M \cap T_3 \rvert = 210$	$\lvert S \cap T_3 \rvert = 674$	$\lvert O \cap T_3 \rvert = 52$
$3-4$ saat	$\lvert M \cap T_4 \rvert = 368$	$\lvert S \cap T_4 \rvert = 798$	$\lvert O \cap T_4 \rvert = 98$
$4-5$ saat	$\lvert M \cap T_5 \rvert = 285$	$\lvert S \cap T_5 \rvert = 965$	$\lvert O \cap T_5 \rvert = 145$
$5-6$ saat	$\lvert M \cap T_6 \rvert = 267$	$\lvert S \cap T_6 \rvert = 854$	$\lvert O \cap T_6 \rvert = 87$
$6-7$ saat	$\lvert M \cap T_7 \rvert = 126$	$\lvert S \cap T_7 \rvert = 688$	$\lvert O \cap T_7 \rvert = 54$

Yetkililer, personellerin deprem bölgesine ulaşmasının ardından arama kurtarma faaliyetlerinin kesintisiz olarak devam edebilmesi için personellerin 8 saatlik vardiyalar halinde çalışmasını planlamaktadır. $M_D = \{m_i : 1 \leq i \leq \ 1410\}$ bölgeye gelen sağlık personellerinin kümesi, $S_D = \{s_i : 1 \leq j \leq \ 4405\}$ arama kurtarma personellerinin kümesi ve $O_D = \{o_i : 1 \leq k \leq \ 457\}$ bölgeye gelen tüm makine operatörlerinin kümesi olsun. O halde $\mathfrak{U}_D = M_D \cup S_D \cup O_D$ deprem bölgesine nakledilen tüm personelin kümesidir ve $\mathfrak{R}$ bağıntısı $\mathfrak{U}_D$ kümesine daraltılır.

Daha sonra yetkililer vardiyaları iki farklı şekilde düzenleyebilirler. Öncelikle ilk iki vardiyada gerekli tüm personeli görevlendirip, kalan personeli uygun şekilde dağıtarak üçüncü vardiyayı belirleyebilirler. Diğer bir seçenek ise herhangi bir vardiyada gerekli personelin görevlendirilmesi değil, her vardiyada yalnızca ihtiyacı karşılayacak kadar personelin görevlen dirilmesidir.

Tablo 4.35. ya göre gerekli personeli bulunduran temsili ekipler sırası ile 10 kat ve üzeri binalar için C_{10}^{α}, 7 ila 9 kat arası binalar için C_7^{α}, 5 ila 7 kat arası binalar için C_5^{α}, 4 katlı binalar için C_4^{α}, 4 katlı binalar için C_3^{α} ve 2 katlı binalar için C_2^{α} olsun.

Eğer yetkililer ilk seçeneği kullanarak vardiyaları belirlemek isterlerse, ilk vardiya (V_1), $i_1 \neq i_2$ ya da $j_1 \neq j_2$ için $C_{i_1}^{j_1} \cap C_{i_2}^{j_2} = \emptyset$ olmak üzere aşağıdaki gibi belirlenir:

$V_1 = \{C_{10}^1, C_{10}^2, ..., C_{10}^{13}, C_9^1, C_9^2, ..., C_9^{27}, C_7^1, C_7^2, ..., C_7^{44}, C_4^1, C_4^2, ..., C_4^{30}, C_3^1, C_3^2, ..., C_3^{16}, C_2^1,$
$C_2^2, ..., C_2^8\}$

$$\begin{aligned}
C_{10}^{\alpha} &\equiv_{\mathfrak{R}} C_{10}^1 \equiv_{\mathfrak{R}} C_{10}^2 \equiv_{\mathfrak{R}} ... \equiv_{\mathfrak{R}} C_{10}^{13},\\
C_9^{\alpha} &\equiv_{\mathfrak{R}} C_9^1 \equiv_{\mathfrak{R}} C_9^2 \equiv_{\mathfrak{R}} ... \equiv_{\mathfrak{R}} C_9^{27},\\
C_7^{\alpha} &\equiv_{\mathfrak{R}} C_7^1 \equiv_{\mathfrak{R}} C_7^2 \equiv_{\mathfrak{R}} ... \equiv_{\mathfrak{R}} C_7^{44},\\
C_4^{\alpha} &\equiv_{\mathfrak{R}} C_4^1 \equiv_{\mathfrak{R}} C_4^2 \equiv_{\mathfrak{R}} ... \equiv_{\mathfrak{R}} C_4^{30},\\
C_3^{\alpha} &\equiv_{\mathfrak{R}} C_3^1 \equiv_{\mathfrak{R}} C_3^2 \equiv_{\mathfrak{R}} ... \equiv_{\mathfrak{R}} C_3^{16},\\
C_2^{\alpha} &\equiv_{\mathfrak{R}} C_2^1 \equiv_{\mathfrak{R}} C_2^2 \equiv_{\mathfrak{R}} ... \equiv_{\mathfrak{R}} C_2^{8}.
\end{aligned}$$

Benzer bir şekilde ikinci vardiya (V_2) belirlenebilir.

Fakat benzer yaklaşım üçüncü vardiya ve ikinci tür vardiya dağıtım seçeneği için geçerli değildir. Çünkü, elde tüm ihtiyacı karşılayacak personel bulunamayacaktır. Dolayısıyla, böyle durumlarda oluşturulacak olan takımın arama ve kurtarma çalışmalarında belli bir bina türünde yetkin olup olmadığı benzerlik ölçüsü yardımı ile belirlenir. Eğer belirlenen ekip benzerlik ölçüsünde tatmin edici bir sonuç veriyor ise belirlenen ekibin o türdeki binalarda arama ve kurtarma çalışması yürütebileceği söylenir.

$(1, 1410) := M_D$, $(2, 4405) := S_D$ ve $(3, 457) := O_D$ elementer kümeleri için $H = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, o_1\}$ bir arama ve kurtarma ekibi olsun. Bu durumda aşağıdaki tablo H ekibi ve temsili ekipler için P^{ij} değerlerini göstermektedir.

Tablo 4.6. Arama ve kurtama ekipleri için denklik değerleri

Arama ve Kurtarma Ekibi	$P^{1j}_{\text{küme}}$	$P^{2j}_{\text{küme}}$	$P^{3j}_{\text{küme}}$
C_{10}^{α}	6	14	2
C_9^{α}	5	12	2
C_7^{α}	5	10	1
C_4^{α}	4	10	1
C_3^{α}	3	8	1
C_2^{α}	3	7	0
H	5	8	1

Böylece, bina türlerine göre H ekibi ile temsili ekiplerin benzerlikleri aşağıda verilmiştir:

Tablo 4.7. Ψ ye göre benzerlik değerleri

$\Psi(H, C_{10}^{\alpha})$	$\Psi(H, C_9^{\alpha})$	$\Psi(H, C_7^{\alpha})$	$\Psi(H, C_4^{\alpha})$	$\Psi(H, C_3^{\alpha})$	$\Psi(H, C_2^{\alpha})$
0.636	0.737	0.875	0.8	0.857	0.714

Bu nedenle, H ekibinin en verimli şekilde çalışabileceği deprem kazı alanları 5-7 katlı binalardır. Başka bir deyişle, H kümesine benzer olan tüm kümeler, 5-7 katlı binalarda tüm vardiyalarda arama ve kurtarma çalışmalarına devam edilir. Sonuç olarak ikinci seçenekteki tüm vardiyalar ve ilk seçeneğin üçüncü vardiyasındaki ekipler ekiplerin temsili ekipler ile benzerlikleri ölçülerek oluşturulur.

Benzerlik Ölçülerinin Kıyaslanması:

Kaba kümeler üzerinde ya da kaba kümelerde kullanılacak çok fazla benzerlik olçüsü tanımlanmamıştır. Kaba kümeler üzerinde kullanılabilecek benzerlik ölçüsü ile Ψ benzerlik ölçüsünün karşılaştırılması aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 4.8. Ölçülerin Karşılaştırılması

Benzerlik Ölçüsü	Sıralama
Ψ	$C_7^{\alpha} > C_3^{\alpha} > C_4^{\alpha} > C_9^{\alpha} > C_2^{\alpha} > C_{10}^{\alpha}$
Braun-Blanquet [12]	$C_7^{\alpha} > C_3^{\alpha} > C_4^{\alpha} > C_9^{\alpha} > C_2^{\alpha} > C_{10}^{\alpha}$
Dice-Sorensen [20]	$C_4^{\alpha} > C_7^{\alpha} > C_3^{\alpha} > C_9^{\alpha} > C_2^{\alpha} > C_{10}^{\alpha}$
Jaccard [27]	$C_7^{\alpha} > C_3^{\alpha} > C_4^{\alpha} > C_9^{\alpha} > C_2^{\alpha} > C_{10}^{\alpha}$

Tablodan görülebileceği üzere, Ψ benzerlik ölçüsü ve [12] ve [27] benzerlik ölçüleri aynı sıralamaları verirken, [20] ölçüsü diğer üç ölçüye yakın bir sıralama vermektedir. [20] ölçüsü ile elde edilen sonuçlar ile diğer üç ölçü ile elde edilen sonuçlar arasındaki tek fark, C_3^{α}, C_4^{α} ve C_7^{α}'nın sıralamadaki yeridir.

Diğer taraftan, her bina tipi için arama ve kurtarma ekiplerinde çalışan personelin meslek gruplarına (denklik sınıflarına) göre ağırlıkları aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi olması durumunda, Tablo 4.7 de veriler değişmektedir.

Tablo 4.9. Bina türüne göre personel ağırlıkları

Bina türü	Sağlık P.	Arama ve Kurtarma P.	Makine Operatörleri
10 kat ve üstü	0.2	0.4	0.4
7-9 kat	0.2	0.5	0.3
5-7 kat	0.25	0.5	0.25
4 katlı	0.3	0.5	0.2
3 katlı	0.3	0.6	0.1
2 katlı	0.4	0.6	$-$

Arama kurtarma ekibi oluşturulurken ağırlıklı benzerlik ölçüsü kullanılsaydı, H'nin diğer ekiplere olan benzerlikleri şu şekilde olurdu:

Tablo 4.10. Ψ_ω ye göre benzerlik değerleri

$\Psi_\omega(H, C_{10}^\alpha)$	$\Psi_\omega(H, C_9^\alpha)$	$\Psi_\omega(H, C_7^\alpha)$	$\Psi_\omega(H, C_4^\alpha)$	$\Psi_\omega(H, C_3^\alpha)$	$\Psi_\omega(H, C_2^\alpha)$
$0,864$	0.879	0.937	0.913	0.957	0.9

Ağırlıklı benzerlik ölçüsü kullanıldığında, elde edilen sonuçlar şaşırtıcı değildir, çünkü meslek grupları arama ve kurtarma ekiplerinde görevin önemini göstermektedir. Ψ benzerlik ölçüsüne göre, H ekibi C_7^α ekibinin görevini en iyi şekilde üstlenecektir, Ψ_ω benzerlik ölçüsüne göre ise H ekibinin çalışması için en iyi yer 3 katlı binalardır. Bu fark tamamen benzerlik ölçülerinde ağırlık kavramının tanıtılmasının bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. İki benzerlik ölçüsüne göre elde edilen sonuçlar Tablo 4.12 de verilmiştir.

Tablo 4.11. Ψ ve Ψ_ω karşılaştırılması

Benzerlik Ölçüsü	(H, C_{10}^α)	(H, C_9^α)	(H, C_7^α)	(H, C_4^α)	(H, C_3^α)	(H, C_2^α)
Ψ	0.636	0.737	0.875	0.8	0.857	0.714
Ψ_ω	$0,864$	0.879	0.937	0.913	0.957	0.9

Tablo 4.12. Ψ ve Ψ_ω sıralamaya göre karşılaştırılması

Benzerlik Ölçüsü	Sıralama
Ψ	$C_7^\alpha > C_3^\alpha > C_4^\alpha > C_9^\alpha > C_2^\alpha > C_{10}^\alpha$
Ψ_ω	$C_3^\alpha > C_7^\alpha > C_4^\alpha > C_2^\alpha > C_9^\alpha > C_{10}^\alpha$

4.5. Uyum

Uyum problemi bir ekip ya da grubun kendi içinde ne kadar etkin ve amaçları doğrultusunda nasıl çalıştığı ile ilgilidir. Uyum kelimesi sözlüklerde "bir bütünün parçaları arasında bulunan ahenk" şeklinde yer almaktadır. Bu açıklamayı matematiksel olarak modellemeyi oldukça zorlu bir süreç olarak görmek doğaldır. Fakat uyum daha derinden incelenecek olursa bir ekipteki personelin ya da o ekibin elemanlarının ortak olarak sahip olmaları gereken becerilerin yanı sıra birbirlerinde eksik olan becerileride kapsamaktadır. Yani uyumu ekibin her elemanının sahip olması gereken becerilerin birbirleri ile yakınlığı ve ekibin ihtiyacı olan ve spesifik anlarda gereken ve bireysel olarak herkeste olması gerekmeyen fakat amaca ulaşmak için ekipte en az bir elemanın sahip olması gereken becerilerin bütünü olarak görmek daha akla yakındır.

4.5.1. Bulanık kümelerde uyum

Bu kısımda bulanık kümeler ve aggregation operatörleri kullanılarak uyum matematik sel olarak modellenmiştir. Ekibin her elemanının ortak olarak kullanması gereken beceriler benzerlik uyumu altında, ekip elemanlarından en az bir kişide bulunması gereken beceriler tamamlayıcı uyum altında incelenmiştir.

Tanım 4.36. $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı evrensel küme ve $\{\eta_i\}_{i\in I}$ de, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir bulanık küme ailesi olsun. Bu durumda $a_j = 1 - |\max\{\eta_i(x_j)\}_{i\in I} - \min\{\eta_i(x_j)\}_{i\in I}|$ olmak üzere $\eta = \{(x_j, a_j)|x_j \in U\}$ kümesine $\{\eta_i(x_j)\}_{i\in I}$ bulanık küme ailesinin bulanık benzerlik uyum kümesi denir.

Yukarıdaki tanımda a_j elemanının $a_j = 1 - |\max\{\eta_i(x_j)\}_{i\in I} - \min\{\eta_i(x_j)\}_{i\in I}|$ şeklinde tanımlanmasının sebebi bulanık kümeler arasında aitlik derecesi en iyi olan ile en kötü arasındaki fark yardımıyla en iyi ile en kötü arasında kalan diğer x_j lerin aitlik dereceleri hakkında da fikir veriyor olmasıdır.

Tanım 4.37. $f : \bigcup_{i\in I}[0,1]^n \to [0,1]$ bir aggregation operatörü, $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı evrensel küme ve $\eta = \{(x_j, a_j)|x_j \in \mathfrak{U}\}$ de $\{\eta_i\}_{i\in I}$ ailesine ait bulanık benzerlik uyum kümesi olsun. Bu durumda $\kappa : [0,1]^n \to [0,1]$ olmak üzere

$$\kappa(\eta) = f(a_1, a_2, ..., a_n)$$

dönüşümüne $\{\eta_i\}_{i\in I}$ bulanık küme ailesinin $\mathfrak{U}$ üzerindeki benzerlik uyum operatörü denir.

Burada $\eta = \{(x_j, a_j)|x_j \in \mathfrak{U}\}$ kümesi $\{\eta_i\}_{i\in I}$ bulanık küme ailesinin bulanık benzerlik uyum kümesi olmak üzere $\kappa : [0,1]^n \to [0,1]$ nın aggregation operatör olması f nin aggregation operatörü olmasından açıktır.

Tanım 4.38. $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı evrensel küme ve $\{\eta_i\}_{i\in I}$ de, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir bulanık küme ailesi olsun. Bu durumda $b_j = max\{\eta_i(x_j)\}_{i\in I}$ olmak üzere $\eta = \{(x_j, b_j)|x_j \in \mathfrak{U}\}$ kümesine $\{\eta_i\}_{i\in I}$ bulanık küme ailesinin bulanık tamamlayıcı uyum kümesi denir.

Tamamlayıcı uyum kümesinin tanımında $b_j = max\{\eta_i(x_j)\}_{i\in I}$ olmasının nedeni bulanık kümelerin tamamlayıcı uyum kümesi belirlenirken $\{\eta_i\}_{i\in I}$ bulanık küme ailesinde bir bulanık kümenin ailenin bir parametre ya da alternatif üzerinde eksiklerini tamamlayabilmesi için o bulanık kümenin belirlenmiş alanda ailenin diğer üyelerinden daha iyi olma gerekliliğidir.

Tanım 4.39. $f : \bigcup_{i\in I}[0,1]^n \to [0,1]$ bir aggregation operatörü, $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, n elemanlı evrensel küme, $\{\eta_i\}_{i\in I}$, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir bulanık küme ailesi ve $\eta = \{(x_j, b_j)|x_j \in \mathfrak{U}\}$ de $\{\eta_i\}_{i\in I}$ ailesine ait bulanık tamamlayıcı uyum kümesi olsun. Bu durumda $\chi : [0,1]^n \to [0,1]$ olmak üzere

$$\chi(\eta) = f(b_1, b_2, ..., b_n)$$

dönüşümüne $\{\eta_i\}_{i\in I}$ bulanık küme ailesinin $\mathfrak{U}$ üzerindeki tamamlayıcı uyum operatörü denir.

Tanım 4.40. $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ bir aggregation operatörü, $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bir ekipte benzerlik uyumu aranan parametrelerin n-elemanlı kümesi ve $\mathfrak{V} = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ bir ekipte tamamlayıcı uyum aranan parametrelerin m-elemanlı kümesi olmak üzere, η, $\mathfrak{U}$ üzerinde bir bulanık benzerlik uyum kümesi ve ζ, $\mathfrak{V}$ üzerinde bir bulanık tamamlayıcı uyum kümesi olsun. Bu durumda $\upsilon : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$\upsilon(\kappa(\eta), \chi(\zeta)) = f(\kappa(\eta), \chi(\zeta))$$

şeklinde tanımlı dönüşüme bulanık uyum operatörü denir.

4.5.2. Bulanık kümelerde uyumun uygulanması

Yukarıda tanımlanan dönüşümler yardımı ile bir ekibin uyumunu belirlemek amacı ile aşağıdaki adımlar uygulanmalıdır.

Adım 1. Uyum düzeyi araştırılmak istenen elemanlara ait benzemesi gereken ve birbirlerini tamamlaması gereken becerilere dair bulanık kümelerin oluşturulması,

Adım 2. Uyum düzeyi araştırılmak istenen bulanık kümelere ait benzerlik uyumu kümesinin ve tamamlayıcı uyum kümesinin belirlenmesi,

Adım 3. Benzerlik uyum kümesi ve tamamlayıcı uyum kümesi yardımı ile benzerlik uyumunun ve tamamlayıcı uyumun hesaplanması,

Adım 4. Benzerlik ve tamamlayıcı uyumların sıralı ikililer halinde yazılıp uyumun hesaplanması.

Adım 5. Uyum düzeylerine göre bulanık kümelerin sıralanması.

Bu adımların uygulanmasına yönelik bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.41. Bir futbol kulübü elinde bulunan iki orta saha oyuncusunun yanında oynaması için bu iki oyuncuya uyum sağlayabilecek bir oyuncu bulmak istemektedir. Kulübün orta saha oyuncularında aradığı ve hepsinde bulunmasını istediği beceriler x_1 :başlatılan pas dizisinin gol beklentisi, x_2 :geriye atılan pas sayısı, x_3 :yana atılan pas sayısı, x_4 :öne atılan pas sayısı, x_5 :akan oyunda kurulum dahiliyeti, x_6 :kısa mesafe pas başarı yüzdesi, x_7 :orta mesafe pas başarı yüzdesi, x_8 :uzun mesafe pas başarı yüzdesi. Diğer taraftan oyuncuların birbirlerini tamamlamasını istedikleri yani oluşturulacak orta sahanın oyuncularından en az birinin sahip olması gereken beceriler ise y_1 :başarılı top taşıma sayısı, y_2 :kazanılan ikili mücadele sayısı, y_3 :sahipsiz top kazanma sayısı, y_4 :isabetli şut sayısı, y_5 :kaybedilen ikili mücadele sayısı, y_6 :pas arası sayısı, y_7 :engelleme sayısı, y_8 :asist beklentisi şeklindedir. η^b oyuncuların benzemesi istenen becerilere dair bulanık kümeleri ve η^t oyuncuların birbirlerini tamamlaması istenen becerilere ait bulanık kümeleri temsil etmek üzere kulübün elinde bulunan A ve B oyuncularının sahip oldukları becerilere dair bulanık kümeler aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$\eta^b_A(x_j)$	0.1	0.27	0.45	0.28	0.14	0.92	0.86	0.74
$\eta^b_B(x_j)$	0.06	0.22	0.54	0.24	0.28	0.9	0.8	0.78

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$\eta^t_A(y_j)$	0.41	0.23	0.25	0.33	0.87	0.23	0.08	0.16
$\eta^t_B(y_j)$	0.53	0.44	0.42	0.18	0.39	0.54	0.12	0.05

Kulüp bir süredir takip ettikleri oyunculardan bu iki oyuncunun yanında oynayabilecek C, D, E ve F oyuncularına dair veriler toplamış ve bu verileri kullanarak aralarından en uyumlu olanı A ve B oyuncularının yanına transfer etmek istemektedir. C, D, E ve F oyuncuların sahip oldukları becerilere dair bulanık kümeler aşağıdaki tablolarda sırası ile verilmiştir.

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$\eta^b_C(x_j)$	0.12	0.34	0.42	0.24	0.18	0.93	0.89	0.72
$\eta^b_D(x_j)$	0.09	0.36	0.52	0.12	0.12	0.91	0.8	0.76
$\eta^b_E(x_j)$	0.1	0.28	0.51	0.21	0.24	0.9	0.83	0.81
$\eta^b_F(x_j)$	0.5	0.23	0.60	0.17	0.31	0.95	0.88	0.83

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$\eta^t_C(y_j)$	0.54	0.18	0.32	0.3	0.76	0.28	0.24	0.1
$\eta^t_D(y_j)$	0.42	0.4	0.4	0.26	0.48	0.43	0.41	0.06
$\eta^t_E(y_j)$	0.8	0.58	0.48	0.27	0.50	0.44	0.37	0.09
$\eta^t_F(y_j)$	0.4	0.62	0.7	0.22	0.24	0.56	0.48	0.03

olmak üzere aşağıdaki tabloda C, D, E ve F oyuncularına ait transfer fiyatları verilmiştir.

Oyuncular	C	D	E	F
Transfer Değerleri	$18M$	$10M$	$12M$	$6M$

Bu durumda C, D, E ve F oyuncularının A ve B oyuncuları ile birlikte oluşturdukları benzerlik uyum kümeleri ve tamamlayıcı uyum kümeleri aşağıdaki tablolarda sırası ile verilmiştir.

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$\eta^b_{ABC}(x_j)$	0.94	0.88	0.88	0.96	0.86	0.97	0.91	0.94
$\eta^b_{ABD}(x_j)$	0.96	0.86	0.91	0.84	0.86	0.98	0.94	0.96
$\eta^b_{ABE}(x_j)$	0.96	0.94	0.91	0.93	0.86	0.98	0.94	0.93
$\eta^b_{ABF}(x_j)$	0.95	0.95	0.85	0.89	0.83	0.95	0.92	0.91

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$\eta^t_{ABC}(y_j)$	0.54	0.44	0.42	0.3	0.87	0.54	0.24	0.16
$\eta^t_{ABD}(y_j)$	0.54	0.44	0.42	0.33	0.87	0.54	0.41	0.16
$\eta^t_{ABE}(y_j)$	0.8	0.58	0.48	0.33	0.87	0.54	0.37	0.16
$\eta^t_{ABF}(y_j)$	0.53	0.62	0.7	0.33	0.87	0.56	0.48	0.16

Bu veriler ışığında C, D, E ve F oyuncularının A ve B oyuncuları ile aralarındaki benzerlik uyumları ve tamamlayıcı uyumlar aritmetik orta, geometrik orta ve harmonik orta aggregation operatörleri ile hesaplanarak aşağıdaki tabloda sıralı ikililer halinde belirtilmiştir.

Oyuncular	C	D	E	F
$[\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_\Sigma$	$(0.48, 0.34)$	$(0.46, 0.357)$	$(0.485, 0.441)$	$(0.558, 0.406)$
$[\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_G$	$(0.38, 0.288)$	$(0.328, 0.311)$	$(0.38, 0.38)$	$(0.473, 0.304)$
$[\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_H$	$(0.916, 0.34)$	$(0.911, 0.377)$	$(0.93, 0.399)$	$(0.904, 0.416)$

Dolayısıyla, yukarıdaki tablo kullanılarak C, D, E ve F oyuncularının A ve B oyuncularına uyumları aşağıdaki tablodaki gibi elde edilir.

Oyuncular	C	D	E	F
$\upsilon([\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_\Sigma)_G$	0.403	0.405	0.462	0.488
$\upsilon([\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_G)_G$	0.33	0.319	0.38	0.379
$\upsilon([\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_G)_H$	0.327	0.32	0.38	0.37

Bu durumda dört farklı oyuncunun A ve B oyuncularına uyumlarını sıralayacak olursak kulübün A ve B oyuncularının yanına alabilecekleri en uyumlu oyuncuda belirlenmiş olur. C, D, E ve F oyuncularının A ve B oyuncularına ait uyumlarının sıralaması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Uyum Türü	Sıralama
$\upsilon([\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_\Sigma)_G$	$F > E > D > C$
$\upsilon([\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_G)_G$	$E > F > D > C$
$\upsilon([\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_G)_H$	$E > F > C > D$

Sonuç olarak yukarıdaki tablodan da görüleceği üzere hangi aggregation operatörü kullanırsa kullanılsın A ve B oyuncusuna en uyumsuz oyuncu C ve sonra da D dir. Diğer taraftan geometrik orta ve harmonik ortanın kullanıldığı uyum hesabında ve iki hesaplamada da geometrik ortanın kullanıldığı uyum hesabında en uyumlu oyuncu E iken aritmerik orta ve geometrik ortanın kullanıldığı uyum hesabında en uyumlu oyuncu F çıkmıştır.

Fakat bu sıralama takımın E oyuncusunu seçmeleri gerektiği anlamına gelmez. Eğer klüp maddi anlamda tasarruf yapmak istiyorsa daha farklı bir yol izleyebilir. Bunun içinde işin içine oyuncuların transfer bedellerini dahil etmek gerekir. Örneğin; birim başına takımın sahip olacağı uyum oranı heasplanabilir.

$$S = \frac{\text{Uyum Oranı}}{\text{Transfer Bedeli}}$$

gibi bir oranı kullanacak olursak;

Uyum Türü	Birim fiyat başına kazanılan uyum
$\upsilon([\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_\Sigma)_G$	$C(0.0223)$, $D(0.0405)$, $E(0.0385)$, $F(0.0813)$
$\upsilon([\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_G)_G$	$C(0.0183)$, $D(0.0319)$, $E(0.0316)$, $F(0.0631)$
$\upsilon([\kappa(\eta^b), \chi(\eta^t)]_G)_H$	$C(0.181)$, $D(0.032)$, $E(0.0316)$, $F(0.0616)$

olup yukarıdaki tablodan da görüleceği üzere birim fiyat başına en fazla uyum sağlayan oyuncu tüm durumlarda da F olmuştur.

Bulanık Kümelerde Ağırlıklı Uyum

Bu yöntemde, ağırlık değerleri bulanık kümede $\mathfrak{U}$ nun elemanlarına verilir. Eğer $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ise her bir x_i nin ağırlık değeri ω_i ise $0 < \omega_i < 1$ ve $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ dir.

Örnek 4.42. Bir futbol takımında orta saha oyuncularının hepsinde olması istenen özellikler ile birbirini tamamlaması beklenen özellikler Örnek 4.41. deki beceriler olsun. Bu futbol takımının çalıştırıcısının elinde yine Örnek 4.41. deki A, B ve C oyuncuları bulunsun.

Çalıştırıcı üçlü orta saha oynatırken oyunculardan birini defansif orta saha, birinin iki yönlü orta saha ve sonuncusunun ise ofansif orta saha olarak oynamasını istiyor. Bu sebeple her bir pozisyon için o pozisyondan beklentilerini anlatabilmek adına oyuncu özelliklerine ağırlık atıyor. $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ için defansif orta sahaya oyuncusuna ait benzerlik uyumuna tabi olan ve tamamlayıcı uyuma tabi olan ağırlık değerleri sırasıyla ω_j^d ve ϖ_j^d, iki yönlü orta sahaya oyuncusuna ait benzerlik uyumuna tabi olan ve tamamlayıcı uyuma tabi olan ağırlık değerleri sırasıyla ω_j^o ve ϖ_j^o ve ofansif orta sahaya oyuncusuna ait benzerlik uyumuna tabi olan ve tamamlayıcı uyuma tabi olan ağırlık değerleri sırasıyla ω_j^h ve ϖ_j^h olmak üzere bu ağırlık değeri aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

ω_j	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
ω^d	0.1	0.075	0.075	0.15	0.15	0.2	0.15	0.1
ω^o	0.1	0.1	0.1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.1
ω^h	0.2	0.075	0.0.75	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1

ϖ_j	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5	ϖ_6	ϖ_7	ϖ_8
ϖ^d	0.075	0.15	0.15	0.075	0.2	0.15	0.15	0.05
ϖ^o	0.15	0.15	0.1	0.15	0.15	0.1	0.1	0.1
ϖ^h	0.2	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1	0.05	0.25

Bu durumda A oyuncusunun defansif orta saha, B oyuncusunun iki yönlü orta saha ve C oyuncusunun ofansif orta saha oynadığı senaryoda oyunculara ait ağırlıklı bulanık kümeler,

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^d$	0.01	0.02	0.034	0.042	0.021	0.184	0.129	0.074
$B\omega^o$	0.006	0.022	0.054	0.036	0.042	0.135	0.12	0.078
$C\omega^h$	0.024	0.025	0.0315	0.036	0.027	0.14	0.089	0.072

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^d$	0.037	0.0345	0.0375	0.025	0.174	0.0345	0.012	0.008
$B\varpi^o$	0.08	0.066	0.042	0.027	0.058	0.054	0.012	0.016
$C\varpi^h$	0.108	0.009	0.032	0.06	0.038	0.028	0.012	0.025

A oyuncusunun defansif orta saha, B oyuncusunun ofansif orta saha ve C oyuncusunun iki yönlü orta saha oynadığında oynadığı senaryoda oyunculara ait ağırlıklı bulanık kümeler,

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^d$	0.01	0.02	0.034	0.042	0.021	0.184	0.129	0.074
$B\omega^h$	0.012	0.0165	0.04	0.036	0.042	0.135	0.08	0.078
$C\omega^o$	0.012	0.034	0.042	0.036	0.027	0.14	0.133	0.072

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^d$	0.037	0.0345	0.0375	0.025	0.174	0.0345	0.012	0.008
$B\varpi^h$	0.106	0.022	0.042	0.036	0.019	0.054	0.006	0.04
$C\varpi^o$	0.08	0.027	0.032	0.045	0.114	0.028	0.024	0.01

A oyuncusunun ofansif orta saha, B oyuncusunun defansif orta saha ve C oyuncusunun iki yönlü orta saha oynadığında oynadığı senaryoda oyunculara ait ağırlıklı bulanık kümeler,

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^h$	0.02	0.02	0.034	0.042	0.021	0.138	0.086	0.074
$B\omega^d$	0.006	0.0165	0.04	0.036	0.042	0.18	0.12	0.078
$C\omega^o$	0.012	0.034	0.042	0.036	0.027	0.14	0.133	0.072

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^h$	0.082	0.0115	0.025	0.066	0.0435	0.023	0.04	0.04
$B\varpi^d$	0.04	0.066	0.063	0.0135	0.078	0.081	0.008	0.008
$C\varpi^o$	0.08	0.027	0.032	0.045	0.114	0.028	0.024	0.01

A oyuncusunun iki yönlü orta saha, B oyuncusunun defansif orta saha ve C oyuncusunun ofansif orta saha oynadığında oynadığı senaryoda oyunculara ait ağırlıklı bulanık kümeler,

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^o$	0.01	0.027	0.045	0.042	0.021	0.138	0.129	0.074
$B\omega^d$	0.006	0.0165	0.04	0.036	0.042	0.18	0.12	0.078
$C\omega^h$	0.024	0.025	0.0315	0.036	0.027	0.14	0.089	0.072

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^o$	0.0615	0.0345	0.025	0.0495	0.13	0.023	0.008	0.016
$B\varpi^d$	0.04	0.066	0.063	0.0135	0.078	0.081	0.008	0.008
$C\varpi^h$	0.108	0.009	0.032	0.06	0.038	0.028	0.012	0.025

A oyuncusunun ofansif orta saha, B oyuncusunun iki yönlü orta saha ve C oyuncusunun defansif orta saha oynadığında oynadığı senaryoda oyunculara ait ağırlıklı bulanık kümeler,

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^h$	0.02	0.02	0.034	0.042	0.021	0.138	0.086	0.074
$B\omega^o$	0.006	0.022	0.054	0.036	0.042	0.135	0.12	0.078
$C\omega^d$	0.012	0.025	0.0315	0.036	0.027	0.186	0.133	0.072

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^h$	0.082	0.0115	0.025	0.066	0.0435	0.023	0.04	0.04
$B\varpi^o$	0.08	0.066	0.042	0.027	0.058	0.054	0.012	0.016
$C\varpi^d$	0.04	0.027	0.048	0.0225	0.152	0.042	0.036	0.005

A oyuncusunun iki yönlü orta saha, B oyuncusunun ofansif orta saha ve C oyuncusunun defansif orta saha oynadığında oynadığı senaryoda oyunculara ait ağırlıklı bulanık kümeler,

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^o$	0.01	0.027	0.045	0.042	0.021	0.138	0.129	0.074
$B\omega^h$	0.012	0.0165	0.04	0.036	0.042	0.135	0.08	0.078
$C\omega^d$	0.012	0.025	0.0315	0.036	0.027	0.186	0.133	0.072

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^o$	0.0615	0.0345	0.025	0.0495	0.13	0.023	0.008	0.016
$B\varpi^h$	0.082	0.0115	0.025	0.066	0.0435	0.023	0.04	0.04
$C\varpi^d$	0.04	0.027	0.048	0.0225	0.152	0.042	0.036	0.005

olmak üzere yukarıda verilmiş olan her duruma ait benzerlik bulanık uyum kümeleri ve tamamlayıcı bulanık uyum kümeleri aşağıda verilmiştir.

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^d B\omega^o C\omega^h$	0.992	0.995	0.9775	0.994	0.979	0.951	0.96	0.994

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^d B\varpi^o C\varpi^h$	0.108	0.066	0.042	0.06	0.174	0.054	0.012	0.025

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^d B\omega^h C\omega^o$	0.998	0.9825	0.992	0.994	0.979	0.951	0.947	0.994

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^d B\varpi^h C\varpi^o$	0.106	0.0345	0.042	0.045	0.174	0.054	0.024	0.04

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^h B\omega^d C\omega^o$	0.986	0.9825	0.992	0.994	0.979	0.958	0.953	0.994

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^h B\varpi^d C\varpi^o$	0.082	0.066	0.063	0.066	0.114	0.081	0.04	0.04

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^o B\omega^d C\omega^h$	0.982	0.9895	0.9865	0.994	0.979	0.958	0.96	0.994

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^o B\varpi^d C\varpi^h$	0.108	0.066	0.063	0.0495	0.078	0.081	0.012	0.025

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^h B\omega^o C\omega^d$	0.986	0.995	0.9775	0.994	0.979	0.949	0.953	0.994

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^h B\varpi^o C\varpi^d$	0.082	0.066	0.048	0.066	0.152	0.054	0.04	0.04

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$A\omega^o B\omega^h C\omega^d$	0.998	0.9895	0.9875	0.994	0.979	0.949	0.947	0.994

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
$A\varpi^o B\varpi^h C\varpi^d$	0.082	0.0345	0.048	0.066	0.152	0.042	0.04	0.04

Bu durumda kurulan herbir orta saha üçlüsü için benzerlik uyumları ve tamamlayıcı uyumlar geometrik orta operatörü kullanılarak aşağıdaki gibidir.

	$A_dB_oC_h$	$A_dB_hC_o$	$A_hB_dC_o$	$A_oB_dC_h$	$A_hB_oC_d$	$A_oB_hC_d$
Benzerlik Uyumu	0.9802	0.9795	0.9796	0.9802	0.9782	0.9795
Tamamlayıcı Uyum	0.0516	0.053	0.0653	0.0504	0.0622	0.0556

Bu durumda her bir orta saha üçlüsü için geometrik orta yardımı ile uyumlar;

	$A_dB_oC_h$	$A_dB_hC_o$	$A_hB_dC_o$	$A_oB_dC_h$	$A_hB_oC_d$	$A_oB_hC_d$
Uyum	0.2248	0.2278	0.2529	0.2222	0.2466	0.2333

olarak elde edilir. Dolayısıyla, uyum sıralaması

$$A_hB_dC_o > A_hB_oC_d > A_oB_hC_d > A_dB_hC_o > A_dB_oC_h > A_oB_dC_h$$

olur. Bu ise bize A, B ve C oyuncularının en uyumlu olduğu durumun A ofansif orta saha, B defansif orta saha ve C iki yönlü orta saha olarak oynarken olduğunu anlatır. En uyumsuz oldukları durum ise genelde C nin ofansif orta saha oynadığı durumlardır.

4.5.3. Bulanık esnek kümelerde uyum

Tanım 4.43. $\mathfrak{U}$ alternatiflerin kümesi, E parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. Bu durumda $f : \mathfrak{U} \to \widetilde{F}(A)$ olmak üzere

$$(f, \mathfrak{U}) = \{(x, [f(x), \eta(f(x))]) \mid x \in \mathfrak{U}, f(x) \in A, \eta \in \widetilde{F}(A)\}$$

kümesine bulanık ters esnek küme denir. Bulanık ters esnek kümelerin kümesi $\widetilde{F}\mathfrak{S}(E)$ ile gösterilir.

Tanım 4.44. $\mathfrak{U}$ alternatiflerin kümesi, E parametrelerin kümesi, $A \subseteq E$ ve $(f, \mathfrak{U})$, A üzerinde bir bulanık esnek küme olsun. Bu durumda her $x \in \mathfrak{U}$ için $a = 1- \mid max\{\eta(f(x))\} - min\{\eta(f(x))\} \mid$ olmak üzere

$$(f, \mathfrak{U})_{ben} = \{(x, (f(x), a)) \mid x \in \mathfrak{U}, f(x) \in A\}$$

kümesine $(f, \mathfrak{U})$ bulanık esnek kümesinin benzerlik bulanık ters esnek uyum kümesi denir.

Tanım 4.45. $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ n-elemanlı alternatiflerin kümesi, E parametrelerin kümesi, $A \subseteq E$, α bir aggregation operatörü ve $(f, \mathfrak{U})$ ait benzerlik bulanık ters esnek uyum kümesi $(f, \mathfrak{U})_{ben}$ olsun. Bu durumda $\kappa_{ben} : \widetilde{F}\mathfrak{S}(E) \to [0, 1]$ olmak üzere;

$$\kappa_{ben}[(f, \mathfrak{U})] = \alpha[\eta(f(x_1)), \eta(f(x_2)), ..., \eta(f(x_n))]$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme benzerlik bulanık esnek uyum dönüşümü denir.

Tanım 4.46. $\mathfrak{U}$ alternatiflerin kümesi, E parametrelerin kümesi, $A \subseteq E$ ve $(f, \mathfrak{U})$, A üzerinde bir bulanık esnek küme olsun. Bu durumda her $x \in \mathfrak{U}$ için $b = max\{\eta(f(x))\}$ olmak üzere

$$(f, \mathfrak{U})_{tam} = \{(x, (f(x), b)) \mid x \in \mathfrak{U}, f(x) \in A\}$$

kümesine $(f, \mathfrak{U})$ bulanık esnek kümesinin tamamlayıcı bulanık ters esnek uyum kümesi denir.

Tanım 4.47. $\mathfrak{U} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ n-elemanlı alternatiflerin kümesi, E parametrelerin kümesi, $A \subseteq E$, α bir aggregation operatörü ve $(f, \mathfrak{U})$ ait tamamlayıcı bulanık ters esnek uyum kümesi $(f, \mathfrak{U})_{tam}$ olsun. Bu durumda $\chi_{tam} : \widetilde{F}\mathfrak{S}(E) \to [0, 1]$ olmak üzere;

$$\chi_{tam}[(f, \mathfrak{U})] = \alpha[\zeta(f(x_1)), \zeta(f(x_2)), ..., \zeta(f(x_n))]$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme tamamlayıcı bulanık esnek uyum dönüşümü denir.

Örnek 4.48. Eğer Örnek 4.41. deki problemi olduğu gibi uyarlayacak olursak, $u_1 = A$, $u_2 = B$, $u_3 = C$, $u_4 = D$, $u_5 = E$ ve $u_6 = F$ ve parametreler aynı kalmak üzere orta saha ekiplerinin benzerlik bulanık ters esnek uyum kümeleri sırasıyla

$(f_1, \{u_1, u_2, u_3\})$ için	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
u_1	0.1	0.27	0.45	0.28	0.14	0.92	0.86	0.74
u_2	0.06	0.22	0.54	0.24	0.28	0.9	0.8	0.78
u_3	0.54	0.18	0.32	0.3	0.76	0.28	0.24	0.1

$(f_2, \{u_1, u_2, u_4\})$ için	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
u_1	0.1	0.27	0.45	0.28	0.14	0.92	0.86	0.74
u_2	0.06	0.22	0.54	0.24	0.28	0.9	0.8	0.78
u_4	0.42	0.4	0.4	0.26	0.48	0.43	0.41	0.06

$(f_3, \{u_1, u_2, u_5\})$ için	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
u_1	0.1	0.27	0.45	0.28	0.14	0.92	0.86	0.74
u_2	0.06	0.22	0.54	0.24	0.28	0.9	0.8	0.78
u_5	0.1	0.28	0.51	0.21	0.24	0.9	0.83	0.81

$(f_4, \{u_1, u_2, u_35\})$ için	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
u_1	0.1	0.27	0.45	0.28	0.14	0.92	0.86	0.74
u_2	0.06	0.22	0.54	0.24	0.28	0.9	0.8	0.78
u_3	0.5	0.23	0.60	0.17	0.31	0.95	0.88	0.83

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan tamamlayıcı bulanık ters esnek uyum kümeleri ise

$(g_1, \{u_1, u_2, u_3\})$ için	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
u_1	0.41	0.23	0.25	0.33	0.87	0.23	0.08	0.16
u_2	0.53	0.44	0.42	0.18	0.39	0.54	0.12	0.05
u_3	0.12	0.34	0.42	0.24	0.18	0.93	0.89	0.72

$(g_2, \{u_1, u_2, u_4\})$ için	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
u_1	0.41	0.23	0.25	0.33	0.87	0.23	0.08	0.16
u_2	0.53	0.44	0.42	0.18	0.39	0.54	0.12	0.05
u_4	0.12	0.34	0.42	0.24	0.18	0.93	0.89	0.72

$(g_3, \{u_1, u_2, u_5\})$ için	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
u_1	0.41	0.23	0.25	0.33	0.87	0.23	0.08	0.16
u_2	0.53	0.44	0.42	0.18	0.39	0.54	0.12	0.05
u_5	0.8	0.58	0.48	0.27	0.50	0.44	0.37	0.09

$(g_4, \{u_1, u_2, u_6\})$ için	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
u_1	0.41	0.23	0.25	0.33	0.87	0.23	0.08	0.16
u_2	0.53	0.44	0.42	0.18	0.39	0.54	0.12	0.05
u_6	0.4	0.62	0.7	0.22	0.24	0.56	0.48	0.03

olarak elde edilir. Bu durumda, söz konusu ekiplerin benzerlik bulanık ters esnek uyumları ile tamamlayıcı bulanık ters esnek harmonik orta operatörünü kullanarak uyumları

$\mathfrak{U}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_1, u_2, u_4\}$	$\{u_1, u_2, u_5\}$	$\{u_1, u_2, u_6\}$
$[\kappa_{ben}[(f, \mathfrak{U})], \chi_{tam}[(f, \mathfrak{U})]$	$(0.916, 0.34)$	$(0.911, 0.377)$	$(0.93, 0.399)$	$(0.904, 0.416)$

Tablodan görüleceği üzere bulanık kümeler üzerindeki benzerlik uyumu ve tamamlayıcı uyum değerleri ile aynı değerler elde edilmiştir. Bunun sebebi ise ne kadar problem daha farklı bir ortamda çözülüyormuş gibi görünsede temel iki yöntemde aynıdır. Bu iki yöntem sadece uygulamada farklılıklar gösterir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada esnek kümeler üzerinde daha önce tanımlardan farklı olarak esnek kümeler üzerinde parametrelerinde kullanılmasıyla yeni bir benzerlik ölçüsü tanımlanmıştır. Daha sonra ters pozitif esnek küme tanımı yardımı ile esnek kümeler tarafından üç farklı türde bulanık küme üretilmiştir. Tanımlanan esnek benzerlik ölçüsünün tutarlılığını ve yetkinliğini analiz etmek adına bulanık kümeler ve esnek kümeler üzerinde diğer benzerlik ölçüleri ile karşılaştırılmıştır. Pawlak yaklaşım uzaylarında denklik kümesi kavramı tanımlanıp, bu kavram yardımı ile kaba kümeler farklı bir şekilde karakterize edilmiştir. Yine denklik kümesi kavramı yardımı ile denklik değeri kavramı tanıtılmış ve bu kavram yardımı ile kaba kümeler üzerinde büyük bir eksiklik olarak görülen benzerlik ölçüsü tanımlanmıştır. Ayrıca kaba kümeler üzerindeki benzerlik ölçüsü yardımı ile elamanları ilişkiler ile sınıflandırılabilen kümeler üzerinde farklı meslek gruplarından oluşan ekipler birbirleri ile kıyaslanabilmiştir. Son olarak uyum kavramı bulanık kümeler yardımı ile modellenmeye çalışılmış ve bu modelleme bulanık esnek kümelere aktarılmıştır.

Bu çalışmanın tamamlanmasının ardından, çalışmada yer verilmemiş bir çok problem söz konusudur. Denklik kümeleri ile küme işlemleri arasındaki ilişkiler bu problemlerden biridir. Bir diğer problem esnek kümeler üzerinde tanımlanmış benzerlik ölçü kullanılırken aynı anda tüm ürünler birlikte karşılaştırılmıştır. Dolayısıyla, benzerlik ölçüsü ile ürünlerin tek tek karşılaştırılması mümkündür. Ayrıca bu çalışmada ters pozitif esnek kümeler yardımı ile bulanık kümeler üretilmiştir. Peki hesitant bulanık kümeler, aralık değerli bulanık kümeler, picture bulanık kümeler benzer şekilde oluşturulabilir mi? Yoksa bu çalışmada verilen notasyonlar yeterli midir? Gelecekte üzerine gidilmesi gerek bir diğer çok önemli problem uyum kavramının bulanık kümeler ve bulanık esnek kümeler dışında başka hangi belirsizlik modelleme yöntemlerine tanımlanabileceği ve kullanabileceğidir. Bu çalışmada bulanık kümeler üzerinde tanımlanmış uyum kavramı yukarıdaki bölümdeki gibi ekibe alınacak yeni eleman ya da elemanların uyumluluk açısından nasıl seçileceği hakkında yardımcı olabilmesi dışında başka problemlerde de kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1]. Acar, U., Koyuncu, F., & Tanay, B. (2010). Soft sets and soft rings, Computers and Mathematics with Applications, 59, 3458-3463.

[2]. Aktaş, H., & Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups, Information Sciences, 177, 2726-2735.

[3]. Aktaş, H., & Çağman, N. (2009). Erratum to "Soft sets and soft groups", Information Sciences, 179, 338. [Information Sciences 177, 2726-2735 (2007)]

[4]. Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min. W. K., & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 57, 1547-1553.

[5]. Ashraf, S., Abdullah, S., & Khan, S. (2020). Fuzzy decision support modeling for internet finance soft power evaluation based on sine trigonometric Pythagorean fuzzy information, Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 12(2), 3101-3119.

[6]. Atagün, A. O., & Aygün, E. (2016). Groups of soft sets, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 30(2), 729-733.

[7]. Atagün, A. O., Kamacı, H., & Oktay, O. (2018). Reduced soft matrices and generalized products with applications in decision making, Neural Computing and Applications, 29, 445-456.

[8]. Atagün, A. O., & Kamacı, H. (2023). Strait fuzzy sets, strait fuzzy rough sets and their similarity measures-based decision making systems, International Journal of Systems Science, 54(12), 2519-2535.

[9]. Atagün, A. O., & Kamacı, H. (2023), Strait soft sets and strait rough sets with applications in decision making, Soft Computing, 27(20), 14585-14599.

[10]. Aygün, E., & Kamacı, H. (2019). Some generalized operations in soft set theory and their role in similarity and decision making, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 36, 6537-6547.

[11]. Aygün, E., & Kamacı, H. (2021). Some new algebraic structures of soft sets, Soft Computing, 25, 8609-8626.

[12]. Braun-Blanquet, J. (1928). Pflanzensoziologie, Springer.

[13]. Bonikowaski, Z. (1995). Algebraic structures of rough sets, In: Ziarko, W. P. (ed.) Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery, Springer, Berlin, 242-247.

[14]. Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010). Soft matrix theory and its decision making, Computers and Mathematics with Applications, 59, 3308-3314.

[15]. Çağman, N., & Enginoğlu, S.(2010). Soft set theory and uni-int decision making, European Journal of Operational Research, 207, 848-855.

[16]. Calvo, T., Kolesarova, A., Komornikova, M., & Mesiar, R. (2002). Aggregation operators: Properties, classes and contruction methods, Aggregation operators. New trends and applications, www.researchgate.net/publications/285874074 .

[17]. Chen, S. M., Yeh, S. M., & Hsiao, P. H. (1995). A comparison of similarity measures of fuzzy values, Fuzzy Sets and Systems, 72(1), 79-89.

[18]. De, S. K., Biswas, P., & Roy, A. R. (2001). An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis, Fuzzy Sets and Systems, 117, 209-213.

[19]. Deza, M. M. & Deza, E. (2012). Encyclopedia of distances, Springer.

[20]. Dice, L. R. (1945). Measures of the amount of ecologic association between species, Ecology, 26(3), 297-302.

[21]. Fan, J., & Xie, W. (1999). Some notes on similarity measure and proximity measure, Fuzzy Sets and Systems, 101(3), 403-412.

[22]. Feng, F., Jun. Y. B., & Zhao, X. (2008). Soft semirings, Computers and Mathematics with Applications, 56, 2621-2628.

[23]. Ghosh, S. K., Ghosh, A., & Bhattcharyya, S. (2022). Recognition of cancer mediating biomarkers using rough approximations enabled intuitionistic fuzzy soft sets based similarity measure, Applied Soft Computing, 124(12), 109052.

[24]. Gong, K., Xiao, Z., & Zhang, X. (2010). The bijective soft set with its operations, Computers and Mathematics with Applications, 60, 2270-2278.

[25]. Grzegorzewski, P. (2004). Distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric, Fuzzy Sets and Systems, 148, 319-328.

[26]. Iwinski, T. (1987). Algebraic approach to rough set, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics, 35, 673-683.

[27]. Jaccard, P. (1901). Etude comparative de la distribution florale dans une portion des alpes et du jura, Bulletin de la Societe Vaundoise des Sciences Naturelles, 37, 547-549.

[28]. Jun, Y. B. (2008). Soft BCK/BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 56, 1408-1413.

[29]. Jun, Y. B., & Park, C. H. (2008). Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras, Information Sciences, 178, 2466-2475.

[30]. Jun, Y. B., Lee, K. J., & Zhan, J. (2009). Soft p-ideals of soft BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 58, 2060-2068.

[31]. Kamacı, H. (2019). Similarity measure for soft matrices and its applications, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 36, 3061-3072.

[32]. Kamacı, H., Saltık, K., Akız, H. F., & Atagün, A. O. (2018). Cardinality inverse soft matrix theory and its applications in multicriteria group decision making, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 34, 2031-2049.

[33]. Kazancı, O., Yılmaz, Ş., & Yamak, S. (2010). Soft sets and soft BCH-algebras, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39, 205-217.

[34]. Khalil, A. M., & Hassan, N. (2019). Inverse fuzzy soft set and its application in decision making, International Journal of Information and Decision Sciences, 11(1), 73-92.

[35]. Kharal, A. (2010). Distance and similarity measures for soft sets, New Mathematics and Natural Computation, 6(3), 321-334.

[36]. Koczy, L. T., & Domonkos, T. (2000). Fuzzy rendszerek, Budapest-Hungary: Typotex.

[37]. Lenarčič, A. (2017). Rough sets, similarity, and optimal approximations, Ph. D. Thesis

[38]. Liu, P., Munir, M., Mahmood, T., & Ullah, K. (2019). Some similarity measures for interval-valued picture fuzzy sets and their applications in decision making, Information, 10(12), 369.

[39]. Liu, X. (1992). Entropy, Distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations, Fuzzy Sets and Systems, 52(3), 305-318.

[40]. Mahmood, T., & Ur Rehman, U. (2021). A novel approach towards bipolar complex fuzzy sets and their applications in generalized similarity measures, International Journal of Intelligent Systems, 37(1), 535-567.

[41]. Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2003). Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45, 555-562.

[42]. Maji, P. K., Roy, A. R., & Biswas, R. (2002). An application of soft sets in a decision making problem, Computers and Mathematics with Applications, 44, 1077-1083.

[43]. Majumdar, P., & Samanta, S. K. (2008). Similarity measure of soft sets, New Mathematics and Natural Computation, 4, 1-12.

[44]. Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results, Computers and Mathematics with Applications, 37, 19-31.

[45]. Pappis, C. P., & Karacapilidis, N. I. (1993). A comparative assessment of measures of similarity of fuzzy values, Fuzzy Sets and Systems, 56(2), 171-174.

[46]. Pawlak, Z. (1981). Classification of Objects by means of Attributes, Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, Report 429.

[47]. Pawlak, Z. (1982). Rough sets, International Journal of Computer and Information Sciences, 11, 341-356.

[48]. Pawlak, Z. (2002). Rough sets and intelligent data analysis, Information Sciences, 147, 1-12.

[49]. Pawlak, Z., & Skowron A. (2007). Rudiments of rough sets, Information Sciences, 177, 3-27.

[50]. Pawlak, Z., & Skowron A. (2007). Rough sets and Boolean reasoning, Information Sciences, 177, 41-73.

[51]. Pedrycz, W. (1990). Fuzzy sets in pattern recognition; methodology and methods, Pattern Recognition, 23, 121-146.

[52]. Pedrycz, W., & Gomide, F. (2007). Fuzzy systems engineering; toward human-centric computing, New York, USA: Wiley-IEEE Press.

[53]. Pei, D., & Miao, D. (2005). From sets to information systems, In: Hu X, Liu Q, Skowron A, Lin T Y, Yager R R, Zhang B.(Eds.). IEEE International Conference on Granular Computing; Beijing, China, (pp. 617-621).

[54]. Petchimuthu, S., Garg, H., Kamacı, H., & Atagün, A. O. (2020). The mean operators and generalized products of fuzzy soft matrices and their applications in MCGDM, Computational and Applied Mathematics, 39(2), 1-32.

[55]. Pomykala, J., & Pomykala, J. A. (1998). The stone algebra of rough sets, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics, 36, 495-508.

[56]. Salton, G., & McGrill, M. J. (1983). Introduction to Modern Information Retrieval, New York, USA:McGraw Hill Book Company.

[57]. Sezgin, A., Atagün, A. O., & Aygün, E. (2011). A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings, Filomat, 25, 53-68.

[58]. Sezgin, A., & Atagün, A. O. (2011) On operations of soft sets, Computers and Mathematics with Applications, 61, 1457-1467.

[59]. Sezgin Sezer, A., Çağman, N., Atagün, A. O., Ali, M. I., & Türkmen, E. (2015). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-Ideals; a New Application on Semigroup Theory I., Filomat, 29, 917-946.

[60]. Szmidt, E., & Kacprzyk, J. (2004). A similarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its application in supporting medical diagnostic reasoning. In: 7th International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing, Springer, Zakopane, Poland, (pp. 388-393).

[61]. Trabia, M. B., Kaseko, M. S., & Ande, M. (1999). A two-stage fuzzy logic controller for traffic signals; Transportation Research Part C., Emerging Technologies, 7(6), 353-367.

[62]. Tversky, A. (1977). Features of similarity, Psychological Reviews, 84(4), 327-352.

[63]. Ullah, K., Mahmood, T., & Jan, N (2018). Similarity measures for T-spherical fuzzy sets with applications in pattern recognition, Symmetry, 10(6), 193.

[64]. Wang, P. Z. (1982). Theory of Fuzzy Sets and their Applications, Shanghai, China: Shanghai Science and Technology Publishing House.

[65]. Wang, W. J. (1997). New similarity measures on fuzzy sets and on elements, Fuzzy Sets and Systems, 85(3), 305-309.

[66]. Wei, G., Wang, J., Lu, M., Wu, J., & Wei, C. (2019). Similarity measures of spherical fuzzy sets based on cosine function and their applications, In: IEEE Access 7, (pp. 159069-159080).

[67]. Xie, X. L., & Beni, G. (1991). A validity measure for fuzzy clustering, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 13(8), 841-847.

[68]. Yao, B. X., Liu, J. L., & Yan, R. X. (2008). Fuzzy soft set and soft fuzzy set, IEEE Fourth International Conference on Natural Computation, 252-255.

[69]. Yang, W. (2013). New Similarity Measures for Soft Sets and Their Application, Fuzzy Information and Engineering, 5(1), 19-25.

[70]. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, Information and Control, 8(3), 338-353.

[71]. Zhan, J., Xu, W. (2018)ç Two types of coverings based multi-granulation rough fuzzy sets and applications to decision making, Artificial Intelligence Review, 53, 167-198.

[72]. Zhang, L., & Zhan, J. (2018). Fuzzy soft beta-covering based fuzzy rough sets and corresponding decision-making applications, International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 10, 1487-1502.

[73]. Zhang, L., Zhan, J., & Alcantud, J. C. (2018). Novel classes of fuzzy soft beta-coverings-based fuzzy rough sets with applications to multi-criteria fuzzy group decision making, Soft Computing, 23, 5327-5351

[74]. Zwick, R., Carlstein, E., & Budesco, D. V. (1987). Measures of similarity amongst fuzzy concepts; A comparative analysis, International Journal of Approximate Reasoning, 1(2), 221-242.

EKLER

Ek 1. Sempozyum Katılım Belgesi

CERTIFICATE
OF PARTICIPATION

This certificate is proudly presented to

Savcı Rahman ARGÜN

of participation in oral and technical presentation, recognition and appreciation of research contributions to
AHI EVRAN 2nd International Conference on Scientific Research held on October 21-23, 2022 / Kirsehir, Türkiye
Kirsehir Ahi Evran University
with the paper entitled

SOFT SETS, INTIUITIONISTIC FUZZY SETS AND SIMILARITY MEASURES

Prof. Dr. Ahmet KAZANKAYA
Organizing Committee Chairman

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	Savcı Rahman ARGÜN
Uyruğu :	T.C.
Orcid Numarası:	0000-0002-7319-7866

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Sakarya Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2015
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Mezuniyet Yılı	2019
Doktora	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Esntitü	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Mezuniyet Yılı	2025

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Argün, S. R., & Atagün, A. O. (2022). Esnek Kümeler, Sezgisel Bulanık Kümeler ve Benzerlik Ölçüleri [Conference presentation]. Ahi Evran 2nd International Conference on Scientific Research . Kırşehir, Türkiye. 425-426.