T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TOPLANABİLME METOTLARININ LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERE ETKİLERİ

SEVİL AYKANAT

DOKTORA TEZİ

KIRŞEHİR

2026

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TOPLANABİLME METOTLARININ LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERE ETKİLERİ

SEVİL AYKANAT

DOKTORA TEZİ

<u>DANIŞMAN</u>

Prof. Dr. Emre TAŞ

KIRŞEHİR

2026

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ► Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ► Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ► Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- ► Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ► Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 12.01.2026

Öğrenci

Sevil AYKANAT

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca beni yönlendiren, karşılaştığım tüm zorlukları bilgi ve tecrübesiyle aşmamda yardımcı olan, güleryüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Emre TAŞ'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezimin her aşamasında desteğini ve bana olan güvenini benden esirgemeyen sevgili eşim Ömer AYKANAT'a ve beni bu günlere sonsuz sevgi ve destekleriyle getiren aileme sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunuyorum.

Ocak, 2026 Sevil AYKANAT

ÖZET

DOKTORA TEZİ

TOPLANABİLME METOTLARININ LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERE ETKİLERİ

Sevil AYKANAT

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: **Prof. Dr. Emre TAŞ**
Yıl: 2026 Sayfa: 49
Jüri: **Prof. Dr. Emre TAŞ**
Prof. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN
Prof. Dr. Tuğba YURDAKADİM
Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ
Doç. Dr. Şerifenur CEBESOY

Bu tezde, Gal ve Niculescu tarafından lineer olmayan operatörler için verilen sonuçlar çok değişkenli formda kuvvet serisi metodu kullanılarak genişletilmiştir. Ayrıca modüler uzaylarda tanımlı lineer olmayan operatör dizileri için çeşitli toplanabilme yöntemlerine dayalı yeni bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi geliştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, söz konusu operatörlerin yakınsaklık davranışlarının incelenmesinde klasik norm yakınsaklığı veya noktasal yakınsaklık gibi kısıtlayıcı varsayımlara ihtiyaç duyulmadan da güçlü ve genelleştirilmiş yakınsaklık sonuçlarına ulaşılabileceğini göstermektedir. Bu çalışma, modüler analiz, toplanabilme teorisi ve yaklaşım teorisi arasındaki etkileşimi güçlendirerek, gelecekte hem lineer olmayan hem de daha karmaşık yapıya sahip operatörlerin incelenmesinde kullanılabilecek yeni ve kapsamlı bir metodolojik çerçeve sunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan operatör, Modüler uzaylar, İstatistiksel yakınsaklık

ABSTRACT

DOCTORAL THESIS

EFFECTS OF SUMMABILITY METHODS TO NONLINEER OPERATORS

Sevil AYKANAT

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor:	**Prof. Dr. Emre TAŞ**
	Year: 2026 Pages: 49
Juries:	**Prof. Dr. Emre TAŞ**
	Prof. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN
	Prof. Dr. Tuğba YURDAKADİM
	Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ
	Assoc. Prof. Dr. Şerifenur CEBESOY

In this thesis, the results previously established by Gal and Niculescu for nonlinear operators are extended to the multivariate setting by employing the power series method. Moreover, a new Korovkin-type approximation theorem based on various summability methods is developed for sequences of nonlinear operators defined on modular spaces. The obtained results demonstrate that strong and generalized convergence conclusions can be achieved without relying on restrictive assumptions such as classical norm convergence or pointwise convergence when analyzing the convergence behavior of these operators. This study enhances the interaction among modular analysis, summability theory, and approximation theory, thereby providing a new and comprehensive methodological framework that can be utilized in future investigations of both nonlinear and more intricate classes of operators.

Keywords: Nonlinear operator, Modular spaces, Statistical convergence

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$C(X)$	: X üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi
$C_b(X)$	: X üzerinde sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesi
$F(X)$	: Vektör latis
$C^\infty(I)$	: I üzerindeki tüm sonsuz mertebeden türevlenebilir fonksiyonların kümesi
ρ	: Modüler
$st-\lim$	: İstatistiksel limit
$\delta_P(K)$	: K kümesinin P-yoğunluğu
$(C)\int$	: Choquet integrali

1. GİRİŞ

Weierstrass teoremi, yaklaşım teorisinin gelişiminde önemli bir role sahiptir. Weierstrass 1885 yılında sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta polinomların bir dizisi ile yaklaşılabileceğini ispat etmiştir. Fakat bu ispat oldukça uzun ve karmaşık olup birçok matematikçi daha kısa ve anlaşılır bir ispat verebilmek için çalışmıştır. Bernstein [7] 1912 yılında Bernstein polinomlarını kullanarak bu teoremin kısa ve anlaşılır bir ispatını vermiştir. Daha sonra Bernstein polinomları yerine daha genel operatörler konulabilir mi sorusu akla gelmiştir. Bu bağlamda pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri üzerine çalışılmıştır. Popoviciu, Bohman ve Korovkin birbirinden bağımsız olarak $\{T_j\}$ operatör dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli koşullar nedir sorusuna cevap vermişlerdir. Bununla birlikte birçok matematikçi bu bakış açılarını farklı uzaylara genişletmiştir. Böylece pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutan Korovkin tipi yaklaşım teorisi ortaya çıkmıştır.

Öncelikle Korovkin teoremini hatırlayalım.

$[0, 1]$ aralığı üzerinde reel değerli sürekli tüm fonksiyonların uzayı $C[0, 1]$ olmak üzere bu uzay her $f \in C[0, 1]$ için

$$\|f\| := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

biçiminde tanımlı norm ile Banach uzayıdır. 1953 yılında Korovkin $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$ olmak üzere $\{T_j e_k\}$ dizisi $k = 0, 1, 2$ için $[0, 1]$ aralığı üzerinde e_k fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $C[0, 1]$ uzayındaki her f fonksiyonu için $\{T_j f\}$ dizisinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu ispatlamıştır. Bu teoremin çok sayıda versiyonu çalışılmıştır. Bunlar arasında Korovkin teoreminin lineer olmayan genelleşmesi özellikle dikkate değer olarak göze çarpmaktadır. Lineer olmayan operatörler, lineer operatörlerden daha karışık olup lineer muadillerinin özellikleri olan süperpozisyon ve homojenlik ilkelerine uymayan bir matematiksel operatör sınıfını temsil eder. Son zamanlarda, lineer olmayan operatörlerin yaklaşım sonuçları üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları şu şekildedir: [1], [2], [13], [15], [16], [22].

Diğer yandan modüler uzaylar, bazı kısıtlamaları rahatlatarak vektör uzaylarını genelleştiren matematiksel yapılardır ve bu onları çok çeşitli fonksiyonel analiz problemlerini incelemek için uygun hale getirir. Modüler uzaylar, Orlicz uzayları, Musielak-Orlicz uzayları ve klasik normların yetersiz olduğu diğer uzayların incelenmesinde etkili olmuş ve matematikte hem teorik hem de uygulamalı alanların ilerlemesini sağlamıştır [6], [17], [29], [30], [32]. Modüler yakınsaklığın ortaya atılması, fonksiyonel analizde araştırma için yeni yollar açmıştır. Bu tezde hem Gal ve Nicelescu [15] tarafından verilen Korovkin teoreminin ([8], [19], [20]) bir lineer olmayan genişlemesi kuvvet serisi metodu kullanılarak incelenecek hem de modüler uzaylarda lineer olmayan operatörler aracılığıyla Korovkin tipi teoremler tanıtacağız ve teoremlerimizi sağlayan örnekler vereceğiz, ayrıca toplanabilme teorisinde önemli bir yer tutan istatistiksel yakınsaklık, kuvvet serisi anlamında yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık metotları kullanılarak modüler uzaylarda lineer olmayan Korovkin tipli sonuçlar elde edeceğiz.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Temel Kavramlar

Bu tezde, Korovkin teoreminde operatörün lineerlik koşulu kaldırılarak farklı bir versiyonu verilecektir. Bu amaçla ilk olarak bazı temel tanım ve özellikleri verelim.

X Hausdorff topolojik uzayı olmak üzere $F(X)$ ile noktasal sıralama ile donatılan X üzerinde tanımlı reel değerli tüm fonksiyonların vektör latisini gösterelim. $F(X)$ in iki önemli vektör alt latisi

$$C(X) = \{f \in F(X) : f \text{ sürekli}\}$$

ve

$$C_b(X) = \{f \in F(X) : f \text{ sürekli ve sınırlı}\}$$

biçimindedir. $C_b(X)$, sup normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. Bu uzayların teorisi için [24] incelenebilir.

X ve Y iki Hausdorff topolojik uzayı ve ayrıca E ve F sırasıyla $C(X)$ ve $C(Y)$ uzaylarının vektör alt latisleri olsun. Bir $T : E \to F$ operatörü,

- eğer operatör alttoplamsal yani,

  $$T(f+g) \leq T(f) + T(g) \text{ her } f, g \in E \text{ için,}$$

  ve pozitif-homojen yani,

  $$T(\alpha f) = \alpha T(f) \text{ her } \alpha > 0 \text{ ve } f \in E \text{ için,}$$

  ise altlineer

- eğer E üzerinde $f \leq g$ olması $T(f) \leq T(g)$ olmasını gerektiriyorsa monoton

- eğer $f, g \in E$ komonoton yani,

  $$(f(s) - f(t)) . (g(s) - g(t)) \geq 0 \text{ her } s, t \in X \text{ için}$$

  olmak üzere $T(f+g) = T(f) + T(g)$ ise komonoton toplamsal olarak adlandırılır.

Buradaki temel teoremimiz Korovkin teoremini çok değişkenli fonksiyonların vektör latisleri üzerinde tanımlı alttoplamsallık, monotonluk ve komonoton toplamsallık özelliklerini sağlayan operatörler yardımıyla genişletmektedir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$pr_k : (x_1, ..., x_N) \to x_k, \; k = 1, ..., N$$

izdüşüm dönüşümlerini içeren test fonksiyonlarının ailesini kullanacağız.

Diğer taraftan tez boyunca kullanacağımız bazı temel sonuçları hatırlatalım.

T alttoplamsal ise her f, g için

$$|T(f) - T(g)| \leq T(|f - g|) \tag{2.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Gerçekten $f \leq g + |f - g|$ ise $T(f) \leq T(g) + T(|f - g|)$ olur. Yani, $T(f) - T(g) \leq T(|f - g|)$ ifadesinde f ve g nin rolleri değiştirilirse $-(T(f) - T(g)) \leq T(|f - g|)$ elde edilir. Bu da istenilendir.

T lineer ise monotonluk özelliği, her $f \geq 0$ için

$$T(f) \geq 0$$

biçiminde ifade edilen pozitiflik özelliğine denktir.

T operatörü, monoton ve pozitif-homojen ise

$$T(0) = 0$$

olur.

T pozitif-homojen ve komonoton toplamsal bir operatör olmak üzere her f ve her $a \in [0, \infty)$ için

$$T(f + a.1) = T(f) + aT(1) \tag{2.2}$$

formülünü gerçekler. Yani f, herhangi bir sabit fonksiyona komonotondur.

Şimdi modüler uzaya ait bazı temel tanım ve özellikleri verelim.

$I = [a, b]$, μ Lebesgue ölçüsüyle donatılan $\mathbb{R}$ kümesinin sınırlı bir alt aralığı olsun. $X(I)$ ile I üzerindeki tüm reel değerli ölçülebilir fonksiyonların uzayını, $C(I)$ ile I üzerindeki tüm sürekli reel değerli fonksiyonların uzayını ve $C^\infty(I)$ ile I üzerindeki tüm sonsuz mertebeden türevlenebilir fonksiyonların uzayını gösterelim.

Tanım 2.1. Aşağıdaki koşullar sağlandığı taktirde $\rho : X(I) \to [0, \infty]$ fonksiyoneli $X(I)$ üzerinde bir modülerdir denir:

1. $\rho[g] = 0 \Leftrightarrow g = 0$, I üzerinde
2. $\rho[-g] = \rho[g]$, her $g \in X(I)$ için

3. Her $g, h \in X(I)$ için $\rho\left[\alpha g+\beta h\right] \leq \rho\left[g\right]+\rho\left[h\right]$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha+\beta=1$.

Ayrıca her $g, h \in X(I)$ ve $\alpha+\beta=1$ eşitliğini gerçekleyen her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho\left[\alpha g+\beta h\right] \leq Q\alpha\rho\left[Qg\right]+Q\beta\rho\left[Qh\right]$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $Q \geq 1$ sabiti varsa, ρ modüleri $Q-$quasi konvekstir denir. Özel olarak eğer $Q=1$ ise ρ konveks olarak adlandırılır [4].

Her $g \in X\left(I\right)$, $g \geq 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$\rho\left[\alpha g\right] \leq Q\alpha\rho\left[Qg\right]$$

olacak şekilde bir $Q \geq 1$ sabiti varsa ρ modüleri $Q-$quasi yarı konvekstir denir. Her $Q-$quasi konveks modülerin $Q-$quasi yarı konveks olduğu açıktır.

Her $g, h \in X(I)$ ve $|g| \leq |h|$ için $\rho[|g|] \leq \rho[|h|]$ ise ρ modüleri monoton olarak adlandırılır.

Şimdi $X\left(I\right)$ uzayının bazı alt uzaylarını verelim [5]:

$$L^{\rho}\left(I\right) := \left\{ f \in X(I) : \lim_{\lambda \to 0^{+}} \rho\left[\lambda f\right]=0 \right\}$$

ve

$$E^{\rho}\left(I\right) := \left\{ f \in L^{\rho}\left(I\right) : \rho\left[\lambda f\right] < \infty \text{ ve her } \lambda > 0 \text{ için} \right\}.$$

Modülerler hakkındaki bazı tanımları hatırlatalım [5]:

- $1 \in L^{\rho}\left(I\right)$ ise ρ sonludur. Burada $1\left(t\right)=1$, her $t \in I$ ile tanımlıdır.
- $1 \in E^{\rho}\left(I\right)$ ise ρ kuvvetli sonludur.
- $\rho\left[g\right] < +\infty$ olacak şekildeki her $g \in X\left(I\right)$ ve her $\epsilon > 0$ için ve $\mu\left(B\right) < \delta$ olan herhangi bir ölçülebilir $B \subset I$ alt kümesi için $\rho\left[\alpha g \chi_B\right] < \epsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı ve bir $\alpha > 0$ var ise ρ mutlak süreklidir.
- ρ, sonlu ve her $\epsilon > 0$, $r > 0$ için $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $\mu\left(E\right) < \delta$ olacak biçimdeki herhangi bir ölçülebilir $E \subset I$ altkümesi için $\rho\left(r\chi_E\right) < \epsilon$ ise ρ mutlak sonludur.

Modüler uzayların klasik örnekleri bir $\phi-$fonksiyonu tarafından oluşturulan Orlicz uzayları veya daha genel olarak bir parametreye bağlı $\phi-$fonksiyonu tarafından oluşturulan herhangi bir Musielak-Orlicz uzayı tarafından verilebilir ve parametreye göre bazı büyüme koşullarını karşılar. Yukarıdaki uzayları üreten modüler fonksiyoneller, önceki tüm varsayımları karşılar.

Tanım 2.2. Eğer

$$\lim_{i\to+\infty}\rho\left[\lambda\left(f_i-f\right)\right]=0$$

olacak biçimde bir $\lambda > 0$ sayısı var ise $\left(f_i\right)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^{\rho}\left(I\right)$ fonksiyon dizisi bir $f \in L^{\rho}\left(I\right)$ fonksiyonuna modüler yakınsaktır denir. Bu kavram L^p uzaylarındaki norm yakınsaklığını genişletmektedir.

Her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{i\to+\infty}\rho\left[\lambda\left(f_i-f\right)\right]=0$$

ise $\left(f_i\right)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^{\rho}\left(I\right)$ fonksiyon dizisi bir $f \in L^{\rho}\left(I\right)$ fonksiyonuna kuvvetli modüler yakınsaktır denir.

Açıkça görüldüğü gibi modüler yakınsaklık kavramı kuvvetli modüler yakınsaklık kavramından daha zayıf olup, ρ modüleri Δ_2- koşulu olarak adlandırılan, her $f \in X(I)$ için $\rho[2f] \leq M\rho[f]$ olacak şekilde en az bir $M > 0$ vardır, koşulunu sağlıyorsa bu iki kavram birbirine denktir [3].

Şimdi de istatistiksel yakınsaklık kavramını hatırlatalım.

Tanım 2.3. Eğer

$$\delta\left(K\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n : k\in K\right\}\right|$$

limiti mevcutsa, $\delta\left(K\right)$ değerine $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu denir. Burada $|.|$, kardinaliteyi gösterir.

Her $\epsilon > 0$ için $K\left(\epsilon\right)=\left\{k\in\mathbb{N} : \left|x_k-L\right|\geq\epsilon\right\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfırsa ya da başka bir deyişle her $\epsilon > 0$ için $\lim\limits_{n}\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n : \left|x_k-L\right|\geq\epsilon\right\}\right|=0$ olacak biçimde bir L sayısı varsa, $x=\left(x_k\right)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu yakınsaklığı $st-\lim x = L$ veya $x_k \to L\left(st\right)$ şeklinde gösteririz [11]. Eğer burada $L=0$ ise $x=\left(x_k\right)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir [10]. İstatistiksel alt ve üst limit kavramlarını hatırlatalım [12]. x bir dizi ve A_x ve B_x sırasıyla aşağıdaki kümeleri göstersin:

$$\left\{b\in\mathbb{R} : \delta(\left\{k : x_k > b\right\})\neq 0\right\},$$
$$\left\{a\in\mathbb{R} : \delta(\left\{k : x_k < a\right\})\neq 0\right\}.$$

$$st-\limsup x=\begin{cases}\sup B_x, & B_x\neq\emptyset\\ -\infty, & B_x=\emptyset\end{cases}$$

ifadesine x dizisinin istatistiksel üst limiti ve

$$st-\liminf x = \begin{cases} \inf A_x, & A_x \neq \emptyset \\ \infty, & A_x = \emptyset \end{cases}$$

ifadesine x dizisinin istatistiksel alt limiti denir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklığı daha iyi anlayabilmek için bazı örnekler verelim.

Örnek 2.4.

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \ (m = 1, 2, \ldots) \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Her $\epsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \epsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Demek ki $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \epsilon\}$ kümesinin elemanları hariç diğer bütün k lar için $|x_k - 0| < \epsilon$, $(\forall \epsilon > 0)$ olduğundan $x_k \to 0 \ (st)$ olur.

Örnek 2.5.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \ (m = 1, 2, \ldots), \\ 2, & k \neq m^2. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x = 2$ dir.

Burada, istatistiksel yakınsaklık ile klasik (Cauchy) yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olabileceği akla gelebilir. Hemen belirtelim ki klasik anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat yukarıdaki örneklerden de görüleceği gibi sınırlı ıraksak ya da sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

Bu tez çalışmamızda kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklığı da kullanarak, modüler uzaylar çerçevesinde lineer olmayan operatörler için Korovkin tipi bir yaklaşım teoremi kurarak araştırma hattını biraz daha genişletelim. Burada da kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsama ile ilgili tanımları hatırlayalım.

Tanım 2.6. (p_j) , tüm $j \geq 1$ değerleri için $p_0 > 0$ ve $p_j \geq 0$ olan bir reel sayı dizisi olsun ve $p(t)$ yi yakınsaklık yarıçapı $R \in (0, \infty]$ olacak şekilde

$$p(t) := \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j$$

ile tanımlayalım. Eğer

$$\lim_{t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{j=0}^{\infty} s_j p_j t^j = L$$

limiti varsa, $s = (s_j)$ dizisi kuvvet serisi anlamında L değerine yakınsaktır denir [18], [23], [25].

Bir kuvvet serisi metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $j \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{t \to R^-} \frac{p_j t^j}{p(t)} = 0$$

olmasıdır [9].

Kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık, klasik yakınsamanın bir genellemesidir. Aslında bir dizi normalde yakınsak olmamasına rağmen kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsak olabilir. Buradaki amaç istatistiksel yakınsamayı kuvvet serisi yöntemleriyle birleştirerek güçlü ve belirgin bir yakınsama kavramı üretmektir.

Tanım 2.7. [31] P bir regüler kuvvet serisi metodu ve $K \subset \mathbb{N}_0$ olsun. Eğer

$$\delta_P(K) := \lim_{t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{j \in K} p_j t^j$$

limiti mevcutsa, $\delta_P(K)$ ya K kümesinin P-yoğunluğu denir.

$s = (s_j)$ dizisi, herhangi bir $\epsilon > 0$ için

$$K_\epsilon := \{j \in \mathbb{N}_0 : |s_j - L| \geq \epsilon\}$$

olmak üzere $\delta_P(K_\epsilon) = 0$ ise L değerine kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $st_P - \lim s_j = L$ ile gösterilir.

Fridy ve Orhan [12] tarafından kullanılan yöntemi izleyerek, toplanabilme teorisinde önemli araçlar olan kuvvet serisi anlamında istatistiksel alt ve üst limit kavramlarını şimdi tanıtacağız.

Tanım 2.8. $s = (s_j)$ reel bir dizi ve

$$K_s := \{b \in \mathbb{R} : \delta_P(\{j \in \mathbb{N}_0 : |s_j - L| \geq \epsilon\})\}$$

olarak tanımlansın. O halde kuvvet serisi istatistiksel üst limiti

$$st_P - \limsup s = \begin{cases} \sup K_s \ , \ K_s \neq \emptyset \\ \ \ -\infty \quad , \ K_s = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde

$$L_s := \{a \in \mathbb{R} : \delta_P(\{j \in \mathbb{N}_0 : s_j < a\}) \neq 0\}$$

olarak tanımlansın. Kuvvet serisi istatistiksel alt limiti

$$st_P - \liminf s = \begin{cases} \inf \ L_s \ , \ L_s \neq \emptyset \\ \quad \infty \quad , \ L_s = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$\delta_P(K) \neq 0$ ifadesi $\delta_P(K) > 0$ veya $\delta_P(K)$ sayısının var olmadığı anlamına gelmektedir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde, modüler uzaylarda lineer olmayan operatörlerin yaklaşım davranışlarını incelemek amacıyla çeşitli toplanabilme metotlarına dayanan Korovkin tipi teoremler geliştirilmiştir. Öncelikle, (X, ρ) bir modüler uzay olarak ele alınmış ve bu uzay üzerinde tanımlanan pozitif, altlineer veya genel anlamda lineer olmayan operatör dizilerinin yakınsaklık özellikleri araştırılmıştır. ρ modülerinin uygun koşulları sağlaması, operatörlerin davranışlarının analizi için temel yapı taşını oluşturmuştur. Yaklaşım sonuçlarının elde edilmesinde klasik yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, kuvvet serisi anlamında yakınsaklık ve kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramları temel araç olarak kullanılmıştır. Bu yöntemlerle, operatör dizilerinin yalnızca geleneksel anlamda değil, aynı zamanda genişletilmiş bir yakınsaklık anlayışı altında da davranışları değerlendirilmiştir. Bu tezde ayrıca, Korovkin tipli sonuçlar için gerekli olan test fonksiyonları kümesi belirlenmiş ve bu fonksiyonların operatörler altındaki yakınsaklıklarının ρ-modüler metrik altında kontrol edilmesiyle genel yaklaşım teoremi ispatlanmıştır. Teoremin kullanışlılığını göstermek amacıyla, modüler uzayda tanımlı uygun bir lineer olmayan operatör dizisi üzerinden temsil edici bir örnek sunulmuştur. Bu yaklaşım; hem modüler yapının esnekliğini hem de toplanabilme metotlarının genelleştirici etkisini bir araya getirerek, klasik Korovkin teoreminin lineer olmayan ve modüler yapıdaki operatörlere uygulanabilirliğini sağlamıştır.

4. BULGULAR TARTIŞMA

Bu bölümde, tezde elde ettiğimiz yeni sonuçlarımızı vereceğiz.

4.1. Korovkin Teoreminin Lineer Olmayan Genişlemesi

Bu kısımda, kuvvet serisi metodu yardımıyla tanımlayacağımız lineer olmayan U_t operatörü için Korovkin tipli bir teorem vereceğiz.

$L_i : C_b(X) \to C_b(X)$ lineer olmayan operatör dizisini göz önüne alalım.

$$U_t(f;x) := \frac{1}{p(t)} \sum_{i=0}^{\infty} L_i(f;x)\, p_i t^i$$

operatörü

$$\|U_t(f)\| \leq \sup_{0<t<r} \frac{1}{p(t)} \sum_{i=0}^{\infty} \|L_i(1)\|\, p_i t^i < \infty$$

koşulu altında $U_t : C_b(X) \to C_b(Y)$ iyi tanımlı lineer olmayan bir operatördür. N sabit bir doğal sayı olsun.

Teorem 4.1. X, $\mathbb{R}^N$ nin kompakt bir altkümesi olsun.

(a) $L_i : C(X) \to C(X)$ tüm $i \in \mathbb{N}$ için monoton ve altlineer olduğunu varsayalım. Eğer

$$\lim_{t \to R^-} \|U_t(g) - g\|_\infty = 0 \tag{4.1}$$

limiti $g \in \left\{1, \pm pr_1,\ ...,\ \pm pr_N,\ \sum_{k=1}^{N} pr_k^2\right\}$ test fonksiyonları için sağlanıyorsa, $C(X)$ uzayındaki herhangi bir negatif olmayan f için

$$\lim_{t \to R^-} \|U_t(f) - f\|_\infty = 0$$

elde ederiz; burada pr_k , $k = 1, ..., N$ için $\mathbb{R}^N$ nin bir izdüşümüdür.

(b) Eğer $L_i : C(X) \to C(X)$, herhangi bir $i \in \mathbb{N}$ için monoton, altlineer ve komonoton toplamsal ise ve ayrıca (4.1), yukarıdaki test fonksiyonları için gerçeklenirse, her $f \in C(X)$ için

$$\lim_{t \to R^-} \|U_t(f) - f\|_\infty = 0$$

sağlanır.

İspat.

(a) $f \in C(X)$ olsun. Dolayısıyla herhangi bir $\epsilon > 0$ ve herhangi bir $x, s \in X$ için $\|x - s\| < \delta$ iken $|f(x) - f(s)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. Diğer taraftan $\|x - s\| \geq \delta$ olduğunda,

$$|f(x) - f(s)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\|x - s\|^2$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $M = \max\{pr_1(s), ..., pr_N(s), 0\}$ iken $x, s \in X$ için

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(s)| \leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\|x - s\|^2 \\
&= \epsilon \cdot 1 + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\left[\sum_{k=1}^{N} pr_k^2(x) + 2\sum_{k=1}^{N} pr_k(x)(M - pr_k(s)) + 2M\sum_{k=1}^{N}(-pr_k(x)) + \|s\|^2\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. L_i operatörünün monotonluğunu ve altlineerliğini kullanarak, $f \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
&|U_t(f)(s) - f(s)| = \left|\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty} L_i(f)(s)p_i t^i - \frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty} f(s)p_i t^i\right| \\
&= \left|\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty}(L_i(f)(s) - f(s))p_i t^i\right| \\
&= \left|\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty}(L_i(f)(s) - L_i(f(s).1) + f(s).L_i(1) - f(s))p_i t^i\right| \\
&\leq \frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty}|L_i(f)(s) - L_i(f(s).1)|p_i t^i + \left|f(s)\left[\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty} L_i(1)p_i t^i - 1\right]\right| \\
&\leq \epsilon U_t(1) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\left[\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty} L_i\left(\sum_{k=1}^{N} pr_k^2\right)p_i t^i + 2\sum_{k=1}^{N}(M - pr_k(s)).\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty} L_i(pr_k)p_i t^i\right] \\
&+ \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\left[2M\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty} L_i(-pr_k)p_i t^i + \|s\|^2\frac{1}{p(t)}\sum_{i=0}^{\infty} L_i(1)p_i t^i\right] \\
&+ f(s)|U_t(1) - 1|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Hipotezi kullanarak istenilen sonuca ulaşırız.

(b) Herbir L_i monoton, altlineer ve komonoton toplamsal olsun. (a) dan dolayı $U_t(f + \|f\|_\infty) \to f + \|f\|_\infty$, $t \to R^-$ elde edilir. Diğer taraftan her sabit fonksiyon, herhangi bir f fonksiyonu ile bir komonoton çift oluşturur. L_i pozitif homojen ve komonoton toplamsal olduğundan her f ve $\beta \geq 0$ için

$$L_i(f + \beta.1) = L_i(f) + \beta L_i(1) \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.1) eşitliği kullanılarak

$$U_t(f + \|f\|_\infty) = U_t(f) + \|f\|_\infty U_t(1)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\lim\limits_{t\to R^-} \|U_t(1)-1\|_\infty = 0$ olduğundan $\lim\limits_{t\to R^-} \|U_t(f)-f\|_\infty = 0$ elde edilir.

■

Şimdi Teorem 4.1. in kompakt metrik uzaylar için versiyonunu verelim. Bunun için ilk olarak Niculescu'nun verdiği aşağıdaki sonucu hatırlatalım [22].

Lemma 4.2. J, bir kompakt metrik uzay, $\sigma : J \times J \to \mathbb{R}$ bir ayırma fonksiyonu ve ayrıca $f : J \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x, s \in J$ için

$$|f(x) - f(s)| \le \epsilon + \delta(\epsilon)\,\sigma(x,s)$$

elde edilir [22].

Teorem 4.3. J bir kompakt metrik uzay ve σ, J için bir ayırma fonksiyonu olsun. Ayrıca herbir $i \in \mathbb{N}$ için $L_i : C(J) \to C(J)$ komonoton toplamsal, altlineer ve monoton operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{t\to R^-} \|U_t(1)-1\|_\infty = 0$$

ve

$$\lim_{t\to R^-} \|U_t(\sigma)\|_\infty = 0$$

ise bu durumda her $f \in C(J)$ için

$$\lim_{t\to R^-} \|U_t(f)-f\|_\infty = 0$$

gerçeklenir.

İspat. Her $i \in \mathbb{N}$ için L_i altlineer ve monotonik bir operatör olduğundan ve her $f \ge 0$ için

$$\begin{aligned}
|U_t(f)(s) - f(s)| &\le \frac{1}{p(t)} \sum_{i=0}^{\infty} |L_i(f)(s) - L_i(f(s).1)|\, p_i t^i + |f(s)|\,.\,|U_t(1)(s) - 1(s)| \\
&\le \frac{1}{p(t)} \sum_{i=0}^{\infty} L_i(|f - f(s)|)(s)\, p_i t^i + |f(s)|\,|U_t(1)(s) - 1(s)| \\
&\le \epsilon U_t(1)(s) + \delta(\epsilon) \frac{1}{p(t)} \sum_{i=0}^{\infty} L_i(\sigma)(s)\, p_i t^i + |f(s)|\,|U_t(1)(s) - 1(s)| \\
&= \epsilon U_t(1)(s) + \delta(\epsilon)\, U_t(\sigma)(s) + |f(s)|\,|U_t(1)(s) - 1(s)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left\|U_t(f)-f\right\|_\infty \leq \epsilon \left\|U_t(1)\right\|_\infty + \delta(\epsilon)\left\|U_t(\sigma)\right\|_\infty + \|f\|_\infty \left\|U_t(1)-1\right\|_\infty$$

ve dolayısıyla her $f \geq 0$ için

$$\lim_{t\to R^-} \left\|U_t(f)-f\right\|_\infty = 0$$

sağlanır. Teorem 4.1. (b) için kullanılan ispat tekniği ile L_i komonoton toplamsal olduğundan her $f \in C(J)$ için

$$\lim_{t\to R^-} \left\|U_t(f)-f\right\|_\infty = 0$$

elde edilir. ■

Şimdi teoremimizin [15] çalışmasındaki elde edilen sonuçları $N = 1, 2$ için genişlettiğini gösteren örnekler verelim.

(s_i), sıfıra kuvvet serisi anlamında yakınsayan bir dizi olsun. Gal [14] tarafından verilen $C([0,1])$ üzerinde tanımlanan Bernstein-Kantorovich-Choquet operatörlerini dikkate alalım:

$$K_{i,\psi}(f)(x) = \sum_{m=0}^{i} \frac{(C)\int_{\frac{m}{(i+1)}}^{\frac{(m+1)}{i+1}} f(z)\,d\psi}{\psi\left(\left[m/(i+1),(m+1)/(i+1)\right]\right)} \binom{i}{m} x^m (1-x)^{i-m}.$$

Burada kullanılan integral Choquet integralidir ve ayrıca λ, $\mathbb{R}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsünü belirtmek üzere $\psi(E) = \sqrt{\lambda(E)}$, $\mathbb{R}$ nin kompakt alt aralıkları üzerinde bir alt modüler kapasitedir. Choquet integraline kapsamlı bir genel bakış [15] de bulunabilir. Bu operatörü kullanarak $\widetilde{K}_{i,\psi}(f)(x) = (1+s_i)K_{i,\psi}(f)(x)$ biçiminde tanımlanan $\widetilde{K}_{i,\psi}$ operatörünün Teorem 4.1.' in koşullarını sağladığı açıktır. Ancak Gal ve Niculescu tarafından verilen [15] çalışmadaki Teorem 2' nin hipotezlerini sağlamaz.

$f(z) = 1$ iken,

$$\begin{aligned}(C)\int_{\frac{m}{i+1}}^{\frac{m+1}{i+1}} 1.d\psi &= \int_0^\infty \psi\left(\left\{z \in \left[m/(i+1),(m+1)/(i+1)\right] : 1(z) \geq \gamma\right\}\right)d\gamma \\ &= \int_0^1 \psi\left(\left\{z \in \left[m/(i+1),(m+1)/(i+1)\right] : 1 \geq \gamma\right\}\right)d\gamma \\ &= \frac{1}{\sqrt[2]{i+1}}\end{aligned}$$

ve

$$K_{i,\psi}\left(1\right)\left(x\right)=\sum_{m=0}^{i}\frac{(C)\int\limits_{\frac{m}{(i+1)}}^{\frac{(m+1)}{i+1}}1d\psi}{\psi\left(\left[m/\left(i+1\right),\left(m+1\right)/\left(i+1\right)\right]\right)}\binom{i}{m}x^{m}\left(1-x\right)^{i-m}$$
$$=1.$$

elde edilir.

$f\left(z\right)=pr_{1}\left(z\right)$ olduğunda,

$$\begin{aligned}(C)\int\limits_{\frac{m}{i+1}}^{\frac{m+1}{i+1}}pr_{1}\left(z\right)d\psi &= \int\limits_{0}^{\infty}\psi\left(\left\{z\in\left[m/\left(i+1\right),\left(m+1\right)/\left(i+1\right)\right]:z\geq\gamma\right\}\right)d\gamma\\ &= \int\limits_{0}^{\frac{m+1}{i+1}}\psi\left(\left\{z\in\left[m/\left(i+1\right),\left(m+1\right)/\left(i+1\right)\right]:z\geq\gamma\right\}\right)d\gamma\\ &= \int\limits_{0}^{\frac{m}{i+1}}\psi\left(\left\{z\in\left[m/\left(i+1\right),\left(m+1\right)/\left(i+1\right)\right]:z\geq\gamma\right\}\right)d\gamma\\ &+ \int\limits_{\frac{m}{i+1}}^{\frac{m+1}{i+1}}\psi\left(\left\{z\in\left[m/\left(i+1\right),\left(m+1\right)/\left(i+1\right)\right]:z\geq\gamma\right\}\right)d\gamma\\ &= \frac{3m+2}{3\left(i+1\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}K_{i,\psi}\left(pr_{1}\right)\left(x\right) &= \sum_{m=0}^{i}\frac{(C)\int\limits_{\frac{m}{(i+1)}}^{\frac{(m+1)}{i+1}}f(z)d\psi}{\psi\left(\left[\frac{m}{(i+1)},\frac{(m+1)}{(i+1)}\right]\right)}\binom{i}{m}x^{m}\left(1-x\right)^{i-m}\\ &= \sum_{m=0}^{i}\frac{\frac{3m+2}{3(i+1)^{\frac{3}{2}}}}{\left(\frac{m+1}{i+1}-\frac{m}{i+1}\right)^{\frac{1}{2}}}\binom{i}{m}x^{m}\left(1-x\right)^{i-m}\\ &= \frac{ix}{i+1}+\frac{2}{3\left(i+1\right)}\end{aligned}$$

sağlanır. $f(z) = (-pr_1)(z)$ olduğunda ise,

$$
\begin{aligned}
(C)\int\limits_{\frac{m}{i+1}}^{\frac{m+1}{i+1}} (-pr_1)(z)\,d\psi &= \int\limits_0^{\infty} \psi\left(\{z \in [m/(i+1), (m+1)/(i+1)] : -z \geq \gamma\}\right) d\gamma \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{0} \left[\psi\left(\{z \in [m/(i+1), (m+1)/(i+1)] : -z \geq \gamma\}\right) - \frac{1}{\sqrt[2]{i+1}}\right] d\gamma \\
&= \int\limits_{\frac{-m}{i+1}}^{0} \left[\psi\left(\{z \in [m/(i+1), (m+1)/(i+1)] : z \leq -\gamma\}\right) - \frac{1}{\sqrt[2]{i+1}}\right] d\gamma \\
&+ \int\limits_{-\frac{m+1}{i+1}}^{-\frac{m}{i+1}} \left[\psi\left(\{z \in [m/(i+1), (m+1)/(i+1)] : z \leq -\gamma\}\right) - \frac{1}{\sqrt[2]{i+1}}\right] d\gamma \\
&= \frac{-3m+1}{3\sqrt[2]{i+1}\,(i+1)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
K_{i,\psi}(-pr_1)(x) &= \sum_{m=0}^{i} \frac{(C)\int\limits_{\frac{m}{(i+1)}}^{\frac{(m+1)}{i+1}} (-pr_1)(z)d\psi}{\psi\left(\left[\frac{m}{(i+1)}, \frac{(m+1)}{(i+1)}\right]\right)} \binom{i}{m} x^m (1-x)^{i-m} \\
&= \frac{-i}{i+1}x + \frac{1}{3(i+1)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$f(z) = pr_2(z)$ olması halinde

$$
\begin{aligned}
(C)\int\limits_{\frac{m}{i+1}}^{\frac{m+1}{i+1}} pr_2(z)\,d\psi &= \int\limits_0^{\infty} \psi\left(\left\{z \in [m/(i+1), (m+1)/(i+1)] : z^2 \geq \gamma\right\}\right) d\gamma \\
&= \int\limits_0^{\left(\frac{m+1}{i+1}\right)^2} \psi\left(\{z \in [m/(i+1), (m+1)/(i+1)] : z \geq \gamma\}\right) d\gamma \\
&= \int\limits_0^{\left(\frac{m}{i+1}\right)^2} \left(\{z \in [m/(i+1), (m+1)/(i+1)] : z \geq \gamma\}\right) d\gamma \\
&+ \int\limits_{\left(\frac{m}{i+1}\right)^2}^{\left(\frac{m+1}{i+1}\right)^2} \left(\{z \in [m/(i+1), (m+1)/(i+1)] : z \geq \gamma\}\right) d\gamma \\
&= \frac{m^2}{\sqrt[2]{i+1}\,(i+1)^2} + \frac{4}{3}.\frac{m+1}{(i+1)(i+1)^3} - \frac{4}{5}.\frac{1}{(i+1)^5}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
K_{i,\psi}\left(pr_2\right)(x) &= \sum_{m=0}^{i} \frac{(C)\int\limits_{\frac{m}{(i+1)}}^{\frac{(m+1)}{i+1}} (pr_2)(z)d\psi}{\psi\left(\left[\frac{m}{(i+1)}, \frac{(m+1)}{(i+1)}\right]\right)} \binom{i}{m} x^m (1-x)^{i-m} \\
&= \sum_{m=0}^{i} \frac{\frac{m^2}{(i+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4}{3}\frac{m+1}{(i+1)^4} - \frac{4}{5}\frac{1}{(i+1)^5}}{\left(\frac{m+1}{i+1} - \frac{m}{i+1}\right)^{\frac{1}{2}}} \binom{i}{m} x^m (1-x)^{i-m} \\
&= \frac{i(i-1)x^2 + ix}{(i+1)^2} + \frac{4ix}{3(i+1)^{\frac{7}{2}}} + \frac{4}{3(i+1)^{\frac{7}{2}}} - \frac{4}{5}\frac{1}{(i+1)^{\frac{9}{2}}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıdaki hesaplamaları kullanarak $f = 1, \pm pr_1, pr_2$ için $\lim\limits_{t\to R^-} \left\| \frac{1}{p(t)} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \widetilde{K}_{i,\psi}(f)\, p_i t^i - f \right\| = 0$ sonucuna varırız. Bu da $\widetilde{K}_{i,\psi}$ operatörünün Teorem 4.1.' in koşullarını sağladığını gösterir.

$N = 2$ olması durumunda, $C([0,1] \times [0,1])$ üzerinde tanımlanan iki değişkenli B-K-C operatörlerini ele alacağız:

$$
\begin{aligned}
K_{i,\psi}^{(2)}(f)(x_1, x_2) &= \sum_{k_1=0}^{i}\sum_{k_2=0}^{i} \binom{i}{k_1} x_1^{k_1} (1-x_1)^{1-k_1} \binom{i}{k_2} x_2^{k_2} (1-x_2)^{1-k_2} \\
&\times \frac{(C)\int\limits_{\frac{k_1}{i+1}}^{\frac{(k_1+1)}{i+1}} \left((C)\int\limits_{\frac{k_2}{(i+1)}}^{\frac{(k_2+2)}{i+2}} f(z_1, z_2)\, d\psi(z_2) \right) d\psi(z_1)}{\psi\left(\left[\frac{k_1}{i+1}, \frac{k_1+1}{i+1}\right]\right) \psi\left(\left[\frac{k_2}{i+1}, \frac{k_2+1}{i+1}\right]\right)}.
\end{aligned}
$$

Bu operatör önceki örnekteki ψ kapasitesine göre $C([0,1] \times [0,1])$ üzerinde altlineer, komonoton toplamsal ve monotondur.

Gal ve Niculescu [13] tarafından, $K_{i,\psi}^{(2)}(f)$ nin her bir test fonksiyonu $1, \pm pr_1, \pm pr_2, \sum\limits_{k=1}^{2} pr_k$ için $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde f ye düzgün bir şekilde yakınsadığı gösterilmiştir. Bu operatörü kullanarak $\widetilde{K}_{i,\psi}^{(2)}$ operatörünü

$$
\widetilde{K}_{i,\psi}^{(2)}(f)(x_1, x_2) = (1 + s_i)\, K_{i,\psi}^{(2)}(f)(x_1, x_2)
$$

şeklinde tanımlayalım. Benzer şekilde bu operatörlerin Teorem 4.1. in koşullarını gerçeklediği ancak [15] çalışmasındaki Teorem 2 nin koşullarını gerçeklemediği kolaylıkla görülebilir.

4.2. Modüler Uzaylarda Lineer Olmayan Operatörler İçin Yaklaşım Sonuçları

Bu kısımda, modüler uzaylardaki lineer olmayan operatörler için bir Korovkin tipi teoremi tanıtacağız. İlk olarak aşağıdaki lemmayı verelim.

$T=(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $T_i:K\to X(I)$ ve $C(I)\subset K\subset X(I)$ olacak şekilde monoton ve altlineer operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca bu tez boyunca $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin (CS) olarak adlandırılacak olan aşağıdaki özelliği sağladığını varsayalım:

$C(I)$ yı içeren bir $X_T\subset K\cap L^\rho(I)$ vardır öyle ki X_T deki tüm f fonksiyonları için $T_if\in L^\rho(I)$ ve herhangi bir $\lambda>0$ ve mutlak bir P sabiti için

$$\limsup_{i\to\infty}\rho[\lambda(T_if)]\leq P\rho[\lambda f]$$

gerçeklenir.

Lemma 4.4. ρ, $X(I)$ üzerinde monoton, mutlak sonlu ve mutlak sürekli ise $\overline{C(I)}=L^\rho(I)$ gerçeklenir.

İspat. $C^\infty(I)\subset C(I)\subset L^\rho(I)$ ve $\overline{C^\infty(I)}=L^\rho(I)$ [3] olduğundan $\overline{C(I)}=L^\rho(I)$ elde ederiz. Burada kullanılan topolji, modüler topoloji olarak adlandırılan modüler yakınsaklığın $L^\rho(I)$ üzerinde doğurduğu bir topolojidir. ■

$i=0,1,2$ olmak üzere x^i test fonksiyonları için f_i notasyonunu kullanacağız.

Teorem 4.5. ρ, $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N-quasi yarı konveks olsun. $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$, (CS) özelliğini sağlayan monoton ve altlineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $h\in\{f_0,f_1,-f_1,f_2\}$ olmak üzere $L^\rho(I)$ uzayında kuvvetli olarak

$$\lim_{i\to\infty}T_ih=h$$

gerçekleniyor ise $f-C(I)\subset X_T$ koşulunu sağlayan her $f\in L^\rho(I)\cap K$ için $L^\rho(I)$ uzayında modüler olarak

$$\lim_{i\to\infty}T_if=f$$

elde edilir.

İspat. f, $C(I)$ uzayında herhangi bir negatif olmayan fonksiyon olsun. Dolayısıyla her $\epsilon>0$ ve $|x-y|<\delta$ koşulunu sağlayan her $x,y\in I$ için bir $\delta>0$ mevcuttur öyle ki

$$|f(x)-f(y)|\leq\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}|x-y|^2$$

gerçeklenir. Buradan her $x,y\in I$ ve $M=\max\{f_1(y),f_2(y),0\}$ için

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\leq\epsilon+\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}|x-y|^2\\&=\epsilon.1+\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}[f_2(x)+2f_1(x)(M-f_1(y))+2M(-f_1(x))+f_2(y)]\end{aligned}$$

T_i pozitif homojen olduğundan, $f \geq 0$ için olduğunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
&|T_i(f)(y) - f(y)| \leq |T_i(f)(y) - T_i(f(y) f_0)| + |f(y)(T_i(f_0) - f_0)| \\
&\leq \epsilon T_i(f_0) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\left[T_i(f_2) + 2(M - f_1(y)) T_i(f_1) + 2MT_i(-f_1) + f_2(y) T_i(f_0)\right] \\
&+ f(y)|T_i(f_0) - f_0|
\end{aligned}$$

olup her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\rho[\lambda(T_i(f) - f)] \leq \rho[3\lambda T_i(f_0)] \\
&+ \rho\left[\frac{6\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}\{T_i(f_2) + 2(M - f_1(y)) T_i(f_1) + 2MT_i(-f_1) + f_2(y) T_i(f_0)\}\right] \\
&+ \rho[3\lambda f(y)|T_i(f_0) - f_0|]
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$B := T_i(f_2) - f_2 + 2M(T_i(f_1) - f_1) - 2f_1(T_i(f_1) - f_1) + 2M(T_i(-f_1) + f_1) + f_2(y)(T_i(f_0) - f_0) \quad (4.3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\rho\left[\frac{6\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}B\right] \leq \rho\left[\frac{30\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_i(f_2) - f_2|\right] \\
&+ \rho\left[\frac{60M\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_i(f_1) - f_1|\right] + \rho\left[\frac{60M\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_i(-f_1) + f_1|\right] \\
&+ \rho\left[\frac{60M\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_i(f_1) - f_1|\right] + \rho\left[\frac{30M\lambda\|f_2\|_\infty\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_i(f_0) - f_0|\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezlerimizi kullanarak herhangi bir sabit $\eta > 0$ için

$$\limsup_{i\to\infty} \rho[\eta(T_i(f) - f)] \leq P\rho[3\eta\epsilon f_0]$$

olur. Diğer taraftan N-quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan $\epsilon < 1$ varsayımı altında,

$$\rho[3\eta\epsilon f_0] \leq N\epsilon\rho[3N\eta\epsilon f_0]$$

elde edilir. Dolayısıyla negatif olmayan $f \in C(I)$ için kuvvetli yakınsaklık elde edilir. Negatif olmayan $f \in K \cap L_\rho(I)$ fonksiyonunu dikkate alalım. Lemma 4.4. gereğince $\rho[3\lambda f] < \infty$ ve

$$\lim_{k\to\infty} \rho[3\lambda(g_k - f)] = 0 \quad (4.4)$$

olacak biçimde bir $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_b(I)$ ve bir $\lambda > 0$ vardır.

$i \in \mathbb{N}$ için T_i alttoplamsal olduğundan

$$\begin{aligned}|T_i(f) - f| &\leq |T_i(f) - T_i(g_k)| + |T_i(g_k) - g_k| + |g_k - f| \\ &\leq T_i(|f - g_k|) + |T_i(g_k) - g_k| + |g_k - f|\end{aligned}$$

elde ederiz. Her $\lambda > 0,\ f - g_k \in X_T$ için

$$\rho[\lambda |T_i f - f|] \leq \rho[3\lambda T_i(|f - g_k|)] + \rho[3\lambda |T_i(g_k) - g_k|] + \rho[3\lambda |g_k - f|]$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (CS) özelliğinden,

$$\rho[3\lambda T_i(|f - g_k|)] \leq P\rho[4\lambda |f - g_k|]$$

olup son eşitsizliğin her iki tarafına da $\limsup$ operatörünü uygularsak,

$$\limsup_{i\to\infty} \rho[\lambda |T_i(f) - f|] \leq (P + 1)\rho[3\lambda(f - g_k)]$$

elde ederiz. (4.4) eşitsizliğini kullanarak

$$\limsup_{i\to\infty} \rho[\lambda |T_i(f) - f|] = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.6. Teorem 4.5. nin varsayımlarına ek olarak, T_i nin her $i \in \mathbb{N}$ için komonoton toplamsal olduğunu varsayalım. O halde her $f \in L^\rho(I) \cap K$ için $f - C(I) \subset X_T$ olacak şekilde $L^\rho(I)$ da modüler olarak

$$\lim_{i\to\infty} T_i f = f$$

gerçeklenir.

İspat. Herbir T_i monoton, altlineer ve komonoton toplamsal olsun. Teorem 4.5. gereğince her $f \in L^\rho(I) \cap K$ için $f - C(I) \subset X_T$ olacak şekilde $L^\rho(I)$ da modüler olarak

$$T_i(f + \|f\|_\infty) \to f + \|f\|_\infty \tag{4.5}$$

elde ederiz. Her sabit fonksiyon herhangi bir f fonksiyonu ile komonoton bir çift oluşturduğundan ve her $i \in \mathbb{N}$ için $T_i,$ pozitif homojen ve komonoton toplamsal olduğundan,

$$T_i(f + \|f\|_\infty .f_0) = T_i(f) + \|f\|_\infty .T_i(f_0) \tag{4.6}$$

(4.5), (4.6) ve varsayımımızı kullanarak $L^{\rho}(I)$ uzayında kuvvetli olarak

$$\lim_{i\to\infty} T_i(f_0) = f_0$$

yakınsaklığı gerçeklenir. Her $f \in L^{\rho}(I) \cap K$ için $f - C(I) \subset X_T$ olacak şekilde $L^{\rho}(I)$ da modüler olarak

$$\lim_{i\to\infty} T_i f = f$$

elde ederiz. ■

Şimdi özel bir durumda X_T sınıfını belirleyelim. İlk olarak Orlicz uzayını hatırlayalım [21]:

Tanım 4.7. $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, φ konveks bir fonksiyon, $\varphi(0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(u) > 0$ ve $\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = +\infty$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfı Φ ile gösterelim. $\varphi \in \Phi$ ve $f \in X(I)$ için

$$\rho_{\varphi}[f] = \int_I \varphi(|f(s)|)$$

fonksiyonelini tanımlayalım. Bu ρ_{φ} fonksiyoneli $X(I)$ üzerinde bir konveks modülerdir [3].

$$L_{\varphi}(I) = \{f \in X(I) : \exists\lambda > 0 \ \ni \ \rho_{\varphi}[\lambda f] < \infty\}$$

olmak üzere $L_{\varphi}(I)$ alt uzayına φ tarafından üretilen Orlicz uzayı denir [21].

ρ_{φ} modüleri sonlu, monoton, kuvvetli sonlu ve mutlak süreklidir. Burada $u \geq 0, p \geq 1$ için $\varphi(u) = u^p$ alınırsa $L_{\varphi}(I) = L^p(I)$ olup

$$\|f\|_{\varphi} = \|f\|_p$$

elde edilir. Diğer taraftan, F_{φ}, λ, f ve her λ için bağımsız olan bir P sabiti için $\limsup_{i\to\infty} \rho[\lambda(T_i f)] \leq P\rho[\lambda f]$ eşitsizliğini sağlayan $L_{\varphi}(I)$ daki bir fonksiyon kümesi olsun. Ayrıca aşağıdaki klasik Bernstein operatörünü ele alalım. $B_i : C[0,1] \to C[0,1]$

$$B_i(f)(x) = \sum_{k=0}^{i} p_{i,k}(x) f\left(\frac{k}{i}\right), \quad p_{i,k}(x) = \binom{i}{k} x^k (1-x)^{i-k}$$

operatörünü kullanarak

$$T_i(f) = \max\{B_i(f), B_{i+1}(f)\}$$

tarafından verilen lineer olmayan $T_i : C[0,1] \to C[0,1]$ operatörünü tanımlayacağız. Bu operatör monoton ve altlineerdir. (Bu operatör açıkça komonoton toplamsaldır).

$$B_i(f_0)(x) = f_0(x), \tag{4.7}$$

$$B_i(f_1)(x) = f_1(x), \tag{4.8}$$

$$B_i(-f_1)(x) = -f_1(x), \tag{4.9}$$

$$B_i(f_2)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{i} \tag{4.10}$$

olduğu iyi bilindiğinden $T_i(f_0)(x) = f_0(x)$, $T_i(f_1)(x) = f_1(x)$, $T_i(-f_1)(x) = -f_1(x)$ ve

$$T_i(f_2)(x) = \max\{B_i(f_2)(x), B_{i+1}(f_2)(x)\} = x^2 + \frac{x(1-x)}{i}$$

elde edilir. φ konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi[\lambda B_i f] &= \int_0^1 \varphi(|\lambda B_i(f)(s)|)\, ds \\
&= \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|\sum_{k=0}^{i} p_{i,k}(s) f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) ds \\
&\leq \int_0^1 \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) p_{i,k}(s)\, ds \\
&= \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \int_0^1 p_{i,k}(s)\, ds \\
&= \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \binom{i}{k} \frac{k!(i-k)!}{(i+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \frac{1}{i+1} \\
&= \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \\
&= \frac{1}{i+1} \rho_i^\varphi[\lambda f]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizliği kullanarak, her integrallenebilir f fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\limsup_{i\to\infty} \frac{1}{i+1}\rho_i^{\varphi}[\lambda f] &= \limsup_i \frac{1}{i+1}\frac{i}{i}\sum_{k=0}^{i}\varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \\ &= \limsup_i \frac{i}{i+1}.\sum_{k=0}^{i}\varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right).\left(\frac{k+1}{i}-\frac{k}{i}\right) \\ &= 1.\rho_{\varphi}[\lambda f]\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki ifadeden, Riemann anlamında integrallenebilir her f fonksiyonu, F_{φ} sınıfına aittir. Dolayısıyla (T_i) operatörü için

$$\limsup_i \rho_{\varphi}[\lambda(T_i f)] \leq P\rho_{\varphi}[\lambda f]$$

olacak şekilde $C(I)$ uzayını içeren bir $X_T \subset K \cap L^{\rho}(I)$ alt uzayı vardır.

Yani, (CS) özelliği en azından Riemann integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı için gerçeklenmektedir.

$$\begin{aligned}\rho_{\varphi}[\lambda(T_i(f_0)-f_0)] &= \int_0^1 \varphi(\lambda.(1-1))\,dx = 0,\ her\ \lambda>0 \\ \rho_{\varphi}[\lambda(T_i(f_1)-f_1)] &= \int_0^1 \varphi(\lambda.(x-x))\,dx = 0,\ her\ \lambda>0 \\ \rho_{\varphi}[\lambda(T_i(-f_1)+f_1)] &= \int_0^1 \varphi(\lambda.(-x+x))\,dx = 0,\ her\ \lambda>0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho_{\varphi}[\lambda(T_i(f_2)-f_2)] &= \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left(x^2+\frac{x(1-x)}{i}-x^2\right)\right)dx \\ &= \int_0^1 \varphi\left(\lambda\frac{x(1-x)}{i}\right)dx \to 0,\ i\to\infty,\ her\ \lambda>0\end{aligned}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi T_i operatör dizisi teoremimizin koşullarını sağlamaktadır.

4.3. Modüler Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Lineer Olmayan Operatörler İçin Yaklaşım Sonuçları

Bu kısımda toplanabilme teorisinde önemli bir yer tutan istatistiksel yakınsaklık metodu kullanılarak modüler uzaylarda lineer olmayan operatörler için Korovkin tipli sonuçlar elde edeceğiz.

$T = (T_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $T_i : K \to X(I)$ ve $C(I) \subset K \subset X(I)$ olacak şekilde monoton ve altlineer operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca bu kısım boyunca $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin $(CS-1)$ olarak adlandırılacak olan aşağıdaki özelliği sağladığını varsayalım:

$C(I)$ yı içeren bir $X_T \subset K \cap L^{\rho}(I)$ vardır öyle ki X_T deki tüm f fonksiyonları için $T_i f \in L^{\rho}(I)$ ve herhangi bir $\lambda > 0$ ve mutlak bir P sabiti için

$$st - \limsup_{i \to \infty} \rho\left[\lambda\left(T_i f\right)\right] \leq P\rho\left[\lambda f\right]$$

gerçeklenir.

Modüler yakınsaklık tanımlarına ek olarak modüler istatistiksel yakınsaklık tanımlarını da verelim:

Tanım 4.8. Eğer

$$st - \lim \rho\left[\lambda\left(f_i - f\right)\right] = 0$$

olacak biçimde bir $\lambda > 0$ sayısı var ise $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^{\rho}(I)$ dizisi $f \in L^{\rho}(I)$ fonksiyonuna modüler istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu kavram L^p uzaylarındaki norm yakınsaklığı genişletmektedir.

Tanım 4.9. Her $\lambda > 0$ için

$$st - \lim \rho\left[\lambda\left(f_i - f\right)\right] = 0$$

eşitliği gerçekleniyorsa $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^{\rho}(I)$ dizisi $f \in L^{\rho}(I)$ fonksiyonuna kuvvetli istatistiksel yakınsaktır denir.

Burada da açıkça görülüyor ki modüler istatistiksel yakınsaklık kavramı kuvvetli istatistiksel yakınsaklık kavramından daha zayıftır.

Teorem 4.10. ρ, $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve Q-quasi yarı konveks olsun. $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(CS-1)$ özelliğini sağlayan monoton ve altlineer operatörlerin bir dizisi olduğunu düşünelim. Eğer $h \in \{f_0, f_1, -f_1, f_2\}$ olmak üzere $L^{\rho}(I)$ uzayında kuvvetli istatistiksel olarak

$$\lim_{i \to \infty} T_i h = h$$

gerçekleniyor ise $f - C(I) \subset X_T$ koşulunu sağlayan her $f \in L^{\rho}(I) \cap K$ için $L^{\rho}(I)$ uzayında istatistiksel modüler olarak

$$\lim_{i \to \infty} T_i f = f$$

elde edilir.

İspat. f, $C(I)$ uzayında herhangi bir negatif olmayan fonksiyon olsun. Dolayısıyla her $\epsilon > 0$ ve $|x-y| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x, y \in I$ için bir $\delta > 0$ mevcuttur öyle ki

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} |x-y|^2$$

gerçeklenir. Buradan her $x, y \in I$ ve $M = \max\{f_1(y), f_2(y), 0\}$ için

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} |x-y|^2 \\ &= \epsilon.1 + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} [f_2(x) + 2f_1(x)(M - f_1(y)) + 2M(-f_1(x)) + f_2(y)] \end{aligned}$$

olup T_i pozitif homojen olduğundan, $f \geq 0$ için

$$\begin{aligned} &|T_i(f)(y) - f(y)| \leq |T_i(f)(y) - T_i(f(y) f_0)| + |f(y)(T_i(f_0) - f_0)| \\ &\leq \epsilon.T_i(f_0) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} [T_i(f_2) + 2(M - f_1(y)) T_i(f_1) + 2MT_i(-f_1) + f_2(y) T_i(f_0)] \\ &+ f(y).|T_i(f_0) - f_0| \end{aligned}$$

elde edilir. Her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} &\rho[\lambda(T_i(f) - f)] \leq \rho[3\lambda\epsilon T_i(f_0)] \\ &+ \rho\left[\frac{6\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}\{T_i(f_2) + 2(M - f_1(y)) T_i(f_1) + 2MT_i(-f_1) + f_2(y) T_i(f_0)\}\right] \\ &+ \rho[3\lambda f(y)|T_i(f_0) - f_0|] \end{aligned}$$

elde ederiz.B, (4.3) eşitliği ile tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} \rho\left[\frac{6\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2} B\right] &\leq \rho\left[\frac{30\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2} |T_i(f_2) - f_2|\right] \\ &+ \rho\left[\frac{60M\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2} |T_i(f_1) - f_1|\right] + \rho\left[\frac{60M\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2} |T_i(-f_1) + f_1|\right] \\ &+ \rho\left[\frac{60M\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2} |T_i(f_1) - f_1|\right] + \rho\left[\frac{30M\lambda\|f_2\|_\infty\|f\|_\infty}{\delta^2} |T_i(f_0) - f_0|\right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Hipotezlerimizi kullanarak herhangi bir sabit $\eta > 0$ için

$$st - \limsup_{i\to\infty} \rho[\eta(T_i(f) - f)] \leq P\rho[3\eta\epsilon f_0]$$

olur. Diğer taraftan ρ modüleri, Q-quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan $\epsilon < 1$ varsayımı altında,

$$\rho[3\eta\epsilon f_0] \leq Q\epsilon\rho[3Q\eta f_0]$$

elde edilir. Dolayısıyla negatif olmayan $f \in C(I)$ için kuvvetli istatistiksel yakınsaklık elde edilir. Negatif olmayan $f \in K \cap L_\rho(I)$ fonksiyonunu dikkate alalım. 4.4. gereğince $\rho[3\lambda f] < \infty$ ve

$$\lim_{k\to\infty} \rho[3\lambda(g_k - f)] = 0 \tag{4.11}$$

olacak biçimde bir $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_b(I)$ ve bir $\lambda > 0$ vardır. $i \in \mathbb{N}$ için T_i alttoplamsal olduğundan

$$\begin{aligned} |T_i(f) - f| &\le |T_i(f) - T_i(g_k)| + |T_i(g_k) - g_k| + |g_k - f| \\ &\le T_i(|f - g_k|) + |T_i(g_k) - g_k| + |g_k - f| \end{aligned}$$

elde ederiz. Her $\lambda > 0$, $f - g_k \in X_T$ için

$$\rho[\lambda |T_i f - f|] \le \rho[3\lambda T_i(|f - g_k|)] + \rho[3\lambda |T_i(g_k) - g_k|] + \rho[3\lambda |g_k - f|]$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $(CS-1)$ özelliğinden,

$$\rho[3\lambda T_i(|f - g_k|)] \le P\rho[4\lambda |f - g_k|]$$

olup son eşitsizliğin her iki tarafına da istatistiksel $\limsup$ operatörünü uygularsak,

$$st - \limsup_{i\to\infty} \rho[\lambda |T_i(f) - f|] \le (P+1)\rho[3\lambda(f - g_k)]$$

elde ederiz. (4.11) eşitsizliğini kullanarak

$$st - \limsup_{i\to\infty} \rho[\lambda |T_i(f) - f|] = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.11. Teorem 4.10. nin varsayımlarına ek olarak, T_i nin her $i \in \mathbb{N}$ için komonoton toplamsal olduğunu varsayalım. O halde her $f \in L^\rho(I) \cap K$ için $f - C(I) \subset X_T$ olacak şekilde $L^\rho(I)$ da istatistiksel modüler olarak

$$\lim_{i\to\infty} T_i f = f$$

gerçeklenir.

İspat. Herbir T_i monoton, altlineer ve komonoton toplamsal olsun. Teorem 4.10. gereğince her $f \in L^{\rho}(I) \cap K$ için $f - C(I) \subset X_T$ olacak şekilde $L^{\rho}(I)$ da istatistiksel modüler olarak

$$T_i \left(f + \|f\|_{\infty}\right) \to f + \|f\|_{\infty} \tag{4.12}$$

elde ederiz. Her sabit fonksiyon herhangi bir f fonksiyonu ile komonoton bir çift oluşturduğundan ve her $i \in \mathbb{N}$ için T_i, pozitif homojen ve komonoton toplamsal olduğundan,

$$T_i \left(f + \|f\|_{\infty} f_0\right) = T_i (f) + \|f\|_{\infty} T_i (f_0) \tag{4.13}$$

(4.11), (4.13) ve varsayımımızı kullanarak $L^{\rho}(I)$ uzayında kuvvetli istatistiksel olarak

$$\lim_{i\to\infty} T_i (f_0) = f_0$$

yakınsaklığı gerçeklenir. Her $f \in L^{\rho}(I) \cap K$ için $f - C(I) \subset X_T$ olacak şekilde $L^{\rho}(I)$ da istatistiksel modüler olarak

$$\lim_{i\to\infty} T_i f = f$$

elde ederiz. ■

Şimdi özel bir durumda X_T sınıfını belirleyelim. Bu amaçla yine Tanım 4.7.' yi kullanacağız. F_{φ}, λ, f ve her λ için bağımsız olan bir P sabiti için $st - \limsup\limits_{i\to\infty} \rho \left[\lambda \left(T_i f\right)\right] \leq P\rho\left[\lambda f\right]$ eşitsizliğini sağlayan $L_{\varphi}(I)$ daki bir fonksiyon kümesi olsun. Ayrıca aşağıdaki klasik Bernstein operatörünü ele alalım. $B_i : C\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right]$

$$B_i (f)(x) = \sum_{k=0}^{i} p_{i,k}(x) f\left(\frac{k}{i}\right), \quad p_{i,k}(x) = \binom{i}{k} x^k (1-x)^{i-k}$$

operatörünü kullanarak

$$T_i (f) = u_i \max\left\{B_i (f), B_{i+1}(f)\right\}$$

tarafından verilen lineer olmayan $T_i : C\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right]$ operatörünü tanımlayacağız. Burada

$$u_i = \begin{cases} 0\ , & i\ asal\ sayı \\ 1\ , & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

biçimindedir. Bu operatör monoton ve altlineerdir. (Bu operatör açıkça komonoton toplamsaldır).(4.7), (4.9) ve (4.10) gereğince $T_i(f_0)(x) = u_i f_0(x)$, $T_i(-f_1)(x) = -u_i x$ ve

$$T_i(f_2)(x) = u_i \max\{B_i(f_2)(x), B_{i+1}(f_2)(x)\} = u_i\left(x^2 + \frac{x(1-x)}{i}\right)$$

elde edilir. φ konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi[\lambda B_i f] &= \int_0^1 \varphi(|\lambda B_i(f)(s)|)\,ds \\
&= \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|\sum_{k=0}^{i} p_{i,k}(s) f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) ds \\
&\leq \int_0^1 \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) p_{i,k}(s)\,ds \\
&= \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \int_0^1 p_{i,k}(s)\,ds \\
&= \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \binom{i}{k} \frac{k!\,(i-k)!}{(i+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \frac{1}{i+1} \\
&= \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \\
&= \frac{1}{i+1} \rho_i^\varphi[\lambda f]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizliği kullanarak, her integrallenebilir f fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\limsup_{i\to\infty} \frac{1}{i+1} \rho_i^\varphi[\lambda f] &= \limsup_i \frac{1}{i+1} \frac{i}{i} \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) \\
&= \limsup_i \frac{i}{i+1} \sum_{k=0}^{i} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{i}\right)\right|\right) . \left(\frac{k+1}{i} - \frac{k}{i}\right) \\
&= 1.\rho_\varphi[\lambda f]
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade gereğince, Riemann anlamında integrallenebilir her f fonksiyonu, F_φ sınıfına aittir. Dolayısıyla (T_i) operatörü için

$$\begin{aligned}
st - \limsup_i \rho_\varphi[\lambda(T_i f)] &= st - \limsup \rho_\varphi[\lambda u_i \max\{B_i f, B_{i+1} f\}] \\
&= st - \limsup u_i \rho_\varphi[\lambda \max\{B_i f, B_{i+1} f\}] \\
&\leq P\rho_\varphi[\lambda f]
\end{aligned}$$

olacak şekilde $C(I)$ uzayını içeren bir $X_T \subset K \cap L^\rho(I)$ alt uzayı vardır.

Yani, $(CS-1)$ özelliği en azından Riemann integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı için gerçeklenir.

$$\rho_\varphi[\lambda(T_i(f_0)-f_0)] = \int_0^1 \varphi(\lambda|u_i-1|)\,dx = \begin{cases} \varphi(\lambda), & i\ asal\ sayı \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases},\ \forall\lambda>0 \text{ için}$$

$$\rho_\varphi[\lambda(T_i(f_1)-f_1)] = \int_0^1 \varphi(\lambda|u_ix-x|)\,dx = \begin{cases} \int_0^1 \varphi(\lambda x)\,dx, & i\ asal\ sayı \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases},\ \forall\lambda>0 \text{ için}$$

$$\rho_\varphi[\lambda(T_i(-f_1)+f_1)] = \int_0^1 \varphi(\lambda|-u_ix+x|)\,dx = \begin{cases} \int_0^1 \varphi(\lambda x)\,dx, & i\ asal\ sayı \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases},\ \forall\lambda>0 \text{ için}$$

ve

$$\rho_\varphi[\lambda(T_i(f_2)-f_2)] = \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|u_ix^2+\frac{u_ix(1-x)}{i}-x^2\right|\right)dx = \begin{cases} \int_0^1 \varphi(\lambda x^2)\,dx, & i\ asal\ sayı \\ \int_0^1 \varphi\left(\lambda\frac{x(1-x)}{i}\right)dx, & diğer\ durumlarda \end{cases},\ \forall\lambda>0 \text{ için}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi T_i operatör dizisi teoremimizin koşullarını sağlamaktadır.

4.4. Modüler Uzaylarda Kuvvet Serisi Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Lineer Olmayan Operatörler İçin Yaklaşım Sonuçları

Bu kısımda kuvvet serisi anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanarak, modüler uzaylar üzerindeki lineer olmayan operatörler için Korovkin tipi yaklaşım sonuçlarını inceleyeceğiz.

Tanım 4.12. $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^\rho(I)$ dizisi bazı $\lambda>0$ için

$$st_P - \lim \rho[\lambda(f_j-f)] = 0$$

gerçekleniyor ise o halde $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^\rho(I)$ dizisi f fonksiyonuna $L^\rho(I)$ uzayında kuvvet serisi anlamında istatistiksel modüler yakınsaktır denir.

Bu kavram diğerlerindeki gibi L^p uzaylarındaki norm yakınsaklığını genişletmektedir.

Tanım 4.13. Her $\lambda > 0$ için

$$st_P - \lim \rho\left[\lambda\left(f_i - f\right)\right] = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisi $f \in L^\rho(I)$ fonksiyonuna kuvvet serisi anlamında istatistiksel kuvvetli modüler yakınsaktır denir.

Buradan da açıkça görüldüğü üzere, kuvvet serisi anlamında istatistiksel modüler yakınsaklık, kuvvet serisi anlamında istatistiksel kuvvetli modüler yakınsaklıktan daha zayıftır.

Diğer taraftan $T = (T_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $T_j : K \to X(I)$ ve $C(I) \subset K \subset X(I)$ olacak şekilde monoton ve altlineer operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca bu kısım boyunca $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin $(CS-2)$ olarak adlandırılacak olan şu özelliği sağladığını varsayalım:

$C(I)$ uzayını içeren bir $X_T \subset K \cap L^\rho(I)$ vardır öyle ki X_T deki tüm f fonksiyonları için $T_i f \in L^\rho(I)$ ve herhangi bir $\lambda > 0$ ve mutlak bir D sabiti için

$$st_P - \limsup \rho\left[\lambda\left(T_j f\right)\right] \le D\rho\left[\lambda f\right]$$

gerçeklenir. $j = 0, 1, 2$ olmak üzere x_j test fonksiyonlarının yerine h_j notasyonunu kullanacağız.

Teorem 4.14. ρ, $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve Q-quasi yarı konveks olsun. $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(CS-2)$ özelliğini sağlayan monoton ve altlineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $h \in \{h_0, h_1, -h_1, h_2\}$ olmak üzere $L^\rho(I)$ uzayında kuvvet serisi anlamında kuvvetli istatistiksel olarak

$$T_j h \to h$$

gerçekleniyor ise $f - C(I) \subset X_T$ koşulunu sağlayan her $f \in L^\rho(I) \cap K$ için $L^\rho(I)$ uzayında kuvvet serisi anlamında istatistiksel modüler olarak

$$T_j f \to f$$

elde edilir.

İspat. f, $C(I)$ uzayında herhangi bir negatif olmayan fonksiyon olsun. Dolayısıyla her $\epsilon > 0$ ve $|x - y| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x, y \in I$ için bir $\delta > 0$ mevcuttur öyle ki

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}|x - y|^2$$

gerçeklenir. Buradan her $x, y \in I$ ve $M = \max\{h_1(y), h_2(y), 0\}$ için

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}|x-y|^2 \\ &= \epsilon.1 + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}[h_2(x) + 2h_1(x)(M - h_1(y)) + 2M(-h_1(x)) + h_2(y)] \end{aligned}$$

yazabiliriz. T_j, pozitif homojen olduğundan, her $f \geq 0$ için

$$\begin{aligned} &|T_j(f)(y) - f(y)| \leq |T_j(f)(y) - T_j(f(y)h_0)| + |f(y)(T_j(h_0) - h_0)| \\ &\leq \epsilon.T_j(h_0) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}[T_j(h_2) + 2(M - h_1(y))T_j(h_1) + 2M.T_j(-h_1) + h_2(y)T_j(h_0)] \\ &+ f(y)|T_j(h_0) - h_0| \end{aligned}$$

elde edilir. Her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} &\rho[\lambda(T_j(f) - f)] \leq \rho[3\lambda\epsilon T_j(h_0)] \\ &\quad + \rho\left[\frac{6\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}\{T_j(h_2) + 2(M - h_1(y))T_j(h_1) + 2MT_j(-h_1) + h_2(y)T_j(h_0)\}\right] \\ &\quad + \rho[3\lambda f(y)|T_j(h_0) - h_0|] \end{aligned}$$

elde ederiz. B, (4.3) eşitliği ile tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} &\rho\left[\frac{6\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}B\right] \leq \rho\left[\frac{30\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_j(h_2) - h_2|\right] \\ &\quad + \rho\left[\frac{60M\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_j(h_1) - h_1|\right] + \rho\left[\frac{60M\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_j(-h_1) + h_1|\right] \\ &\quad + \rho\left[\frac{60M\lambda\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_j(h_1) - h_1|\right] + \rho\left[\frac{30M\lambda\|h_2\|_\infty\|f\|_\infty}{\delta^2}|T_j(h_0) - h_0|\right] \end{aligned}$$

bulunur. Hipotezlerimizi kullanarak herhangi bir sabit $\eta > 0$ için

$$st_P - \limsup_{i\to\infty}\rho[\eta(T_j(f) - f)] \leq P\rho[3\eta\epsilon h_0]$$

olur. Diğer taraftan ρ modüleri, Q-quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan $\epsilon < 1$ varsayımı altında,

$$\rho[3\eta\epsilon h_0] \leq Q\epsilon\rho[3Q\eta h_0]$$

elde edilir. Dolayısıyla negatif olmayan $f \in C(I)$ için kuvvetli istatistiksel yakınsak bir kuvvet serisi elde edilir. Negatif olmayan $f \in K \cap L_\rho(I)$ fonksiyonunu dikkate alalım.

Lemma 4.4. gereğince $\rho\left[3\lambda f\right]<\infty$ ve

$$\lim_{k\to\infty}\rho\left[3\lambda\left(g_k-f\right)\right]=0 \tag{4.14}$$

olacak biçimde bir $\left(g_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\subset C\left(I\right)$ ve bir $\lambda>0$ vardır. $j\in\mathbb{N}$ için T_j alttoplamsal olduğundan

$$\begin{aligned}\left|T_j\left(f\right)-f\right| &\leq \left|T_j\left(f\right)-T_j\left(g_k\right)\right|+\left|T_j\left(g_k\right)-g_k\right|+\left|g_k-f\right| \\ &\leq T_j\left(\left|f-g_k\right|\right)+\left|T_j\left(g_k\right)-g_k\right|+\left|g_k-f\right|\end{aligned}$$

elde ederiz. Her $\lambda>0$, $f-g_k\in X_T$ için

$$\rho\left[\lambda\left|T_jf-f\right|\right]\leq\rho\left[3\lambda T_j\left(\left|f-g_k\right|\right)\right]+\rho\left[3\lambda.\left|T_j\left(g_k\right)-g_k\right|\right]+\rho\left[3\lambda\left|g_k-f\right|\right]$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $(CS-2)$ özelliğinden,

$$\rho\left[3\lambda T_j\left(\left|f-g_k\right|\right)\right]\leq D\rho\left[4\lambda\left|f-g_k\right|\right]$$

yazarız. Son eşitsizliğin her iki tarafına da kuvvet serisi anlamında istatistiksel $\limsup$ operatörünü uygularsak,

$$st_P-\limsup\rho\left[\lambda\left|T_j\left(f\right)-f\right|\right]\leq\left(D+1\right).\rho\left[3\lambda.\left(f-g_k\right)\right]$$

elde ederiz. (4.14) eşitsizliğini kullanarak

$$st_P-\limsup\rho\left[\lambda\left|T_j\left(f\right)-f\right|\right]=0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.15. Teorem 4.14. nin hipotezlerine ek olarak, $\left(T_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ nin her $j\in\mathbb{N}$ için komonoton toplamsal olduğunu varsayalım. O halde her $f\in L^\rho\left(I\right)\cap K$ için $f-C(I)\subset X_T$ olacak şekilde $L^\rho\left(I\right)$ da kuvvet serisi anlamında istatistiksel modüler olarak

$$T_jf\to f$$

gerçeklenir.

İspat. Her bir T_j monoton, altlineer ve komonoton toplamsal olsun. Teorem 4.14. gereğince her $f\in L^\rho\left(I\right)\cap K$ için $f-C(I)\subset X_T$ olacak şekilde $L^\rho\left(I\right)$ da kuvvet serisi anlamında istatistiksel modüler olarak

$$T_j\left(f+\|f\|_\infty\right)\to f+\|f\|_\infty \tag{4.15}$$

elde ederiz. Her sabit fonksiyon herhangi bir f fonksiyonu ile komonoton bir çift oluşturduğundan ve her $j\in\mathbb{N}$ için T_j, pozitif homojen ve komonoton toplamsal olduğundan,

$$T_j\left(f+\|f\|_\infty h_0\right)=T_j\left(f\right)+\|f\|_\infty T_j\left(h_0\right) \tag{4.16}$$

(4.15), (4.16) ve varsayımlarımızı kullanarak, $L^\rho\left(I\right)$ da kuvvet serisi anlamında kuvvetli istatistiksel olarak

$$T_j\left(h_0\right)\to h_0,$$

gerçeklenir. Her $f\in L^\rho\left(I\right)\cap K$ için $f-C(I)\subset X_T$ olacak şekilde $L^\rho\left(I\right)$ da kuvvet serisi anlamında istatistiksel modüler olarak

$$T_jf\to f$$

elde ederiz. ■

Şimdi özel bir durumda X_T sınıfını belirleyelim. Bu amaçla yine Tanım 4.7.' yi kullanacağız. F_φ, λ, f ve her λ için bağımsız olan bir K sabiti için $st_p-\limsup\rho\left[\lambda\left(T_jf\right)\right]\leq D\rho\left[\lambda f\right]$ eşitsizliğini sağlayan $L_\varphi\left(I\right)$ daki bir fonksiyon kümesi olsun. Ayrıca aşağıdaki klasik Bernstein operatörünü ele alalım. $B_j:C\left[0,1\right]\to C\left[0,1\right]$

$$B_j\left(f\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{j}p_{j,k}\left(x\right)f\left(\frac{k}{j}\right),\quad p_{j,k}\left(x\right)=\binom{j}{k}x^k\left(1-x\right)^{j-k}$$

operatörünü ve

$$u_j=\begin{cases}0\ , & j=k^2\\ j\ , & diğer\ durumlarda\end{cases}$$

dizisini kullanarak

$$T_j\left(f\right)=u_j\max\left\{B_j\left(f\right),B_{j+1}(f)\right\}$$

lineer olmayan $T_j:C\left[0,1\right]\to C\left[0,1\right]$ operatörünü tanımlayalım. Bu operatör monoton ve altlineerdir. (Bu operatör açıkça komonoton toplamsaldır). (4.7), (4.9) ve (4.10) gereğince

$T_j(h_0)(x) = u_j h_0(x)\,, T_j(-h_1)(x) = -u_j x$ ve

$$T_j(h_2)(x) = u_j \max\{B_j(h_2)(x)\,, B_{j+1}(h_2)(x)\} = u_j\left(x^2 + \frac{x(1-x)}{j}\right)$$

elde edilir. φ konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi[\lambda B_j f] &= \int_0^1 \varphi(|\lambda B_j(f)(s)|)\,ds \\
&= \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|\sum_{k=0}^{j} p_{j,k}(s) f\left(\frac{k}{j}\right)\right|\right) ds \\
&\le \int_0^1 \sum_{k=0}^{j} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{j}\right)\right|\right) p_{j,k}(s)\,ds \\
&= \sum_{k=0}^{j} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{j}\right)\right|\right) \int_0^1 p_{j,k}(s)\,ds \\
&= \sum_{k=0}^{j} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{j}\right)\right|\right) \binom{j}{k} \frac{k!\,(j-k)!}{(j+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{j} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{j}\right)\right|\right) \frac{1}{j+1} \\
&= \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} \varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{j}\right)\right|\right) \\
&= \frac{1}{j+1} \rho_j^\varphi[\lambda f]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizliği kullanarak, her integrallenebilir f fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{j+1}\rho_j^\varphi[\lambda f] &= \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{j+1}\frac{j}{j}\sum_{k=0}^{j}\varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{j}\right)\right|\right) \\
&= \limsup_{j\to\infty} \frac{j}{j+1}\sum_{k=0}^{j}\varphi\left(\left|\lambda f\left(\frac{k}{j}\right)\right|\right)\left(\frac{k+1}{j} - \frac{k}{j}\right) \\
&= 1.\rho_\varphi[\lambda f]
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki ifadeden, Riemann anlamında integrallenebilir her f fonksiyonu, F_φ sınıfına aittir. Dolayısıyla P nin herhangi bir regüler kuvvet serisi olduğu, (T_i) operatörü için

$$\begin{aligned}
st_P - \limsup \rho_\varphi[\lambda(T_j f)] &= st_P - \limsup \rho_\varphi[\lambda u_j \max\{B_j f, B_{j+1} f\}] \\
&= st_P - \limsup u_j \rho_\varphi[\lambda \max\{B_j f, B_{j+1} f\}] \\
&\le D\rho_\varphi[\lambda f]
\end{aligned}$$

olacak şekilde $C(I)$ uzayını içeren bir $X_T \subset K \cap L^{\rho}(I)$ alt uzayı vardır.

Yani, $(CS-2)$ özelliği en azından Riemann integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı için gereklidir. Bu da $F_{\varphi} \subset X_T$ olduğunu gösterir. Özel olarak

$$p_j = \begin{cases} 1 \ , & j = k^2 \\ 0 \ , & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ile verilen kuvvet serisi metodunu düşünürsek

$$\begin{aligned}
\rho_{\varphi}\left[\lambda\left(T_j\left(h_0\right)-h_0\right)\right] &= \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|u_j-1\right|\right)dx \\
&= \begin{cases} \varphi(\lambda) \ , & j = k^2 \\ \varphi\left(\lambda\left|j-1\right|\right) \ , & diğer\ durumlarda \end{cases} , \ \forall\lambda > 0 \text{ için} \\
\rho_{\varphi}\left[\lambda\left(T_j\left(h_1\right)-h_1\right)\right] &= \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|u_jx-x\right|\right)dx \\
&= \begin{cases} \int_0^1 \varphi(\lambda x)\,dx \ , & j = k^2 \\ \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|jx-x\right|\right)dx \ , & diğer\ durumlarda \end{cases} , \ \forall\lambda > 0 \text{ için} \\
\rho_{\varphi}\left[\lambda\left(T_j\left(-h_1\right)+h_1\right)\right] &= \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|-u_jx+x\right|\right)dx \\
&= \begin{cases} \int_0^1 \varphi(\lambda x)\,dx \ , & j = k^2 \\ \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|-jx+x\right|\right)dx \ , & diğer\ durumlarda \end{cases} , \ \forall\lambda > 0 \text{ için}
\end{aligned}$$

ve

$$\rho_{\varphi}\left[\lambda\left(T_j\left(h_2\right)-h_2\right)\right] = \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|u_jx^2+\frac{u_jx\left(1-x\right)}{j}-x^2\right|\right)dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^1 \varphi\left(\lambda x^2\right)dx \ , & j = k^2 \\ \int_0^1 \varphi\left(\lambda\left|jx^2+\frac{jx(1-x)}{j}-x^2\right|\right)dx \ , & diğer\ durumlarda \end{cases} , \ \forall\lambda > 0 \text{ için}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $h \in \{h_0, h_1, -h_1, h_2\}$ için kuvvet serisi $L^{\rho}(I)$ da kuvvetli istatistiksel olarak

$$T_jh \rightarrow h$$

elde edilir. Buradan T_j operatörlerinin teoremin koşullarını sağladığını söyleriz.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, modüler uzaylarda tanımlı lineer olmayan operatör dizileri için çeşitli toplanabilme metotları temelli yeni bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Elde edilen bulgular, operatörlerin davranışını analiz ederken klasik norm yakınsaklık veya noktasal yakınsaklık gibi kısıtlayıcı koşullara ihtiyaç duyulmadan da güçlü yakınsaklık sonuçlarının elde edilebileceğini göstermektedir.

Geliştirilen teorem, modüler fonksiyonun özelliklerine bağlı olarak geniş bir operatör sınıfı için geçerlidir ve literatürdeki mevcut sonuçların önemli bir genellemesi niteliğindedir. Ayrıca verilen örnek, teorinin yalnızca soyut düzeyde kalmadığını, pratikte kullanılabilir bir yaklaşım ilkesi sunduğunu ortaya koymuştur.

Bu tez, modüler analiz, toplanabilme teorisi ve yaklaşım teorisi arasındaki etkileşimi güçlendirerek, gelecekte hem lineer olmayan hem de daha karmaşık yapıdaki operatörlerin incelenmesinde kullanılabilecek yeni bir metodolojik çerçeve sunmuştur. Ayrıca sonuçlar, modüler sistemlere dayalı fonksiyonel analiz ve olasılıksal yaklaşım yöntemleri için yeni araştırma alanları açmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Aslan, I. (2021). Convergence in φ-variation and rate of approximation for nonlinear integral operators using summability process. *Mediterranean Journal of Mathematics, 18*, Article 5. DOI:10.1007/s00009-020-01623-2.

[2] Aslan, I., & Duman, O. (2021). Nonlinear approximation in N-dimension with the help of summability methods. *RACSAM, 115*, Article 105. DOI: 0.1007/s13398-021-01046-y

[3] Bardaro, C., & Mantellini, I. (2007). Korovkin theorem in modular spaces. *Commentationes Mathematicae, 47*, 239–253. DOI: 10.14708/cm.v47i2.5253.

[4] Bardaro, C., & Mantellini, I. (2008). Multivariate moment type operators: Approximation properties in Orlicz spaces. *Journal of Mathematical Inequalities, 2*, 247–259. DOI: 10.7153/jmi-02-22.

[5] Bardaro, C., & Mantellini, I. (2009). A Korovkin theorem in multivariate modular function spaces. *Journal of Function Spaces and Applications, 2*, 105–120. DOI: 10.1155/2009/863153.

[6] Bardaro, C., Boccuto, A., Dimitriou, X., & Mantellini, I. (2013). Abstract Korovkin-type theorems in modular spaces and applications. *Central European Journal of Mathematics, 11*, 1774–1784. DOI: 10.2478/s11533-013-0288-7

[7] Bernstein, S. (1912). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem. *Mathematische Annalen, 71*, 417–439.

[8] Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and analytic functions. *Arkiv för Matematik, 2*, 43–56. DOI: 10.1007/BF02591381.

[9] Boss, J. (2000). *Classical and modern methods in summability*. Oxford University Press.

[10] Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum, 2*, 241–244. DOI: 10.4064/cm-2-3-4-241-244

[11] Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis, 5*, 301–313. DOI: 10.1524/anly.1985.5.4.301

[12] Fridy, J. A., & Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society, 125*, 3625–3631. DOI: 10.1090/s0002-9939-97-04000-8

[13] Găl, S. G., & Niculescu, C. P. (2023). Korovkin-type theorems for weakly nonlinear and monotone operators. *Mediterranean Journal of Mathematics, 20*, Article 56. DOI: 10.1007/s00009-023-02271-y.

[14] Găl, S. G. (2017). Uniform and pointwise quantitative approximation by Kantorovich–Choquet type integral operators with respect to monotone and submodular set functions. *Mediterranean Journal of Mathematics, 14*, 205–216.

[15] Găl, S. G., & Niculescu, C. P. (2020). A nonlinear extension of Korovkin's theorem. *Mediterranean Journal of Mathematics, 17*(5), Article 145. DOI:10.1007/s00009-020-01583-7.

[16] Gökçer, T. Y., & Duman, O. (2020). Approximation by max–min operators: A general theory and its applications. *Fuzzy Sets and Systems, 394*, 146–161. DOI: 10.1016/j.fss.2019.11.007.

[17] Karakus, S., Demirci, K., & Duman, O. (2010). Statistical approximation by positive linear operators on modular spaces. *Positivity, 14*, 321–334. DOI: 10.1007/s11117-009-0020-9.

[18] Kratz, W., & Stadtmüller, U. (1989). Tauberian theorems for J_p-summability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 139*, 362–371. DOI: 10.1016/0022-247X (89) 90113-3.

[19] Korovkin, P. P. (1960). *Linear operators and approximation theory*. Hindustan Publishing Corporation.

[20] Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear operators in the spaces of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR, 90*, 961–964.

[21] Musielak, J. (1983). *Orlicz spaces and modular spaces*. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/BFb0072210.

[22] Niculescu, C. P. (2009). An overview of absolute continuity and its applications. *International Series of Numerical Mathematics, 157*, 201–214. DOI: 10.1007/978-3-7643-8773-0-19.

[23] Özgüç, İ., & Taş, E. (2016). A Korovkin-type approximation theorem and power series method. *Results in Mathematics, 69*, 497–504. DOI: 10.1007/s00025-016-0538-7.

[24] Schaefer, H. H. (1974). *Banach lattices and positive operators*. Springer, Berlin. DOI: 10.1007/978-3-642-65970-6

[25] Stadtmüller, U., & Tali, A. (1999). On certain families of generalized Nörlund methods and power series methods. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 238*, 44–66. DOI: 10.1006/jmaa.1999.6503.

[26] Taş, E., & Aykanat, S. Some approximation results for nonlinear operators in modular space. *Advances in Studies of Euro-Tbilisi Mathematical Journal*. (Accepted).

[27] Taş, E., & Aykanat, S. Approximation results of nonlinear operators via power series statistical convergence in modular space. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*. (Accepted).

[28] Taş, E., & Aykanat, S. Some results of Korovkin type for nonlinear operators. *Approximation Theory and Special Functions, Springer*. (Accepted).

[29] Taş, E., & Yurdakadim, T. (2023). Approximation results by statistical convergence based on a power series in modular spaces. *Lobachevskii Journal of Mathematics, 44*, 4913–4919. DOI: 10.1134/s1995080223110379.

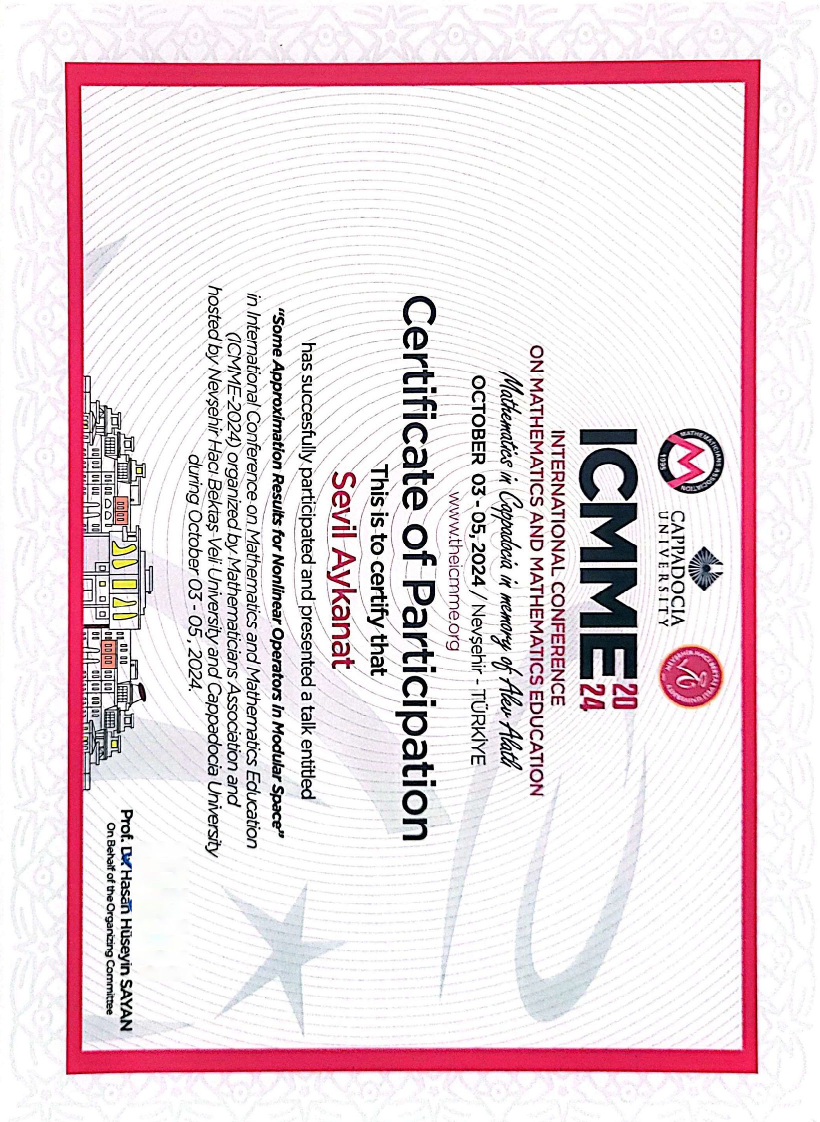
[30] Taş, E., & Yurdakadim, T. (2017). Approximation by positive linear operators in modular spaces by power series method. *Positivity, 21*, 1293–1306. DOI: 10.1007/s11117-017-0466-4.

[31] Unver, M., & Orhan, C. (2019). Statistical convergence with respect to power series methods and applications to approximation theory. *Numerical Functional Analysis and Optimization, 40*, 535–547. DOI: 10.1080/01630563.2018.1561467.

[32] Yurdakadim, T. (2018). Abstract Korovkin theory in modular spaces in the sense of power series method. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 47*, 1467–1477. DOI: 10.15672/hujms.2018.0044.

EKLER

Ek 1. Katılım Belgesi


ICMME 2024
INTERNATIONAL CONFERENCE
ON MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION
Mathematics in Cappadocia in memory of Alev Alatlı
OCTOBER 03 - 05, 2024 / Nevşehir - TÜRKİYE
www.theicmme.org

CAPPADOCIA UNIVERSITY

Certificate of Participation

This is to certify that

Sevil Aykanat

has succesfully participated and presented a talk entitled

"Some Approximation Results for Nonlinear Operators in Modular Space"

in International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2024) organized by Mathematicians Association and hosted by Nevşehir Hacı Bektaş Veli University and Cappadocia University during October 03 - 05, 2024.

Prof. Dr. Hasan Hüseyin SAYAN
On Behalf of the Organizing Committee

Ek 2. Kabul Mektubu

DergiPark
AKADEMİK

Dear Emre Taş,

Thank you very much for submitting the following-referenced manuscript to the Turkish Journal of Mathematics and Computer Science.

Manuscript ID: 1794000
Title: Approximation Results of Nonlinear Operators via Power Series Statistical Convergence in Modular Space

I am pleased to inform you that the above-mentioned manuscript has been **accepted** for publication in Turkish Journal of Mathematics and Computer Science.

The layout editor will contact you as soon as possible.

Kind regards,
Dr. Hasan Hüseyin Sayan

The article is in "In Production" status. You can reach the process page from the https://dergipark.org.tr/en/journal/884/article/1794000/author/production link.

Ek 3. Kabul Mektubu

Galley Proof_AS:Euro-Tbilisi Math. J.

AK Abdulhamit KÜÇÜKASLAN

Yanıtla Tümünü yanıtla İlet

Kime: Siz; s.aykanat33@hotmail.com; gogatish@math.cas.cz; Lyoubomira SOFTOVA PALAGACHEVA

21 Nis 2025 Pzt 10:18

25 Nis 2025 Cum 16:27 tarihinde yanıtladınız

Konuşmayı görüntüle

Report_1.pdf
25 KB

Report_2.pdf
382 KB

2 ek (407 KB) Tümünü OneDrive'a kaydet Tümünü indir

Dear Professor Sevil Aykanat,

We are pleased to inform you that your work has been accepted for publication in *Special Issue of Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*. Please correct your manuscript according to the attached referee reports and resubmit it with source Latex file within 5 days.

Best Regards,

Amiran Gogatishvili
Lyoubomira Softova
Abdulhamit Kucukaslan

Editors of
Special Issue of
Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal

Dr. Abdulhamit Kucukaslan
Ankara Yıldırım Beyazıt University (AYBU)
Halil Sezai Erkut Cad. 150. Sok. No:5
Etlik, Ankara, Turkiye

Ek 4. Kabul Mektubu

Accepted paper in the EquinOCS system

========

Dear Emre Taş,

We are pleased to inform you that your paper

020: "Some Results of Korovkin Type For Nonlinear Operators"

has been accepted for

Approximation Theory and Special Functions (ATSF 2024)

Please find the reports beneath.

=== Message ===

Dear Authors,

I am happy to inform you that the revised version of your paper has been accepted for publication in the Springer Volume.

Title of the manuscript: Some Results of Korovkin Type For Nonlinear Operators

Thank you very much for your valuable contribution.

Yours sincerely,

Oktay Duman
Editor

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	Sevil AYKANAT
Uyruğu :	T.C.
Orcid Numarası:	0000-0002-5999-2281

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2011
Yüksek Lisans	
Üniversite	Düzce Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Mezuniyet Yılı	2014
Doktora	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Esntitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Mezuniyet Yılı	2026

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler

Taş, E., & Aykanat, S. Some approximation results for nonlinear operators in modular space. *International Conference on Mathematics and Mathematics Education, 3-5 Ekim 2024, Nevşehir*.

Taş, E., & Aykanat, S. Approximation results of nonlinear operators via power series statistical convergence in modular space. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*. (Accepted).

Taş, E., & Aykanat, S. Some approximation results for nonlinear operators in modular space. *Advances in Studies of Euro-Tbilisi Mathematical Journal*. (Accepted).

Taş, E., & Aykanat, S. Some results of Korovkin type for nonlinear operators. *Approximation Theory and Special Functions, Springer*. (Accepted).