



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



TOTAL MORREY-GULİYEV UZAYLARI VE BU UZAYLARDA BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Hamit Çağlar ÇALIŞGAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR

2026



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



TOTAL MORREY-GULİYEV UZAYLARI VE BU UZAYLARDA BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Hamit Çağlar ÇALIŞGAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

II.DANIŞMAN

Dr. Süleyman ÇELİK

KIRŞEHİR

2026

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

13/07/2026
Hamit Çağlar ÇALIŞGAN

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	I
TEŞEKKÜR	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	V
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
2.1. Lebesgue Uzayları	3
2.1.1. $L^p(\mathbb{R}^n)$ Uzayı	4
2.1.2. (p, q) Tipli Operatör	9
2.1.3. Bazı İntegral Operatörleri	11
2.2. Morrey Uzayları	12
2.2.1. Modified Morrey Uzayları	13
3. MATERYAL VE METOT	17
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	19
4.1. Total Morrey-Guliyev Uzayları ve Özellikleri	19
4.1.1. Total Morrey-Guliyev Uzaylarında Maksimal Operatör	27
4.1.2. Total Morrey-Guliyev Uzaylarında Kesirli Maksimal Operatör	29
5. SONUÇLAR	39
KAYNAKLAR	41
EKLER	45
EK-1. Konferans Katılım Belgesi	45
EK-2. Konferans Katılım Belgesi	46
ÖZGEÇMİŞ	47

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında emeği geçen, kıymetli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan danışman hocalarım Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV ve Dr. Süleyman ÇELİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Aynı zamanda, bu sürecin her adımında yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Ali AKBULUT'a ve sonsuz fedakârlıklarıyla her daim yanımda olan aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Temmuz, 2026

Hamit ađlar ÇALIŞGAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOTAL MORREY-GULİYEV UZAYLARI VE BU UZAYLARDA BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Hamit Çağlar ÇALIŞGAN

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Yıl: 2026, Sayfa: 47

Jüri: Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Prof. Dr. Ali AKBULUT

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI

İkinci Danışman: Dr. Süleyman ÇELİK

Bu yüksek lisans tezinde harmonik analizde, klasik Morrey, modified Morrey ve Total Morrey-Guliyev uzaylarının tanımları, bazı temel özellikleri ve Total Morrey-Guliyev uzaylarında bazı gömme teoremleri, bu uzaylarda integral operatörlerinden maksimal operatör ve kesirli maksimal operatörlerinin sınırlılıkları ile ilgili bazı sonuçlara yer verilmiştir. İlk bölümde, araştırmanın önemi, kapsamı ve amacı ifade edilmiş, çalışmamızın bilime sağladığı katkılar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamız ile ilgili bazı temel tanımlara ve harmonik analizdeki bazı fonksiyon uzaylarının tanım ve özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, tez konusu ile ilgili materyal ve metotlar hakkında kısa bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, Total Morrey-Guliyev uzaylarının tanım ve özellikleri ve bu uzaylarda maksimal, kesirli maksimal operatörlerinin sınırlılıkları ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Son bölümde ise tez konusunun araştırılmasındaki amaç ve hedefi hakkında kısaca bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Morrey uzayı, Total Morrey-Guliyev uzayı, Maksimal operatör, Kesirli maksimal operatör.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

TOTAL MORREY-GULIYEV SPACES AND THE BOUNDEDNESS OF SOME INTEGRAL OPERATORS ON THESE SPACES

Hamit Çağlar ÇALIŞGAN

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Vagif S. GULIYEV

Year: 2026, **Pages:** 47

Juries: Prof. Dr. Vagif S. GULIYEV

Prof. Dr. Ali AKBULUT

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI

Co-Supervisor: Dr. Süleyman ÇELİK

This master's thesis covers the definitions of classical, modified, and Total Morrey-Guliyev spaces in harmonic analysis, some basic properties of them, some embedding theorems on Total Morrey-Guliyev spaces, and some results on the boundedness of the maximal and fractional maximal operators among the integral operators on these spaces. The first section outlines the importance, scope, and purpose of the research, and provides information on the contributions of our work to science. The second section provides some basic definitions related to our work, along with the definitions and properties of some function spaces in harmonic analysis. The third section provides brief information on the materials and methods used in the thesis. The fourth section provides some results on the definitions and properties of Total Morrey-Guliyev spaces and the boundedness of maximal and fractional maximal operators on these spaces. The final section briefly discusses the purpose and objectives of the thesis.

Keywords: Morrey space, Total Morrey-Guliyev space, Maximal operator, Fractional maximal operator.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
M_α	Kesirli Maksimal Operatör
$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Klasik Morrey Uzayı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue Uzayı
M	Maksimal Operatör
$\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Modified Morrey Uzayı
$(X, \mathcal{A}, \mu)$	Ölçü Uzayı
I_α	Riesz Potansiyeli
$L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$	Total Morrey-Guliyev Uzayı
$WL^p(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Lebesgue Uzayı

1. GİRİŞ

Klasik Morrey uzayları 1938 yılında Morrey [27] tarafından bazı yarı lineer eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesi sonucunda ortaya çıkmıştır. Morrey uzaylarının kısmi diferensiyel denklemler üzerinde önemli bir yeri vardır. Harmonik analizdeki birçok önemli sonuçlar yeni tipli bazı Morrey uzaylarına genelleştirilmesine sebep olmuştur. 1994 yılında Guliyev tarafından doktora tezinde, [10] homojen Lie gruplarında lokal genelleştirilmiş Morrey tipli uzaylarını tanımlamış ve bu uzaylarda kesirli integral ve singüler integral operatörlerinin sınırlılığını araştırmıştır. Son yıllarda, Morrey uzaylar ile ilgili çalışmalar, G. Mingione [26] ve D.R. Adams [1] tarafından Morrey-Lorentz uzayları, E. Nakai [28], Y. Sawano ve ark. [36] ve V.S. Guliyev ve ark. [8] tarafından 1. tip, 2. tip ve 3. tip Orlicz-Morrey uzaylarında harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılıkları incelenmiştir. Aynı zamanda A. Almeida ve ark. [6], V.S. Guliyev ve ark. [18, 19] tarafından değişken üslü Morrey uzayları gibi şeklinde genelleştirmişlerdir. Bu tür Morrey tipli uzayların kısmi diferensiyel denklemler üzerinde uygulamaları vardır. Örneğin, J. Zhang ve S. Zheng [40] tarafından tamamen doğrusal olmayan bazı eliptik denklemlerin viskozite (bir akışkanın, yüzey gerilimi altında deforme olmaya karşı gösterdiği direncin ölçüsü) çözümleri bu alanda önemli bir uygulama olarak yer almaktadır.

2010 yılında V.S. Guliyev ve ark. [18, 19] tarafından değişken üslü Morrey uzayları ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarını ele alarak bu uzaylar üzerinde bazı integral operatörlerinin sınırlılıkları incelenmiştir. 2012 yılında A. Akbulut ve ark. [3] tarafından genelleştirilmiş Morrey uzayları üzerinde maksimal ve singüler integral operatörlerinin sınırlılıklarını incelemişlerdir. Morrey uzaylarının bir versiyonu olan $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ Total Morrey-Guliyev uzayları, 2022 yılında V.S. Guliyev tarafından; f lokal integrallenebilir fonksiyonlarının tüm sınıflarının kümesinden ve normların sonlu olması durumunda sırasıyla;

$0 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $[t]_1 = \min\{1, t\}$, $t > 0$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

$$\|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

$$\|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/t]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayı, $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Modified Morrey uzayı, $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ Total Morrey-Guliyev uzayı tanımlanmıştır [13](ayrıca bkz. [4, 5, 15, 16, 29, 38, 39]).

2022 ve 2024 yıllarında V.S. Guliyev tarafından yapılan araştırmalarda Total Morrey-Guliyev uzaylarında bazı harmonik analiz operatörlerinin sınırlılıkları incelenmiştir. Harmonik analiz operatörlerinin Total Morrey-Guliyev uzaylarındaki sınırlılıklarının incelenmesi kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözülebilmesinde önemli bir yeri vardır. Total Morrey-Guliyev uzayları aslında klasik Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \equiv L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve modified Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda,0}(\mathbb{R}^n) = \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olacak şekildeki bir genelleştirilmesidir. Morrey uzaylarının bir versiyonu olan $0 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzayları, 2022 yılında V.S. Guliyev [13] tarafından araştırılmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde, $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey, $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ modified Morrey ve $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzaylarının tanımları, bazı temel özellikleri ve $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzaylarında bazı gömme teoremleri, bu uzaylarda integral operatörlerinden maksimal operatör ve kesirli maksimal operatörlerinin sınırlılıkları ile ilgili bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Bu tez konusunu bir başlangıç kabul edilerek, " Total Morrey-Guliyev uzayları ve bu uzaylarda maksimal ve kesirli maksimal operatörlerinin sınırlılığı" konusunda daha ileri düzeyde çalışmalar yapabilmek için bir temel oluşturulması hedeflenmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, tez araştırma konusu ile ilgili klasik analiz, fonksiyonel analiz, reel analiz, topoloji ile ilgili bazı temel kavramlara ve harmonik analizdeki bazı fonksiyon uzayları ile ilgili bilgiler yer verilmiştir.

2.1. Lebesgue Uzayları

Tanım 2.1. X , $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbf{K}$ için

$$(N_1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N_2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (Üçgen Eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir [7].

Bir X vektör uzayında bir ön-norm veya yarı-norm, dejenerasyon olmaması dışında bir normun özelliklerine sahip bir p fonksiyonu gibi tanımlanır:

$p(x) = 0$ olması durumu $x \neq 0$ olmasını gerektirmez. $\dim X < \infty$ ise bu durumda $p(AB) \leq p(A)p(B)$ koşuluna bağlı olarak $L(x)$ üzerinde p sıfır olmayan bir ön-normu gerçekten ortaya çıkan bir norm olmasıdır (çünkü bu durumda $L(x)$ önemsiz olmayan iki taraflı iddialara sahip değildir). Ancak sonsuz boyutlu normlu uzaylar için bu böyle değildir. Eğer X , C üzerinde bir Banach cebiri ise bu durumda

$$|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} \quad (2.1)$$

spektral yarıçapın bir yarı-norm olması için gerek ve yeter koşul X de düzgün sürekli olmasıdır ve bu koşul, radikal değişmeli olduğundan bölüm cebirinin gerçekliğine eşdeğerdir.

Bir E vektör uzayında $\forall x, y \in E$ ve keyfi λ skalerleri için sonlu negatif olmayan bir p fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar:

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x), \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (2.2)$$

[23]. Eğer $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ise bu durumda yarı-norma norm denir, fakat $x \neq 0$ ise bu durumda yarı norm denir. Bir p yarı-normu bir vektör uzayında tanımlanmış ve f fonksiyonu $|f(x)| \leq p(x)$ koşulunu sağlayan bir alt uzayında lineer bir fonksiyon ise bu durumda f fonksiyonu her uzaya genişletilebilir, böylece Hanh-Banach teoremi ile aynı koşulu sağlar.

Matematiksel analizde, elemanları konveks kümeler olan bir 0-komşuluk temelinin bulunduğu ayrılabilir topolojik vektör uzaylarıyla (bkz. topolojik vektör uzayı) sıklıkla karşılaşılır. Bu tür uzayların yerel olarak dışbükey olduğu söylenir. Yerel konveks bir uzayda açık konveks 0-komşuluk $\{x : p(x) < 1\}$ biçimindedir, burada p sürekli bir yarı-normdur. Bununla birlikte, matematiksel analizde, üzerinde önemsiz olmayan yarı-normların bulunmadığı topolojik vektör uzayları (metriklenebilir topolojiye sahip uzayları dahil) ile de karşılaşılır. Bu tür uzayların en basit örnekleri $L_q(0, 1)$, $0 < q < 1$.

X boştan farklı bir küme olmak üzere X kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan küme $P(X)$ ile gösterilmiştir.

Fonksiyonel analizde, Banach uzayı'nın ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını Lebesgue uzayı ($L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı) oluşturur. $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayının, harmonik analizin önemli konularından biri olmakla beraber hem harmonik analizin iç problemlerinin çözülmesinde, hem de kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve diğer disiplinlerde uygulamaları vardır.

L^p uzayı, sonlu boyutlu vektör uzayı için p -normlu genelleşmesi kullanılarak tanımlanmış fonksiyon uzayıdır. Bourbaki grubuna göre, ilk olarak 1910 yılında Frigyes Riesz [31] tarafından çalışılmasına rağmen 1958 yılında Fransız matematikçi Henri Lebesgue'nin [25] adını alır ve Lebesgue uzayları olarak ifade edilir. L^p uzayı fonksiyonel analiz'de Banach uzayı'nın ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını oluşturur. Lebesgue uzayı'nın fizik, istatistik, finans, mühendislik gibi önemli uygulamalarında kullanılmaktadır.

2.1.1. $L^p(\mathbb{R}^n)$ Uzayı

Tanım 2.2. $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de vektörler olmak üzere

$$\mathbb{R}^n, n\text{-boyutlu Öklidyen uzayı } (x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j \text{ iç çarpımı ile donatılmış } \mathbb{R}^n,$$

n -boyutlu reel uzayıdır. Burada x vektörünün mutlak değeri $|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1 \dots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsü ve $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f(x) dx = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

ile gösterilir.

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterelim.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx$$

integralinin hesabı için;

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi \quad \text{olmak üzere}$$

$$x_1 = r \cos \theta_1$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

...

$$x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1}$$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyesi

$$J(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \theta_j)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} f(r) J(r, \theta) dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \theta_j)^{n-1-j} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \omega_{n-1} \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ω_{n-1} , birim kürenin yüzey alanıdır.

Genel olarak

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r \sin \theta_1, \dots, r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1}) r^{n-1} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r, \theta) r^{n-1} dr d\sigma \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. dx hacim elemanı $dx = r^{n-1}drd\sigma$ biçiminde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür.

Ayrıca;

$$|Q(x, r)| = \int_{Q(x, r)} dy = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; |x-y| < r\}} dy = \int_{\{z \in \mathbb{R}^n; |z| < r\}} dz = |Q(0, r)|$$

ve

$$\begin{aligned} |Q(x, r)| &= \int_{Q(x, r)} dz = \int_0^r \int_{S^{n-1}} t^{n-1} dt d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^r t^{n-1} dt \\ &= |S^{n-1}| \frac{r^n}{n} \\ &= \omega_n r^n \end{aligned}$$

dır [35].

Tanım 2.3. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

özellğine sahip ölçülebilir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı veya Ω bölgesinde p . kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

şeklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_{L^p}$ gösterimine f fonksiyonunun $L^p(\mathbb{R}^n)$ -normu denir.

Ω bölgesinde hemen hemen her x için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna hemen hemen her yerde sınırlıdır denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt

sınırına da $|f|$ nin Ω bölgesindeki esas supremumu (esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf \{K : |f(x)| \leq K \quad \text{h.h. } x \in \Omega\}$$

şeklinde gösterilir. Ω bölgesindeki hemen hemen her yerde sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ şeklinde gösterilir. Buna göre bir f fonksiyonunun L^∞ -normu

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

olarak tanımlanır [30].

Tanım 2.4. (Zayıf Lebesgue Uzayı) $1 \leq p < \infty$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\|f\|_{WL^p} := \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere zayıf Lebesgue uzayı $WL^p(\mathbb{R}^n)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$WL^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f - \text{ölçülebilir} \ \& \ \|f\|_{WL^p} < \infty\}$$

[35].

Aşağıda Young, Hölder, Minkowski eşitsizlikleri ispatsız olarak verilmiştir.

Lemma 2.5. (Young eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\forall a, b > 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2.3}$$

olur [30].

Lemma 2.6. (Hölder eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L^p, g \in L^q$ ise $fg \in L^1$ olur ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanır [30].

Teorem 2.7. (Minkowski eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$ için eğer $f, g \in L^p$ ise $(f + g) \in L^p$ ve

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \tag{2.5}$$

dir [30].

Hölder eşitsizliği ve Lebesgue integralinin özellikleri göz önünde bulundurulduğunda $1 \leq p < \infty$, L^p uzayının bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla birlikte f fonksiyonunun L^p uzayının $\|f\|_{L^p}$ normu altında;

$$1. \quad \|f\|_{L^p} \geq 0$$

$$2. \quad \|f\|_{L^p} = 0 \text{ ise h.h.h. } f(x) = 0$$

$$3. \quad \|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad \|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

özellikleri sağlandığından $1 \leq p < \infty$, L^p bir normlu uzaydır.

Tanım 2.8. f_n ve f fonksiyonları L^p uzayının elemanları olmak üzere; (f_n) dizisi f fonksiyonuna p . mertebeden yakınsaktır (L^p de yakınsaklık) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon$.

Burada

$$\|f_n - f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Buna göre,

(f_n) dizisinin f fonksiyonuna L^p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0 \tag{2.6}$$

olmasıdır [33].

Teorem 2.9. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, uzayı

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolayısıyla Banach uzayıdır [30].

Uyarı 2.10. $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \subsetneq W L^p(\mathbb{R}^n)$. Ayrıca

$$\|f\|_{W L^p} \leq \|f\|_{L^p}$$

eşitsizliği sağlanır [35].

Tanım 2.11. (Lokal İntegrallenebilirlik) f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her K kompakt kümesi üzerinde

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal (veya yerel) integrallenebilir adı verilir ve

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \int_K |f| d\mu < \infty, K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \left(\int_K |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [32].

Aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 2.12. Her $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\|f \chi_{B(x,r)}\|_{L^p}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}} = |f(x)|, \text{ h.h.h. } x \in \mathbb{R}^n$$

eşitliği gerçekleşir [9].

2.1.2. (p, q) Tipli Operatör

Tanım 2.13. $((p, q)$ tipli operatör) T bir quasi-lineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise zayıf (p, q) tipindendir denir. Yani her bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^p} \right)^q$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü zayıf (p, q) tipindendir.

Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise güçlü (p, q) tipindendir denir. Yani her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü güçlü (p, q) tipindendir [30].

Uyarı 2.14. Her güçlü (p, q) tipli operatör aynı zamanda zayıf (p, q) tipli operatördür [30].

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 2.15. (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) T alt toplamsal operatör ve $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olsun. Ayrıca T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun ve p ile q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p, q) tipli operatördür [35].

Uyarı 2.16. $0 < p_0 < p < p_1 < \infty$ ve T operatörü, Teorem 2.15. de tanımlanan ve aynı zamanda her $f \in L^{p_0} + L^{p_1}$ için

$$|T(f)| \leq T(|f|)$$

şartını sağlayan bir operatör olsun. Burada A_0 ve A_1 sabit sayıdır.

1. $p_0 = 1$ ve $p_1 = \infty$ ise bu durumda T operatörünün L^P uzayından L^P uzayına dönüşümün normundaki sabit

$$\frac{p}{p-1} A_0^{\frac{1}{p}} A_1^{1-\frac{1}{p}}.$$

2. Genellikle, $p_0 < p < p_1 = \infty$ ise bu durumda T operatörünün L^P uzayından L^P uzayına dönüşümün normundaki sabit

$$p^{1+\frac{1}{p}} \left[\frac{B(p_0+1, p-p_0)}{p_0^{p_0}(p-p_0)^{p-p_0}} \right]^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{p_0}{p_1}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}}.$$

3. $0 < p_0 < p_1 < \infty$ iken T operatörünün L^P uzayından L^P uzayına dönüşümün normundaki sabit

$$\min_{0 < \lambda < 1} p^{\frac{1}{p}} \left(\frac{B(p-p_0, p_0+1)}{(1-\lambda)^{p_0}} + \frac{p_1-p+1}{\lambda p_1} \right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}$$

[9].

2.1.3. Bazı İntegral Operatörleri

Bu kısımda harmonik analizdeki bazı integral operatörleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 2.17. (Maksimal Operatör) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere M Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

olarak tanımlanır [37].

Tanım 2.18. (Kesirli Maksimal Operatör) $0 \leq \alpha < n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere M_α kesirli maksimal operatörü

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-\frac{n-\alpha}{n}} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

olarak tanımlanır [37].

Teorem 2.19. (Hardy-Littlewood-Winer Teoremi) $f, \mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon olsun.

1. $1 \leq p \leq \infty$ için $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$Mf(x) < \infty.$$

2. Herhangi bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

3. Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < p \leq \infty$ için

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C = C(n, p) > 0$ sabiti vardır [35].

Teorem 2.20. (Riesz Potansiyeli) $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere, I_α Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır [37].

Teorem 2.21. $1 \leq p < q < \infty$, $0 < \alpha < n$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

ve $p = 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde $C = C(n, \alpha, p) < \infty$ sabiti vardır ve burada $\alpha = n(1/p - 1/q)$ biçimindedir [9].

2.2. Morrey Uzayları

Bu kısımda, Morrey uzaylarının tanımları ve bazı özelliklerine yer verilmiştir.

Tanım 2.22. $0 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ olmak üzere $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

sonlu normu ile f lokal integrallenebilir fonksiyonların tüm sınıflarının kümesi olarak tanımlanır [13].

Tanım 2.23. $0 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ olmak üzere $WL^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Morrey uzayı

$$\|f\|_{WL^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL^p(B(x,t))}$$

sonlu normu ile f lokal integrallenebilir fonksiyonların tüm sınıflarının kümesi olarak tanımlanır [13].

Klasik Morrey ve Lebesgue uzayları arasında V.S. Guliyev [13] tarafından elde edilen bazı sonuçlar aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 2.24. $0 < p < \infty$ olmak üzere $\lambda = 0$ için

$$\begin{aligned} L^{p,0}(\mathbb{R}^n) &= L^p(\mathbb{R}^n) \\ WL^{p,0}(\mathbb{R}^n) &= WL^p(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

[13].

Sonuç 2.25. $0 < p < \infty$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|f\|_{WL^{p,\lambda}} \leq \|f\|_{L^{p,\lambda}} \text{ ve bundan dolayı } L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset WL^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

[13].

Sonuç 2.26. $0 < p < \infty$ olmak üzere $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ eşitsizliklerinden herhangi biri için

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = WL^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta.$$

Burada $\Theta \equiv \Theta(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde sıfıra eşit olan tüm fonksiyonların kümesidir [13].

2.2.1. Modified Morrey Uzayları

Bu kısımda $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ modified Morrey Uzaylarının tanımına, ilgili bazı teoremlere ve sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 2.27. $0 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $[t]_1 = \min\{1, t\}$ ve $t > 0$ olmak üzere $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ modified Morrey uzayı

$$\|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

sonlu normu ile f lokal integrallenebilir fonksiyonların tüm sınıflarının kümesi olarak tanımlanır [20].

Tanım 2.28. $0 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $[t]_1 = \min\{1, t\}$ ve $t > 0$ olmak üzere $W\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zayıf modified Morrey uzayı

$$\|f\|_{W\tilde{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL^p(B(x,t))}$$

sonlu normu ile f lokal integrallenebilir fonksiyonların tüm sınıflarının kümesi olarak tanımlanır [20].

V.S. Guliyev ve ark. [20] tarafından elde edilen bazı teoremler ve sonuçlar aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 2.29. $0 < p < \infty$ olmak üzere $\lambda = 0$ için

$$\begin{aligned}\tilde{L}^{p,0}(\mathbb{R}^n) &= L^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n), \\ W\tilde{L}^{p,0}(\mathbb{R}^n) &= WL^{p,0}(\mathbb{R}^n) = WL^p(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

[20].

Sonuç 2.30. $0 < p < \infty$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|f\|_{W\tilde{L}^{p,\lambda}} \leq \|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} \quad \text{ve bundan dolayı} \quad \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset W\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset_{\succ} L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{ve} \quad \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}}$$

[20].

Sonuç 2.31. $0 < p < \infty$ olmak üzere $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ eşitsizliklerinden herhangi biri için

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = WL^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = W\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta.$$

Burada $\Theta \equiv \Theta(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde sıfıra eşit olan tüm fonksiyonların kümesidir [20].

Teorem 2.32. (Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi)

1. $f \in \tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \lambda < n$ ise bu durumda $Mf \in W\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{W\tilde{L}_{1,\lambda}} \leq C_{1,\lambda} \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}}$$

Burada $C_{1,\lambda}$ sabiti sadece λ ve n 'e bağlıdır.

2. $f \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ ise bu durumda $Mf \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \leq C_{p,\lambda} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$$

Burada $C_{p,\lambda}$ sabiti sadece p , λ ve n 'e bağlıdır [20].

Teorem 2.33. $0 < \alpha < n$, $0 \leq \lambda < n - \alpha$ ve $1 \leq p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ olsun.

1. $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda I_α operatörünün $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter şart

$$\frac{\alpha}{n} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}.$$

2. $p = 1 < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda I_α operatörünün $\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter şart

$$\frac{\alpha}{n} \leq 1 - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$$

[20].

Sonuç 2.34. $0 < \alpha < n$, $0 \leq \lambda < n - \alpha$ ve $1 \leq p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ olsun.

1. $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda M_α kesirli maksimal operatörünün $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter şart

$$\frac{\alpha}{n} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}.$$

2. $p = 1 < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda M_α kesirli maksimal operatörünün $\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter şart

$$\frac{\alpha}{n} \leq 1 - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$$

[20].

3. MATERYAL VE METOT

2010 yılında V.S. Guliyev ve arkadaşları [18, 19] tarafından değişken üslü Morrey uzayları ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarını ele alarak bu uzaylar üzerinde bazı integral operatörlerinin sınırlılıkları incelenmiştir. 2012 yılında A. Akbulut ve arkadaşları [3] tarafından genelleştirilmiş Morrey uzayları üzerinde maksimal operatörün ve singüler integral operatörünün sınırlılıklarını incelemişlerdir. Morrey uzaylarının bir versiyonu olan $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzayları, 2022 yılında V.S. Guliyev tarafından; f lokal integrallenebilir fonksiyonlarının tüm sınıflarının kümesinden ve normların sonlu olması durumunda sırasıyla;

$0 < p < \infty, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, [t]_1 = \min\{1, t\}, t > 0$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

$$\|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

$$\|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/t]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayı, $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ modified Morrey uzayı, $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzayı tanımlanmıştır [13]. 2022 ve 2024 yıllarında V.S. Guliyev tarafından yapılan araştırmalarda total Morrey-Guliyev uzaylarında bazı harmonik analiz operatörlerinin sınırlılıkları incelenmiştir. Harmonik analiz operatörlerinin total Morrey-Guliyev uzaylarındaki sınırlılıklarının incelenmesi kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözülebilmesinde önemli bir yeri vardır. Total Morrey-Guliyev uzayları aslında klasik Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda,\lambda}(\mathbb{R}^n) \equiv L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve modified Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda,0}(\mathbb{R}^n) = \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olacak şekildeki bir genelleştirmesidir. Morrey uzaylarının bir versiyonu olan $0 < p < \infty, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzayları, 2022 yılında V.S. Guliyev [13] tarafından araştırılmıştır. Total Morrey-Guliyev uzayları aslında klasik Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda,\lambda}(\mathbb{R}^n) \equiv L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve modified Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda,0}(\mathbb{R}^n) = \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olacak şekildeki bir genelleştirmesidir. Bu yüksek lisans tezinde, $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey ve $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzaylarının tanımları, bazı temel özellikleri ve $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzaylarında bazı gömme teoremleri, bu uzaylarda integral operatörlerinden maksimal operatör ve kesirli maksimal operatörlerinin sınırlılıkları ile ilgili bazı sonuçlarının incelenmesi amaçlanmaktadır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Morrey uzaylarının bir versiyonu olan $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzayları, 2022 yılında V.S. Guliyev tarafından; f lokal integrallenebilir fonksiyonlarının tüm sınıflarının kümesinden ve normların sonlu olması durumunda sırasıyla;

$0 < p < \infty, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, [t]_1 = \min\{1, t\}, t > 0$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

$$\|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

$$\|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/t]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayı, $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ modified Morrey uzayı, $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzayı tanımlanmıştır [13]. 2022 ve 2024 yıllarında V.S. Guliyev [14] tarafından yapılan araştırmalarda total Morrey-Guliyev uzaylarında bazı harmonik analiz operatörlerinin sınırlılıkları incelenmiştir. Harmonik analiz operatörlerinin total Morrey-Guliyev uzaylarındaki sınırlılıklarının incelenmesi kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözülebilmesinde önemli bir yeri vardır. Total Morrey-Guliyev uzayları aslında klasik Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda,\lambda}(\mathbb{R}^n) \equiv L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve modified Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda,0}(\mathbb{R}^n) = \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olacak şekildeki bir genelleştirilmesidir. Morrey uzaylarının bir versiyonu olan $0 < p < \infty, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzayları, 2022 yılında V.S. Guliyev [13] tarafından araştırılmıştır.

4.1. Total Morrey-Guliyev Uzayları ve Özellikleri

Bu kısımda, $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzaylarının tanımına, ilgili bazı gömme teoremlerine ve yardımcı sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 4.1. (Total Morrey-Guliyev Uzayı) $0 < p < \infty, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, [t]_1 = \min\{1, t\}$ ve $t > 0$ olmak üzere $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzayı

$$\|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/t]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}$$

sonlu normu ile f lokal integrallenebilir fonksiyonların tüm sınıflarının kümesi şeklinde tanımlanır [13].

Tanım 4.2. (Zayıf Total Morrey-Guliyev Uzayı) $0 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $[t]_1 = \min\{1, t\}$ ve $t > 0$ olmak üzere $WL^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ zayıf total Morrey-Guliyev uzayı

$$\|f\|_{WL^{p,\lambda,\mu}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/t]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f\|_{WL^p(B(x,t))}.$$

sonlu normu ile f lokal integrallenebilir fonksiyonların tüm sınıflarının kümesi şeklinde tanımlanır [13].

Klasik Morrey, modified Morrey ve total Morrey-Guliyev uzayları arasında V.S. Guliyev [13] tarafından elde edilen bazı sonuçlar aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 4.3. $0 < p < \infty$ olmak üzere $\lambda = 0$ ve $\mu = 0$ için

$$\begin{aligned} L^{p,0,0}(\mathbb{R}^n) &= \tilde{L}^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n), \\ WL^{p,0,0}(\mathbb{R}^n) &= W\tilde{L}^{p,0}(\mathbb{R}^n) = WL^{p,0}(\mathbb{R}^n) = WL^p(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

[13].

Sonuç 4.4. $0 < p < \infty$ olmak üzere $\lambda = \mu$ için

$$L^{p,\lambda,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n).$$

$\mu = 0$ için

$$L^{p,\lambda,0}(\mathbb{R}^n) = \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

[13].

Sonuç 4.5. $0 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$\|f\|_{WL^{p,\lambda,\mu}} \leq \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}$$

olduğundan dolayı

$$L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) \subset WL^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\begin{aligned} L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) &\subset_{\succ} L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \|f\|_{L^{p,\lambda}} \leq \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}, \\ L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) &\subset_{\succ} L^{p,\mu}(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \|f\|_{L^{p,\mu}} \leq \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}, \\ \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) &\subset_{\succ} L^p(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} \end{aligned}$$

[13].

Lemma 4.6. $0 < p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$ ve $0 \leq \mu \leq n$ durumunda $1 \leq p < \infty$ için $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ Banach uzay ve $0 < p < 1$ için $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ yarı-Banach uzayıdır [13].

İspat. $1 \leq p < \infty$ ise bu durumda $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ normlu bir uzaydır. $0 < p < 1$ durumunda ise $f, g \in L^p(B(x, r))$ için

$$\|f + g\|_{L^p(B(x, r))} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_{L^p(B(x, r))} + \|g\|_{L^p(B(x, r))})$$

burada $2^{\frac{1}{p}-1}$ bir sharp sabitidir. Böylece $0 < p < 1$, $f, g \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f + g\|_{L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)}) \quad (4.1)$$

Aynı zamanda burada $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$ bir sharp sabittir.

Örneğin; bu denklem

$$f = \chi_{B(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n}, \quad g = \chi_{B(0,1) \cap \mathbb{R}_-^n},$$

için

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}, \quad \mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$$

olmak üzere elde edilir. Böylece $0 < p < 1$, $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için bir yarı-normlu uzay olup normlu uzay değildir.

$$f_k \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n), \quad k \in \mathbb{N}, \text{ ve}$$

$$\lim_{k,m \rightarrow \infty} \|f_k - f_m\|_{L^{p,\lambda,\mu}} = 0$$

olsun. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $k, m \in \mathbb{N}$, $k, m \geq k_0$ için ve her $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ için

$$[r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f_k - f_m\|_{L^p(B(x, r))} \leq \|f_k - f_m\|_{L^{p,\lambda,\mu}} < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Böylece her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$\lim_{k,m \rightarrow \infty} \|f_k - f_m\|_{L^p(B(x, r))} = 0$$

$L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ uzayının tam olması nedeniyle bir $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ vardır öyle ki her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{L^p(B(x, r))} = 0$$

(4.2) eşitsizliğinin $m \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$[r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f_k - f\|_{L^p(B(x,r))} \leq \varepsilon$$

elde edilir, böylece

$$\|f_k - f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \leq \varepsilon$$

yani

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} = 0.$$

Böylece $L^{p,\lambda,\mu}$ tamdır. ■

Lemma 4.7. $0 < p < \infty, 0 \leq \mu \leq \lambda \leq n$ ise bu durumda

$$L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)} = \max \{ \|f\|_{L^{p,\lambda}}, \|f\|_{L^{p,\mu}} \}$$

[13].

Sonuç 4.8. $0 < p < \infty, 0 \leq \lambda \leq n$ ise bu durumda

$$\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} = \max \{ \|f\|_{L^{p,\lambda}}, \|f\|_{L^p} \}$$

[13].

Lemma 4.9. $0 < p < \infty, 0 \leq \mu \leq \lambda \leq n$ ise bu durumda

$$WL^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) = WL^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap WL^{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|f\|_{WL^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)} = \max \{ \|f\|_{WL^{p,\lambda}}, \|f\|_{WL^{p,\mu}} \}$$

[13].

Uyarı 4.10. $0 < p < \infty$ ise $\lambda < 0$, $\lambda > n$, $\mu < 0$ ve $\mu > n$ eşitsizliklerinden herhangi biri için

$$\begin{aligned} L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) &= WL^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) \\ &= \Theta(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

[13].

Örnek 4.11. $\alpha > -\frac{n}{p}$, $0 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq \mu \leq n$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} |\cdot|^\alpha &\in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow -\frac{n-\lambda}{p} \leq \alpha \leq -\frac{n-\mu}{p} \\ |\cdot|^\alpha \chi_{B(0,1)} &\in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha \geq -\frac{n-\lambda}{p} \end{aligned}$$

ve

$$|\cdot|^\alpha \chi_{cB(0,1)} \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha \leq -\frac{n-\mu}{p}$$

Aslında,

$$\begin{aligned} \||\cdot|^\alpha\|_{L^{p,\lambda,\mu}} &= \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \||y|^\alpha\|_{L^p(B(x,r))} \\ &= \sup_{r>0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \||y|^\alpha\|_{L^p(B(0,r))} \\ &= \sup_{r>0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \left(\int_{B(0,r)} |y|^{\alpha p} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{r>0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \left(\sigma_n \int_0^r t^{\alpha p + n - 1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{\sigma_n}{\alpha p + n} \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{r>0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} r^{\alpha + \frac{n}{p}} \\ &= \left(\frac{\sigma_n}{\alpha p + n} \right)^{\frac{1}{p}} \max \left\{ \sup_{0 < t \leq 1} t^{\alpha + \frac{n-\lambda}{p}}, \sup_{t > 1} t^{\alpha + \frac{n-\mu}{p}} \right\} \\ &= \left(\frac{\sigma_n}{\alpha p + n} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Burada v_n , $\mathbb{R}^n$ 'deki birim kürenin hacmi ve $\sigma_n = nv_n$, $\mathbb{R}^n$ 'deki birim kürenin yüzey alanıdır [13].

Lemma 4.12. $0 < p < \infty, 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq n$ ve $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq n$ ise bu durumda

$$L^{p,\lambda_1,\mu_1}(\mathbb{R}^n) \subset_{\succ} L^{p,\lambda_2,\mu_2}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|f\|_{L^{p,\lambda_2,\mu_2}} \leq \|f\|_{L^{p,\lambda_1,\mu_1}}$$

[13].

İspat. $f \in L^{p,\lambda,\mu}, 0 < p < \infty, 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq n, 0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq n$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p,\lambda_2,\mu_2}} &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq 1} (t^{\lambda_1 - \lambda_2} t^{-\lambda_1} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy)^{1/p} \right. \\ &\quad \left. \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \geq 1} (t^{\mu_1 - \mu_2} t^{-\mu_1} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy)^{1/p} \right\} \\ &\leq \|f\|_{L^{p,\lambda_1,\mu_1}}. \end{aligned}$$

■

Lemma 4.13. $0 < p < \infty, 0 \leq \lambda \leq n$ ve $0 \leq \mu \leq n$ ise bu durumda

$$L^{p,n,\mu}(\mathbb{R}^n) \subset_{\succ} L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset_{\succ} L^{p,\lambda,n}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|f\|_{L^{p,\lambda,n}} \leq v_n^{1/p} \|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{p,n,\mu}}$$

[13].

İspat. $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $0 < t \leq 1$ için

$$\left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq v_n^{1/p} \|f\|_{L^\infty}, \quad 0 \leq \lambda \leq n$$

ve her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t \geq 1$ için

$$\left(t^{-n} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq v_n^{1/p} \|f\|_{L^\infty}.$$

Dolayısıyla $f \in L^{p,\lambda,n}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{L^{p,\lambda,n}} \leq v_n^{1/p} \|f\|_{L^\infty}$$

$f \in L^{p,n,\mu}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lebesgue teoreminden

$$\lim_{t \rightarrow 0} |B(x, t)|^{-1} \int_{B(x, t)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

elde edilir (bkz. [40]). Bu durumda

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} |B(x, t)|^{-1} \int_{B(x, t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq v_n^{-1/p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq 1} \left(t^{-n} \int_{B(x, t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq v_n^{-1/p} \|f\|_{L^{p,n,\mu}}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{L^\infty} \leq v_n^{-1/p} \|f\|_{L^{p,n,\mu}}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.14. $0 < p < \infty$ ise bu durumda

$$\tilde{L}^{p,n} \subset_{\succ} L^\infty(\mathbb{R}^n) = L^{p,n}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|f\|_{\tilde{L}^{p,n}} \leq v_n^{1/p} \|f\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^{p,n}}$$

[13].

Lemma 4.15. $0 \leq \lambda < n$, $0 \leq \mu < n$, $0 < \alpha < n - \lambda$ ve $0 < \beta < n - \mu$ ise bu durumda

$\frac{n-\lambda}{\alpha} \leq p \leq \frac{n-\mu}{\beta}$ için

$$L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) \subset_{\succ} L^{1,n-\alpha,n-\beta}(\mathbb{R}^n)$$

ve $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f\|_{L^{1,n-\alpha,n-\beta}} \leq v_n^{1/p'} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}$$

[13].

İspat. $0 < \alpha < n, 0 \leq \lambda < n, f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ ve $\frac{n-\lambda}{\alpha} \leq p \leq \frac{n-\mu}{\beta}$ olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{1,n-\alpha,n-\beta}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{\alpha-n} [1/t]_1^{n-\beta} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy \\
&\leq v_n^{1/q} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} ([t]_1 t^{-1})^{-n/q} [t]_1^{\alpha - \frac{n-\lambda}{p}} [1/t]_1^{n-\beta - \frac{\mu}{p}} \\
&\quad \left([t]_1^{-\lambda} [1/t]_1^{\mu} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\
&\leq v_n^{1/q} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \sup_{t > 0} ([t]_1 t^{-1})^{\frac{n-\mu}{p} - \beta} [t]_1^{\alpha - \frac{n-\lambda}{p}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{t > 0} ([t]_1 t^{-1})^{\frac{n-\mu}{p} - \beta} [t]_1^{\alpha - \frac{n-\lambda}{p}} &= \max \left\{ \sup_{0 < t \leq 1} t^{\alpha - \frac{n-\lambda}{p}}, \sup_{t > 1} t^{\beta - \frac{n-\mu}{p}} \right\} \\
&< \infty \\
&\iff \frac{n-\lambda}{\alpha} \leq p \leq \frac{n-\mu}{\beta}
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı $f \in L^{1,n-\alpha,n-\beta}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{L^{1,n-\alpha,n-\beta}} \leq v_n^{1/q} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}.$$

■

Sonuç 4.16. $0 \leq \mu \leq \lambda < n, 0 < \alpha < n - \lambda$ ise bu durumda

$\frac{n-\lambda}{\alpha} \leq p \leq \frac{n-\mu}{\alpha}$ için

$$L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n) \subset_{\succ} L^{1,n-\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

ve $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f\|_{L^{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/q} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}$$

[13].

Sonuç 4.17. $0 \leq \lambda < n$ ve $0 < \alpha < n - \lambda$ ise bu durumda

$p = \frac{n-\lambda}{\alpha}$ için

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset L^{1,n-\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|f\|_{L^{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/q} \|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

[13].

Sonuç 4.18. $0 \leq \lambda < n$ ve $0 < \alpha < n - \lambda$ ise bu durumda

$\frac{n-\lambda}{\alpha} \leq p \leq \frac{n}{\alpha}$ için

$$\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset L^{1,n-\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|f\|_{L^{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/q} \|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}}$$

[13].

4.1.1. Total Morrey-Guliyev Uzaylarında Maksimal Operatör

Bu kısımda, $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzaylarında maksimal operatörünün bazı özelliklerine yer verilmiştir.

Lemma 4.19. (Guliyev Lokal Estimate) $1 \leq p < \infty$ ve $B(x, r)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde herhangi bir yuvar olsun. $p > 1$ ise bu durumda her $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L^p(B(x,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \sup_{t>2r} t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}. \quad (4.3)$$

Ayrıca $p = 1$ ise bu durumda her $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{WL^1(B(x,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \sup_{t>2r} t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^1(B(x,t))} \quad (4.4)$$

[3].

Teorem 4.20. 1. $f \in L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \lambda < n$ ve $0 \leq \mu < n$ ise bu durumda $Mf \in WL^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{WL^{1,\lambda,\mu}} \leq C_{1,\lambda,\mu} \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}}. \quad (4.5)$$

Burada $C_{1,\lambda,\mu}$, f den bağımsızdır.

2. $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ ve $0 \leq \mu < n$ ise bu durumda $Mf \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \leq C_{p,\lambda,\mu} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}. \quad (4.6)$$

Burada $C_{p,\lambda,\mu}$, sadece p, λ, μ ve n 'e bağlıdır [13].

İspat. $p = 1$ olsun. (4.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{WL^{1,\lambda,\mu}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\lambda} [1/t]_1^\mu \|Mf\|_{WL^1(B(x,t))} \\
&\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\lambda} [1/t]_1^\mu t^n \sup_{\tau > 2t} \tau^{-n} \|f\|_{L^1(B(x,\tau))} \\
&\lesssim \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\lambda} [1/t]_1^\mu t^n \sup_{\tau > t} \tau^{-n} [\tau]_1^\lambda [1/\tau]_1^{-\mu} \\
&= \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{n-\lambda} [1/t]_1^{\mu-n} \sup_{\tau > t} [\tau]_1^{\lambda-n} [1/\tau]_1^{n-\mu} \\
&= \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani M operatörünün $L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğunu gösterir.

$1 < p < \infty$ olsun . (4.3) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{L^{p,\lambda,\mu}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/t]_1^{\frac{\mu}{p}} \|Mf\|_{L^p(B(x,t))} \\
&\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/t]_1^{\frac{\mu}{p}} t^{\frac{n}{p}} \sup_{\tau > 2t} \tau^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,\tau))} \\
&\lesssim \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/t]_1^{\frac{\mu}{p}} t^{\frac{n}{p}} \sup_{\tau > t} \tau^{-\frac{n}{p}} [\tau]_1^{\frac{\lambda}{p}} [1/\tau]_1^{-\frac{\mu}{p}} \\
&= \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} [t]_1^{\frac{n-\lambda}{p}} [1/t]_1^{\frac{\mu-n}{p}} \sup_{\tau > t} [\tau]_1^{\frac{\lambda-n}{p}} [1/\tau]_1^{\frac{n-\mu}{p}} \\
&= \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani M operatörünün $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.20. de $\lambda = \mu$ veya $\mu = 0$ olması durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.21. 1. $f \in L^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 \leq \lambda < n$ ise bu durumda $Mf \in WL^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{WL^{1,\lambda}} \leq C_{1,\lambda} \|f\|_{L^{1,\lambda}}.$$

Burada $C_{1,\lambda}$, f den bağımsızdır.

2. $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ ise bu durumda $Mf \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L^{p,\lambda}} \leq C_{p,\lambda} \|f\|_{L^{p,\lambda}}.$$

Burada $C_{p,\lambda}$, sadece p, λ ve n 'e bağlıdır [13].

Sonuç 4.22. 1. $f \in \tilde{L}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 \leq \lambda < n$ ise bu durumda $Mf \in W\tilde{L}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{W\tilde{L}^{1,\lambda}} \leq C_{1,\lambda} \|f\|_{\tilde{L}^{1,\lambda}}.$$

Burada $C_{1,\lambda}$, f den bağımsızdır.

2. $f \in \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ ise bu durumda $Mf \in \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} \leq C_{p,\lambda} \|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}}.$$

Burada $C_{p,\lambda}$, sadece p, λ ve n 'e bağlıdır [13].

4.1.2. Total Morrey-Guliyev Uzaylarında Kesirli Maksimal Operatör

Bu kısımda, $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzaylarında M_α kesirli maksimal operatörünün sınırlılığın için gerek ve yeter şartlarına yer verilmiştir. Ayrıca Guliyev ve ark. [12, 17] tarafından elde edilen sonuçlar aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Lemma 4.23. $0 \leq \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun. $p > 1$ ise bu durumda her $B(x, r)$ ve $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{L^q(B(x,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2r} t^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^p(B(x,t))}. \quad (4.7)$$

Ayrıca $p = 1$ ise bu durumda her $B(x, r)$ ve her $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{WL^q(B(x,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2r} t^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^1(B(x,t))} \quad (4.8)$$

[17].

Total Morrey-Guliyev uzaylarındaki kesirli maksimal operatörler için Spanne tipli sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.24. (Spanne tipli sonuç) $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda, \mu < n$, $0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun .

1. $p > 1$, $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda herhangi bir $M_\alpha f \in L^{q,\frac{\lambda q}{p},\frac{\mu q}{p}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{L^{q,\frac{\lambda q}{p},\frac{\mu q}{p}}} \leq C_{p,\lambda,\mu} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}.$$

Burada $C_{p,\lambda,\mu}$ sabiti sadece p, λ, μ ve n 'e bağlıdır.

2. $p = 1$, $f \in L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda herhangi bir $Mf \in WL^{q,\lambda q,\mu q}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{WL^{q,\lambda q,\mu q}} \leq C_{1,\lambda,\mu} \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}}.$$

Burada $C_{1,\lambda,\mu}$ sabiti f den bağımsızdır [14].

İspat. $1 < p < \infty$ olsun . (4.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|M_\alpha f\|_{L^{q,\frac{\lambda q}{p},\frac{\mu q}{p}}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \|M_\alpha f\|_{L^q(B(x,r))} \\ &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} r^{\frac{n}{q}} \sup_{t > 2r} t^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^p(B(x,t))} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \sup_{r > 0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} r^{-\alpha + \frac{n}{p}} \sup_{t > r} t^{\alpha - \frac{n}{p}} [t]_1^{\frac{\lambda}{p}} [1/t]_1^{-\frac{\mu}{p}} \\ &= \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \sup_{r > 0} [r]_1^{-\alpha + \frac{n-\lambda}{p}} [1/r]_1^{\alpha - \frac{n-\mu}{p}} \sup_{t > r} [t]_1^{\alpha - \frac{n-\lambda}{p}} [1/t]_1^{-\alpha + \frac{n-\mu}{p}} \\ &= \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $M_\alpha f$ operatörünün $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{q,\frac{\lambda q}{p},\frac{\mu q}{p}}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğunu gösterir.

$p = 1$ olsun . (4.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|M_\alpha f\|_{WL^{q,\lambda q,\mu q}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} [r]_1^{-\lambda} [1/r]_1^\mu \|M_\alpha f\|_{WL^q(B(x,r))} \\ &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} [r]_1^{-\lambda} [1/r]_1^\mu r^{\frac{n}{q}} \sup_{t > 2r} t^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^1(B(x,t))} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}} \sup_{r > 0} [r]_1^{-\lambda} [1/r]_1^\mu r^{-\alpha + n} \sup_{t > r} t^{\alpha - n} [t]_1^\lambda [1/t]_1^{-\mu} \\ &= \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}} \sup_{r > 0} [r]_1^{-\alpha + n - \lambda} [1/r]_1^{\alpha - (n - \mu)} \sup_{t > r} [t]_1^{\alpha - (n - \lambda)} [1/t]_1^{-\alpha + (n - \mu)} \\ &= \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}}, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $M_\alpha f$ operatörünün $L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^{q,\lambda q,\mu q}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.24. de $\alpha = 0$ olması durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.25. $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ ve $0 \leq \mu < n$ olsun.

1. $p > 1$, $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $Mf \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \leq C_{p,\lambda,\mu} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}.$$

Burada $C_{p,\lambda,\mu}$ sabiti sadece p, λ, μ ve n e bağlıdır.

2. $p = 1, f \in L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda herhangi bir $Mf \in WL^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{WL^{1,\lambda,\mu}} \leq C_{1,\lambda,\mu} \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}}.$$

Burada $C_{1,\lambda,\mu}$ sabiti sadece p, λ, μ ve n 'e bağlıdır [14].

Teorem 4.24. de $\lambda = \mu$ veya $\mu = 0$ şeklinde secildiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.26. $1 \leq p < \infty, 0 \leq \lambda < n, 0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun.

1. $p > 1, f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda herhangi bir $M_\alpha f \in L^{q, \frac{\lambda q}{p}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{L^{q, \frac{\lambda q}{p}}} \leq C_{p,\lambda} \|f\|_{L^{p,\lambda}}.$$

Burada $C_{p,\lambda}$ sabiti sadece p, λ ve n 'e bağlıdır.

2. $p = 1, f \in L^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda herhangi bir $M_\alpha f \in WL^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{WL^{q,\lambda}} \leq C_{1,\lambda} \|f\|_{L^{1,\lambda}}.$$

Burada $C_{1,\lambda}$ sabiti f den bağımsızdır [14].

Sonuç 4.27. $1 \leq p < \infty, 0 \leq \lambda < n, 0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun.

1. $p > 1, f \in \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda herhangi bir $M_\alpha f \in \tilde{L}^{q, \frac{\lambda q}{p}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{\tilde{L}^{q, \frac{\lambda q}{p}}} \leq C_{p,\lambda} \|f\|_{\tilde{L}^{p,\lambda}}.$$

Burada $C_{p,\lambda}$ sabiti sadece p, λ ve n 'e bağlıdır.

2. $p = 1, f \in \tilde{L}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda herhangi bir $M_\alpha f \in W\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{W\tilde{L}^{q,\lambda}} \leq C_{1,\lambda} \|f\|_{\tilde{L}^{1,\lambda}}.$$

Burada $C_{1,\lambda}$ sabiti f den bağımsızdır [14].

Total Morrey-Guliyev uzaylarında kesirli maksimal operatörler için Adams tipli sonuç aşağıda verilmiştir (örnek için bkz. [12]).

Teorem 4.28. (Total Morrey-Guliyev Uzayında Adams Teoremi)

$1 \leq p < \infty, 0 \leq \mu \leq \lambda < n, 0 \leq \alpha < \frac{n-\lambda}{p}$ olsun.

1. $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda

$$\frac{\alpha}{n-\mu} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$$

şartı, M_α operatörünün $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{q,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerekli ve yeterlidir.

2. $p = 1 < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda

$$\frac{\alpha}{n-\mu} \leq 1 - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$$

şartı, M_α operatörünün $L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{q,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerekli ve yeterlidir.

3. $\frac{n-\lambda}{\alpha} \leq p \leq \frac{n-\mu}{\alpha}$ ise bu durumda M_α operatörü $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına

sınırlıdır [14].

İspat. *Yeterlilik:* $1 \leq p < \infty, 0 \leq \mu \leq \lambda < n, 0 \leq \alpha < \frac{n-\lambda}{p}, \frac{\alpha}{n-\mu} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$ ve $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\begin{aligned} M_\alpha f(x) &\approx \sup_{r>0} r^{\alpha-n} \|f\|_{L^1(B(x,r))} \\ &\leq \sup_{r>0} \min \left\{ r^\alpha Mf(x), r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,r))} \right\} \\ &\leq \sup_{r>0} \min \left\{ r^\alpha Mf(x), r^{\alpha-\frac{n}{p}} [r]_1^{\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{-\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \right\} \\ &\leq \sup_{r>0} \min \left\{ r^\alpha Mf(x), [r]_1^{\alpha-\frac{n-\lambda}{p}} [1/r]_1^{-\alpha+\frac{n-\mu}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{0<r\leq 1} \min \left\{ r^\alpha Mf(x), r^{\alpha-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \right\}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{r>1} \min \left\{ r^\alpha Mf(x), r^{\alpha-\frac{n-\mu}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

r nin minimum değerleri sırasıyla

$$r = \left(\frac{\|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}}{Mf(x)} \right)^{\frac{p}{n-\lambda}} \quad \text{ve} \quad r = \left(\frac{\|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}}{Mf(x)} \right)^{\frac{p}{n-\mu}}$$

şeklinde alınır;sa;

$$M_\alpha f(x) \leq \max \left\{ (Mf(x))^{1-\frac{\alpha p}{n-\lambda}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}^{\frac{\alpha p}{n-\lambda}}, (Mf(x))^{1-\frac{\alpha p}{n-\mu}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}^{\frac{\alpha p}{n-\mu}} \right\}.$$

Burada supremum değeri, minimum değerlerinin dengelenmesi yöntemi ile elde edilmiştir.

Sonuç 4.25. ve (4.9) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|M_\alpha f\|_{L^{q,\lambda,\mu}} &\lesssim \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}^{1-\frac{p}{q}} \|(Mf)^{\frac{p}{q}}\|_{L^{q,\lambda,\mu}} \\ &= \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}^{1-\frac{p}{q}} \|Mf\|_{L^{p,\lambda,\mu}}^{\frac{p}{q}} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \end{aligned}$$

elde edilir. $1 < p < q < \infty$ ve $p = 1 < q < \infty$ durumunda ise

$$\begin{aligned} \|M_\alpha f\|_{WL^{q,\lambda,\mu}} &\lesssim \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}}^{1-\frac{1}{q}} \|Mf\|_{WL^{1,\lambda,\mu}}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}}. \end{aligned}$$

Gereklilik: $1 \leq p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{n-\mu} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$, $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ olsun ve M_α operatörünün $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{q,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğu kabul edilsin.

$f_t(x) =: f(tx)$, $[t]_{1,+} = \max\{1, t\}$ olarak seçilirse bu durumda

$$\begin{aligned} \|f_t\|_{L^{p,\lambda,\mu}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f_t\|_{L^p(B(x,r))} \\ &= t^{-\frac{n}{p}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,tr))} \\ &= t^{-\frac{n}{p}} \sup_{r > 0} \left(\frac{[tr]_1}{[r]_1} \right)^{\frac{\lambda}{p}} \sup_{r > 0} \left(\frac{[1/r]_1}{[1/(tr)]_1} \right)^{\frac{\mu}{p}} \\ &\quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} [tr]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/(tr)]_1^{\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,tr))} \\ &= t^{-\frac{n}{p}} [t]_{1,+}^{\frac{\lambda}{p}} [1/t]_{1,+}^{-\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$M_\alpha f_t(x) = t^{-\alpha} M_\alpha f(tx),$$

$$\begin{aligned}
\|M_\alpha f_t\|_{L^{q,\lambda,\mu}} &= t^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \|M_\alpha f(t \cdot)\|_{L^q(B(x,r))} \\
&= t^{-\alpha - \frac{n}{q}} \sup_{r > 0} \left(\frac{[tr]_1}{[r]_1} \right)^{\lambda/q} \sup_{r > 0} \left(\frac{[1/r]_1}{[1/(tr)]_1} \right)^{\mu/q} \\
&\quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} [tr]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/(tr)]_1^{\frac{\mu}{p}} \|M_\alpha f\|_{L^q(B(tx,tr))} \\
&= t^{-\alpha - \frac{n}{q}} [t]_{1,+}^{\frac{\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{-\frac{\mu}{q}} \|M_\alpha f\|_{L^{q,\lambda,\mu}}.
\end{aligned}$$

M_α operatörünün $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{q,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\begin{aligned}
\|M_\alpha f\|_{L^{q,\lambda,\mu}} &= t^{\alpha + \frac{n}{q}} [t]_{1,+}^{-\frac{\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{\frac{\mu}{q}} \|M_\alpha f_t\|_{L^{q,\lambda,\mu}} \\
&\lesssim t^{\alpha + \frac{n}{q}} [t]_{1,+}^{-\frac{\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{\frac{\mu}{q}} \|f_t\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \\
&= t^{\alpha + \frac{n}{q} - \frac{n}{p}} [t]_{1,+}^{\frac{\lambda}{p} - \frac{\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{-\frac{\mu}{p} + \frac{\mu}{q}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \\
&= t^\alpha [t]_{1,+}^{-\frac{n-\lambda}{p} + \frac{n-\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{\frac{n-\mu}{p} - \frac{n-\mu}{q}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n-\mu}$ ise bu durumda $t \rightarrow 0$ iken her $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{L^{q,\lambda,\mu}} = 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n-\lambda}$ ise bu durumda $t \rightarrow \infty$ iken her $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{L^{q,\lambda,\mu}} = 0$$

elde edilir.

Dolayısıyla,

$$\frac{\alpha}{n-\lambda} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\mu}$$

$p = 1 < \frac{n-\mu}{\alpha}$, $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ olsun ve M_α operatörünün $L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^{q,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\|f_t\|_{L^{1,\lambda,\mu}} = t^{-n} [t]_{1,+}^\lambda [1/t]_{1,+}^{-\mu} \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|M_\alpha f_t\|_{WL^{q,\lambda,\mu}} &= t^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{\frac{\mu}{p}} \|M_\alpha f(t \cdot)\|_{WL^q(B(x,r))} \\
&= t^{-\alpha-\frac{n}{q}} \sup_{r>0} \left(\frac{[tr]_1}{[r]_1} \right)^{\lambda/q} \sup_{r>0} \left(\frac{[1/r]_1}{[1/(tr)]_1} \right)^{\mu/q} \\
&\quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} [tr]_1^{-\frac{\lambda}{p}} [1/(tr)]_1^{\frac{\mu}{p}} \|M_\alpha f\|_{WL^q(B(tx,tr))} \\
&= t^{-\alpha-\frac{n}{q}} [t]_{1,+}^{\frac{\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{-\frac{\mu}{q}} \|M_\alpha f\|_{WL^{q,\lambda,\mu}}
\end{aligned}$$

M_α operatörü, $L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^{q,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned}
\|M_\alpha f\|_{WL^{q,\lambda,\mu}} &= t^{\alpha+\frac{n}{q}} [t]_{1,+}^{-\frac{\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{\frac{\mu}{q}} \|M_\alpha f_t\|_{WL^{q,\lambda,\mu}} \\
&\lesssim t^{\alpha+\frac{n}{q}} [t]_{1,+}^{-\frac{\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{\frac{\mu}{q}} \|f_t\|_{L^{1,\lambda,\mu}} \\
&= t^{\alpha+\frac{n}{q}-n} [t]_{1,+}^{\lambda-\frac{\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{-\mu+\frac{\mu}{q}} \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}} \\
&= t^\alpha [t]_{1,+}^{-n+\lambda+\frac{n-\lambda}{q}} [1/t]_{1,+}^{n-\mu-\frac{n-\mu}{q}} \|f\|_{L^{1,\lambda,\mu}}.
\end{aligned}$$

$1 < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n-\lambda}$ ise bu durumda $t \rightarrow 0$ iken her $f \in L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{WL^{q,\lambda,\mu}} = 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $1 > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n-\mu}$ ise bu durumda $t \rightarrow \infty$ iken her $f \in L^{1,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{WL^{q,\lambda,\mu}} = 0$$

elde edilir.

Dolayısıyla,

$$\frac{\alpha}{n-\lambda} \leq 1 - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\mu}.$$

$\frac{n-\lambda}{\alpha} \leq p \leq \frac{n-\mu}{\alpha}$ ise bu durumda M_α operatörü $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığının ispatı;

$\frac{n-\mu}{\alpha} \leq p \leq \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ve $f \in L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
M_\alpha f(x) &\approx \sup_{r>0} r^{\alpha-n} \|f\|_{L^1(B(x,r))} \\
&\leq \sup_{r>0} r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,r))} \\
&\leq \sup_{r>0} r^{\alpha-\frac{n}{p}} [r]_1^{\frac{\lambda}{p}} [1/r]_1^{-\frac{\mu}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \\
&\leq \sup_{r>0} [r]_1^{\alpha-\frac{n-\lambda}{p}} [1/r]_1^{-\alpha+\frac{n-\mu}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \\
&\leq \max \left\{ \sup_{0<r\leq 1} r^{\alpha-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}}, \sup_{r>1} r^{\alpha-\frac{n-\mu}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \right\} \\
&\lesssim \|f\|_{L^{p,\lambda,\mu}} \\
&\iff \frac{n-\lambda}{p} \leq \alpha \leq \frac{n-\mu}{p}
\end{aligned}$$

elde edilir böylece M_α operatörü $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. ■

Theorem 4.28. den $\lambda = \mu$ veya $\mu = 0$ olması durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.29. (Adams sonucu) $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$, $0 \leq \alpha < \frac{n-\lambda}{p}$ olsun.

1. $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda M_α operatörünün $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}.$$

2. $p = 1 < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda M_α operatörünün $L^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter şart

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}.$$

3. $p = \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda M_α operatörü $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [14].

Sonuç 4.30. $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$, $0 \leq \alpha < \frac{n-\lambda}{p}$ olsun.

1. $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda M_α operatörünün $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter şart

$$\frac{\alpha}{n} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}.$$

2. $p = 1 < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise bu durumda M_α operatörünün $\tilde{L}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter şart

$$\frac{\alpha}{n} \leq 1 - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n - \lambda}.$$

3. $\frac{n-\lambda}{\alpha} \leq p \leq \frac{n}{\alpha}$ ise bu durumda M_α operatörü $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [14].

5. SONUÇLAR

Morrey uzaylarının bir versiyonu olan $0 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $L^{p,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^n)$ total Morrey-Guliyev uzayları, 2022 yılında V.S. Guliyev [13] tarafından araştırılmıştır. Total Morrey-Guliyev uzayları aslında klasik Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda,\lambda}(\mathbb{R}^n) \equiv L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve modified Morrey uzaylarının yani $L^{p,\lambda,0}(\mathbb{R}^n) = \tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olacak şekildeki bir genelleştirmesidir. Bu tez konusunu bir başlangıç kabul edilerek, "Total Morrey-Guliyev uzayları ve bu uzaylarda bazı integral operatörlerinin sınırlılığı" konusunda daha ileri düzeyde çalışmalar yapabilmek için bir temel oluşturulması hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

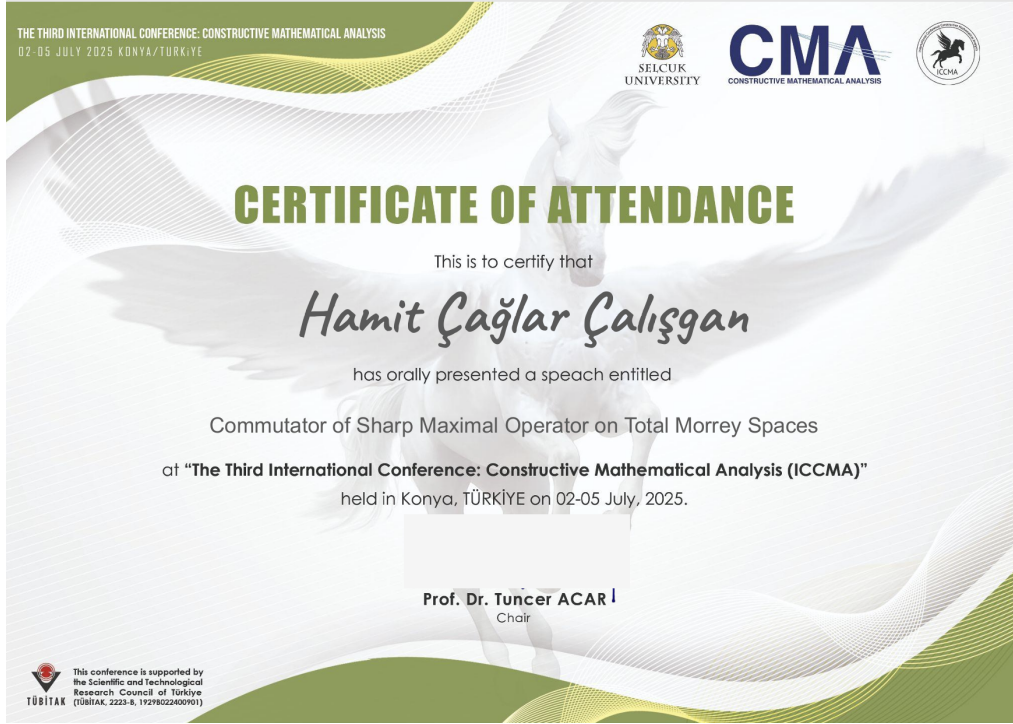
- [1] Adams, D. R. (1975). A note on Riesz potentials. *Duke Mathematical Journal*, 42(4), 765–778. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-75-04265-9>
- [2] Adams, R. A., & Fournier, J. (2003). *Sobolev spaces*. Academic Press.
- [3] Akbulut, A., Guliyev, V., & Mustafayev, R. (2012). On the boundedness of the maximal operator and singular integral operators in generalized Morrey spaces. *Mathematica Bohemica*, 137, 27–43. <https://doi.org/10.21136/MB.2012.142786>
- [4] Akbulut, A., Isayev, F. A., & Omarova, M. N. (2026). Commutators of parabolic integral operators with parabolic Lipschitz functions on parabolic total Morrey-Guliyev spaces. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 16(1), 287–300. <https://doi.org/10.59849/2218-6816.2026.1.287>
- [5] Akbulut, A., Isayev, F. A., & Omarova, M. N. (2026). Parabolic fractional integral operators on parabolic total Morrey-Guliyev spaces. *Integral Transforms and Special Functions*, 1–13.
- [6] Almeida, A., Hasanov, J., & Samko, S. G. (2008). Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces. *Georgian Mathematical Journal*, 15(2), 195–208. <https://doi.org/10.1515/GMJ.2008.195>
- [7] Alp, M., & Musayev, B. (2000). *Fonksiyonel analiz*. Balcı Yayınları.
- [8] Deringoz, F., Guliyev, V. S., & Samko, S. (2014). Boundedness of the maximal and singular operators on generalized Orlicz-Morrey spaces. In M. A. Bastos, A. Lebre, S. Samko, & I. M. Spitkovsky (Eds.), *Operator theory, operator algebras and applications* (pp. 139–158). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0816-3_7
- [9] Grafakos, L. (2004). *Classical and modern Fourier analysis*. Springer.
- [10] Guliyev, V. S. (1994). *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in $\mathbb{R}^n$* [Doctor's degree dissertation]. Steklov Mathematical Institute.
- [11] Guliyev, V. S. (1999). *Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups. Some applications* [in Russian]. Casioglu.
- [12] Guliyev, V. S. (2009). Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2009(1), Article 503948.
- [13] Guliyev, V. S. (2022). Maximal commutator and commutator of maximal function on total Morrey-Guliyev spaces. *Journal of Mathematical Inequalities*, 16(4), 1509–1524. <https://doi.org/10.7153/jmi-2022-16-98>
- [14] Guliyev, V. S. (2024). Characterizations for the fractional maximal operator and its commutators on total Morrey spaces. *Positivity*, 28(4), Article 51. <https://doi.org/10.1007/s11117-024-01068-x>

- [15] Guliyev, V. S. (2026). Characterizations of commutators of the fractional maximal function in total Morrey spaces on stratified Lie groups. *Aequationes Mathematicae*, 100(1), 1–26.
- [16] Guliyev, V. S. (2026). Hardy-Littlewood-Sobolev inequality in total Morrey spaces. *Positivity*, 30(1), Article 9. <https://doi.org/10.1007/s11117-025-01165-5>
- [17] Guliyev, V. S., Akbulut, A., & Mammadov, Y. Y. (2013). Boundedness of fractional maximal operator and their higher order commutators in generalized Morrey spaces on Carnot groups. *Acta Mathematica Scientia Series B (English Edition)*, 33(5), 1329–1346. [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(13\)60085-5](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(13)60085-5)
- [18] Guliyev, V. S., Hasanov, J. J., & Samko, S. G. (2010). Boundedness of maximal, potential type, and singular integral operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces. *Journal of Mathematical Sciences*, 170(4), 423–443. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0095-7>
- [19] Guliyev, V. S., Hasanov, J. J., & Samko, S. G. (2010). Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces. *Mathematica Scandinavica*, 107(2), 285–304. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-15156>
- [20] Guliyev, V. S., Hasanov, J. J., & Zeren, Y. (2011). Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in modified Morrey spaces. *Journal of Mathematical Inequalities*, 5(4), 491–506. <https://doi.org/10.7153/jmi-05-43>
- [21] Gunawan, H., Hakim, D. I., Limanta, K. M., & Masta, A. A. (2017). Inclusion properties of generalized Morrey spaces. *Mathematische Nachrichten*, 290(2-3), 332–340.
- [22] Kinnunen, J., & Vähäkangas, A. (2021). *Maximal function methods for Sobolev spaces* (Vol. 257). American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/surv/257>
- [23] Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1957). *Elements of the theory of functions and functional analysis* (Vol. 1). Graylock Press.
- [24] Kuttler, K. (2001). *Basic analysis*. Rinton Press.
- [25] Lebesgue, H. (1950). *Notices d'histoire des mathématiques* [Notices of the history of mathematics]. Monographies de L'Enseignement Mathématique.
- [26] Mingione, G. (2010). Gradient estimates below the duality exponent. *Mathematische Annalen*, 346(3), 571–627. <https://doi.org/10.1007/s00208-009-0411-z>
- [27] Morrey, C. B. (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(1), 126–166. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8>
- [28] Nakai, E. (2008). Orlicz-Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function. *Studia Mathematica*, 188(3), 193–221.

- [29] Omarova, M. N. (2025). Commutators of parabolic fractional maximal operators on parabolic total Morrey spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 48(11), 11037–11044. <https://doi.org/10.1002/mma.10940>
- [30] Pick, L., Kufner, A., John, O., & Fucík, S. (2013). *Function spaces* (Vol. 1). De Gruyter. <https://doi.org/10.1515/9783110250428>
- [31] Riesz, F. (1910). Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. *Mathematische Annalen*, 69, 449–497.
- [32] Royden, H. L. (1968). *Real analysis* (2nd ed.). MacMillan.
- [33] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- [34] Rudin, W. (1991). *Functional analysis* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- [35] Sadosky, C. (1979). *Interpolation of operators and singular integrals*. Marcel Dekker.
- [36] Sawano, Y., Sugano, S., & Tanaka, H. (2012). Orlicz-Morrey spaces and fractional operators. *Potential Analysis*, 36(4), 517–556. <https://doi.org/10.1007/s11118-011-9239-8>
- [37] Stein, E. M. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press.
- [38] Wei, M., Hou, Y., & Yan, D. (2025). Sharp bounds for the m -linear Hardy operator on central total Morrey spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 22(2), Article 47. <https://doi.org/10.1007/s00009-025-02814-5>
- [39] Wei, M., Li, S., Liu, X., & Hou, Y. (2025). Three geometric constants for total Morrey spaces. *Mathematical Inequalities and Analysis*, 28(2), 271–277. <https://doi.org/10.7153/mia-2025-28-18>
- [40] Zhang, J., & Zheng, S. (2018). Weighted Lorentz and Lorentz-Morrey estimates to viscosity solutions of fully nonlinear elliptic equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 63(9), 1271–1289. <https://doi.org/10.1080/17476933.2017.1357707>

EKLER

EK-1. Konferans Katılım Belgesi



EK-2. Konferans Katılım Belgesi



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı	Hamit Çağlar ÇALIŞGAN
Uyruğu	T.C.
Orcid Numarası	0009-0006-7780-0243

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Fakülte	Fen Edebiyat
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2022
Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Enstitü	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Mezuniyet Yılı	2026

Makaleler ve Bildiriler	
Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler	
Uluslararası Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler	
- Calisgan, H. C., Celik, S., Guliyev, V. S., & Polat, N. (2026, June 23–25). <i>Commutator of the maximal function in total Morrey spaces in the Dunkl setting</i>. Paper presented at the 2nd International Conference on Modern Problems of Mathematics, Mechanics and Their Applications (MPMMA), Baku, Azerbaijan. - Celik, S., Calisgan, H. C., & Guliyev, V. S. (2025, July 2–5). <i>Commutator of sharp maximal operator on total Morrey spaces</i>. Paper presented at the Third International Conference: Constructive Mathematical Analysis (ICCMA), Konya, Türkiye.	