



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



KABA MATRİS TEORİSİ İNŞASI, DENK MATRİS YAPISI, BENZERLİK VE KARAR VERME UYGULAMALARI

Assiye Canan GÜNEŞ

YÜKSEK LİSANS

KIRŞEHİR

2026



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



KABA MATRİS TEORİSİ İNŞASI, DENK MATRİS YAPISI, BENZERLİK VE KARAR VERME UYGULAMALARI

Assiye Canan GÜNEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

KIRŞEHİR

2026

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etięi Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduęum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettięimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Öęrenci
Assiye Canan GÜNEŞ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	I
TEŞEKKÜR	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
SİMGE VE KISALTMA DİZİNİ	V
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	5
2.1. Temel Bilgiler	5
3. MATERYAL VE METOT	7
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	9
4.1. Pawlak Yaklaşım Uzayında Matris Yapısı ve Kaba Kümelerin Belirlenmesi	9
4.2. CMA Üzerinde Denk Matrisler ve Kaba Kümelerin Yeni Karakterizasyonları	27
4.3. CMA Üzerinde Benzerlik Ölçümleri	31
4.4. Uygulamalar: Benzerlik ölçülerine dayalı karar verme sistemleri	34
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	45
KAYNAKLAR	47
6. EKLER	51
Ek 1. Kongre Katılım Belgesi.	52
ÖZGEÇMİŞ	53

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başlamamda ve bu tezin hazırlanması sürecinde değerli bilgilerini benden esirgemeyen, karşılaştığım tüm zorluklarda sabırla ve anlayışla yardımcı olup işlerimi kolaylaştıran ve daima desteğini hissettiğim çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans eğitimime başladığım günden itibaren benden desteklerini esirgemeyen Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik Bölümündeki tüm öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca fikirlerini ve görüşlerini benimle paylaşan çok saygı değer hocam Araştırma Görevlisi Dr. Savcı Rahman ARGÜN'e teşekkürlerimi sunarım.

Bana verdikleri sevgi ve emekle hayatım boyunca güçlü durmamı sağlayan ve bugünlere gelmemde büyük rol sahibi olan, benden desteklerini hiç bir zaman esirgemeyip bunu attığım her adımda hissettiren sevgili annem Güllü GÜNEŞ'e ve rahmetli babam Numan GÜNEŞ'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca benden manevi desteğini esirgemeyip her daim yanımda olan yol arkadaşım Furkan YILDIRIM'a teşekkür ederim.

Tezimi, babam Numan GÜNEŞ'e ithaf ederim.

Ocak, 2026

Assiye Canan GÜNEŞ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KABA MATRİS TEORİSİ İNŞASI, DENK MATRİS YAPISI, BENZERLİK VE KARAR VERME UYGULAMALARI

Assiye Canan GÜNEŞ

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Yıl: 2026 Sayfa: 53

Jüri: Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL

Bu çalışmada bir Pawlak yaklaşım uzayının karakteristik matrisleri tanıtılmış ve birleşim, kesişim, tümleyen, fark ve simetrik fark gibi işlemlerle desteklenmiştir. Yaklaşım matrisi, kabalık matrisi, üst ve alt yaklaşım matrisleri ve sınır matrisi karakteristik matrislerin özel türleri olarak tanımlanmış ve bu sayede kaba küme belirleme ve bilgisayar ortamında çok sayıda girdi içeren problemleri çözmeye gibi bir çok kullanışlı sonuç elde edilmiştir. Bir problemin çözümünde direkt olarak etkili olan kümeleri veren etki kümeleri tanıtılmış ve bu sayede bir kümenin dış ve iç ölçüleri ile yaklaşım doğruluğu tanımlanmıştır. Yeni bir kavram olan denk matris tanıtılmış ve denk matrisleri kullanarak benzerlik ölçüleri ile kaba kümelerin yeni karakterizasyonları sunulmuştur. Ayrıca yeni benzerlik yöntemlerini kullanarak bir şirketin başvurduğu ihale için işi tamamlamak üzere sunacağı zaman çizelgesinin tahmini değerinin nasıl hesaplanacağına ilişkin bir uygulamaya yer verilmiştir. Son olarak kaba matrislere ve ağırlıklı benzerlik ölçülerine dayalı yeni bir karar verme metodu önerilmiş ve hesaplama süreçlerini göstermek için günlük hayata dair uygulama ile desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Belirsizlik modelleme, Kaba kümeler, Yaklaşım matrisleri, Benzerlik ölçüsü, Karar verme

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

CONSTRUCTION OF ROUGH MATRIX THEORY, STRUCTURE OF EQUIVALENT MATRICES WITH SIMILARTY AND DECISION MAKING APPLICATIONS

Assiye Canan GÜNEŞ

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Akin Osman ATAGÜN

Year: 2026 **Pages:** 53

Juries: Prof. Dr. Akin Osman ATAGÜN

Prof. Dr. Ashhan SEZGİN

Assist. Prof. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL

In this study, characteristic matrices of a Pawlak approximation space are introduced and supported by operations such as union, intersection, complement, difference and symmetric difference. We define special types of characteristic matrices: approximation matrix, roughness matrix, upper and lower approximation matrices and boundary matrix and obtain many useful results such as rough set determination and solving problems involving many data entries in computer environment. We introduce effect sets that give the effective set in solving a problem and using this concept we define external and internal measures of a set and accuracy of the approximation. We present a new concept of equivalent matrices and a novel characterizations of rough sets with similarity measures using equivalent matrices. In addition, we give an application about how a company will calculate the estimated value of the timeline it will submit to complete the work for the tender it is applying for using new similarity methods. Finally, we propose a new decision-making method based on the rough matrices and weighted similarity measures and then followed by real-life application to illustrate the computational processes.

Keywords: Uncertainty modelling, Rough sets, Approximation matrices, Similarity measure, Decision-making

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\tilde{F}(A)$	A üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesi
$A = (U; R)$	Pawlak yaklaşım uzayı
CMA	Karakteristik matrisler kümesi
$ACM(A, X)$	A ve X e bağlı yaklaşım karakteristik matrisi
$R^*(X)$	X kümesinin üst yaklaşımı
$R_*(X)$	X kümesinin alt yaklaşımı
$Bnd_A(X)$	X in A daki sınırı
R	Denklik bağıntısı
$J_{[A^X]}$	Üst etki kümesi
$J_{[A_X]}$	Alt etki kümesi
$J_{[X]}$	Etki kümesi
$E_{[X]}^j$	j inci denklik sayısı
S_M	M -benzerlik ölçüsü

1. GİRİŞ

Pawlak [27], 1982'de belirsizlik içeren problemlerle başa çıkmak için kümelerin bazı yaklaşımlarını tanıtan kaba küme teorisini önermiştir. Kaba küme teorisi, günümüzde teknolojik gelişimin inşa edildiği yapay zeka ve bilişsel bilimler başta olmak üzere makine öğrenmesi, akıllı sistemler, tümevarımsal muhakeme, örüntü tanıma, bilgi sistemleri, karar verme ve uzman sistemler gibi bir çok araştırma alanında temel bir öneme sahiptir [27, 28, 29, 30, 31].

Kaba kümelere bağlı cebirsel yapılar birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. [16] da kaba kümelere cebirsel bir yaklaşım getirilmiştir. [2] de Pawlak yaklaşım uzayına göre ve genelleştirilmiş yaklaşım uzayına göre hemiringlerde kabalık çalışması başlatılmış, ayrıca alt ve üst kaba alt hemiringleri ve idealleri incelenmiştir. [8] de yazarlar kaba kümelerin bazı cebirsel ve küme teorik özelliklerini ele almışlardır. [9] da yazarlar, kaba 3-değerli Lukasiewicz cebiri ile ilgili yaklaşım uzayının tüm kesin kümeleri tarafından oluşturulan Boole cebiri arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. [10] da, yazar kaba kümeler ve halka teorisi arasındaki ilişkiyle ilgilenmiş ve bir halkadaki alt halka (ideal) kavramının genişletilmiş bir kavramı olan bir halkanın idealine göre kaba alt halka (ideal) kavramını tanıtmıştır. [11] de yazar kaba kümeler, bulanık kümeler ve halka teorisi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca aynı yazar [12] de cebirsel sistemler, kaba kümeler ve bulanık kaba küme modelleri arasındaki ilişkiyi tartışmıştır. [19] da, [10, 11] tarafından sunulan fikirlerin devamı olarak yazarlar bir halkada kaba asal (birincil) idealler ve kaba bulanık asal (birincil) idealler kavramlarını tanıtmışlar ve bu ideallerin bazı özelliklerini vermişlerdir. [10, 11] makalelerinden sonra yazarlar, bir halkanın küme değerli homomorfizmi ve kuvvet küme değerli homomorfizm kavramlarını ve [39] daki bir halkanın alt ve üst yaklaşımı kavramının bir genellemesi olan küme değerli bir eşleme vasıtasıyla inşa edilen genelleştirilmiş alt ve üst yaklaşım operatörleri kavramlarını sunmuşlardır. [20] de yazar, bir yarı gruptaki kaba sol [sağ] ideal kavramını, bir yarı gruptaki sol [sağ] idealin genişletilmiş bir kavramı olarak tanıtmıştır. [38] de yazarlar, bir yarı gruptaki kaba asal idealler ve kaba bulanık asal idealler kavramlarını ele almışlardır ve bu tür ideallerin bazı özelliklerini vermişlerdir. [21] de yazar kaba kümeler ve hipergrup teorisi arasında bir ilişki sunmuştur. Ayrıca kaba alt grup ve bulanık kaba alt grup kavramlarını tanıtmıştır. [21] makalesinden sonra, yazarlar [22] de kaba kümeleri değişmeli n -li hipergruplar bağlamında incelemeyi amaçlamışlardır. [24] de yazarlar, keyfi ikili bağıntılara dayalı alt ve üst yaklaşımların yapılarını sunmuş ve kaba küme arka planlarında belief fonksiyonlarının yorumlanması ile ilgili bazı mevcut sonuçları genişletmişlerdir. Ayrıca kaba küme teorisindeki tanımlanabilir küme kavramlarına dayanarak genelleştirilmiş kaba kümelerdeki iki Boole alt cebirini incelemişlerdir.

Pawlak'ın kaba küme teorisinde denklik bağıntısının gerekliliğinin sınırlayıcı olduğu düşünülerek birçok araştırmacı tarafından genelleştirme teorileri ortaya atılmıştır [1, 14, 15,

17, 24, 32, 34, 40, 42, 44]. Kaba küme teorisinin uygulamaları günümüze kadar genellikle kaba bulanık kümeler ve bulanık kaba kümeler [14], [3], esnek kaba kümeler ve esnek kaba bulanık kümeler [15], geliştirilmiş esnek kaba kümeler [34], [4], [5] ve strait bulanık kaba kümeler [6] gibi hibrit yapılar yardımıyla problemleri çözmüştür.

[35] makalesinde yazarlar, Pawlak [27] tarafından tanımlanan kaba üyelik fonksiyonu ve RMmDM (Rough Maxmin Decision Making) yöntemini kullanarak kaba matris teorisini tanıtmışlardır. Bu tez çalışmasında ise kaba matris teorisi tamamen farklı bir bakış açısıyla denklik sınıflarının etkin bir şekilde kullanıldığı farklı bir teknikte oluşturulmuştur.

Benzerlik ölçümü, belirsizlik içeren bilgilerin ölçülmesinde kullanılan etkili yöntemlerden biridir. Piyasa tahmini, örüntü tanıma, karar verme, makine öğrenimi ve tıbbi teşhis gibi birçok uygulama alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Literatürdeki farklı benzerlik ölçüleri açıklanmış ve farklı bulanık küme ikilileri arasında karşılaştırmalı bir çalışma sunulmuştur. [25, 36, 37] de yazarlar bulanık kümelerin benzerlik ölçülerini aksiyomatik olarak tanımlamış ve temel özelliklerini ortaya koymuşlardır. [7] de yazarlar, $[0, 1]$ aralığında bir değere sahip belirli bir evrenin iki bulanık alt kümesi arasındaki benzerliği bir oran veya ölçü olarak veren bir dizi aksiyom sunmuşlardır. Yazarlar [26] da bulanık kümelerin benzerlik ölçüleri üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini incelemişlerdir. Etkili benzerlik ölçüleri sezgisel bulanık kümeler [18], bulanık kaba kümeler [33, 41] ve aralık değerli bulanık kümeler [23, 13] gibi çeşitli hibrit yapılar üzerinde de tanımlanmıştır.

Bu çalışmanın temel amacı Pawlak yaklaşım uzayını ve bu yaklaşım uzayının üst alt yaklaşımları gibi bileşenlerini matrislerle ifade etmek ve bu sayede hibrit yapılara ihtiyaç duymadan kaba kümelerin günlük hayat ve cebirsel uygulamalarını yapabilmektir. Ayrıca tüm bileşenleri 0 ve 1 sayılarından oluşan matrislerin kullanım amacı verileri bilgisayar ortamına aktarılacak ve ek olarak çok sayıda veri girişi gerektiren karmaşık ve belirsiz problemlerin çözülmesidir.

Bu çalışmada, ilk olarak bileşenleri sadece 0 ve 1 sayıları olan bir Pawlak yaklaşım uzayının karakteristik matrisleri tanımlanmıştır. Karakteristik matrislerin özel türleri olan yaklaşım matrisi, kabalık matrisi, üst ve alt yaklaşım matrisleri ve sınır matrisi tanımlanmış ve bu sayede kaba küme belirleme ve çok sayıda veri girişi içeren problemlerin bilgisayar ortamında çözülmesi gibi birçok faydalı sonuç elde edilmiştir. Daha sonra etki kümeleri, bir kümenin dış ve iç ölçüleri ve yaklaşımın doğruluğu tanımlanmıştır. Ayrıca, denk matrisler tanımlanmış ve denk matrisler kullanılarak kaba kümelerin yeni bir karakterizasyonu ve benzerlik ölçümleri sunulmuştur. Son olarak, ağırlıklı benzerlik ölçümleri kullanılarak, yeni bir karar verme yöntemi önerilmiş ve belirli bir işin tamamlanması için gereken sürenin hesaplanması ve uygun personelin seçilmesi üzerine gerçek hayat uygulamaları yapılmıştır.

Kaba Matris Teorisi Hakkında Otantik Yaşam Motivasyonu:

Giriş bölümünün bu kısmında kaba matris teorisinin günlük hayatta kullanılmasının uygun olduğu bir örnek üzerinde duralım. Burada verilen bir alternatifler kümesinin doğal

olarak oluşan parçalanışlarını içeren ve aynı zamanda çok fazla veri girişi gerektiren aşağıdaki örnek sunulmaktadır.

Milli Eğitim Bakanlığı farklı branşlarda eğitim vermek üzere 2000 öğretmen atamayı planlamaktadır. Bu branşların ve alınacak personel sayısının matematik (700), edebiyat (800), coğrafya (150), tarih (250) ve beden eğitimi (100) olduğunu varsayalım. Matematik alanında öğretmen olmak isteyenlerden 1000 başvuru, edebiyat alanında 1700 başvuru, coğrafya alanında 600 başvuru, tarih alanında 800 başvuru ve beden eğitimi alanında 400 başvuru olsun. İstihdam edilecek öğretmenler için kriterler şu şekilde belirlenmiştir: C_1 : merkezi sınav puanı, C_2 : üniversite mezuniyet puanı, C_3 : özel sektörde iş deneyimi olanlar, C_4 : yaş aralığı ve C_5 : merkezi yabancı dil puanı. Bu durumda, kriterler seçilen kümelerin parçalanışlarını da belirler. Örneğin, $U_M = \{u_1, u_2, \dots, u_{1000}\}$ matematik alanı için başvuranların kümesi olsun. C_1 kriteri için alt kriterler ve ağırlık değerleri şu şekilde belirlenmiştir: C_{11} : merkezi not aralığı $[90, 100]$, $w_{11} = 0.4$; C_{12} : merkezi not aralığı $[85, 90)$, $w_{12} = 0.35$; C_{13} : merkezi not aralığı $[75, 85)$, $w_{13} = 0.15$ ve C_{14} : merkezi not aralığı $[70, 75)$, $w_{14} = 0.1$. Burada merkezi sınav puanı 70'in altında olanların başvuramayacağını belirtmeliyiz. Dolayısıyla $\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\}$ kümesi U_M nin bir parçalanışdır. Eğer R_M bu bölüme karşılık gelen denklik bağıntısı ise $A_M = (U; R_M)$ bir Pawlak yaklaşım uzayıdır. Aynı durumun diğer dallar ve kriterler için de yapılması gerektiğinden, bu kadar büyük veriler üzerinde küme işlemleri yapmak neredeyse imkansızdır. Günlük hayattan alınan bu örnekte çok fazla veri girişi gerektiğinden bunların matrisler yardımıyla bilgisayar ortamına aktarılması kolaylığı vazgeçilmezdir.

Bu çalışmanın geri kalanı aşağıdaki gibi bölümlere ayrılmıştır: Bölüm 2 de bu çalışmanın ana sonuçlarını geliştirmek için kaba kümeler üzerine birkaç temel açıklama ve işlem sunulmaktadır. Bölüm 3, Pawlak [27] tarafından verilen tüm kavramların matrisler aracılığıyla ifade edilmesini açıklamaktadır. Bölüm 4, yeni bir kavram olan denk matrisleri tanıtmakta ve birçok önemli sonuçla birlikte kaba kümelerin basitleştirilmiş ve kullanışlı bir karakterizasyonunu sağlamaktadır. Bölüm 5, denk matrisleri kullanarak benzerlik ölçüsü fikrini ortaya koymaktadır. Bölüm 6, benzerlik ve karar verme algoritmalarını ve bunların gerçek hayattaki uygulamalarını kapsamaktadır. Bölüm 7 de bu yapılan çalışmanın, tartışma ve değerlendirmesidir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Temel Bilgiler

Tanım 2.1. [43] $A \neq \emptyset$ evrensel bir küme olsun. Bu durumda A üzerinde μ bulanık kümesi, $\mu = \{(x, \mu(x)) | x \in A\}$ ikililerin kümesidir. Burada, $\mu : A \rightarrow [0, 1]$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonudur.

A üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesi $\tilde{F}(A)$ ile gösterilecektir. Bulanık küme işlemlerinden bazıları aşağıda verilmiştir:

Tanım 2.2. [43] $\mu, \nu \in \tilde{F}(A)$ olsun.

- $\forall x \in A$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise bu durumda ν, μ yü içerir denir ve $\mu \subseteq \nu$ ile gösterilir.
- μ ve ν nün kesişimi, $\forall x \in A$ için $(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) = \min\{\mu(x), \nu(x)\}$ olarak tanımlanır.
- μ ve ν nün birleşimi $\forall x \in A$ için $(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) = \max\{\mu(x), \nu(x)\}$ olarak tanımlanır.
- μ nün tümleyeni $\forall x \in A$ için $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.3. [27] U evrensel olarak adlandırılan belirli bir küme ve R, U üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda $A = (U; R)$ ikilisine bir **yaklaşım uzayı** denir. U nun R bağıntısına göre denklik sınıfları A da **elementer kümeler (atomlar)** olarak adlandırılır. A daki tüm atomların kümesi $U/R = \{[x]_R | x \in U\}$ ile gösterilir. A daki elementer kümelerin her sonlu birleşimine A da bir **birleşik küme (composed set)** adı verilir.

Tanım 2.4. [27] $A = (U; R)$ bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $R^*X = \{x \in U | [x]_R \cap X \neq \emptyset\}$ X in A daki **en iyi üst yaklaşımı** ve $R_*X = \{x \in U | [x]_R \subseteq X\}$ X in A daki **en iyi alt yaklaşımı** olarak adlandırılır. Burada $[x]_R, x \in U$ nun bir denklik sınıfıdır. $Bnd_A(X) = R^*X \setminus R_*X$ kümesine X in A daki **sınırı** denir. Eğer $Bnd_A(X) = \emptyset$ ise U nun bir X alt kümesine yani $X \subseteq U$ ya A da **tanımlanabilir** denir. Tersisi durumda yani $Bnd_A(X) \neq \emptyset$ ise X in A da bir **kaba küme** olduğu söylenir.

Tanım 2.5. [27] $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. $\underline{\mu}_A(x)(\bar{\mu}_A(x))$ ile $R_*X(R^*X)$ in içerisindeki atomların sayısı gösterilir ve X in A daki **iç (dış) ölçüsü** olarak adlandırılır. Eğer $\underline{\mu}_A(x) = \bar{\mu}_A(x)$ ise X, A da **ölçülebilirdir** denir. Böylece X in A da birleşik küme olması için gerek ve yeter şart X in A da ölçülebilir olmasıdır. $\bar{\mu}_A(x) \neq 0$ olmak üzere $\mu(X) = \frac{\mu_A(x)}{\bar{\mu}_A(x)}$ sayısına X in A daki **yaklaşım doğruluğu** denir. Herhangi bir $A = (U; R)$ yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ için $0 \leq \mu_A(X) \leq 1$ olduğu açıktır. A daki herhangi bir ölçülebilir X kümesi için $\mu_A(X) = 1$ şeklindedir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu tez çalışmasında ilk olarak literatür çalışması yapılmıştır. Ayrıca çalışma süresince tez konusu ile ilgili tüm kaynak kitaplar ve makalelerden yararlanılmıştır. Bu çalışmada ilk olarak cebirsel metot kullanılarak kaba matris teorisinde ifade edilen tüm yapıların matris karşılığı inşa edilmiştir. İnşa ettiğimiz matrisler yardımı ile yüksek veri girişi gerektiren problemlerin çözümü için yeni ve etkili yöntemler kullanılmıştır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Pawlak Yaklaşım Uzayında Matris Yapısı ve Kaba Kümelerin Belirlenmesi

Bu bölüm Pawlak [27] tarafından verilen tüm kavramların matrislerle ifadesinin tanımlanmasına ayrılmıştır. Verilen kavramlar, yapısı gereği kaba küme teorisinin inşasına benzemektedir. Bu sayede Pawlak yaklaşım uzayında yer alan kavramlar ile tanımlanan matris yapıları karşılıklı olarak birbirlerini ifade edebilmektedir.

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. U nun R ye karşılık gelen parçalanışı $U/R = \{C_j | j = 1, 2, \dots, r\}$. Burada $r = |U/R|$, U üzerinde R ye karşılık gelen farklı denklik sınıflarının sayısıdır.

Tanım 4.1. Bileşenleri tamamen 1 ler ve 0 lardan oluşan tüm $n \times r$ tipindeki matrislerin kümesine A nın **Karakteristik Matrisler Kümesi** denir ve CMA ile gösterilir, yani $CMA = \{[a_{ij}]_{n \times r} | a_{ij} = 1 \vee 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, r\}\}$ ile gösterilir.

Tanım 4.2. $[b_{ij}]_{n \times r}, [c_{ij}]_{n \times r} \in CMA$ olsun.

- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $b_{ij} \leq c_{ij}$ ise, $[b_{ij}], [c_{ij}]$ nin CMA da **alt matrisidir** ve $[b_{ij}] \subseteq [c_{ij}]$ ile gösterilir.
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $b_{ij} \leq c_{ij}$ fakat en az bir terimi için $b_{ij} < c_{ij}$ ise, $[b_{ij}], [c_{ij}]$ nin CMA da **öz alt matrisidir** ve $[b_{ij}] \subset [c_{ij}]$ ile gösterilir.
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $b_{ij} = c_{ij}$ ise $[b_{ij}]$ ve $[c_{ij}]$ matrislerine CMA da **eşit matrisler** denir ve $[b_{ij}] = [c_{ij}]$ ile gösterilir.
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $b_{ij} = 0$ ise, $[b_{ij}]$ matrisine CMA da **sıfır matrisi** denir ve $[0]$ ile gösterilir.
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $b_{ij} = 1$ ise, $[b_{ij}]$ matrisine CMA da **evrensel matris** denir ve $[1]$ ile gösterilir.

CMA da bazı matris işlemleri aşağıda verilmiştir:

Tanım 4.3. $[b_{ij}]_{n \times r}, [c_{ij}]_{n \times r} \in CMA$ olsun.

- $[b_{ij}]$ ve $[c_{ij}]$ nin CMA da **birleşimi** $[d_{ij}] = [b_{ij}] \cup [c_{ij}]$ ile gösterilir. Burada $d_{ij} = \max\{b_{ij}, c_{ij}\}$ şeklinde tanımlanır.
- $[b_{ij}]$ ve $[c_{ij}]$ nin CMA da **kesişimi** $[d_{ij}] = [b_{ij}] \cap [c_{ij}]$ ile gösterilir. Burada $d_{ij} = \min\{b_{ij}, c_{ij}\}$ şeklinde tanımlanır.
- $[b_{ij}]$ nin $[c_{ij}]$ den CMA da **farkı** $[d_{ij}] = [b_{ij}] \setminus [c_{ij}]$ ile gösterilir. Burada $d_{ij} = \min\{b_{ij}, 1 - c_{ij}\}$ şeklinde tanımlanır.

d) $[b_{ij}]$ nin CMA da **evrensel tümleyeni** $[d_{ij}] = [b_{ij}]^0$ ile gösterilir ve $d_{ij} = 1 - b_{ij}$ olarak tanımlanır.

e) $[b_{ij}]$ ve $[c_{ij}]$ nin CMA da **simetrik farkı** $[b_{ij}] \Delta [c_{ij}]$ ile gösterilir ve

$$[b_{ij}] \Delta [c_{ij}] = ([b_{ij}] \cup [c_{ij}]) \setminus ([b_{ij}] \cap [c_{ij}])$$

olarak tanımlanır.

Bunlar CMA da işlem olduğundan doğal olarak kapalılık sağlanmış olur. Tanım 4.3. ile CMA da tanımlanmış işlemlerin bazı temel özellikleri şunlardır:

Önerme 4.4. $[b_{ij}]_{n \times r} \in CMA$ olsun.

a) Birleşim, kesişim ve simetrik fark CMA da değişme özelliğine sahip işlemlerdir.

b) $[b_{ij}] \cup [0] = [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] \cup [1] = [1]$.

c) $[b_{ij}] \cap [0] = [0]$ ve $[b_{ij}] \cap [1] = [b_{ij}]$.

d) $[b_{ij}] \Delta [0] = [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] \Delta [1] = [b_{ij}]^0$.

e) $[b_{ij}] \cup [b_{ij}]^0 = [1]$ ve $[b_{ij}] \cap [b_{ij}]^0 = [0]$.

f) $[b_{ij}] \Delta [b_{ij}]^0 = [1]$.

g) $[b_{ij}] \Delta [b_{ij}] = [0]$.

h) Birleşim, kesişim ve simetrik fark CMA da birleşme özelliğine sahip işlemlerdir.

İspat. $[b_{ij}]_{n \times r} \in CMA$ olsun.

a) $[b_{ij}] \cup [0] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda $d_{ij} = \max\{b_{ij}, 0\} = b_{ij}$ olduğundan $[d_{ij}] = [b_{ij}]$ elde edilir. Diğer taraftan $[b_{ij}] \cup [1] = [e_{ij}]$ ise $e_{ij} = \max\{b_{ij}, 1\} = 1$ olup $[e_{ij}] = [1]$ sonucuna varılır.

b) $[b_{ij}] \cap [0] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda $d_{ij} = \min\{b_{ij}, 0\} = 0$ olduğundan $[d_{ij}] = [0]$ elde edilir. Benzer şekilde $[b_{ij}] \cap [1] = [e_{ij}]$ ise $e_{ij} = \min\{b_{ij}, 1\} = b_{ij}$ olup $[e_{ij}] = [b_{ij}]$ sonucuna varılır.

c) $[b_{ij}] \Delta [0] = ([b_{ij}] \cup [0]) \setminus ([b_{ij}] \cap [0]) = [b_{ij}] \setminus [0] = [d_{ij}]$ olduğundan $d_{ij} = \min\{b_{ij}, 1 - 0\} = b_{ij}$ ise $[d_{ij}] = [b_{ij}]$ elde edilir. Benzer şekilde $[b_{ij}] \Delta [1] = ([b_{ij}] \cup [1]) \setminus ([b_{ij}] \cap [1]) = [1] \setminus [b_{ij}] = [e_{ij}]$ ise $e_{ij} = \min\{1, 1 - b_{ij}\} = 1 - b_{ij}$ olup $[e_{ij}] = [b_{ij}]^0$ sonucuna varılır.

- d) $[b_{ij}] \cup [b_{ij}]^0 = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda $d_{ij} = \max\{b_{ij}, 1 - b_{ij}\} = 1$ olduğundan $[d_{ij}] = [1]$ elde edilir. Diğer taraftan $[b_{ij}] \cap [b_{ij}]^0 = [e_{ij}]$ ise $e_{ij} = \min\{b_{ij}, 1 - b_{ij}\} = 0$ olup $[e_{ij}] = [0]$ sonucuna varılır.
- e) $[b_{ij}] \Delta [b_{ij}]^0 = ([b_{ij}] \cup [b_{ij}]^0) \setminus ([b_{ij}] \cap [b_{ij}]^0) = [1] \setminus [0] = [d_{ij}]$ ise $d_{ij} = \min\{1, 1-0\} = 1$ olduğundan $[d_{ij}] = [1]$ elde edilir.
- f) $[b_{ij}] \Delta [b_{ij}] = ([b_{ij}] \cup [b_{ij}]) \setminus ([b_{ij}] \cap [b_{ij}]) = [b_{ij}] \setminus [b_{ij}] = [d_{ij}]$ ise $d_{ij} = \min\{b_{ij}, 1 - b_{ij}\} = 0$ olduğundan $[d_{ij}] = [0]$ elde edilir.
- g) $\forall [a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in CMA$ için $[a_{ij}] \cup ([b_{ij}] \cup [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \cup [b_{ij}]) \cup [c_{ij}]$ olduğunu göstermeliyiz. O halde $[a_{ij}] \cup ([b_{ij}] \cup [c_{ij}]) = [a_{ij}] \cup [d_{ij}] = [e_{ij}]$ ise

$$e_{ij} = \max\{a_{ij}, d_{ij}\} = \max\{a_{ij}, \max\{b_{ij}, c_{ij}\}\} = \max\{\max\{a_{ij}, b_{ij}\}, c_{ij}\}.$$

Benzer şekilde $([a_{ij}] \cup [b_{ij}]) \cup [c_{ij}] = [f_{ij}] \cup [c_{ij}] = [g_{ij}]$ ise

$$g_{ij} = \max\{f_{ij}, c_{ij}\} = \max\{\max\{a_{ij}, b_{ij}\}, c_{ij}\}.$$

Dolayısıyla $[e_{ij}] = [g_{ij}]$, yani birleşim işleminin birleşme özelliği vardır.

$[a_{ij}] \cap ([b_{ij}] \cap [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \cap [b_{ij}]) \cap [c_{ij}]$ olduğunu gösterelim. Bunun için $[a_{ij}] \cap ([b_{ij}] \cap [c_{ij}]) = [a_{ij}] \cap [d_{ij}] = [e_{ij}]$ ise

$$e_{ij} = \min\{a_{ij}, d_{ij}\} = \min\{a_{ij}, \min\{b_{ij}, c_{ij}\}\} = \min\{\min\{a_{ij}, b_{ij}\}, c_{ij}\}.$$

Diğer taraftan $([a_{ij}] \cap [b_{ij}]) \cap [c_{ij}] = [f_{ij}] \cap [c_{ij}] = [g_{ij}]$ ise

$$g_{ij} = \min\{f_{ij}, c_{ij}\} = \min\{\min\{a_{ij}, b_{ij}\}, c_{ij}\}.$$

Dolayısıyla $[e_{ij}] = [g_{ij}]$, yani kesişim işleminin birleşme özelliği vardır.

$[a_{ij}] \Delta ([b_{ij}] \Delta [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \Delta [b_{ij}]) \Delta [c_{ij}]$ olduğunu gösterelim. Bunun için ilk olarak $[a_{ij}] \Delta ([b_{ij}] \Delta [c_{ij}]) = [a_{ij}] \Delta [d_{ij}] = ([a_{ij}] \cup [d_{ij}]) \setminus ([a_{ij}] \cap [d_{ij}]) = [e_{ij}]$ ise

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \min\{\max\{a_{ij}, d_{ij}\}, 1 - \min\{a_{ij}, d_{ij}\}\} \\ &= \min\{\max\{a_{ij}, \min\{\max\{b_{ij}, c_{ij}\}, 1 - \min\{b_{ij}, c_{ij}\}\}, 1 - \min\{a_{ij}, \\ &\quad \min\{\max\{b_{ij}, c_{ij}\}, 1 - \min\{b_{ij}, c_{ij}\}\}\}\}. \end{aligned}$$

Benzer şekilde $([a_{ij}] \triangle [b_{ij}]) \triangle [c_{ij}] = [f_{ij}] \triangle [c_{ij}] = [g_{ij}]$ ise

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \min\{\max\{f_{ij}, c_{ij}\}, 1 - \min\{f_{ij}, c_{ij}\}\} \\ &= \min\{\max\{\min\{\max\{a_{ij}, b_{ij}\}, 1 - \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, c_{ij}\}, \\ &1 - \min\{\min\{\max\{a_{ij}, b_{ij}\}, 1 - \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, c_{ij}\}\}\}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $[e_{ij}] = [g_{ij}]$, yani simetrik fark işleminin birleşme özelliği vardır.

h) $\forall [a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in CMA$ için $[a_{ij}] \cup [b_{ij}] = [b_{ij}] \cup [a_{ij}]$ olduğunu gösterelim. Eğer $[a_{ij}] \cup [b_{ij}] = [c_{ij}]$ ise $c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\} = \max\{b_{ij}, a_{ij}\}$ olduğundan $[b_{ij}] \cup [a_{ij}] = [c_{ij}]$. Dolayısıyla birleşim işleminin CMA da değişme özelliği vardır.

$[a_{ij}] \cap [b_{ij}] = [b_{ij}] \cap [a_{ij}]$ gösterelim. $[a_{ij}] \cap [b_{ij}] = [d_{ij}]$ ise $d_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\} = \min\{b_{ij}, a_{ij}\}$ olduğundan $[b_{ij}] \cap [a_{ij}] = [d_{ij}]$. Dolayısıyla kesişim işleminin CMA da değişme özelliği vardır.

$[a_{ij}] \triangle [b_{ij}] = [b_{ij}] \triangle [a_{ij}]$ olduğunu gösterelim. Birleşim ve kesişim işlemlerinin değişme özelliği olduğundan

$$\begin{aligned} [a_{ij}] \triangle [b_{ij}] &= ([a_{ij}] \cup [b_{ij}]) \setminus ([a_{ij}] \cap [b_{ij}]) \\ &= ([b_{ij}] \cup [a_{ij}]) \setminus ([b_{ij}] \cap [a_{ij}]) \\ &= [b_{ij}] \triangle [a_{ij}]. \end{aligned}$$

Dolayısıyla simetrik fark işleminin CMA da değişme özelliği vardır. ■

Klasik cebirsel yapılara benzer şekilde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Önerme 4.5. CMA üzerindeki cebirsel yapılar aşağıdaki gibidir:

- (CMA, \triangle) abelyen bir gruptur.
- (CMA, \cup) bir abelyen monoiddir.
- (CMA, \cap) bir abelyen monoiddir.

İspat. $[a_{ij}], [b_{ij}] \in CMA$ olsun.

- $[a_{ij}] \triangle [b_{ij}] \in CMA$ çünkü simetrik fark tanımından $[a_{ij}] \triangle [b_{ij}]$ $n \times r$ tipinde ve tüm bileşenleri 1 ve 0 lardan oluşan matristir. Önerme 4.4.(h) den dolayı birleşme özelliği vardır. Önerme 4.4.(d) den $[a_{ij}] \triangle [0] = [a_{ij}] = [0] \triangle [a_{ij}]$ olacak şekilde $[0] \in CMA$ simetrik fark işlemine göre CMA nın birim elemanıdır. Diğer taraftan Önerme 4.4.(g) den $[a_{ij}] \triangle [a_{ij}] = [0]$ olduğundan CMA daki her bir elemanın simetrik fark işlemine göre tersi kendisidir. Ardından Önerme 4.4.(a) den dolayı değişme özelliği vardır ve sonuç olarak (CMA, \triangle) bir abel grubudur.

- b) $[a_{ij}] \cup [b_{ij}] \in CMA$ çünkü birleşim tanımından $[a_{ij}] \cup [b_{ij}]$ $n \times r$ tipinde ve tüm bileşenleri 1 ve 0 lardan oluşan matristir. Önerme 4.4.(h) den dolayı birleşim özelliği vardır. Önerme 4.4.(b) dan $[a_{ij}] \cup [0] = [a_{ij}] = [0] \cup [a_{ij}]$ olacak şekilde $[0] \in CMA$ birleşim işlemine göre CMA nın birim elemanıdır. Diğer taraftan $\forall [0] \neq [a_{ij}] \in CMA$ için $[a_{ij}] \cup [b_{ij}] = [0]$ olacak şekilde $[b_{ij}] \in CMA$ karakteristik matrisi bulunmadığından CMA da birleşme işlemine göre $[0] \in CMA$ dan başka hiç bir elemanın tersi yoktur. Ardından Önerme 4.4.(a) den dolayı değişme özelliği vardır ve sonuç olarak (CMA, \cup) bir abelyen monoiddir.
- c) $[a_{ij}] \cap [b_{ij}] \in CMA$ çünkü kesişim tanımından $[a_{ij}] \cap [b_{ij}]$ $n \times r$ tipinde ve tüm bileşenleri 1 ve 0 lardan oluşan matristir. Önerme 4.4.(h) den dolayı birleşim özelliği vardır. Önerme 4.4.(c) den $[a_{ij}] \cap [1] = [a_{ij}] = [1] \cap [a_{ij}]$ olacak şekilde $[1] \in CMA$ kesişim işlemine göre CMA nın birim elemanıdır. Diğer taraftan $\forall [1] \neq [a_{ij}] \in CMA$ için $[a_{ij}] \cap [b_{ij}] = [1]$ olacak şekilde $[b_{ij}] \in CMA$ karakteristik matrisi bulunmadığından CMA da kesişim işlemine göre $[1] \in CMA$ dan başka hiç bir elemanın tersi yoktur. Ardından Önerme 4.4.(a) den dolayı değişme özelliği vardır ve sonuç olarak (CMA, \cap) bir abelyen monoiddir.

■

Pawlak [27] tarafından ortaya atılan kaba küme teorisi, aşağıdaki tanım sayesinde yeni bir yaklaşımla matrislere aktarılmıştır. Kümeler üzerinde tanımlı karakteristik fonksiyonlar kullanılarak elde edilen bu yeni matris tanımları ile üst yaklaşım kümesi, alt yaklaşım kümesi, sınır kümesi ve kaba küme gibi özel tanımlı kümelerin matrisler ile karşılıklı olarak ifade edilmesi amaçlanmıştır.

Tanım 4.6. $X \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun.

- a) $n \times r$ tipindeki $[a_{ij}]$ matrisine,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & u_i \in C_j \\ 0, & u_i \notin C_j \end{cases}$$

ise A nın **yaklaşım matrisi** denir ve $[A]$ ile gösterilir.

- b) $n \times r$ tipindeki $[x_{ij}]$ matrisine,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & u_i \in C_j \cap X \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ise X in A daki **kabalık matrisi** denir ve $[X]$ ile gösterilir.

c) $n \times r$ tipindeki $[p_{ij}]$ matrisine,

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ise X in A daki **üst yaklaşım matrisi** denir ve $[A^X]$ ile gösterilir.

d) $n \times r$ tipindeki $[q_{ij}]$ matrisine,

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ise X in A daki **alt yaklaşım matrisi** denir ve $[A_X]$ ile gösterilir.

e) X in A daki **sınır matrisi** $[BX] = [A^X] \setminus [A_X]$ şeklinde tanımlanır.

f) Tanımları b)-e) ile verilen bu matrisler A ve X e **bağlı Yaklaşım Karakteristik Matrisleri** olarak adlandırılır ve $ACM(A, X)$ ile gösterilir.

Tanım 4.7. $X \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. $[b_{ij}]$ nin CMA da tümleyeni $[b_{ij}]^c$ ile gösterilir ve $[b_{ij}]^c = [A] \setminus [b_{ij}]$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.8. $X, Y \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. Eğer $X \subseteq Y$ ise bu durumda

a) $[X] \subseteq [Y]$.

b) $[A^X] \subseteq [A^Y]$.

c) $[A_X] \subseteq [A_Y]$.

İspat.

a) $X \subseteq Y$ olduğundan $\forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $C_j \cap X \subseteq C_j \cap Y$ olur. Dolayısıyla $[X] = [x_{ij}]_{n \times r}$, $[Y] = [y_{ij}]_{n \times r}$ ise $x_{ij} \leq y_{ij}$, yani $[X] \subseteq [Y]$ dir.

b) $[A^X] = [p_{ij}]$ ve $[A^Y] = [t_{ij}]$ olsun. $X \subseteq Y$ olduğundan $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $C_j \cap X \neq \emptyset$ olacak şekilde $u_i \in C_j$ ise $C_j \cap Y \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $p_{ij} \leq t_{ij}$, yani $[A^X] \subseteq [A^Y]$ dir.

- c) $[A_X] = [q_{ij}]$ ve $[A_Y] = [k_{ij}]$ olsun. $X \subseteq Y$ olduğundan $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $C_j \subseteq X$ olacak şekilde $u_i \in C_j$ ise $C_j \subseteq X \subseteq Y$ olur. Dolayısıyla $q_{ij} \leq k_{ij}$, yani $[A_X] \subseteq [A_Y]$ dir.

Lemma 4.8. de görüldüğü üzere $X \subseteq Y$ iken $[X] \subseteq [Y]$, $[A^X] \subseteq [A^Y]$ ve $[A_X] \subseteq [A_Y]$ olmasına rağmen $[BX] \subseteq [BY]$ olmak zorunda değildir. Örnek 4.9. ile bu ifade ispatlanmıştır.

Örnek 4.9. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel küme ve $\{C_1 = \{u_1, u_4\}, C_2 = \{u_2\}, C_3 = \{u_3, u_5\}\}$ U nun bir parçalanışı olsun. $X = \{u_1, u_3, u_5\}$ ve $Y = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ise bu durumda $ACM(A, X)$ ve $ACM(A, Y)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A^X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A^Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[A_X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A_Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [BX] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [BY] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Buradan $[X] \subseteq [Y]$, $[A^X] \subseteq [A^Y]$, $[A_X] \subseteq [A_Y]$, fakat $[BX] \not\subseteq [BY]$ olduğu görülür.

■

Tanım 4.6. ile verilen matrislerin aşağıdaki özellikleri vardır:

Önerme 4.10. $X, Y \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $X^c = U \setminus X$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

- $[A_X] \subseteq [X] \subseteq [A^X]$.
- $[BX] = [A^X] \cap [A_X]^c$.
- $[A_U] = [A^U] = [A]$.
- $[X \cup Y] = [X] \cup [Y]$.
- $[X \cap Y] = [X] \cap [Y]$.
- $[A^{X \cup Y}] = [A^X] \cup [A^Y]$.
- $[A_{X \cap Y}] = [A_X] \cap [A_Y]$.

- h) $[A^X] = [A_{X^c}]^c$.
- i) $[A_X] = [A^{X^c}]^c$.
- j) $[A^X] \cup [A_{X^c}] = [A]$.
- k) $[A^X] \cup [A^{X^c}] = [A]$.
- l) $[A_X] \cup [A^{X^c}] = [A]$.
- m) $[A_X] \cup [A_{X^c}] = [BX]^c$.
- n) $[A^X] \cap [A_{X^c}] = [0]$.
- o) $[A^X] \cap [A^{X^c}] = [BX]$.
- ö) $[A_X] \cap [A_{X^c}] = [0]$.
- p) $[A_X] \cap [A^{X^c}] = [0]$.
- r) $[A^X] \triangle [A_X] = [BX]$.

• Ayrıca aşağıda verilen De Morgan kuralları geçerlidir.

- s) $[[A_X] \cup [A_Y]]^c = [A^{X^c}] \cap [A^{Y^c}]$.
- t) $[[A_X] \cap [A_Y]]^c = [A^{X^c}] \cup [A^{Y^c}]$.
- u) $[[A^X] \cup [A^Y]]^c = [A_{X^c}] \cap [A_{Y^c}]$.
- v) $[[A^X] \cap [A^Y]]^c = [A_{X^c}] \cup [A_{Y^c}]$.
- y) $[X \cup Y]^c = [X]^c \cap [Y]^c$.
- z) $[X \cap Y]^c = [X]^c \cup [Y]^c$.

İspat.

- a) $[A^X] = [p_{ij}]$, $[A_X] = [q_{ij}]$, $[X] = [x_{ij}]$ olsun. Öncelikle $[A_X] \subseteq [X]$ olduğunu gösterelim. Herhangi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $q_{ij} = 0$ ise $0 \leq x_{ij}$ olduğundan $q_{ij} = 1$ için bakmak yeterlidir. $q_{ij} = 1$ ise $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X$ buradan $u_i \in C_j = C_j \cap X$ yani $x_{ij} = 1$. Dolayısıyla $[q_{ij}] \subseteq [x_{ij}]$, yani $[A_X] \subseteq [X]$ sağlanır. Benzer şekilde $[X] \subseteq [A_X]$ olduğunu gösterelim. $x_{ij} = 0$ ise $0 \leq p_{ij}$ olduğundan $x_{ij} = 1$ için bakmak yeterlidir. $x_{ij} = 1$ ise $u_i \in C_j \cap X$ buradan $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ olduğundan $p_{ij} = 1$ olur. Dolayısıyla $[x_{ij}] \subseteq [p_{ij}]$, yani $[X] \subseteq [A^X]$ sağlanır.

- b) $[A^X] = [p_{ij}]$, $[A_X] = [q_{ij}]$ ve $[BX] = [A^X] \setminus [A_X] = [p_{ij}] \setminus [q_{ij}] = [d_{ij}]$ olsun. Buradan $d_{ij} = \min\{p_{ij}, 1 - q_{ij}\}$. Ardından $[A^X] \cap [A_X]^c = [p_{ij}] \cap [q_{ij}]^c = [e_{ij}]$ olsun ve $e_{ij} = \min\{p_{ij}, 1 - q_{ij}\}$ olduğundan $[d_{ij}] = [e_{ij}]$ olur.
- c) $[A_U] = [q_{ij}]$ olsun. $q_{ij} = 1$ ise $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq U$ ve $\forall j$ için $C_j \subseteq U$ olduğundan $u_i \in C_j$ ise $q_{ij} = 1$ diğer durumlarda $q_{ij} = 0$. O halde $[A_U] = [A]$ elde edilir. Benzer şekilde $[A^U] = [p_{ij}]$ olsun. $p_{ij} = 1$ ise $u_i \in C_j \ni C_j \cap U \neq \emptyset$ ve $\forall j$ için $\emptyset \neq C_j = C_j \cap U$ olduğundan $u_i \in C_j$ ise $p_{ij} = 1$ diğer durumlarda $p_{ij} = 0$ olur. O halde $[A^U] = [A]$ elde edilir.
- d) $[X \cup Y] = [e_{ij}]$, $[X] = [x_{ij}]$ ve $[Y] = [y_{ij}]$ olsun. O halde $e_{ij} = 1$ için $u_i \in C_j \cap (X \cup Y)$ ise $u_i \in ((C_j \cap X) \cup (C_j \cap Y))$. Ardından $u_i \in C_j \cap X \vee u_i \in C_j \cap Y$ olduğundan $x_{ij} = 1 \vee y_{ij} = 1$. Böylece $1 = e_{ij} = \max\{x_{ij}, y_{ij}\}$ elde edilir. Benzer şekilde $e_{ij} = 0$ için $u_i \notin C_j \cap (X \cup Y)$ ise $u_i \notin ((C_j \cap X) \cup (C_j \cap Y))$ olur. Böylece $u_i \notin C_j \cap X \wedge u_i \notin C_j \cap Y$ olduğundan $x_{ij} = 0 \wedge y_{ij} = 0$. Yani $0 = e_{ij} = \max\{x_{ij}, y_{ij}\}$ elde edilir. Dolayısıyla $[X \cup Y] = [X] \cup [Y]$ sonucuna ulaşılır.
- e) $[X \cap Y] = [e_{ij}]$, $[X] = [x_{ij}]$ ve $[Y] = [y_{ij}]$ olsun. O halde $e_{ij} = 1$ için $u_i \in C_j \cap (X \cap Y)$ ise $u_i \in ((C_j \cap X) \cap (C_j \cap Y))$. Ardından $u_i \in C_j \cap X \wedge u_i \in C_j \cap Y$ olduğundan $x_{ij} = 1 \wedge y_{ij} = 1$. Böylece $1 = e_{ij} = \min\{x_{ij}, y_{ij}\}$ elde edilir. Benzer şekilde $e_{ij} = 0$ için $u_i \notin C_j \cap (X \cap Y)$ ise $u_i \notin ((C_j \cap X) \cap (C_j \cap Y))$ olur. Ardından $u_i \notin C_j \cap X \vee u_i \notin C_j \cap Y$ olduğundan $x_{ij} = 0 \vee y_{ij} = 0$. Yani $0 = e_{ij} = \min\{x_{ij}, y_{ij}\}$ elde edilip $[X \cap Y] = [X] \cap [Y]$ sonucuna ulaşılır.
- f) $[A^{X \cup Y}] = [t_{ij}]$, $[A^X] = [p_{ij}]$ ve $[A^Y] = [k_{ij}]$ olsun. Buradan $[A^X] \cup [A^Y] = [p_{ij}] \cup [k_{ij}] = [e_{ij}]$ ise $e_{ij} = \max\{p_{ij}, k_{ij}\}$. $[A^{X \cup Y}] = [t_{ij}]$ olduğundan $u_i \in C_j \ni C_j \cap (X \cup Y) \neq \emptyset$ ise $t_{ij} = 1$ diğer durumlarda $t_{ij} = 0$. $C_j \cap (X \cup Y) = (C_j \cap X) \cup (C_j \cap Y) \neq \emptyset$ olması için $C_j \cap X \neq \emptyset \vee C_j \cap Y \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ ise $t_{ij} = 1$ veya $u_i \in C_j \ni C_j \cap Y \neq \emptyset$ ise $t_{ij} = 1$. $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ ise $p_{ij} = 1$ veya $u_i \in C_j \ni C_j \cap Y \neq \emptyset$ ise $k_{ij} = 1$ olduğundan $e_{ij} = t_{ij}$ olur.
- g) $[A_{X \cap Y}] = [t_{ij}]$, $[A_X] = [q_{ij}]$ ve $[A_Y] = [k_{ij}]$ olsun. Buradan $[A_X] \cap [A_Y] = [q_{ij}] \cap [k_{ij}] = [e_{ij}]$ ise $e_{ij} = \min\{q_{ij}, k_{ij}\}$. $[A_{X \cap Y}] = [t_{ij}]$ olduğundan $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq (X \cap Y)$ ise $t_{ij} = 1$ diğer durumlarda $t_{ij} = 0$ olur. Bu durumda $t_{ij} = 1$ ise $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X$ ve $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq Y$ ise $k_{ij} = 1$ olduğundan $t_{ij} = e_{ij}$ sonucuna ulaşılır.
- h) $[A^X] = [p_{ij}]$, $[A_{X^c}] = [k_{ij}]$ ve $[A_{X^c}]^c = [k_{ij}]^c = [t_{ij}]$ olsun. Buradan $[A^X] = [p_{ij}]$ olduğundan $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ ise $p_{ij} = 1$ diğer durumlarda $p_{ij} = 0$ olur. $[A_{X^c}] = [k_{ij}]$ olduğundan $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c$ ise $k_{ij} = 1$, diğer durumlarda $k_{ij} = 0$. Ardından $[k_{ij}]^c = [t_{ij}]$ olduğundan $k_{ij} = 1$ ise $t_{ij} = 0$ ve $k_{ij} = 0$ ise $t_{ij} = 1$. Böylece $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c$ ise $t_{ij} = 0$ ve $(u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c)'$ ise $t_{ij} = 1$. Yani

$(u_i \in C_j \ni C_j \cap X^c \neq \emptyset)$ ' ise $t_{ij} = 0$ ve $u_i \in C_j \ni C_j \cap X^c = \emptyset$ ise $t_{ij} = 1$ olur. Dolayısıyla

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \\ = p_{ij}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

i) $[A_X] = [q_{ij}]$, $[A^{X^c}] = [k_{ij}]$, $[A^{X^c}]^c = [k_{ij}]^c = [t_{ij}]$ olsun. Bu durumda $[A_X] = [q_{ij}]$ olduğundan $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X$ ise $q_{ij} = 1$, diğer durumlarda $q_{ij} = 0$. $[A^{X^c}] = [k_{ij}]$ olduğundan $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ ise $k_{ij} = 1$, diğer durumlarda $k_{ij} = 0$ olur. Ardından $[k_{ij}]^c = [t_{ij}]$ olduğundan $k_{ij} = 1$ ise $t_{ij} = 0$ ve $k_{ij} = 0$ ise $t_{ij} = 1$. Böylece $u_i \in C_j \ni C_j \cap X^c \neq \emptyset$ ise $t_{ij} = 0$ ve $(u_i \in C_j \ni C_j \cap X^c = \emptyset)$ ' ise $t_{ij} = 1$ olur. Yani $u_i \in C_j \ni C_j \cap X^c \neq \emptyset$ ise $t_{ij} = 0$ ve $u_i \in C_j \ni C_j \cap X^c = \emptyset$ ise $t_{ij} = 1$. Buradan $u_i \in C_j \ni C_j \cap X^c \neq \emptyset$ ise $t_{ij} = 0$ ve $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X$ ise $t_{ij} = 1$ olur. Dolayısıyla

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \\ = q_{ij}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

j) $[A^X] = [p_{ij}]$, $[A_{X^c}] = [t_{ij}]$, $[A] = [a_{ij}]$ olsun. Bu durumda $[A^X] \cup [A_{X^c}] = [p_{ij}] \cup [t_{ij}] = [e_{ij}]$ ise $e_{ij} = \max\{p_{ij}, t_{ij}\}$ dir. $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset = (u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c)$ ' olduğundan $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ veya $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c$ aynı anda sağlanmadığından $e_{ij} \Leftrightarrow (p_{ij} = 1 \wedge t_{ij} = 0) \vee (p_{ij} = 0 \wedge t_{ij} = 1)$ olmalıdır. Öyle ki $p_{ij} = 1 \wedge t_{ij} = 0$ ise $(u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset)$ ve $(u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c)$ ' olur. Dolayısıyla $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ ise $e_{ij} = 1$ olur. Diğer yandan $p_{ij} = 0 \wedge t_{ij} = 1$ ise $(u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset)$ ' ve $(u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c)$ '. Dolayısıyla $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c$ ise $e_{ij} = 1$. Buradan $u_i \in C_j$ ise $e_{ij} = 1$ olur. Son olarak $p_{ij} = 0 \wedge t_{ij} = 0$ ise $(u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset)$ ' ve $(u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c)$ '. Yani $(u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c) \wedge (u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X^c)$ ' ise $u_i \notin C_j$ olduğundan $e_{ij} = 0$ olur. Dolayısıyla

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & u_i \in C_j \\ 0, & u_i \notin C_j \end{cases} \\ = a_{ij}$$

sonucu elde edilir.

k) j nin ispatı ile benzer şekilde elde edilir.

l) j nin ispatı ile benzer şekilde elde edilir.

m) (h) den $[A^X]^c = [A_{X^c}]$ dir. $[[A_X]^c]^c = [A_X]$ olduğundan (i) den X yerine X^c yazarak (b) ile verilen $[BX] = [A^X] \cap [A_X]^c$ eşitliğinin her iki tarafının tümleyeni alınarak $[BX]^c = ([A^X] \cap [A_X]^c)^c = [A_{X^c}] \cup [A_X]$ elde edilir.

n) (i) de X yerine X^c yazarak $[A_{X^c}] = [A^X]^c$ buradan $[A^X] \cap [A_{X^c}] = [A^X] \cap [A^X]^c = [0]$ olur.

o) (h) den $[A^X] = [A_{X^c}]^c$ olduğundan $[A^{X^c}] = [A_X]^c$. Dolayısıyla (b) ile verilen $[BX] = [A^X] \cap [A_X]^c$ eşitliğini kullanarak $[BX] = [A^X] \cap [A_{X^c}]$ elde edilir.

ö) (i) de X yerine X^c yazarak $[A_{X^c}] = [A^X]^c$ ve (a) dan $[A_X] \subseteq [A^X]$ olduğundan $[A_X] \cap [A_{X^c}] = [A_X] \cap [A^X]^c \subseteq [A^X] \cap [A^X]^c = [0]$ olduğundan $[A_X] \cap [A_{X^c}] = [0]$ olur.

p) (h) de X yerine X^c yazarak $[A^{X^c}] = [A_X]^c$ elde edilir. Buradan $[A_X] \cap [A^{X^c}] = [A_X] \cap [A_X]^c = [0]$ sonucuna ulaşılır.

r) $[A^X] \Delta [A_X] = ([A^X] \cup [A_X]) \setminus ([A^X] \cap [A_X]) = [A^X] \setminus [A_X] = [BX]$ olur.

s) (h) de sırasıyla X yerine X^c ve Y yerine Y^c alınırsa $[A^{X^c}] = [A_X]^c$ ve $[A^{Y^c}] = [A_Y]^c$ olur. Buradan $[[A_X] \cup [A_Y]]^c = [A_X]^c \cap [A_Y]^c = [A^{X^c}] \cap [A^{Y^c}]$ elde edilir.

t) (h) de sırasıyla X yerine X^c ve Y yerine Y^c alınırsa $[A^{X^c}] = [A_X]^c$ ve $[A^{Y^c}] = [A_Y]^c$ olur. Buradan $[[A_X] \cap [A_Y]]^c = [A_X]^c \cup [A_Y]^c = [A^{X^c}] \cup [A^{Y^c}]$ elde edilir.

u) (i) de sırasıyla X yerine X^c ve Y yerine Y^c alınırsa $[A_{X^c}] = [A^X]^c$ ve $[A_{Y^c}] = [A^Y]^c$ olur. Buradan $[[A^X] \cup [A^Y]]^c = [A^X]^c \cap [A^Y]^c = [A_{X^c}] \cap [A_{Y^c}]$ elde edilir.

v) (i) de sırasıyla X yerine X^c ve Y yerine Y^c alınırsa $[A_{X^c}] = [A^X]^c$ ve $[A_{Y^c}] = [A^Y]^c$ olur. Buradan $[[A^X] \cap [A^Y]]^c = [A^X]^c \cup [A^Y]^c = [A_{X^c}] \cup [A_{Y^c}]$ elde edilir.

y) $[A] = [a_{ij}]$, $[X] = [x_{ij}]$, $[Y] = [y_{ij}]$ ve $[X \cup Y] = [d_{ij}]$ olsun. $[X \cup Y] = [X] \cup [Y]$ den dolayı $d_{ij} = \max\{x_{ij}, y_{ij}\}$. Bu durumda $[X \cup Y]^c = [A] \setminus [X \cup Y] = [a_{ij}] \setminus [d_{ij}] = [e_{ij}]$ ise $e_{ij} = \min\{a_{ij}, 1 - d_{ij}\}$ olur. Ardından $[X]^c = [A] \setminus [X]$ ve $[Y]^c = [A] \setminus [Y]$ olduğundan $[X]^c \cap [Y]^c = ([a_{ij}] \setminus [x_{ij}]) \cap ([a_{ij}] \setminus [y_{ij}]) = [f_{ij}]$ olur. Buradan bütün durumları içeren tablo aşağıda verilmiştir:

a_{ij}	x_{ij}	y_{ij}	d_{ij}	e_{ij}	f_{ij}
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

Dolayısıyla tüm durumlar göz önüne alındığında $[f_{ij}] = [e_{ij}]$ elde edilir.

- z) $[A] = [a_{ij}]$, $[X] = [x_{ij}]$, $[Y] = [y_{ij}]$ ve $[X \cap Y] = [d_{ij}]$ olsun. $[X \cap Y] = [X] \cap [Y]$ den dolayı $d_{ij} = \min\{x_{ij}, y_{ij}\}$. Bu durumda $[X \cap Y]^c = [A] \setminus [X \cap Y] = [a_{ij}] \setminus [d_{ij}] = [e_{ij}]$ ise $e_{ij} = \min\{a_{ij}, 1 - d_{ij}\}$ olur. Ardından $[X]^c = [A] \setminus [X] = [a_{ij}] \setminus [x_{ij}]$ ve $[Y]^c = [A] \setminus [Y] = [a_{ij}] \setminus [y_{ij}]$ olduğundan $[X]^c \cup [Y]^c = ([a_{ij}] \setminus [x_{ij}]) \cup ([a_{ij}] \setminus [y_{ij}])$. Yani bu eşitliğin sağ tarafı ij 'inci bileşeni $\max\{\min\{a_{ij}, 1 - x_{ij}\}, \min\{a_{ij}, 1 - y_{ij}\}\}$ olan bileşeni verir. Buradan bütün durumları içeren tablo aşağıda verilmiştir:

a_{ij}	x_{ij}	y_{ij}	d_{ij}	e_{ij}	f_{ij}
1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Dolayısıyla tüm durumlar göz önüne alındığında $[f_{ij}] = [e_{ij}]$ elde edilir.

■

Önerme 4.10. daki bazı özellikler için A nın $[A]$ yaklaşım matrisi, $ACM(A, X)$ ve $ACM(A, Y)$ matrisleri şunlardır:

Örnek 4.11. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{12}\}$ evrensel kümesini ele alalım. Burada U nun parçalanışı $C_1 = \{u_1, u_{12}\}$, $C_2 = \{u_3, u_9, u_{11}\}$, $C_3 = \{u_2, u_4, u_7, u_{10}\}$, $C_4 = \{u_5, u_6, u_8\}$ şeklindedir. Böylece $X = \{u_1, u_4, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}\}$, $Y = \{u_2, u_4, u_5, u_7, u_8, u_{10}, u_{12}\}$, $X \cup Y = \{u_1, u_2, u_4, u_5,$

$u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}$, $X \cap Y = \{u_4, u_7, u_{12}\}$, $X^c = \{u_2, u_3, u_5, u_6, u_8, u_{10}\}$, $Y^c = \{u_1, u_3, u_6, u_9, u_{11}\}$ kümelerine karşılık gelen karakteristik yaklaşım matrisleri şunlardır:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [X^c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Y^c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[X \cup Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [X \cap Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bu durumda $[X]$, $[Y]$, $[X^c]$, $[Y^c]$, $[X \cup Y]$ ve $[X \cap Y]$ kabalık matrisleri kullanılarak aşağıdaki matrisler ve eşitliklerin Önerme 4.10. u desteklediği görülür:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A^X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A^Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A_X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A_Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[X]^c = [A] \setminus [X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Y]^c = [A] \setminus [Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [X]^c \cap [Y]^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [X]^c \cup [Y]^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$[X \cup Y]^c = [A] \setminus [X \cup Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [X \cap Y]^c = [A] \setminus [X \cap Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dolayısıyla $[X \cup Y]^c = [X]^c \cap [Y]^c$ ve $[X \cap Y]^c = [X]^c \cup [Y]^c$ elde edilir.

Şimdi $ACM(A, X)$ matrisleri kullanılarak, bir kümenin kaba küme olup olmadığı belirlenebilir. Aşağıdaki teorem kaba kümelerin bazı karakterizasyonlarını vermektedir:

Teorem 4.12. $X \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirlerine denktir:

- X , A üzerinde bir kaba kümedir.
- $[BX] \neq [0]$.
- $[A_X] \subsetneq [X] \subsetneq [A^X]$.
- $[A_X] \subsetneq [X]$.
- $[X] \subsetneq [A^X]$.

İspat. Tanım 2.4. e göre $X \subset U$ için $R^*X = \{x \in U \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\}$ ve $R_*X = \{x \in U \mid [x]_R \subseteq X\}$ burada $[x]_R$, $x \in U$ nun bir denklik sınıfıdır. $[X] = [x_{ij}]$, $[A^X] = [p_{ij}]$ ve $[A_X] = [q_{ij}]$ olsun.

- a) \Rightarrow b) X , A üzerinde bir kaba küme olsun. Bu durumda $R^*X \setminus R_*X \neq \emptyset$ olduğundan $x \in R^*X \setminus R_*X$ vardır. $x \in U$ olduğundan $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $x = u_i$ ve $[x]_R = C_j$ olacak şekilde en az bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ vardır. Buradan $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ ve $C_j \subseteq X$. Bu durumda $[A^X]$ in p_{ij} bileşeni 1 ve $[A_X]$ in q_{ij} bileşeni 0 olur. Dolayısıyla $[BX]$ sınır matrisinin ij -inci bileşeni $\min\{p_{ij}, 1 - q_{ij}\} = \min\{1, 1 - 0\} = 1$ ve buradan $[BX] \neq [0]$ elde edilir.

b)⇒ a) $[BX] = [A^X] \setminus [A_X] \neq [0]$ olsun. Bu durumda en az bir ij için $[A^X]$ in ij -inci bileşeni $p_{ij} = 1$ ve $[A_X]$ in ij -inci bileşeni $q_{ij} = 0$ olur. Dolayısıyla $u_i \in C_j$, $C_j \cap X \neq \emptyset$ ve $C_j \not\subseteq X$ olacak şekilde $u_i \in U$ vardır. $[x]_R = C_j$ olduğundan $u_i \in R^*X \setminus R_*X$ yani $R^*X \setminus R_*X \neq \emptyset$ ve buradan X, A üzerinde bir kaba kümedir.

b)⇒ c) $[BX] = [A^X] \setminus [A_X] \neq [0]$ ise $[BX]$ in en azından ij -inci bileşen $\min\{p_{ij}, 1 - q_{ij}\} = 1$. Bu durumda $C_j \cap X \neq \emptyset$ ve $C_j \not\subseteq X$ olacak şekilde en az bir $u_i \in U$ ve $C_j \in U \setminus R$ vardır. Bu ise $x = u_k \in X \ni x = u_k \in C_j$ ve $y = u_t \in X \ni y = u_t \notin C_j$ olmasını gerektirir. Buradan $x_{kj} = 1, p_{kj} = 1$ ve $q_{kj} = 0$ olur. Önerme 4.10. (a) dan $[A_X] \subseteq [X] \subseteq [A^X]$ olduğunu biliyoruz. $x_{kj} = 1$ ve $q_{kj} = 0$ olduğundan $[A_X] \subsetneq [X]$ görülür. Diğer yandan $[X] \subsetneq [A^X]$ olduğunu göstermek için $u_s \in C_j \setminus X$ olacak şekilde $\exists u_s \in U$ olduğunu göstermek yeterlidir. Aksini kabul edelim, yani $C_j \setminus X = \emptyset$ olsun. Bu durumda $X \cap C_j \neq \emptyset$ olduğundan $C_j \subseteq X$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $u_s \in C_j \setminus X, C_j \cap X \neq \emptyset$ ve $X \setminus C_j \neq \emptyset$ olduğundan $p_{sj} = 1$ ve $x_{sj} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $[X] \subsetneq [A^X]$ olur.

c)⇒ b) $[A_X] \subsetneq [X] \subsetneq [A^X]$ olduğundan $[A^X] \setminus [A_X] = [BX] \neq [0]$ elde edilir.

c)⇒ d) Açıktır.

d)⇒ c) $[A_X] \subsetneq [X]$ olsun. İspatı tamamlamak için $[X] \subsetneq [A^X]$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $[X] = [A^X]$ olsun. Bu durumda $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $[x_{ij}] = [p_{ij}]$ ve buradan $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $u_i \in C_j$ ve $u_i \in C_j \cap X \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ olur. Bu ise bazı $j_t \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $X = \cup_{j_t} C_{j_t}$. Yani X elementer kümelerin herhangi bir sonlu birleşimi olduğunda sağlanır. Fakat bu durumda $j_t \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $C_{j_t} \subseteq X$ olur. Bu ise $[A_X] = [X]$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir.

c)⇒ e) Açıktır.

e)⇒ c) $[X] \subsetneq [A^X]$ olsun. İpatı tamamlamak için $[A_X] \subsetneq [X]$ göstermek yeterli olur. $[X] \subsetneq [A^X]$ olduğundan en az bir ij için $p_{ij} = 1$ ve $x_{ij} = 0$ olur. Bu durumda $u_i \in C_j$, $C_j \cap X \neq \emptyset$ ve $u_i \notin C_j \cap X$ olacak şekilde $\exists u_i \in U$ vardır. Buradan $u_k \neq u_i$ ve $[u_k]_R = [u_i]_R = C_j$ olacak şekilde $x = u_k \in X$ vardır. Dolayısıyla $u_k \in X \cap C_j$. Yani $x_{kj} = 1$ ve $q_{kj} = 0$ olduğundan $[A_X] \subsetneq [X]$ elde edilir.

■

Örnek 4.13. Örnek 4.9. de $[BX] \neq [0]$ olduğundan X bir kaba kümedir fakat $[BY] = [0]$ olduğundan Y tanımlanabilir bir kümedir. Dolayısıyla Tanım 2.4. den $R^*X = \{u_1, u_3, u_4, u_5\}$ ve $R_*X = \{u_3, u_5\}$ olduğundan $Bnd_A(X) = \{u_1, u_4\} \neq \emptyset$ olur. $R^*Y = \{u_1, u_3, u_4, u_5\} = R_*Y$ olduğundan $Bnd_A(Y) = \emptyset$ elde edilir.

Pawlak [27] makalesinde bir kümenin iç ve dış ölçüsü ile yaklaşım uzayının doğruluğu tanımlamıştır. Bu kavramların matrislere aktarılması, aşağıdaki tanımla sağlanmış ve bunun için öncelikle yeni bir kavram olan etki kümeleri tanıtılmıştır. Kavramsal olarak etki kümeleri, verilen bir kümenin $(U; R)$ yaklaşım uzayının denklik bağıntısına karşılık gelen parçalanışı ile etkileşimini veren kümeler olarak ifade edilebilir.

Tanım 4.14. $\emptyset \neq X \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı, $[X] = [x_{ij}]$, $[A^X] = [p_{ij}]$ ve $[A_X] = [q_{ij}]$ olsun ve herhangi bir S kümesinin eleman sayısı $|S|$ ile gösterilsin.

- $J_{[A^X]} = \{j \in \{1, 2, \dots, r\} | p_{ij} \neq 0\}$ X in **üst etki kümesi** olarak adlandırılır.
- $J_{[A_X]} = \{j \in \{1, 2, \dots, r\} | q_{ij} \neq 0\}$ X in **alt etki kümesi** olarak adlandırılır.
- $J_{[X]} = \{j \in \{1, 2, \dots, r\} | x_{ij} \neq 0\}$ X in **etki kümesi** olarak adlandırılır.
- X in **dış ölçüsü** $\mu[A^X] = |J_{[A^X]}|$ sayısıdır.
- X in **iç ölçüsü** $\mu[A_X] = |J_{[A_X]}|$ sayısıdır.
- X in A daki **yaklaşım doğruluğu** $\nu[X] = \frac{\mu[A_X]}{\mu[A^X]}$ ile tanımlanır.

$\emptyset \neq X \subset U$ olduğundan Tanım 4.6. (c) gereğince $\mu[A^X] \neq 0$ olur. Eğer $\nu[X] = 1$, yani $\mu[A_X] = \mu[A^X]$ ise X , A da ölçülebilirdir denir.

Aşağıdaki önerme ile Tanım 4.14. de verilen iç ve dış ölçü ile yaklaşımın doğruluğu kavramlarının Pawlak [27] tarafından verilen tanımların matris karşılıkları olduğu ve benzer amaçlarla kullanılabileceği gösterilmiştir. Ayrıca $J_{[X]}$ ve $J_{[A^X]}$ birbirinin yerine kullanılabilir. Elbette matrisler bilgisayar ortamına aktarma kolaylığı sağladığından, daha çok veri girişi gerektiren problemlerin çözümünde Tanım 4.14. ile verilen ölçüler daha kullanışlıdır.

Önerme 4.15. $\emptyset \neq X, Y \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun.

- $J_{[A_X]} \subseteq J_{[X]} = J_{[A^X]}$.
- $X \subseteq Y$ ise bu durumda $J_{[A_X]} \subseteq J_{[A_Y]}$ ve $J_{[X]} \subseteq J_{[Y]}$ dir.
- $\nu[X]$ (sırasıyla $\mu[A^X]$ ve $\mu[A_X]$) Pawlak'ın yaklaşım doğruluğuna eşittir (sırasıyla Pawlak'ın dış ölçüsü ve iç ölçüsü).
- X in A üzerinde kaba küme olması için gerek ve yeter şart $0 \leq \nu[X] < 1$ olmasıdır.
- X in A üzerinde tanımlı küme olması için gerek ve yeter şart $\nu[X] = 1$ olmasıdır.
- $\mu[A^U] = \mu[A_U]$ ve $\nu[U] = 1$.

İspat.

a)-b) Tanım 4.6. ve Tanım 4.14. dan ispat elde edilir.

c)-d)-e) Tanım 4.14. den $\mu[A^X]$ ve $\mu[A_X]$ sırasıyla X in üst ve alt yaklaşımında kullanılan atomların sayısını verdiği için $\mu[A^X] = \bar{\mu}_A(X)$ ve $\mu[A_X] = \underline{\mu}_A(X)$. Dolayısıyla $\nu[X] = \mu(X)$ elde edilir. Buradan b) ve c) ninde ispatı elde edilmiş olur.

f) $J_{[A_U]} = \{1, 2, \dots, r\} = J_{[A_U]}$ olduğundan $\mu[A^U] = r = \mu[A_U]$, buradan da $\nu[U] = \frac{\mu[A_U]}{\mu[A^U]} = 1$ olur.

■

Aşağıdaki örnekle etki kümeleri, iç ve dış ölçüleri ve doğruluk kavramlarının kaba küme teorisiyle benzer özelliklere sahip olduğu gösterilmektedir:

Örnek 4.16. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{18}\}$ ve $R \subseteq U \times U$ bağıntısı her $i, j \in \{1, 2, \dots, 18\}$ için $u_i R u_j \iff 5|i - j$ ile tanımlansın. Bu durumda R, U üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $A = (U; R)$ Pawlak yaklaşım uzayı olsun. Tüm denklik sınıfları $C_1 = \{1, 6, 11, 16\}$, $C_2 = \{2, 7, 12, 17\}$, $C_3 = \{3, 8, 13, 18\}$, $C_4 = \{4, 9, 14\}$ ve $C_5 = \{5, 10, 15\}$ şeklindedir. $X = \{1, 4, 5, 9, 11, 14, 18\} \subseteq U$ alalım. Bu durumda A nın $[A]$ yaklaşım matrisi ve $ACM(A, X)$ matrisleri şunlardır:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A^X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A_X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [BX] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$[BX] \neq [0]$ olduğundan Teorem 4.12. e göre X, A üzerinde bir kaba kümedir. Gerçekten $R^*X = C_1 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$, $R_*X = C_4$ ve $R^*X \setminus R_*X \neq \emptyset$ dir. Aynı zamanda $[A_X] \subsetneq [X] \subsetneq [A^X]$ olduğu görülmektedir. $J_{[A_X]} = \{4\}$, $J_{[A^X]} = \{1, 3, 4, 5\}$ ve $J_{[X]} = \{1, 3, 4, 5\}$. $\mu[A^X] = |J_{[A^X]}| = 4$, $\mu[A_X] = |J_{[A_X]}| = 1$ ve sonra $\nu[X] = \frac{\mu[A_X]}{\mu[A^X]} = \frac{1}{4}$. $X = U = \{u_1, u_2, \dots, u_{18}\}$ için $\mu[A^U] = 5$, $\mu[A_U] = 5$ olduğundan $\nu[U] = 1$ olur.

4.2. CMA Üzerinde Denk Matrisler ve Kaba Kümelerin Yeni Karakterizasyonları

Bu bölümde, öncelikle bir matrisin j -inci denklik sayısı tanımlanmış ve bu sayı kullanılarak yeni bir kavram olan denk matrisler tanıtılmıştır. Denk matrisler; kaba kümelerin

belirlenmesinde, benzerlik ölçülerinin tanımlanmasında ve karar verme yöntemlerinin oluşturulmasında yararlı birer araçtır.

$\emptyset \neq X, Y \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. U nun R ye karşılık gelen parçalanışı $U/R = \{C_j | j = 1, 2, \dots, r\}$ şeklindedir, burada $r = |U/R|$ U üzerinde R ye karşılık gelen farklı denklik sınıflarının sayısıdır. $[X] = [x_{ij}]$ ve $[Y] = [y_{ij}]$ A daki X ve Y nin sırasıyla kabalık matrisleri olsun. $|X|$, X kümesinin eleman sayısını ifade eder.

Tanım 4.17. $[X] = [x_{ij}]$ matrisinin **j inci denklik sayısı** $E_{[X]}^j$ ile gösterilir ve $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = \sum_{i=1}^n x_{ij}$ ile tanımlanır.

Tanım 4.18. Her bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = E_{[Y]}^j$ ise $[X] \equiv [Y]$ ile gösterilir ve $[X], [Y]$ matrislerinin *CMA*'da **denk matrisler** olduğu söylenir.

Önerme 4.19. $\emptyset \neq X, Y \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda

- $[X] \equiv [Y]$ ise $J_{[X]} = J_{[Y]}$ dir. Tersine genelde doğru değildir.
- $[X] \equiv [Y]$ olması için gerek ve yeter şart her bir $j \in J_{[X]}$ için $E_{[X]}^j = E_{[Y]}^j$ ve $J_{[X]} = J_{[Y]}$ olmasıdır.
- $X \subseteq Y$ ise her bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j \leq E_{[Y]}^j$.
- $\sum_{j=1}^r E_{[X]}^j = |X|$.

İspat.

- $[X] \equiv [Y]$ olsun. Bu durumda her bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = \sum_{i=1}^n x_{ij} = E_{[Y]}^j = \sum_{i=1}^n y_{ij}$. Buradan $[X]$ ve $[Y]$ matrislerinde tamamı sıfır olan sütunlar aynı numaralıdır. Dolayısıyla sıfırdan farklı bileşen içeren sütunlarda aynı numaralıdır, yani $J_{[X]} = J_{[Y]}$ olur. Tersine genelde doğru olmadığını göstermek için Örnek 4.20. yeterlidir.
- $[X] \equiv [Y]$ olsun. Bu durumda Tanım 4.18. den her bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = E_{[Y]}^j$. Dolayısıyla her bir $j \in J_{[X]}$ için $E_{[X]}^j = E_{[Y]}^j$ ve (a) dan $J_{[X]} = J_{[Y]}$ olur. Şimdi kabul edelim ki her bir $j \in J_{[X]}$ için $J_{[X]} = J_{[Y]}$ ve $E_{[X]}^j = E_{[Y]}^j$ olsun. Tanım 4.14. (c) den $J_{[X]} = \{j \in \{1, 2, \dots, r\} | x_{ij} \neq 0\} = J_{[Y]} = \{j \in \{1, 2, \dots, r\} | y_{ij} \neq 0\}$ olduğundan $j \in \{1, 2, \dots, r\} \setminus J_{[X]}$ için $E_{[X]}^j = E_{[Y]}^j = 0$. Buradan her bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = E_{[Y]}^j$, yani Tanım 4.18. den $[X] \equiv [Y]$ olur.
- $X \subseteq Y$ ise Lemma 4.8. (a) dan $[X] \subseteq [Y]$. $[X] \subseteq [Y]$ olduğundan her i, j için $x_{ij} \leq y_{ij}$ ise her bir j için $E_{[X]}^j \leq E_{[Y]}^j$ olur.

(d) $E_{[X]}^j = \sum_{i=1}^n x_{ij}$ olduğundan $\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n x_{ij}$ sayısı $[X]$ matrisinde bulunan 1 bileşenlerinin sayısını verir. Dolayısıyla $|X| = \sum_{j=1}^r E_{[X]}^j$ olur.

■

Örnek 4.20. $A = (U; R)$ Örnek 4.16. da verilen Pawlak yaklaşım uzayı olsun. $X = \{1, 4, 5, 9, 11, 14, 18\}$, $Y = \{4, 5, 6, 9, 13, 14, 16\}$ ve $Z = \{3, 4, 6, 9, 10, 13, 14\}$ bu durumda karşılık gelen kabalık matrisleri şunlardır:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$J_{[X]} = J_{[Y]} = \{1, 3, 4, 5\}$ olduğu görülmektedir.

$$j = 1 \text{ için } E_{[X]}^1 = \sum_{i=1}^{18} x_{i1} = 1 + 1 = 2 = E_{[Y]}^1 = \sum_{i=1}^{18} y_{i1},$$

$$j = 2 \text{ için } E_{[X]}^2 = \sum_{i=1}^{18} x_{i2} = 0 = E_{[Y]}^2 = \sum_{i=1}^{18} y_{i2},$$

$$j = 3 \text{ için } E_{[X]}^3 = \sum_{i=1}^{18} x_{i3} = 1 = E_{[Y]}^3 = \sum_{i=1}^{18} y_{i3},$$

$$j = 4 \text{ için } E_{[X]}^4 = \sum_{i=1}^{18} x_{i4} = 1 + 1 + 1 = 3 = E_{[Y]}^4 = \sum_{i=1}^{18} y_{i4} \text{ ve}$$

$$j = 5 \text{ için } E_{[X]}^5 = \sum_{i=1}^{18} x_{i5} = 1 = E_{[Y]}^5 = \sum_{i=1}^{18} y_{i5}.$$

Buradan $[X] \equiv [Y]$ olur. Yani $[X]$ matrisi ile $[Y]$ matrisi CMA da denk matrislerdir.

$J_{[X]} = J_{[Z]} = \{1, 3, 4, 5\}$ ve $j = 1$ için,

$E_{[X]}^1 = \sum_{i=1}^{18} x_{i1} = 1 + 1 = 2 \neq E_{[Z]}^1 = \sum_{i=1}^{18} z_{i1} = 1$ olduğundan, $[X]$ ve $[Z]$ CMA da denk matrisler değildir. Dolayısıyla, Önerme 4.19. (a) nın tersi genelde doğru değildir.

Lemma 4.21. \equiv bağıntısı CMA da bir denklik bağıntısıdır.

İspat. $\forall [X] \in CMA$ için $[X] \equiv [X]$ olduğunu gösterelim.

$\forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = E_{[X]}^j$ olduğundan $[X] \equiv [X]$ dir. Dolayısıyla yansıma özelliği sağlanır.

$[X] \equiv [Y]$ şartını sağlayan $\forall [X], [Y] \in CMA$ için $[Y] \equiv [X]$ olduğunu gösterelim.

$[X] \equiv [Y]$ olsun. Bu durumda Tanım 4.18. den her bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = \sum_{i=1}^n x_{ij} = E_{[Y]}^j = \sum_{i=1}^n y_{ij}$ olur. Dolayısıyla $[Y] \equiv [X]$ elde edilir ve simetri özelliği sağlanır.

$[X] \equiv [Y]$ ve $[Y] \equiv [Z]$ şartını sağlayan $\forall [X], [Y], [Z] \in CMA$ için $[X] \equiv [Z]$ olduğunu gösterelim.

$[X] \equiv [Y]$ ve $[Y] \equiv [Z]$ olsun. $\forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $[X] \equiv [Y]$ ise $E_{[X]}^j = \sum_{i=1}^n x_{ij} = E_{[Y]}^j = \sum_{i=1}^n y_{ij}$ ve $[Y] \equiv [Z]$ ise $E_{[Y]}^j = \sum_{i=1}^n y_{ij} = E_{[Z]}^j = \sum_{i=1}^n z_{ij}$ olduğundan $E_{[X]}^j = \sum_{i=1}^n x_{ij} = E_{[Z]}^j = \sum_{i=1}^n z_{ij}$ dir. Dolayısıyla $[X] \equiv [Z]$ ve geçişme özelliği sağlanır. ■

Matrislerde denklik, karşılık gelen kümelerin kaba olup olmamasıyla doğrudan ilişkilidir.

Önerme 4.22. $\emptyset \neq X, Y \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı ve CMA da $[X] \equiv [Y]$ olsun. Bu durumda X in A üzerinde bir kaba küme olması için gerek ve yeter şart Y nin A üzerinde bir kaba küme olmasıdır.

İspat. X kaba küme ve $[X] \equiv [Y]$ olsun. Bu durumda Tanım 4.18. den her bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = \sum_{i=1}^n x_{ij} = E_{[Y]}^j = \sum_{i=1}^n y_{ij}$. $[A^X] = [p_{ij}]$ ve $[A^Y] = [t_{ij}]$ olsun. $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $p_{ij} = 1$ ise $u_i \in C_j \ni C_j \cap X \neq \emptyset$ olur. $\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n y_{ij}$ olduğundan $u_i \in C_j$ vardır $\ni C_j \cap X \neq \emptyset$. Dolayısıyla $t_{ij} = 1$ olur. $p_{ij} = 1$ ise j -inci sütundaki tüm 1'lerin sayısı $|C_j|$ olduğundan j -inci sütundaki diğer bileşenler de eşittir. Yani $[A^X] = [A^Y]$. $[A_X] = [q_{ij}]$ ve $[A_Y] = [k_{ij}]$ olsun. $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $q_{ij} = 1$ ise $u_i \in C_j \ni C_j \subseteq X$. $\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n y_{ij}$ olduğundan $u_i \in C_j$ vardır $\ni C_j \subseteq Y$. Dolayısıyla $k_{ij} = 1$ olur. $q_{ij} = 0$ ise $u_i \in C_j \ni C_j \not\subseteq X$. $\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n y_{ij}$ olduğundan $u_i \in C_j \ni C_j \not\subseteq X$. Dolayısıyla $k_{ij} = 0$. Dolayısıyla $[A_X] = [A_Y]$ olur. $[B^X] = [A^X] \setminus [A_X] \neq [0]$. $[A^X] = [A^Y]$ ve $[A_X] = [A_Y]$ olduğundan $[A^Y] \setminus [A_Y] \neq [0]$ ise $[B^Y] \neq [0]$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.12. (b) den dolayı Y , A üzerinde bir kaba kümedir. Lemma 4.21. den $\equiv CMA$ 'da bir denklik bağıntısı olduğundan simetriktir. Dolayısıyla $[Y]$ bir kaba küme ve $[X] \equiv [Y]$ ise yukarıdaki ispata benzer şekilde X de A üzerinde bir kaba kümedir. ■

CMA 'daki denk matris kavramını kullanarak bir X kümesinin kaba küme olup olmadığını belirlemek için alt ve üst yaklaşımları kullanmaya gerek yoktur. Aşağıdaki teorem kaba kümelerin yeni bir karakterizasyonunu vermektedir:

Teorem 4.23. $\emptyset \neq X \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. X , A üzerinde bir kaba küme olması için gerek ve yeter şart $[X] \neq [Y]$ ve $[X] \equiv [Y]$ olacak şekilde en az bir $Y \subseteq U$ vardır.

İspat. $[X] = [x_{ij}]$, $[Y] = [y_{ij}]$, $[A^X] = [p_{ij}]$ ve $[A_X] = [q_{ij}]$ olsun. $[X] \equiv [Y]$ ve $[X] \neq [Y]$ olacak şekilde bir $Y \subseteq U$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Önerme 4.19. (b) den her bir $j \in J_{[X]}$ için $J_{[X]} = J_{[Y]}$, $E_{[X]}^j = \sum_{i=1}^n x_{ij} = E_{[Y]}^j = \sum_{i=1}^n y_{ij}$ ve en az bir ij için $x_{ij} \neq y_{ij}$ dir. En az bir ij için $x_{ij} = 1$ ve $y_{ij} = 0$ olsun. Buradan $u_i \in C_j \cap X$ ve $u_i \notin C_j \cap Y$ ve $u_k \notin C_j \cap X$ ve $u_k \in C_j \cap Y$ olacak şekilde en az bir $U_k \in U$ vardır, çünkü her bir $j \in J_{[X]}$ için $\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n y_{ij}$. Bu durumda $p_{kj} = 1$ ve $q_{kj} = 0$ bu ise $[B^X] = [0]$ olmasını gerektirir. Teorem 4.12. den X bir kaba kümedir. En az bir ij için $x_{ij} = 0$ ve $y_{ij} = 1$ ise yukarıdakiyle benzer şekilde Y , A üzerinde bir kaba kümedir. $[X] \equiv [Y]$ olduğundan Önerme 4.22. den X kümesinde A üzerinde bir kaba kümedir. Şimdi kabul edelim ki X , A üzerinde

bir kaba küme olsun. Teorem 4.12. de $[A_X] \subsetneq [X] \subsetneq [A^X]$. Bu durumda $p_{ij} = 1$ ve $q_{ij} = 0$ olacak şekilde ij vardır. Buradan $C_j \cap X \neq \emptyset$ ve $C_j \not\subseteq X$ olacak şekilde bir $u_i \in C_j$ vardır. Buna göre $u_k \notin X$ olacak şekilde $\exists u_k \in C_j$ vardır. $[Y] = [y_{ij}]$ matrisi aşağıdaki şekilde inşa edilsin: $x_{ij} = 1$ olduğundan $y_{ij} = 0$ ve $x_{kj} = 0$ olduğundan $y_{kj} = 1$ ve ij ve kj bileşenleri dışındaki $[X]$ ve $[Y]$ matrislerinin tüm bileşenleri eşit olsun. Bu durumda $J_{[X]} = J_{[Y]}$ ve her bir $j \in J_{[X]}$ için $\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n y_{ij}$ olur. Önerme 4.19.(b) den $[X] \neq [Y]$ ve $[X] \equiv [Y]$ elde edilir. Buradan $[Y]$ matrisine karşılık gelen $Y \subset U$ istenilen kümedir. ■

4.3. CMA Üzerinde Benzerlik Ölçümleri

Denk matris kavramı uygulamada da kullanışlıdır. Aşağıdaki tanımla denk matrisler kavramı kullanılarak yeni bir benzerlik ölçüsü tanımlanmıştır.

Tanım 4.24. $X, Y, Z \subset U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $A = (U; R)$ bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda

$$S_M : CMA \times CMA \longrightarrow [0, 1]$$

dönüşümü altında $S_M([X], [Y])$ değeri, $\forall [X], [Y], [Z] \in CMA$ için,

$$s1. 0 \leq S_M([X], [Y]) \leq 1$$

$$s2. [X] \equiv [Y] \Leftrightarrow S_M([X], [Y]) = 1$$

$$s3. S_M([X], [Y]) = S_M([Y], [X])$$

$$s4. [X] \subseteq [Y] \subseteq [Z] \text{ ise bu durumda } S_M([X], [Z]) \leq S_M([X], [Y]) \text{ ve } S_M([X], [Z]) \leq S_M([Y], [Z]).$$

aksiyomlarını sağlıyorsa S_M fonksiyonuna bir M -benzerlik ölçüsü denir.

Bir M - benzerlik metodu:

$\rho : CMA \times CMA \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu, $\forall [X], [Y] \in CMA$ için,

$$\rho([X], [Y]) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Y|\}} \sum_{j=1}^r |E_{[X]}^j - E_{[Y]}^j|, & X \neq \emptyset \text{ veya } Y \neq \emptyset \\ 1, & X = \emptyset \text{ ve } Y = \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlansın.

Teorem 4.25. ρ , CMA üzerinde bir M - benzerlik ölçüsüdür.

İspat. $[X], [Y], [Z] \in CMA$ olsun.

s1. s2. $\rho([U], [0]) = 1 - \frac{1}{\max\{|U|, 0\}} \sum_{j=1}^r |E_{[U]}^j - E_{[0]}^j| = 1 - \frac{|U|}{|U|} = 0$. Tanım 4.18. den $[X] \equiv [Y]$ olması için gerek ve yeter şart her bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = E_{[Y]}^j$ olmasıdır. Bu durumda

$$[X] \equiv [Y] \Leftrightarrow \rho([X], [Y]) = 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Y|\}} \sum_{j=1}^r |E_{[X]}^j - E_{[Y]}^j| = 1 - \frac{0}{\max\{|X|, |Y|\}} = 1.$$

$\emptyset \neq X \subsetneq Y \subsetneq U$ olsun. Önerme 4.19. den her bir $j = 1, 2, \dots, r$ için $E_{[X]}^j < E_{[Y]}^j$ ve $E_{[Y]}^j \leq |Y|$ olduğundan $0 < \rho([X], [Y]) < 1$ elde edilir.

s3. ρ fonksiyonunun tanımından simetriklik açıktır.

s4. $[X] \subseteq [Y] \subseteq [Z]$ olsun. Bu durumda Önerme 4.19. (c) den her bir $j = 1, 2, \dots, r$ için $E_{[X]}^j \leq E_{[Y]}^j \leq E_{[Z]}^j$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \rho([X], [Z]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Z|\}} \sum_{j=1}^r |E_{[X]}^j - E_{[Z]}^j| = 1 - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r |E_{[Z]}^j - E_{[X]}^j| \\ &= 1 - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r (E_{[Z]}^j - E_{[Y]}^j + E_{[Y]}^j - E_{[X]}^j) \\ &= 1 - \frac{1}{|Z|} [\sum_{j=1}^r (E_{[Z]}^j - E_{[Y]}^j) + \sum_{j=1}^r (E_{[Y]}^j - E_{[X]}^j)] \\ &= 1 - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r (E_{[Z]}^j - E_{[Y]}^j) - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r (E_{[Y]}^j - E_{[X]}^j) \\ &\geq 1 - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r (E_{[Z]}^j - E_{[Y]}^j) - 1 + 1 - \frac{1}{|Y|} \sum_{j=1}^r (E_{[Y]}^j - E_{[X]}^j) \\ &= 1 - \frac{1}{\max\{|Y|, |Z|\}} \sum_{j=1}^r |E_{[Y]}^j - E_{[Z]}^j| - 1 + 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Y|\}} \sum_{j=1}^r |E_{[X]}^j - E_{[Y]}^j| \\ &= \rho([Y], [Z]) - 1 + \rho([X], [Y]) \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$1 + \rho([X], [Z]) \geq \rho([X], [Y]) + \rho([Y], [Z])$$

elde edilir.

$0 \leq \rho([X], [Y]) \leq 1$, $0 \leq \rho([Y], [Z]) \leq 1$ ve $0 \leq \rho([X], [Z]) \leq 1$ olduğundan $\rho([X], [Z]) \leq \rho([X], [Y])$ ve $\rho([X], [Z]) \leq \rho([Y], [Z])$ sağlanır.

■

Ağırlıklı bir M - benzerlik metodu:

Bu metotta, U üzerindeki bir R denklik bağıntısına göre U kümesinin parçalanışındaki her bir denklik sınıfına bir ağırlık değeri atanır. C_j denklik sınıfının ağırlığı w_j ise bu durumda $0 < w_j < 1$ ve $\sum_{j=1}^r w_j = 1$ sağlanır.

$\rho_w : CMA \times CMA \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu, $\forall [X], [Y] \in CMA$ için,

$$\rho_w([X], [Y]) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Y|\}} w_j, & X \neq \emptyset \text{ veya } Y \neq \emptyset \\ 1, & X = \emptyset \text{ ve } Y = \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlansın.

Teorem 4.26. ρ_w , CMA üzerinde bir M -benzerlik ölçüsüdür.

İspat. $[X], [Y], [Z] \in CMA$ olsun.

s1. s2.

$$\begin{aligned} \rho_w([U], [0]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|U|, |0|\}} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[U]}^j - E_{[0]}^j| \\ &= 1 - \frac{1}{|U|} \sum_{j=1}^r w_j E_{[U]}^j \\ &\geq 1 - \frac{1}{|U|} (\sum_{j=1}^r w_j) (\sum_{j=1}^r E_{[U]}^j) \\ &= 1 - \frac{1}{|U|} |U| = 0. \end{aligned}$$

Tanım 4.18. den $[X] \equiv [Y]$ olması için gerek ve yeter şart her bir $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $E_{[X]}^j = E_{[Y]}^j$ olmasıdır. Bu durumda

$$[X] \equiv [Y] \Leftrightarrow \rho_w([X], [Y]) = 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Y|\}} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[X]}^j - E_{[Y]}^j| = 1 - \frac{0}{\max\{|X|, |Y|\}} = 1.$$

$\emptyset \neq X \subsetneq Y \subsetneq U$ olsun. Önerme 4.19. da her bir $j = 1, 2, \dots, r$ için $E_{[X]}^j \leq E_{[Y]}^j$ ve $E_{[Y]}^j \leq |Y|$ olduğundan $0 < \rho_w([X], [Y]) < 1$ elde edilir.

s3. ρ_w fonksiyonunun tanımından simetriklik açıktır.

s4. $[X] \subseteq [Y] \subseteq [Z]$ olsun. Bu durumda Önerme 4.19. (c) den her bir $j = 1, 2, \dots, r$ için $E_{[X]}^j \leq E_{[Y]}^j \leq E_{[Z]}^j$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \rho_w([X], [Z]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Z|\}} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[X]}^j - E_{[Z]}^j| \\ &= 1 - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[Z]}^j - E_{[X]}^j| \\ &= 1 - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r w_j (E_{[Z]}^j - E_{[Y]}^j + E_{[Y]}^j - E_{[X]}^j) \\ &= 1 - \frac{1}{|Z|} [\sum_{j=1}^r w_j (E_{[Z]}^j - E_{[Y]}^j) + \sum_{j=1}^r w_j (E_{[Y]}^j - E_{[X]}^j)] \\ &= 1 - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r w_j (E_{[Z]}^j - E_{[Y]}^j) - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r w_j (E_{[Y]}^j - E_{[X]}^j) \\ &\geq 1 - \frac{1}{|Z|} \sum_{j=1}^r w_j (E_{[Z]}^j - E_{[Y]}^j) - 1 + 1 - \frac{1}{|Y|} \sum_{j=1}^r w_j (E_{[Y]}^j - E_{[X]}^j) \\ &= 1 - \frac{1}{\max\{|Y|, |Z|\}} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[Y]}^j - E_{[Z]}^j| - 1 \\ &\quad + 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Y|\}} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[X]}^j - E_{[Y]}^j| \\ &= \rho_w([Y], [Z]) - 1 + \rho_w([X], [Y]) \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$1 + \rho_w([X], [Z]) \geq \rho_w([X], [Y]) + \rho_w([Y], [Z])$$

elde edilir.

$0 \leq \rho_w([X], [Y]) \leq 1$, $0 \leq \rho_w([Y], [Z]) \leq 1$ ve $0 \leq \rho_w([X], [Z]) \leq 1$ olduğundan $\rho_w([X], [Z]) \leq \rho_w([X], [Y])$ ve $\rho_w([X], [Z]) \leq \rho_w([Y], [Z])$ sağlanır.

■

4.4. Uygulamalar: Benzerlik ölçülerine dayalı karar verme sistemleri

Benzerlik Algoritması:

Adım1: $A = (U; R)$ Pawlak yaklaşım uzayında $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ elemanlarının sıraları belirlenerek yazılır. Başka bir deyişle u_i nin hangi elemanı temsil ettiği belirlenir.

Adım2: U nun R ye karşılık gelen $U/R = \{C_j | j = 1, 2, \dots, r\}$ parçalanışı elde edilir.

Adım3: U nun verilen X ve Y alt kümelerinin $[X]$ ve $[Y]$ matrisleri yazılır.

Adım4: $\rho([X], [Y])$ (veya $\rho_w([X], [Y])$) hesaplanır. $\rho([X], [Y])$ (veya $\rho_w([X], [Y])$) 1 sayısına ne kadar yakınsa X ve Y arasındaki benzerlik o kadar büyüktür.

Uyarı 4.27. U nun elemanlarının yazılış sırası önemli değildir. Önemli olan hesaplama işlemine başlandığında belirtilen sırayı değiştirmemektir.

Aşağıdaki örnek ile bir şirketin başvurduğu ihale için işi tamamlamak üzere sunacağı zaman çizelgesinin tahmini değerini (ağırlıklı) M - benzerlik yöntemini kullanarak nasıl hesaplanacağı sunulmaktadır.

Örnek 4.28. Teknoloji ve yazılım alanında faaliyet gösteren bir firma almak istediği bir ihale de çalıştırmak üzere personel alımı yapmak istemektedir. İhtiyaç duyulan beceriler şu şekildedir: Yazılım mühendisi, makine mühendisi, teknisyen, elektrikçi, taşıyıcı ve sürücü. İhaleyi alabilmek için işin zamanında yapılması önemlidir. Bu nedenle şirket iş yükünü dağıtmak için personelinden ekipler oluşturmak istemektedir. İşin 40 günde tamamlanabilmesi için en az 5 ekibe ihtiyaçları olduğunu ve her ekipte 2 yazılım mühendisi, 1 makine mühendisi, 1 teknisyen, 1 elektrikçi, 2 taşıyıcı ve 1 sürücü olması gerektiği öngörülmektedir. İşe alım sonucunda istedikleri kriterlere uygun personel 8 yazılım mühendisi, 5 makine mühendisi, 4 teknisyen, 3 taşıyıcı ve 2 sürücü olarak belirlenmiştir. Ardından

Kabalık Matrisi [küme]	$\rho([X], [küme])$	[küme] için beklenen zaman
[Y]	1	40 gün
[Z]	$\frac{5}{6}$	48 gün
[T]	$\frac{1}{2}$	80 gün
[W]	$\frac{1}{3}$	120 gün

$$\begin{aligned}
\rho_w([X], [Y]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Y|\}} \sum_{j=1}^r |E_{[X]}^j - E_{[Y]}^j| \\
&= 1 - \frac{1}{\max\{6, 6\}} \sum_{j=1}^5 |E_{[X]}^j - E_{[Y]}^j| \\
&= 1 - \frac{1}{6} (|E_{[X]}^1 - E_{[Y]}^1| + |E_{[X]}^2 - E_{[Y]}^2| + |E_{[X]}^3 - E_{[Y]}^3| + |E_{[X]}^4 - E_{[Y]}^4| + |E_{[X]}^5 - E_{[Y]}^5|) \\
&= 1 - \frac{1}{6} (|2 - 2| + |1 - 1| + |1 - 1| + |1 - 1| + |1 - 1|) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_w([X], [Z]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Z|\}} \sum_{j=1}^r |E_{[X]}^j - E_{[Z]}^j| = \frac{5}{6} \\
\rho_w([X], [T]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |T|\}} \sum_{j=1}^r |E_{[X]}^j - E_{[T]}^j| = \frac{1}{2} \\
\rho_w([X], [W]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |W|\}} \sum_{j=1}^r |E_{[X]}^j - E_{[W]}^j| = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Bu durumda ekipler bu şekilde oluşturulursa işin tamamlanma süresi 120 gün olacaktır. Bu problemde ağırlık katsayısının yeteneklerin iş yüküne katkısına göre belirlenmesi uygun olur. Denklik sınıflarına verilen işin türüne göre ağırlık değerleri atanırsa sonuç farklı olabilir. $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.25$, $w_3 = 0.15$, $w_4 = 0.1$ ve $w_5 = 0.1$ in sırasıyla $\{C_j | j = 1, 2, \dots, 5\}$ denklik sınıflarının atanmış ağırlık değerleri olduğunu varsayalım. Bu durumda

Kabalık Matrisi [küme]	$\rho([X], [küme])$	[küme] için beklenen zaman
[Y]	1	40 gün
[Z]	0.98	41 gün
[T]	0.9	44 gün
[W]	0.875	46 gün

$$\begin{aligned}
\rho_w([X], [Y]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Y|\}} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[X]}^j - E_{[Y]}^j| \\
&= 1 - \frac{1}{\max\{6, 6\}} \sum_{j=1}^5 w_j |E_{[X]}^j - E_{[Y]}^j| \\
&= 1 - \frac{1}{6} (w_1 |E_{[X]}^1 - E_{[Y]}^1| + w_2 |E_{[X]}^2 - E_{[Y]}^2| + w_3 |E_{[X]}^3 - E_{[Y]}^3| + w_4 |E_{[X]}^4 - E_{[Y]}^4| + w_5 |E_{[X]}^5 - E_{[Y]}^5|) \\
&= 1 - \frac{1}{6} (0.4 |2 - 2| + 0.25 |1 - 1| + 0.15 |1 - 1| + 0.1 |1 - 1| + 0.1 |1 - 1|) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_w([X], [Z]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |Z|\}} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[X]}^j - E_{[Z]}^j| = 0.98 \\ \rho_w([X], [T]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |T|\}} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[X]}^j - E_{[T]}^j| = 0.9 \\ \rho_w([X], [W]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X|, |W|\}} \sum_{j=1}^r w_j |E_{[X]}^j - E_{[W]}^j| = 0.875\end{aligned}$$

Bu durumda ekipler bu şekilde oluşturulursa işin tamamlanma süresinin 46 gün olacağı görülmektedir.

Benzerlik ölçülerine dayalı karar verme sistemleri

Birbirinden bağımsız kriterler içeren belirsizliklerle başa çıkmak için yeni bir karar verme yöntemi sunulmuştur. Tüm kriterleri mükemmel bir şekilde karşıladığı varsayılan hayali bir eleman u_1 , tüm alternatiflerin kümesi olan $U' = \{u_2, \dots, u_n\}$ kümesine eklenir ve ardından $U = U' \cup \{u_1\}$ oluşturulur. Karar vericiler tarafından belirlenen s adet kriter içeren bir problemde öncelikle her bir kriter için bir Pawlak yaklaşım uzayı belirlenir, yani $A_1 = (U; R_1)$, $A_2 = (U; R_2)$, \dots , $A_s = (U; R_s)$ Pawlak yaklaşım uzayları elde edilir. $X_1 = \{u_1\}$ mükemmel seçim kümesi ve diğer kümeler $X_2 = \{u_2\}$, $X_3 = \{u_3\}$, \dots , $X_n = \{u_n\}$ alınır ve $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $k \in \{2, \dots, n\}$ için $S_{M_i}([X_1], [X_k])$ elde edilir. Son olarak, her bir $k \in \{2, \dots, n\}$ için $\sum_{i=1}^s S_{M_i}([X_1], [X_k])$ sayıları elde edilip sıralanır. En büyük sayıya karşılık gelen eleman tercih edilecek olandır. Buna göre karar verme algoritması aşağıdaki gibi düzenlenir.

Karar Verme Algoritması:

- Adım1: $U = U' \cup \{u_1\}$ kümesi tüm alternatiflerin $U' = \{u_2, \dots, u_n\}$ kümesine hayali mükemmel alternatifin eklenmesiyle oluşturulur.
- Adım2: s adet kriter ve bunların bağımsız alt kriterleri ile ağırlık oranları her bir kriter için karar vericiler tarafından belirlenir.
- Adım3: $A_1 = (U, R_1)$, $A_2 = (U, R_2)$, \dots , $A_s = (U, R_s)$ Pawlak yaklaşım uzayları belirlenir.
- Adım4: $X_1 = \{u_1\}$ mükemmel seçim kümesi ve $X_2 = \{u_2\}$, $X_3 = \{u_3\}$, \dots , $X_n = \{u_n\}$, kümeleri için $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $k \in \{2, \dots, n\}$ için $\rho_{w_i}([X_1], [X_k])$ hesaplanır.
- Adım5: Her bir $k \in \{2, \dots, n\}$ için $\sum_{i=1}^s \rho_{w_i}([X_1], [X_k])$ sayıları elde edilir ve sıralanır. En büyük sayıya karşılık gelen eleman tercih edilecektir. Bu sıralama birden fazla alternatifin seçilmesi içinde kullanılabilir.

Örnek 4.29. Bir teknoloji şirketi makine mühendisi istihdam etmek istemektedir. 10 makine mühendisi şirket tarafından verilen iş ilanına başvurmuştur. Bu durumda $U' = \{u_2, \dots, u_{11}\}$ kümesi iş ilanına başvuran adayların kümesidir. Karar vericiler kriterleri belirler ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{11}\}$ kümesini oluşturur. Burada u_1 tüm kriterleri mükemmel şekilde karşıladığı varsayılan hayali bir adaydır. İlk kriteri şu şekilde belirlemiştir:

C_1 : İş deneyimine sahip olmak.

Bu kriter aşağıdaki gibi bağımsız kriterlere ayrılmıştır:

C_1^1 = Hiç iş deneyimi olmayanlar,

C_1^2 = 1 yıldan az iş deneyimine sahip olanlar,

C_1^3 = 1 ila 3 yıllık iş deneyimine sahip olanlar,

C_1^4 = 3 ila 5 yıllık iş deneyimine sahip olanlar,

C_1^5 = 5 yıl veya daha fazla iş deneyimine sahip olanlardır.

Bu durumda $\{C_1^1, C_1^2, C_1^3, C_1^4, C_1^5\}$ kümesi U nun bir parçalanışıdır ve $A_1 = (U; R_1)$ Pawlak yaklaşım uzayıdır. Burada R_1 bu parçalanışa karşılık gelen denklik bağıntısıdır. Bu durumda karar vericiler her bir kriter için belirledikleri ağırlıklarla birlikte aşağıdaki tabloya sahip olacaktır:

Pawlak yaklaşım uzayı	Kriterler	Elemanların parçalanışları	Ağırlık
$A_1 = (U; R_1)$	C_1^1	$C_1^1 = \{u_3, u_7, u_{11}\}$	$w_1^1 = 0.1$
	C_1^2	$C_1^2 = \{u_5, u_8\}$	$w_1^2 = 0.15$
	C_1^3	$C_1^3 = \{u_2, u_6\}$	$w_1^3 = 0.2$
	C_1^4	$C_1^4 = \{u_4, u_9\}$	$w_1^4 = 0.25$
	C_1^5	$C_1^5 = \{u_1, u_{10}\}$	$w_1^5 = 0.3$

$X_1 = \{u_1\}, X_2 = \{u_2\}, \dots, X_n = \{u_n\}$ kümeleri için kabalık matrisleri şunlardır:

$$\begin{aligned}
 [X_1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_3] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_4] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 & & & & [X_5] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X_6] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_7] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_8] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_9] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[X_{10}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[X_{11}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Karar vericiler ikinci kriteri şu şekilde belirlemiştir:

C_2 : Adayların yaş aralığı.

Bu kriter aşağıdaki gibi bağımsız kriterlere ayrılmıştır:

$C_2^1 = 20$ ile 25 yaş arasındaki adaylar,

$C_2^2 = 25$ ile 28 yaş arasındaki adaylar,

$C_2^3 = 28$ yaş ve üzeri adaylardır.

Bu durumda $\{C_2^1, C_2^2, C_2^3\}$ kümesi U nun bir parçalanışıdır ve $A_2 = (U; R_2)$ Pawlak yaklaşım uzayıdır. Burada R_2 bu parçalanışa karşılık gelen denklik bağıntısıdır. Bu durumda karar vericiler her bir kriter için belirledikleri ağırlıkları içeren aşağıdaki tabloya sahip olacaktır:

Pawlak yaklaşım uzayı	Kriterler	Elemanların parçalanışları	Ağırlık
$A_2 = (U; R_2)$	C_2^1	$C_2^1 = \{u_1, u_3, u_5, u_7, u_8, u_{11}\}$	$w_2^1 = 0.45$
	C_2^2	$C_2^2 = \{u_2, u_6, u_{10}\}$	$w_2^2 = 0.35$
	C_2^3	$C_2^3 = \{u_4, u_9\}$	$w_2^3 = 0.2$

$X_1 = \{u_1\}, X_2 = \{u_2\}, \dots, X_n = \{u_n\}$ kümeleri için kabalık matrisleri şunlardır:

$$\begin{aligned}
[X_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_3] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_4] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_5] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[X_6] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X_7] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_8] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_9] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [X_{10}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & [X_{11}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Karar vericiler son kriteri şu şekilde belirlemiştir:

C_3 : P_1, P_2, P_3 bilgisayar programlarını bilenler.

Bu kriter aşağıdaki gibi bağımsız kriterlere ayrılmıştır:

C_3^1 = Bu programlardan sadece birini bilenler,

C_3^2 = Bu programlardan sadece ikisini bilenler,

C_3^3 = Tüm bu programları bilenlerdir.

Bu durumda $\{C_3^1, C_3^2, C_3^3\}$ kümesi U nun bir parçalanışıdır ve $A_3 = (U; R_3)$ Pawlak yaklaşım uzayıdır, burada R_3 bu parçalanışa karşılık gelen denklik bağıntısıdır. Bu durumda karar vericiler her bir kriter için belirledikleri ağırlıkları içeren aşağıdaki tabloya sahip olacaktır:

Pawlak yaklaşım uzayı	Kriterler	Elemanların parçalanışları	Ağırlık
$A_3 = (U; R_3)$	C_3^1	$C_3^1 = \{u_2, u_4, u_5, u_6, u_8, u_{10}\}$	$w_3^1 = 0.2$
	C_3^2	$C_3^2 = \{u_3, u_7, u_9\}$	$w_3^2 = 0.3$
	C_3^3	$C_3^3 = \{u_1, u_{11}\}$	$w_3^3 = 0.5$

$X_1 = \{u_1\}, X_2 = \{u_2\}, \dots, X_n = \{u_n\}$ kümeleri için kabalık matrisleri şunlardır:

k	$\rho_{w_1}([X_1], [X_k])$	$\rho_{w_2}([X_2], [X_k])$	$\rho_{w_3}([X_3], [X_k])$	$\sum_{j=1}^3 \rho_{w_j}([X_1], [X_k])$
2	0.5	0.2	0.3	1
3	0.6	1	0.2	1.8
4	0.45	0.35	0.3	1.1
5	0.55	1	0.3	1.85
6	0.5	0.2	0.3	1
7	0.6	1	0.2	1.8
8	0.55	1	0.3	1.85
9	0.45	0.35	0.2	1
10	1	0.2	0.3	1.5
11	0.6	1	1	2.6

Yukarıdaki tablonun ilk sütunu için yapılan işlemler şunlardır:

$$\begin{aligned}
\rho_{w_1}([X_1], [X_2]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_2|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_2]}^j| \\
&= 1 - 1(w_1^1 |E_{[X_1]}^1 - E_{[X_2]}^1| + w_1^2 |E_{[X_1]}^2 - E_{[X_2]}^2| + w_1^3 |E_{[X_1]}^3 - E_{[X_2]}^3| \\
&\quad + w_1^4 |E_{[X_1]}^4 - E_{[X_2]}^4| + w_1^5 |E_{[X_1]}^5 - E_{[X_2]}^5|) \\
&= 1 - (0.1|0 - 0| + 0.15|0 - 0| + 0.2|0 - 1| + 0.25|0 - 0| + 0.3|1 - 0|) \\
&= 1 - 0.5 = 0.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{w_1}([X_1], [X_3]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_3|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_3]}^j| = 0.6 \\
\rho_{w_1}([X_1], [X_4]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_4|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_4]}^j| = 0.45 \\
\rho_{w_1}([X_1], [X_5]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_5|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_5]}^j| = 0.55 \\
\rho_{w_1}([X_1], [X_6]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_6|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_6]}^j| = 0.5 \\
\rho_{w_1}([X_1], [X_7]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_7|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_7]}^j| = 0.6 \\
\rho_{w_1}([X_1], [X_8]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_8|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_8]}^j| = 0.55 \\
\rho_{w_1}([X_1], [X_9]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_9|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_9]}^j| = 0.45 \\
\rho_{w_1}([X_1], [X_{10}]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_{10}|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_{10}]}^j| = 1 \\
\rho_{w_1}([X_1], [X_{11}]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_{11}|\}} \sum_{j=1}^5 w_1^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_{11}]}^j| = 0.6
\end{aligned}$$

Yukarıdaki tablonun ikinci sütunu için yapılan işlemler şunlardır:

$$\begin{aligned}
\rho_{w_2}([X_1], [X_2]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_2|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_2]}^j| \\
&= 1 - 1(w_2^1 |E_{[X_1]}^1 - E_{[X_2]}^1| + w_2^2 |E_{[X_1]}^2 - E_{[X_2]}^2| + w_2^3 |E_{[X_1]}^3 - E_{[X_2]}^3|) \\
&= 1 - (0.45|1 - 0| + 0.35|0 - 1| + 0.2|0 - 0|) \\
&= 1 - 0.8 = 0.2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{w_2}([X_1], [X_3]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_3|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_3]}^j| = 1 \\
\rho_{w_2}([X_1], [X_4]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_4|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_4]}^j| = 0.35 \\
\rho_{w_2}([X_1], [X_5]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_5|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_5]}^j| = 1 \\
\rho_{w_2}([X_1], [X_6]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_6|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_6]}^j| = 0.2 \\
\rho_{w_2}([X_1], [X_7]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_7|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_7]}^j| = 1 \\
\rho_{w_2}([X_1], [X_8]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_8|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_8]}^j| = 1 \\
\rho_{w_2}([X_1], [X_9]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_9|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_9]}^j| = 0.35 \\
\rho_{w_2}([X_1], [X_{10}]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_{10}|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_{10}]}^j| = 0.2 \\
\rho_{w_2}([X_1], [X_{11}]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_{11}|\}} \sum_{j=1}^5 w_2^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_{11}]}^j| = 1
\end{aligned}$$

Yukarıdaki tablonun üçüncü sütunu için yapılan işlemler şunlardır:

$$\begin{aligned}
\rho_{w_3}([X_1], [X_2]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_2|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_2]}^j| \\
&= 1 - 1(w_3^1 |E_{[X_1]}^1 - E_{[X_2]}^1| + w_3^2 |E_{[X_1]}^2 - E_{[X_2]}^2| + w_3^3 |E_{[X_1]}^3 - E_{[X_2]}^3|) \\
&= 1 - (0.2|0 - 1| + 0.3|0 - 0| + 0.5|1 - 0|) \\
&= 1 - 0.7 = 0.3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{w_3}([X_1], [X_3]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_3|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_3]}^j| = 0.2 \\
\rho_{w_3}([X_1], [X_4]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_4|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_4]}^j| = 0.3 \\
\rho_{w_3}([X_1], [X_5]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_5|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_5]}^j| = 0.3 \\
\rho_{w_3}([X_1], [X_6]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_6|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_6]}^j| = 0.3 \\
\rho_{w_3}([X_1], [X_7]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_7|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_7]}^j| = 0.2 \\
\rho_{w_3}([X_1], [X_8]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_8|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_8]}^j| = 0.3 \\
\rho_{w_3}([X_1], [X_9]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_9|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_9]}^j| = 0.2 \\
\rho_{w_3}([X_1], [X_{10}]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_{10}|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_{10}]}^j| = 0.3 \\
\rho_{w_3}([X_1], [X_{11}]) &= 1 - \frac{1}{\max\{|X_1|, |X_{11}|\}} \sum_{j=1}^5 w_3^j |E_{[X_1]}^j - E_{[X_{11}]}^j| = 1
\end{aligned}$$

Bu durumda adayların mükemmel seçeneğe yakınlıklarına göre sıralaması şöyledir:

$$u_{11} > u_8 = u_5 > u_7 = u_3 > u_{10} > u_4 > u_9 = u_6 = u_2.$$

Elbette aynı sıralama birden fazla personel seçimi için de kullanılabilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Küme teorisinin matrislere aktarılması, hem bilgisayar ortamında çok sayıda veri girişi gerektiren problemlerin incelenmesinde hem de çözülebilecek problem çeşitliliğinin arttırılmasında önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle, bu çalışmada kaba küme teorisinde kullanılan hemen hemen tüm yapı ve işlemlerin matrislere aktarılması sağlanmaktadır. Pawlak yaklaşım uzayı A nın karakteristik matrisleri kümesi olan CMA tanıtılmış ve yaklaşım matrisi, kabalık matrisi, üst ve alt yaklaşım matrisleri ve sınır matrisi gibi CMA nın özel elemanları tanımlanmış ve kaba kümelerin karakterizasyonu ve çözümü gibi birçok faydalı sonuç üretilmiştir. Bilgisayar ortamında birçok veri girişini içeren problemler artık bu sayede ele alınmıştır. Birleşim, kesişim, tümleyen, fark ve simetrik fark gibi birçok yeni işlem tanımlanmış ve bu işlemler kullanılarak değişmeli grup ve değişmeli monoid gibi cebirsel yapılar elde edilmiştir. CMA daki özel matrisler yardımıyla etki kümeleri, bir kümenin iç ve dış ölçüleri ve yaklaşımın doğruluğu tanımlanmıştır. Yeni bir kavram olan denk matrisler tanıtılmıştır ve kaba kümelerin karakterizasyonları ve ayrıca denk matrisler kullanılarak (ağırlıklandırılmış) benzerlik ölçümleri sunulmuştur. Son olarak “bir firmanın başvurduğu ihaleye ilişkin işi tamamlamak için sunacağı zaman çizelgesinin tahmini değerini nasıl hesaplayacağına” ilişkin bir benzerlik uygulamasına yer verilmiştir. Bundan sonraki çalışmalar için önerilerimiz iki yönlüdür: Birincisi işlem kapsamının genişletilerek cebirsel uygulamaların yapılması, ikincisi ise çoklu karar verme problemlerine yönelik çözüm yöntemlerinin geliştirilmesidir.

KAYNAKLAR

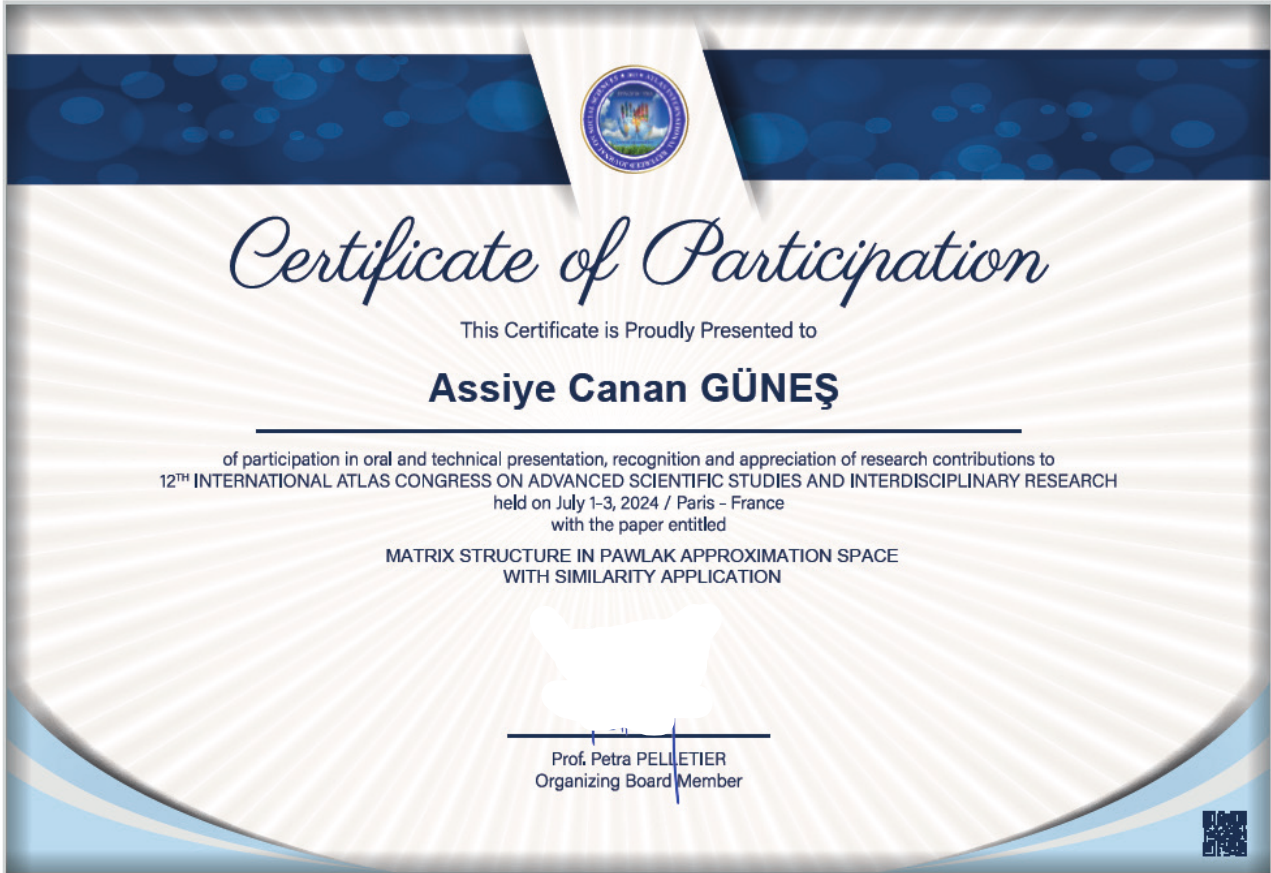
- [1] Alcantud, J.C.R., Feng, F., & Yager, R. R. (2020). An N-soft set approach to rough sets, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 28(11), 2996-3007.
- [2] Ali, M. I., Shabir, M., & Tanveer, S. (2012). Roughness in hemirings, *Neural Comput. Appl.* 21, 171-180.
- [3] Atagün, A. O. (2025). Novel characterizations of rough soft sets; Equivalent soft sets in Pawlak approximation space with applications, *Expert Syst. Appl.* 128462.
- [4] Atagün, A. O. (2025). Strait and product operations on strait soft sets and their reduced soft matrices with decision-making applications, *FILOMAT* 39(30).
- [5] Atagün, A.O., & Kamacı, H. (2023). Strait soft sets and strait rough sets with applications in decision making, *Soft Comput.* 27, 14585-14599.
- [6] Atagün, A.O., & Kamacı, H. (2023). Strait fuzzy sets, strait fuzzy rough sets and their similarity measures-based decision making systems, *Int. J. Syst. Sci.* 54, 2519-2535.
- [7] Beg, I., & Ashraf, S. (2009). Similarity measures for fuzzy sets, *Appl. Math. Comput.* 8(2), 192-202.
- [8] Bonikowaski, Z. (1995). Algebraic structures of rough sets. In: Ziarko, W.P. (ed.) *Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery*, pp. 242-247. Springer, Berlin.
- [9] Dai, J.H. (2008). Rough 3-valued algebras, *Inf. Sci.* 178, 1986-1996.
- [10] Davvaz, B. (2004). Roughness in rings, *Inf. Sci.* 164, 147-163.
- [11] Davvaz, B. (2006). Roughness based on fuzzy ideals, *Inf. Sci.* 176, 2417-2437.
- [12] Davvaz, B. (2008). Approximations in n-ary algebraic systems, *Soft Comput.* 12, 409-418.
- [13] Deng, G., Song, L., Jiang, Y., & Fu, J. (2017). Monotonic similarity measures of interval-valued fuzzy sets and their applications, *Int. J. Uncertain Fuzz.* 25(4), 515-544.
- [14] Dubois, D., & Prade, H. (1990). Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets, *Int. J. General Syst.*, 17, 191-209.
- [15] Feng, F., Li, C., Davvaz, B., & Ali, M.I. (2010). Soft sets combined with fuzzy sets and roughsets: a tentative approach, *Soft Comput.* 14, 899-911.
- [16] Iwinski, T. (1987). Algebraic approach to rough sets. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 35, 673-683.
- [17] Ji, W., Pang, Y., Jia, X., Wang, Z., Hou, F., Song, B., Liu, M., & Wang, R. (2021). Fuzzy rough sets and fuzzy rough neural networks for feature selection: A review. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery.* 11(3).

- [18] Kang, Y., Wu, S., Cao, D., & Weng, W. (2018). New hesitation based distance and similarity measures on intuitionistic fuzzy sets and their applications, *Int. J. Syst. Sci.* 49(4), 783-799.
- [19] Kazancı, O., & Davvaz, B. (2008). On the structure of rough prime (primary) ideals and rough fuzzy prime (primary) ideals in commutative rings, *Inf. Sci.* 178, 1343-1354.
- [20] Kuroki, N. (1997). Rough ideals in semigroups, *Inf. Sci.* 100, 139-163.
- [21] Leoreanu-Fotea, V. (2008). The lower and upper approximations in a hypergroup, *Inf. Sci.* 178, 3605-3615.
- [22] Leoreanu-Fotea, V., & Davvaz, B. (2008). Roughness in n-ary hypergroups, *Inf. Sci.* 21, 4114-4124.
- [23] Li, Y., Qin, K., He, X., & Meng, D. (2015). Similarity measures of interval-valued fuzzy sets, *J. Intell. Fuzzy Syst.* 28(5), 2113-2125.
- [24] Liu, G., & Zhu, W. (2008). The algebraic structures of generalized rough set theory, *Inf. Sci.* 178, 4105-4113.
- [25] Liu, X. (1992). Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations, *Fuzzy Sets Syst.* 52(3), 305-318.
- [26] Omran, S., & Hassaballah, M. (2007). Operations on the similarity measures of fuzzy sets, *Int. J. Fuzzy Log. Intell. Syst.* 7(3), 205-208.
- [27] Pawlak, Z. (1982). Rough sets, *Int. J. Inf. Comp. Sci.* 11, 341-356.
- [28] Pawlak, Z., & Skowron, A. (2007). Rough sets and Boolean reasoning, *Inf. Sci.* 177, 41-73.
- [29] Pawlak, Z. (2002). Rough sets and intelligent data analysis, *Inf. Sci.* 147, 1-12.
- [30] Pawlak, Z., & Skowron, A. (2007). Rudiments of rough sets, *Inf. Sci.* 177, 3-27.
- [31] Pawlak, Z. (1981). Classification of Objects by means of Attributes, Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, Report 429.
- [32] Pourpanah, F., Wang, D., Wang, R., & Lim, C. P. (2021). A semisupervised learning model based on fuzzy min-max neural networks for data classification, *Appl. Soft Comput.* 112.
- [33] Qi, N., & Chengyi, Z. (2008). A new similarity measures on fuzzy rough sets, *Int. J. Pure Appl. Math.* 47(1), 89-100.
- [34] Shabir, M., Ali, M. I., & Shaheen, T. (2013). Another approach to soft rough sets, *Knowl. Based Syst.* 40, 72-80.
- [35] Vijayabalaji, S., & Balaji, P. (2013). Rough matrix theory and its decision making, *Int. J. Pure Appl. Math.* 87, 845-853.

- [36] Wang, W. J. (1997). New similarity measure on fuzzy sets and on elements, *Fuzzy Sets Syst.* 85(3), 305-309.
- [37] Wang, X., Baets, B. D., & Kerre, E. E. (1995). A comparative study of similarity measures, *Fuzzy Sets Syst.* 73(2), 259-268.
- [38] Xiao, Q. M., & Zhang, Z.L. (2006). Rough prime ideals and rough fuzzy prime ideals in semigroups, *Inf. Sci.* 176, 725-733.
- [39] Yamak, S., Kazancı, O., & Davvaz, B. (2010). Generalized lower and upper approximations in a ring, *Inf. Sci.* 180, 1759-1768.
- [40] Yao, Y. Y., & Deng, X. (2014). Quantitative rough sets based on subsethood measures, *Inf. Sci.* 267, 306-322.
- [41] Ye, Q. H., & Wu, W. Z. (2009). Similarity measures of fuzzy rough sets based on the L_p metric, In 2009 Int. Conf. on Machine Learning and Cybernetics, IEEE 811-816.
- [42] Yuan, Z., Chen, H., Xie, P., Zhang, P., Liu, J., & Li, T. (2021). Attribute reduction methods in fuzzy rough set theory: An overview, comparative experiments, and new directions. *Applied Soft Comput.* 107.
- [43] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.
- [44] Zhang, X. H., Dai, J., & Yu, Y. (2015). On the union and intersection operations of rough sets based on various approximations spaces, *Inf. Sci.* 292, 214-229.

6. EKLER

Ek 1. Kongre Katılım Belgesi.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	Assiye Canan GÜNEŞ
Uyruğu :	T.C.
Orcid Numarası:	0009-0002-3079-1731

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Fakülte	Fen Edebiyat
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2020
Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran
Enstitü	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Mezuniyet Yılı	2026

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Atagün, A. O. & Güneş, A. C. (2024). Rough matrix theory: Matrix structure in Pawlak approximation space and characterization of rough sets with applications, submitted (SCI-E).
Güneş, A. C. (2024). Martis structure in Pawlak approximation space with similarity applications. ATLAS 12th international on Advanced Scientific Studies and Interdisciplinary Research, Paris, FRANCE, (July, 01-03)