T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY-LITTLEWOOD MAKSIMAL OPERATÖRÜNÜN AĞIRLIKLI L_p UZAYINDA SINIRLILIĞI

BEKTAŞ TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİKANABİLİM DALI

KIRŞEHİR - 2013

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY-LITTLEWOOD MAKSIMAL OPERATÖRÜNÜN AĞIRLIKLI L_p UZAYINDA SINIRLILIĞI

BEKTAŞ TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİKANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT

KIRŞEHİR - 2013

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Tez konusu olarak , Hardy-littlewood maksimal operatörü ve bu operatörün Lebesgue uzayındaki bazı özellikleri hakkında bilgiler verilecektir. İlk bölüm tezin giriş bölümüdür.

İkinci bölümde tezde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilecek.

Üçüncü bölümde, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ve zayıf ve güçlü L^p uzaylarının tanımı, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün bu uzaylardaki sınırlılık teoremleri verilecektir. Teoremlerin ispatında kullanılan ve ilgili operatörün kullanışlı özellikleri ilgili olarak bazı lemmalar verilecektir.Ayrıca Calderón-Zygmund parçalanışının tanımı, özellikleri ve maksimal operatör ve Calderón-Zymund Parçalanışı arasındaki ilişki ve bu alanda elde edilen neticelere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi ve Maksimal operatörün sınırlılığı ile ilgili elde edilen sonuçlara ve ağırlık fonksiyonlarının tanımı, A_p sınıfı fonksiyonların özellikleri, Maksimal operatörün ağırlıklı sınırlılık problemi için elde edilen bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hardy-Littlewood maksimal operatörü, zayıf ve güçlü L^p, A_p ağırlıkları,calderon-zygmund parçalanışı,marcinkiewicz interpolasyon teoremi

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.As the subject of the thesis it will be given some information about Hardy-Littlewood maximal operator and some properties of this operator on Lebesgue space. The first part of the thesis introduction that Thesis,the first part is the basic definitions and theorems.

In the second section,thesis, we use the basic definitions and theorems will be given.

In the third section, we give the definition of Hardy-Littlewood maximal operator, weak and strog L^p and boundedness theorems of Hardy-Littlewood maximal operator on the Lebesgue spaces. Also we give some lemmas which are using in proof of theorems and to tell you useful properties of this operator. Also we give the definition of Calderón-Zygmund decomposition, properties of the this decomposition, relation between Hardy-Littlewood maximal operator and Calderón-Zygmund decomposition and some results which are obtained from this area.

In the fourth section, we give the theorem which is called Marcinkiewicz Enterpolation Theorem, and boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator which is related to Marcinkiewicz Enterpolation Theorem and we tell you the definition of weight function, the properties of the A_p weights, and some results for the weighted boundedness problem of the Maximal operator.

Keywords: Hardy-Littlewood maximal operator, weak and strong L^p, A_p weights ,Calderon-Zygmund decomposition,Marcinkiewicz interpolation theorem

TEŞEKKÜR

Bu tez ödevini hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda yardımcı olan, değerli ve derin bilgileriyle bana ışık tutan, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyetiyle destekleyen ve bana emek veren saygı değer hocalarım;Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e ve Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT'a ;bugünlere ulaşmamda verdikleri emek ve sevgileri ile destekleri için sevgili aileme teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Bektaş TEKİN

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	: Reel sayılar kümesi $(-\infty, \infty)$
$B(x,r)$	: x merkezli r yarıçaplı yuvar
$\mathbb{R}^n$	: $n-$ boyutlu Reel uzay
Ω	: $\mathbb{R}^n$de açık küme
$Q(x,r)$	: x'e merkezlenmiş, eksenlere paralel olan ayrıtlarının boyu r olan küp
L^p	: Lebesgue uzayı
$L^p(\omega)$	: Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$\\| \cdot \\|_{p,\omega}$	: Ağırlıklı Lebesgue normu
M	: Hardy-Littlewood Maksimal operatörü

1 GİRİŞ

Hardy-Littlewood maksimal operatörü Harmonik analizin önemli konularından biri olmakla beraber hem Harmonik analizin iç problemlerinin çözülmesinde, hem de kısmi türevli denklemler teorisi ile matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır. Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ağırlıklı Lp uzayında sınırlılığı son yıllarda önemli bir inceleme alanı oluşturmuştur.

Bugüne kadar Dünya'nın her yerinden R. Coifman, C. Fefferman, M. Christ, D. Cruz-Uribe, J. Duoandikoetxea, L. Grafacos ,D. Kurtz, B. Muckenhoupt,R. Wheeden, J. L. Rubio de Francia gibi matematiğin önemli isimleri bu alanda çalışmış ve konu alanı yukarıda belirtilen bir çok problemin çözümü için önemli sonuçlar elde etmiştir. Gelişen teknolojiye yeni bir temel oluşturabilecek bu konu her geçen gün Matematik Dünyası içinde önemini artırmaktadır.

Bu tezde, ağırlıklı Lebesgue uzayını, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ağırlıklı L_p uzayında sınırlılığını incelemektir. Böylece öğrencinin daha ileri seviyede araştırmalar yapabilmesi için temel oluşturulmuş olacaktır.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Metrik Uzaylar

Tanım 2.1 X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$

(ii) $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu denir. Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay ve $(i) - (iv)$ özelliklerine de metrik aksiyomları denir. Bir küme üzerinde birden çok metrik tanımlanabilir.

Tanım 2.2 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X, d) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \geq n_\varepsilon$ için
$d(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi $x_0 \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve bu $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.3 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X, d) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise,

(i) x_0 limiti tektir.

(ii) (x_n) dizisi sınırlıdır.

(iii) (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin limiti de x_0 dır.

(iv) Ek olarak $y_n \to y_0$ ise $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$ olur.

Tanım 2.4 (X, d) metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ pozitif bir sayı olmak üzere;

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar,

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir kapalı yuvar,

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir yuvar yüzeyi denir.

Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(a, r)$ olacak şekilde bir $B(a, r)$ açık yuvarı varsa (x_n) dizisi X metrik uzayında sınırlıdır denir. Ayrıca $E \subseteq B(a, r)$ olacak şekilde $B(a, r)$ açık yuvarı varsa $E \subseteq X$ alt kümesine X metrik uzayında sınırlıdır denir.

Tanım 2.5 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere, eğer $B(x_0, \varepsilon) \subseteq E$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa $x_0 \in E$ sayısına E nin bir iç noktası denir.

Tanım 2.6 (X, d) metrik uzay ve $G \subset X$ olmak üzere, eğer G kümesinin her noktası G nin bir iç noktası ise G ye (X te) bir açık küme denir.

Tanım 2.7 (X, d) metrik uzay ve $G \subseteq X$ olmak üzere,

(i) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $0 < d(c, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $c \in X$ sayısına G kümesinin bir yığılma noktası denir.

(ii) Eğer bir $c \in G$ noktası G nin bir yığılma noktası değilse c elemanına G nin izole noktası denir.

Teorem 2.8 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $c \in X$ noktası E kümesinin bir yığılma noktasıdır.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $B(c, \varepsilon)$ açık yuvarı E kümesinin sonsuz çoklukta elemanını kapsar.

(iii) E kümesinde bir (x_n) dizisi vardır ki $n \in \mathbb{N}$ iken $x_n \neq c$ ve $x_n \to c$ dir.

Tanım 2.9 (X, d) metrik uzayı ve $F \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer F tüm yığılma noktalarını kapsıyorsa F ye X te bir kapalı küme denir.

Teorem 2.10 (X, d) metrik uzay olmak üzere,

(i) X teki açık kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun birleşimi X te bir açık kümedir.

(ii) X teki açık kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun kesişimi X te bir açık kümedir.

Teorem 2.11 (X, d) metrik uzay olmak üzere, $F \subseteq X$ alt kümesi X te kapalıdır $\Leftrightarrow$ F nin tümleyeni $F^c = X \setminus F$, X te bir açık kümedir.

Teorem 2.12 (X, d) metrik uzay olmak üzere

(il) X teki kapalı kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun kesişimi X te bir kapalı kümedir.

(ii) X teki kapalı kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun birleşimi X te bir kapalı kümedir.

Tanım 2.13 $E \subseteq X$ olmak üzere

(i) E kümesinin tüm iç noktalarının kümesine E nin içi denir ve $intE$ şeklinde gösterilir.

(ii) E kümesinin noktalarını ve tüm yığılma noktalarını kapsayan kümeye E nin kapanışı denir ve $\bar{E}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.14 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar $E \subseteq X$, c noktası E nin bir yığılma noktası ve $l \in Y$ olsun.

$x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $d_2(f(x), l) < \varepsilon$ iken $d_1(x, c) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $l \in Y$ noktasına $f : E \to Y$ fonksiyonunun c noktasındaki limiti denir ve $\lim_{x \to c} f(x) = l$ şeklinde gösterilir. Burada c noktasının E kümesine ait olması gerekmez.

Tanım 2.15 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar ve $c \in X$ olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım eğer;

$\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x, c) < \delta$ iken $d_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesindeki her noktada sürekli ise f fonksiyonu X uzayında süreklidir denir.

Tanım 2.16 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım, eğer

$\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x_1, x_2) < \delta$ iken $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu X te düzgün yakınsaktır denir.

Düzgün yakınsak olan bir fonksiyon aynı zamanda yakınsaktır ancak tersi doğru değildir.

Tanım 2.17 (X,d) metrik uzay olsun. (x_n), X te bir dizi olsun.$\forall\varepsilon > 0$ ve $m > n \geq n_0$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.18 (X,d) metrik uzay olsun. (x_n), X te bir yakınsak dizi ise (x_n) bir Cauchy dizisi olur. Bu teoremin tersi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ de adi metriğe göre doğru olmakla birlikte genel olarak doğru değildir.

Tanım 2.19 (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun, E deki her Cauchy dizisi E deki bir noktaya yakınsıyor ise E kümesine tamdır denir.

Tanım 2.20 (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X teki bir noktaya yakınsıyor ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.21 (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun, eğer E deki her dizi, limiti E de olan yakınsak bir alt diziye sahip ise E kümesine kompakt küme denir. Eğer X kompakt ise (X,d) metrik uzayı kompakt olur.

Bir $E \subseteq X$ alt kümesinin kompaktlığı, X uzayında tanımlanan metriğe bağlıdır, örneğin $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi, $\mathbb{R}$ deki adi metriğe göre kompakttır; ancak ayrık metriğe göre kompakt değildir.

Tanım 2.22 (X,d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. $X = \bar{E}$ ise E kümesine X te yoğun küme denir.

2.2 Vektör Uzayları

Tanım 2.23 V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olmak üzere, $+ : V \times V \to V, \quad (x,y) \to x + y$
$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, \quad (\lambda, x) = \lambda x$
dönüşümleri ile sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini tanımlayalım.

$\forall x, y, z \in V$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. x + y = y + x
2. x +(y + z) =(x + y) + z
3. $\forall x \in V$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in V$ vardır.

4. $\forall x \in V$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in V$ vardır.
5. $\forall x \in V$ için $1 \cdot x = x$
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu y$
8. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Bu durumda V ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay), elemanlarına ise vektör veya nokta denir. $V = \mathbb{R}$ alınırsa V ye bir reel vektör uzayı, $V = \mathbb{C}$ alınırsa V ye bir kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.24 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer W, V vektör uzayındaki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W ye V nin bir (lineer) alt uzayı denir

Teorem 2.25 $\emptyset \neq W \subseteq V$ kümesinin V nin bir alt uzayı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $y_1, y_2 \in W$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ için $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in W$ olmasıdır.

Tanım 2.26 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.
$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in V$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için

(i) $\|x\| \geq 0$
(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyor ise V üzerinde bir norm olur ve bu durumda $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(i) - (iv)$ özelliklerine ise norm aksiyomları denir. Bu uzay $V = \mathbb{R}$ için reel normlu uzay, $V = \mathbb{C}$ için kompleks normlu uzay olur. Bir vektör uzayı üzerinde birden çok normlu uzay tanımlanabilir.

Örnek 2.27 $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ öklid vektör uzayını düşünelim.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

normu ile birlikte bir normlu vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya $\mathbb{R}^n$ deki adi norm veya öklid normu denir.

Örnek 2.28 l_p, $(1 \leq p < \infty)$ uzayı

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı $\| \cdot \|_{l_p} : l^p \to \mathbb{R}$ dönüşümü ile bir normlu uzaydır.

Tanım 2.29 Her $(V, \| \cdot \|)$ normlu uzayından $x, y \in V$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde bir metrik elde edilebilir. Bu metriğe $\| \cdot \|$ normu tarafından üretilen metrik veya $\| \cdot \|$ normunun indirgediği metrik denir.

Teorem 2.30 $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir V vektör uzayı üzerinde $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her norm V üzerinde süreklidir.

Teorem 2.31 $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı herhangi bir V normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir.

Tanım 2.32 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in V$ için

$$k\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K\|x\|_1$$

olacak şekilde $k, K \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa V üzerinde tanımlı $\| \cdot \|_1$ ve $\| \cdot \|_2$ normlarına denk normlar denir.

Tanım 2.33 (x_n), $(V, \| \cdot \|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in V$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterillir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama denir.

Tanım 2.34 $(V, \| \cdot \|)$ normlu uzayı içinde bir dizi (x_n) olsun.
$\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.35 Bir $(V, \| \cdot \|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi V içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(V, \| \cdot \|)$ normlu uzayına Banach Uzayı adı verilir.

Örnek 2.36 $V = \mathbb{R}^n$(veya $V = \mathbb{C}^n$) vektör uzayı

(i) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(ii) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$

(iii) $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ normlarına göre birer Banach uzayıdır.

Örnek 2.37 $V = \mathbb{R}$ (veya $V = \mathbb{C}$)olmak üzere $\mathbb{F}$ üzerinde tanımlı V vektör uzayı

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.3 Lebesgue İntegrali

Tanım 2.38 X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $\mathcal{H}$ sınıfı için

(i) $\forall A, B \in \mathcal{H}, \quad A \setminus B \in \mathcal{H}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{H}, \quad A \cup B \in \mathcal{H}$

özellikleri sağlanırsa bu $\mathcal{H}$ sınıfına bir **halka** adı verilir. Eğer (ii) yerine

$$\forall k \in N, A_k \in \mathcal{H} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}$$

şartı sağlanırsa bu takdirde $\mathcal{H}$ halkasına bir σ - **halka** denir.

Tanım 2.39 X bir küme olsun. X in bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir **cebir**dir denir.

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A}, \quad E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, ..., n, \quad E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) yerine

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A} \tag{2.1}$$

şartı sağlanırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir σ-**cebir** adı verilir.

Örnek 2.40 X bir küme ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ- cebirdir.

Örnek 2.41 $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \{\varnothing, \{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}, \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}, \mathbb{N}\}$ alınırsa $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ- cebirdir.

Örnek 2.42 X bir sonsuz küme ve $\mathcal{A}$ da X in tüm sonlu alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ- cebiri değildir. Çünkü $E \in \mathcal{A}$ ise E sonludur. Dolayısıyla, E^c sonsuzdur, aksi takdirde X sonlu olurdu. O halde $E^c \notin \mathcal{A}$ dır.

Teorem 2.43 X üzerindeki σ- cebirlerin herhangi adetteki kesişimleri yine bir σ- cebiridir.

Teorem 2.44 X bir küme $\mathcal{K}$ da X in boş olmayan bir sınıfı olsun. $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ- cebirlerinin bir en küçüğü vardır.

Tanım 2.45 Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ- cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ- cebiri denir, $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ- cebirine **Borel Cebiri** denir ve $\mathcal{B}$ $(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nin herbir elemanına bir **Borel Kümesi** denir.

Örnek 2.46 $X = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ve E de bir Borel kümesi olsun.
$E_1 = E \cup \{-\infty\}, E_2 = E \cup \{+\infty\}$ ve $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ olsun. E kümesi $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel cebirini taradığında E, E_1, E_2, E_3 kümelerinin sınıfı $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ olsun. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ bir σ- cebiridir. Bu σ- cebirine **Genişletilmiş Borel Cebiri** adı verilir.

Tanım 2.47 X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ- cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathcal{A}$ daki her kümeye $\mathcal{A}$-**ölçülebilir uzay** (veya kısaca **ölçülebilir küme**) adı verilir.

Tanım 2.48 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** adı verilir.
$\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir **sonlu ölçü** adı verilir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü σ- **sonludur** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir.

Örnek 2.49 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. $\forall E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$ biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir sonlu ölçü ve dolayısıyla bir σ- sonlu ölçüdür.

Örnek 2.50 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. $E \in \mathcal{A}$ için

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, \; E = \emptyset \\ +\infty, \; E \neq \emptyset \end{cases} \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir ölçüdür. Bu ölçü ne sonlu ne de σ- sonludur.

Tanım 2.51 Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüsüne bir **ölçü uzayı** adı verilir.

Teorem 2.52 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.
Eğer $A, B \in \mathcal{A}$ ve $A \subset B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ şeklindedir. Ayrıca $\mu(A) < \infty$ ise

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A) \tag{2.3}$$

dır.

Teorem 2.53 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $(A_n), \mathcal{A}$ daki elemanların artan bir dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \tag{2.4}$$

dır.

2. $(B_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) \tag{2.5}$$

dır.

Sonuç 2.54 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $(A_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \tag{2.6}$$

dır.

2. $(B_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{2.7}$$

dır.

Teorem 2.55 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $(A_n), \mathcal{A}$ ya ait kümelerin herhangi bir dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{2.8}$$

dır.

Tanım 2.56 X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall E \in P(X), \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in N, A_n \in P(X) \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçüsüdür** denir.

Ölçü ve dış ölçü tanımları göz önüne alınırsa ne ölçünün ne de dış ölçünün bir ölçü olması gerekmediği görülür. Dış ölçü, ölçü fonksiyonunun sağladığı pek çok özelliği sağladığı için bu ad verilmiştir. Bir ölçünün bir dış ölçü olabilmesi için onun tanım kümesinin $P(X)$ kuvvet kümesi olması gerekir.

Örnek 2.57 X herhangi bir küme ve $P(X)$ üzerinde tanımlanan

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases} \tag{2.9}$$

fonksiyonu bir ölçü olmayıp bir dış ölçüdür.

Örnek 2.58 X herhangi bir sonsuz küme ve $P(X)$ üzerinde tanımlanan

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, \ n(A) < \infty \\ 1, \ n(A) = \infty \end{cases} \tag{2.10}$$

fonksiyonu bir dış ölçü değildir.

Bilindiği gibi, bir I aralığının $\ell(I)$ uzunluğu o aralığın uç noktalarının farkı olarak tanımlanır. Yani $I = [a, b]$ (veya (a,b), (a,b], [a,b)) aralığının boyu $\ell(I) = b - a$ dır. Uzunluk bir küme fonksiyonuna (bir koleksiyondaki herbir kümeye bir genişletilmiş reel sayı karşılık getiren fonksiyon) bir örnektir. Bu durumda uzunluğun tanım kümesi aralıklar koleksiyonu, değer kümesi de genişletilmiş reel sayılar kümesidir. Bu bölümde uzunluk kavramı aralıklardan daha karışık kümeler için tanımlayacağız. Örneğin açık bir kümenin uzunluğunu, bu kümeyi oluşturan açık, ayrık aralıkların uzunlukları toplamı olarak tanımlayacağız. Öyle bir λ fonksiyonu teşkil etmek istiyoruz ki, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir $\mathcal{M}$ sınıfı üzerinde tanımlı olsun ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

- λ, $\mathbb{R}$ nin herbir E alt kümesi üzerinde tanımlı olsun, yani

$$\mathcal{M} = P(\mathbb{R})$$

  olsun.

- Her bir I aralığı için λ(I)=ℓ(I) olsun.

- Eğer (E_n) bir ayrık dizi ve λ bunların herbiri üzerinde tanımlı ise

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

  olsun.

- λ öteleme altında invaryant olsun. Yani λ fonksiyonu, E ve

$$E + y = \{x + y : x \in E\}$$

  kümeleri üzerinde tanımlı olduğunda

$$\lambda(E + y) = \lambda(E)$$

  olsun.

Bu dört özelliği sağlayan bir küme fonksiyonu tanımlamak mümkün değildir. Bu güne kadar ilk üç şartı sağlayan bir küme fonksiyonu bilinmemektedir. Bu nedenle bunlardan birinden vazgeçmek gerekmektedir.
Son üç şartı bırakıp ilk şartı değiştirmek oldukça faydalıdır. Burada yapılacak değişiklik λ fonksiyonunu tüm alt kümeler üzerinde tanımlamayıp daha dar σ-cebiri üzerinde tanımlamaktır. Yani $\mathcal{M}$ olarak $P(\mathbb{R})$ kuvvet kümesi değil, üzerinde λ fonksiyonunu tanımlayabileceğimiz uygun bir σ- cebiri almaktır. Şimdi bu fonksiyonu inşa etmeye başlayalım.

Örnek 2.59 (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\mathcal{T}_A = \{(I_k) : A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf\{\Sigma_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : (I_k) \in \mathcal{T}_A\} \tag{2.11}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir.

Teorem 2.60 Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin herbir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir, yani $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ise

$$\lambda^*(I) = \ell(I)$$

dır.

Teorem 2.61 $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü herbir aralığa onun hacmini karşılık getirir.

Sonuç 2.62 A sayılabilir küme ise $\lambda^*(A) = 0$ dır.

Sonuç 2.63 $[0, 1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 2.64 X bir küme μ^* da X üzerinde bir dış ölçü olsun. Eğer X in herbir A alt kümesi için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{2.12}$$

ise X in E alt kümesi μ^*- **ölçülebilir** (μ^* ye göre ölçülebilir) denir.
μ^* fonksiyonunun alt toplamsallık özelliği de denilen $\mu^*(\cup A_k) \leq \Sigma\mu^*(A_k)$ özelliğinden, X in bütün A ve E alt kümeleri için

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

olacağından bir E kümesinin μ^*- ölçülebilir olup olmadığını anlamak için herbir $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{2.13}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Ayrıca, eğer
$\mu^*(A) = +\infty$ ise (2.13) eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Şu halde X in bir E alt kümesinin μ^*- ölçülebilir olduğunu göstermek için X in $\mu^*(A) < +\infty$ şartını sağlayan herbir A alt kümesi için (2.13) eşitsizliğinin sağlandığı göstermek yeterlidir.

Teorem 2.65 X bir küme ve μ^* da X üzerinde bir dış ölçü olsun. X in herbir E alt kümesi için $\mu^*(E) = 0$ veya $\mu^*(E^c) = 0$ ise E kümesi μ^*- ölçülebilirdir.

Sonuç 2.66 $\emptyset$ ve X, X üzerinde tanımlanan her dış ölçüye göre ölçülebilirdir. Özel olarak $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri λ^* Lebesgue dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir.

Teorem 2.67 E_1 ve E_2, μ^*- ölçülebilir kümeler ise $E_1 \cup E_2$ de μ^*- ölçülebilirdir.

Teorem 2.68 X bir küme μ^* X üzerinde bir dış ölçü ve $\mathcal{M}(X, \mu^*)$ da X üzerinde μ^*- ölçülebilir kümelerin sınıfı olsun.

1. $\mathcal{M}(X, \mu^*)$ bir σ- cebiridir.
2. μ^* ın $\mathcal{M}(X, \mu^*)$ sınıfına kısıtlanması bir ölçüdür.

Lebesgue dış ölçüsü olan λ^* ın $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına ve $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ sınıfına olan kısıtlamasına **Lebesgue Ölçüsü** denir, λ ile gösterilir. İkisini birbirinden ayırmak gerektiğinde, üzerinde Lebesgue ölçüsünün tanımladığı sınıf belirtilir. "$\mathbf{B}(\mathbb{R})$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü" veya "$\mathcal{M}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü" gibi. Bazen de "Borel kümeleri üzerinde tanımlı Lebesgue ölçüsü" şeklinde ifade edilir.

Lemma 2.69 $a \in \mathbb{R}$ için $(a, +\infty)$ aralığı λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir.

Teorem 2.70 Herbir Borel kümesi λ^* ölçülebilirdir.

2.4 Ölçülebilir Fonksiyonlar

Bu bölümde önce reel değerli fonksiyonların ölçülebilirliği üzerinde durulacak, daha sonra genişletilmiş reel değerli fonksiyonlara yer verilecektir.

Tanım 2.71 $(X; \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Longleftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Şimdi bu tanımdaki kümelerin şeklini değiştirmeye imkan veren bir lemmayı ifade edelim.

Lemma 2.72 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktir.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

Örnek 2.73 Her sabit fonksiyon bir ölçülebilir fonksiyondur. Gerçekten, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ ise $\alpha \geq c$ için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{A}$$

ve $\alpha < c$ için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{A}$$

olur.

Örnek 2.74 $X = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ olsun. Sürekli her $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (Borel) ölçülebilirdir.
Gerçekten f sürekli olduğunda her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$$

kümesi $\mathbb{R}$ de bir açık kümedir. Her açık küme Borel cebirine ait olduğundan

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

dir, yani Borel ölçülebilirdir.

Teorem 2.75 f ve g ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$cf, f^2, f + g, f.g, |f|$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Tanım 2.76 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilirdir } \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

Lemma 2.72 deki denklemlerin $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için de doğru olacağı açıktır. Bu tanımların benzerleri $[-\infty, +\infty]$ değerli fonksiyonlar için de verilebilir.

Tanım 2.77 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.
$f : A \to [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olmalıdır. X üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}$ ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir. Eğer $f \in M(X, \mathcal{A})$ ise

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\}$$

$$\begin{aligned} B = \{x \in X : f(x) = -\infty\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq -n\} \\ &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right)^c \end{aligned}$$

olacağından A ve B ölçülebilirdir.

Teorem 2.78 Genişletilmiş reel değerli bir f fonksiyounun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}, B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

kümelerinin ve

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \; x \notin A \cup B \\ \quad 0, \; x \in A \cup B \end{cases} \tag{2.14}$$

biçiminde tanımlanan reel değerli f_1 fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır.

Tanım 2.79 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Borel ölçülebilir fonksiyon veya Borel fonksiyonu adı verilir. $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ σ- cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Lebesgue ölçülebilir fonksiyon denir. $\mathbb{R}$ nin Borel kümesi olmayan fakat Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri mevcut olduğundan, $\mathbb{R}$ de herbir Borel ölçülebilir fonksiyon Lebesgue ölçülebilirdir.

Tanım 2.80 f, X den $\overline{\mathbb{R}}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

biçiminde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^+ fonksiyonuna f nin pozitif parçası, f^- fonksiyonuna da f nin negatif parçası denir. Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında,

$$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ - f^-$$
$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

olur. Teorem gereğince ve yukarıdaki bağıntılar göz önüne alındığında aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 2.81 $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır.

Teorem 2.82 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. f ile g, A üzerinde tanımlı $[-\infty, +\infty]$- değerli ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde

$$\{x \in A : f(x) < g(x)\}, \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}, \{x \in A : f(x) = g(x)\}$$

kümeleri ölçülebilirdir.

Teorem 2.83 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay $A \in \mathcal{A}$ ve f ile g, A da tanımlı $[-\infty, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonlar ise $(f \vee g)$ ve $(f \wedge g)$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

Teorem 2.84 (f_n), $A \in \mathcal{A}$ üzerinde tanımlı, $[-\infty, +\infty]$- değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\sup_n f_n$ ve $\inf_n f_n$ fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Teorem 2.85 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. (f_n), A üzerinde tanımlı $[-\infty, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\liminf_{n\to\infty} f_n$ ve $\limsup_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir. Ayrıca tanım kümesi $A_0 = \{x \in A : \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\}$ olan $\lim_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.

2.5 İntegral

Bu bölümde önce negatif olmayan ölçülebilir basit fonksiyonların integrali, daha sonra da negatif olmayan, genişletilmiş reel değerli, ölçülebilir fonksiyonların integrali incelenecektir. Bundan sonra da $[-\infty, +\infty]$ -değerli fonksiyonların integrali üzerinde durulacaktır. Önce basit fonksiyonun tanımını verelim.

Tanım 2.86 Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen φ fonksiyonuna bir **basit fonksiyon** adı verilir.

Bir reel değerli basit φ fonksiyonu $a_k \in R$ ve χ_{E_k}, E_k kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \tag{2.15}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer φ fonksiyonu X üzerinde tanımlı ise $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = X$ dir. Bu E_k kümelerinin seçilişi tek olmadığından φ nin (2.15) tipindeki gösterimi tek değildir. Eğer $a_1, a_2, ..., a_m$ sayıları φ nin X üzerinde aldığı farklı değerler ve

$$E_k = x \in X : f(x) = a_k$$

seçilirse E_k kümeleri ayrık olur. Bu durumda

$$\varphi = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$$

gösterimine φ fonksiyonunun **standart gösterimi** adı verilir. X üzerinde tanımlı, reel değerli, $\mathcal{A}$ ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X, \mathcal{A})$, S deki negatif olmayan fonksiyonlların kümesi S^+ ile gösterilir.

Tanım 2.87 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun a_k lar negatif olamayan reel sayılar $A_1, A_2, ..., A_n$ ler $\mathcal{A}$ ya ait olmak üzere

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$$

$$\varphi = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \tag{2.16}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ **ölçüsüne göre integrali**

$$\int_X \varphi d\mu = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) \tag{2.17}$$

dir.

Bu tanıma göre φ nin μ ye göre integrali ya negatif olmayan bir reel sayı ya da μ ölçüsünün sonlu olmayan bir ölçü olması haline karşılık gelen $+\infty$ değeridir. Belirtelim ki, φ fonksiyonunun μ ye göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır. Bununla ilgili olarak şu teoremi verebiliriz.

Teorem 2.88 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı $\varphi \in S^+(X, \mathcal{A})$ ve A_k lar ayrık olmak üzere φ nin bir gösterimi $\varphi = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ olsun. φ nin μ ölçüsüne göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır.

Şimdi negatif olmayan basit fonksiyonların integraline ait temel özellikleri verelim.

Teorem 2.89 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı $\varphi \in S^+, \Psi \in S^+$ ve $c \geq 0$ olsun. Bu taktirde

(i) $\int_X c.\varphi d\mu = c \int_X \varphi d\mu$

(ii) $\int_X (\varphi + \Psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \Psi d\mu$

(iii) $\forall x \in X$ için $\varphi(x) \leq \Psi(x)$ ise $\int_X \varphi d\mu \leq \int_X \Psi d\mu$ dir.

Burada basit fonksiyonların integralinden yararlanarak $[0, +\infty]$-değerli fonksiyonların integralini tanımlayıp bu fonksiyonların integraline ait özellikleri inceleyeceğiz.

Tanım 2.90 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre **integrali**

$$\int_X f d\mu = \sup \int_X \varphi d\mu : \varphi \in S^+ ve \varphi \leq f \tag{2.18}$$

genişletilmiş reel sayısıdır. $E \in \mathcal{A}$ olsun. f nin μ ye göre E **üzerindeki integrali**

$$\int_X f d\mu = \int_X f.\chi_E d\mu \tag{2.19}$$

sayısıdır.

Teorem 2.91 $f, g \in M^+(X, \mathcal{A})$ e $E, F \in \mathcal{A}$ olsun.

(i) $\forall x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ ise $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ dir.

(ii) $E \subset F$ ise $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$ dir.

Şimdi integral teorisinin temel teoremlerinden birini ifade edelim.

Teorem 2.92 (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise

$$\int_X f d\mu = \int_X f_n d\mu \tag{2.20}$$

dir.

Lemma 2.93 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay, $A \in \mathcal{A}$ ve $f : A \to [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Bu taktirde A üzerinde tanımlı $[-\infty, +\infty]$-değerli, ölçülebilir basit fonksiyonların öyle bir artan (φ_n) dizisi vardır ki $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ dir. Eğer f sınırlı ise bu yakınsama düzgündür.

Teorem 2.94 (i) $f \in M^+$ ve $c \geq 0$ ise $cf \in M^+$ olup,

$$\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu$$

dir.

(ii) $f, g \in M^+$ ise $f + g \in M^+$ olup,

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

dır.

Teorem 2.95 (Fatou Lemması) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve f_n de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonlarınbir dizisi ise

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{2.21}$$

dır.

Teorem 2.96 (Beppo-Levi Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\sum f_k$ da X üzerinde tanımlı $[0, +\infty]$ değerli,ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. Bu taktirde

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k d\mu \right) \tag{2.22}$$

dir.

Tanım 2.97 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Eğer $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde integrallenebilirdir denir. Bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir.

Teorem 2.98 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Bu taktirde

$$f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$$

dır ve bunların biri gerçeklendiğinde

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

olur.

Teorem 2.99 (Tchebichev Eşitsizliği) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. $\alpha > 0$ için

$$A_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

denirse

$$\mu(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{A_\alpha} f d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$$

dır.

Teorem 2.100 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, f ile g X üzerinde integrallenebilen reel değerlifonksiyonlar ve α herhangi bir reel sayı olsun. Bu taktirde

(i) $\alpha f \in \mathcal{L}$ ve $f + g \in \mathcal{L}$

(ii) $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$

(iii) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

dır.

2.6 $L_p(\Omega)$ Uzayı

Tanım 2.101 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L_p(\Omega)$ uzayı veya Ω bölgesinde p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L_p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty$$

seklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_p$ gösterimine f fonksiyonunun L_p-normu denir.

Ω bölgesinde hemen her x için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna hemen hemen heryerde sınırlıdır denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin Ω bölgesindeki esas supremumu(esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf \{K : |f(x)| \leq K h.h. x \in \Omega\}$$

seklinde gösterilir. Ω bölgesindeki hemen hemen heryerde sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ seklinde gösterilir. Buna göre bir f fonksiyonunun L^∞-normu

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.102 (Young eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\forall a, b > 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur.

Teorem 2.103 $p \leq 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right)$$

olur.

Teorem 2.104 (Hölder eşitsizliği) $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L^p, g \in L^q$ ise $fg \in L^1$ olur ve

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.105 (Minkowski eşitsizliği) Eger $f, g \in L^p$ ve $1 \leq p$ ise $f + g \in L^p$ olur ve

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Hölder teoremi ve Lebesgue integralinin özellikleri gözönünde bulunduruldugunda $L^p, 1 \leq p < \infty$, nin bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla birlikte $\|f\|_p$; L^p üzerinde bir normdur ve

1. Tanımdan $\|f\|_p \geq 0$
2. $\|f\|_p = 0$ ise hemen hemen heryerde $f(x) = 0$
3. $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
4. $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|f\|_p$

özellikleri sağlandığından $L^p, 1 \leq p \leq \infty$, bir normlu uzaydır.

Teorem 2.106 $L_p,\ 1 \leq p < \infty$, uzayı

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolaysıyla Banach uzayıdır.

Tanım 2.107 f_n ve f fonksiyonları L^p uzayının elemanları olmak üzere; (f_n) dizisi f fonksiyonuna p. mertebeden yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall > \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$.

Bu yakınsaklık çeşidine L^p de yakınsaklık da denir. Burada $p \geq 1$ olup,

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_\Omega |f_n - f|^p d\mu \right)$$

dir. Buna göre,
(f_n) dizisinin f fonksiyonuna L^p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.108 (Zayıf L^puzayı) f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Zayıf L^p uzayı

$$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_{p,\infty} < \infty\}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, f nin yarı normu $C > 0$ sabiti için

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup_{\lambda>0} \lambda | \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\} |^{\frac{1}{p}} \leq C$$

ile verilir.

Uyarı 2.109 $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n) \underset{\neq}{\subseteq} L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.110 ((p,q) tipli operatör) T, bir altlineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer T, $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı bir operatör ise T, zayıf (p,q) tipindendir denir. Yani herhangi bir $\lambda > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$| \{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\} | \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_p \right)^q \tag{2.23}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p \tag{2.24}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa $T, L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı operatörü (p,q) tipindendir denir. Burada ve aşağıda $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $f(x)$ ile $f(x)$ fonksiyonunun L^p normunu verir.

$p = q$ olduğunda ve T operatörü (2.23) ile (2.24) i, tanımladığı zaman, T nin de (p,p) zayıf tipinden olduğu söylenir. Ayrıca (p,q) tipli operatörünün zayıf (p,q) tipinden olduğunu görmek kolaydır. Fakat tersi tam olarak doğru değildir.

2.7 Ağırlıklı Norm Eşitsizlikleri

Bu bölümde Teorem 3.6 de belirtilen sonuçları daha da genel olan $(\mathbb{R}^n, \omega(x)\, dx)$ ölçülebilir uzaylarına genişleteceğiz. Burada ω, $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan lokal integrallenebilen fonksiyondur ve ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır. Notasyona uygunluk açısından bu bölümde M Hardy-Littlewood maksimal operatorünün tanımı için (3.3) ile gösterilen ifadeyi kullancağız. Aslında, (3.4) den M'' maksimal operatorü temel olarak M ile aynıdır. Şimdi A_p ağırlıklarının tanımı verelim.

Tanım 2.111 ($(1 \leq p < \infty)$için A_p ağırlıkları) $\omega(x) \leq 0$ ve $\omega(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Aşagıdaki eşitsizliği sağlayan bir $C > 0$ sabiti

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'}\, dx \right)^{p-1} \leq C \tag{2.25}$$

$1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ denir. Burada ve aşağıda, $1/p + 1/p' = 1$ dır. $C > 0$ olmak üzere

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \tag{2.26}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\omega \in A_1$. (2.25) veya (2.26) de görünen C sabitine ω nın A_p sabiti denir.

Uyarı 2.112 $\omega \in A_1$ olması için gerek ve yeter şart $C > 0$ ve herhangi Q kübü için

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)\, dx \leq C \inf_{x \in Q} \omega(x). \tag{2.27}$$

Burada ve aşağıda, inf ile temel infimum olarak düşünülecektir. Dahası, $1 \leq p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ için, A_p sabiti $C \leq 1$ olduğu kolayca görülür. Aslında, her bir Q kübü için

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1/p} \omega(x)^{-1/p}\, dx \\ &\leq \left\{ \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'}\, dx \right)^{p-1} \right\}^{1/p} \\ &\leq C^{1/p} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi A_p ağırlık fonksiyonlarının bazı özelliklerini verelim.

Önerme 2.113 (A_p ağırlıklarının $(I.)$ özellikleri) i. $A_p \subsetneqq A_q$, if $1 \leq p < q < \infty$.

ii. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ gerek ve yeter şart $\omega(x)^{1-p'} \in A_{p'}$.

iii. $\omega_0, \omega_1 \in A_1$ ise $1 < p < \infty$ için $\omega_0 \omega_1^{1-p} \leq A_p$.

iv. $(1 \leq p < \infty)$ olmak üzere $\omega \in A_p$ ise herbir $0 < \varepsilon < 1$ için $\omega^\varepsilon \in A_p$.

v. $(1 \leq p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise $\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\right)^p .\omega(Q) \leq C\int_Q |f(x)|^p \omega(x)\,dx. \tag{2.28}$$

vi. $(1 \leq p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise herhangi bir $\delta > 1$ için $C(n, p\delta)$ sabiti vardır öyleki her bir Q kübü için, $\omega(\delta Q) \leq C(n,p,\delta)\,\omega(Q)$. Özellikle, $\delta = 2$ alınırsa A_p ağırlıkları çift koşulu sağlar.

vii. $(1 \leq p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise herhangi bir $0 < \alpha < 1$için $0 < \beta < 1$ vardır öyle ki herhangi ölçülebilir $E \subset Q$ için $|E| \leq \alpha|Q|$ ve $\omega(E) \leq \beta\omega(Q)$.

İspat.

i. $p > 1$ için Tanım 2.111 ve Hölder eşitsizliğinin direk sonucudur. $p = 1$ olduğunda ise (2.27) den

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-q'}\,dx\right)^{q-1} &\leq \sup_{x\in Q}\omega(x)^{-1}\\ &= \left(\inf_{x\in Q}\omega(x)\right)^{-1}\\ &\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Diğerm taraftan, $|x|^\alpha \in A_p$ olması için gerk ve yeter şart $-n < \alpha < n(p-1)$ olduğundan (bkz Önerme 4.6), $A_p \neq A_q$ olmadığını elde ederiz.

ii. $(p-1)(p'-1) = 1$ olduğundan herhangi bir Q kübü için

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q [\omega(x)^{1-p'}]^{1-p}dx\right)^{p'-1}\\ &= \left\{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}\,dx\right)^{p-1}\right\}^{p'-1}\\ &\leq C^{p'-1}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

iii. Herhangi bir Q için , $(i=1,2)$ $\omega_i \in A_1$ olduğundan ve (2.27)

$$\omega_i(x)^{-1} \leq \sup_{x\in Q}\omega_i(x)^{-1} \leq \left(\inf_{x\in Q}\omega_i(x)\right)^{-1} \leq C\left(\frac{\omega_i(Q)}{|Q|}\right)^{-1} \tag{2.29}$$

elde edilir. 2.29 den,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega_0(x)\,\omega_1(x)^{1-p}\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega_0(x)^{1-p'}\,\omega_1(x)\,dx\right)^{p-1} \leq C$$

sonucunu verir.

iv. $p=1$ için , Hölder eşitsizliği ve (2.27) den

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{\varepsilon}\,dx \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)^{\varepsilon} \leq \left(C\inf_{x\in Q}\omega(x)\right)^{\varepsilon} = C^{\varepsilon}\inf_{x\in Q}\omega(x)^{\varepsilon}$$

olduğu görülür. Benzer olarak, $1<p<\infty$ için Tanım 2.111 ve Hölder eşitsizliğinden iv. sonucu elde edilir.

v $p=1$ için , (2.27) den

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx.\omega(Q) &= \int_Q |f(x)|dx.\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\\ &\leq C\int_Q |f(x)|dx.\inf_{x\in Q}\omega(x)\\ &\leq C\int_Q |f(x)|\omega(x)\,dx.\end{aligned}$$

elde edilir. $1<p<\infty$ olduğunda ise Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\\ &= \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\omega(x)^{1/p}\,\omega(x)^{-1/p}\,dx\\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p\omega(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}\,dx\right)^{(p-1)/p}\\ &\leq C^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p\omega(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)^{-1/p}\end{aligned}$$

olur.

vi. Eğer (2.28) te Q ile δQ ve $f(x)$ ile $\chi Q(x)$ nın yerlerini değiştirisek vi. sonucunu elde etmiş oluruz.

vii. (2.27) de $S=Q\backslash E$ ve $f(x)=\chi S(x)$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^p \omega(Q) \leq C\int_S \omega(x)\,dx.$$

Buradan

$$(1-\alpha)^p \omega(Q) \leq \left(1-\frac{|E|}{|Q|}\right)^p \omega(Q) \leq C\left(\int_Q \omega(x)\,dx - \int_E \omega(x)\,dx\right)$$

$C \geq 1$ (bkz Uyarı 2.112),

$$\omega(E) \leq \frac{C-(1-\alpha)^p}{C}\omega(Q).$$

Buradan $\beta = (C-(1-\alpha)^p)/C$ olduğunda vii sonucu elde edilmiş olur.

■

Sıradaki teorem ile A_p ağırlık fonksiyonlarını çok önemli ve kullanışlı olan bir özelliği verilecektir.

Teorem 2.114 (Ters Hölder eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda herhangi bir Q kübü için sadece p ye bağlı olan $\varepsilon > 0$ ve C, ω nın A_p sabiti olmak üzere

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}\,dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx \tag{2.30}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Q belirlenmiş küp olsun, Uyarı 3.10 de Q üzerinde ω için Calderón-Zygmund parçalanışı uygulanırsa

$$\{\omega(Q)/|Q| = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \dots\}$$

olur her bir λ^k için $\{Q_{k,i}\}$ ayrık küpler dizisini elde ederiz, öyle ki

$$\omega(x) \leq \lambda_k \text{ for } \; x \notin \Lambda_k = \bigcup_i Q_{k,i}$$

ve

$$\lambda_k < \frac{1}{|Q_{k,i}|}\int_{Q_{k,i}} \omega(x)\,dx \leq 2^n\lambda_k.$$

şeklindedir. $\lambda_{k+1} > \lambda_k$ için ve her $Q_{k+1,j}$ için $Q_{k+1,j}$ kümesi ya $Q_{k,i}$ veya bazı i indisleri için $Q_{k,i}$ nin alt kübüdür. Buradan

$$\begin{aligned}
|Q_{k+1,j}| &< \frac{1}{\lambda_{k+1}}\int_{Q_{k+1,j}} \omega(x)\,dx \\
&= \frac{Q_{k,i}}{\lambda_{k+1}}\frac{1}{|Q_{k,i}|}\int_{Q_{k+1,j}} \omega(x)\,dx \\
&\leq \frac{Q_{k,i}}{\lambda_{k+1}}\frac{1}{|Q_{k,i}|}\int_{Q_{k,j}} \omega(x)\,dx \\
&\leq 2^n\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}|Q_{k,i}|.
\end{aligned}$$

Bundan dolayı

$$|Q_{k,i} \cap \Lambda_{k+1}| \leq 2^n \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} |Q_{k,i}|$$

elde edilir. Belirlenmiş $\alpha < 1$ için $\{\lambda_k\}$ dizisini $2^n\lambda_k/\lambda_{k+1} = \alpha$ gibi seçbiliriz. Buna denk olarak $\lambda_k = (2^n/\alpha)^k \lambda_0$. Buradan

$$|Q_{k,i} \cap \Lambda_{k+1}| \leq \alpha |Q_{k,i}|.$$

elde edilir. Önerme 2.113 vii. den,$0 < \beta < 1$ vardır öyleki

$$\omega\left(Q_{k,i} \cap \Lambda_{k+1}\right) eta\omega\left(Q_{k,i}\right).$$

i indis li terimler toplanırsa, $\omega\left(\Lambda_{k+1}\right) \leq \beta\omega\left(\Lambda_k\right)$ olduğu elde edilmiş olur, buradan

$$\omega\left(\Lambda_{k+1}\right) \leq \beta^k \omega\left(\Lambda_0\right)$$

Benzer olarak $|\Lambda_{k+1}| \leq \alpha|\Lambda_k|$ ve $|\Lambda_{k+1}| \leq \alpha^k|\Lambda_0|$. Buradan

$$\left|\bigcup_{k=0}^{\infty} \lambda_k\right| = \lim_{k\to\infty} \lambda k$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx &= \int_{Q\Lambda_0} \omega(x)^{1+\varepsilon} dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1}} \omega(x)^{1+\varepsilon} dx \\
&\leq \lambda_0^{\varepsilon} \omega(Q \setminus \Lambda_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k+1}^{\varepsilon} \omega(\Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1}) \\
&\leq \lambda_0^{\varepsilon} \left(\omega(Q \setminus \Lambda_0) + \sum_{k=0}^{\infty} (2^n/\alpha)^{(k+1)\varepsilon} \beta^k \omega(\Lambda_0) \right) \\
&\leq \lambda_0^{\varepsilon} \left(\omega(Q \setminus \Lambda_0) + (2^n/\alpha)^{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} [(2^n/\alpha)\beta]^k \omega(\Lambda_0) \right).
\end{aligned}$$

$(2^n/\alpha)^{\varepsilon}\beta < 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ için seri yakınsaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx &\leq C\lambda_0^{\varepsilon} \left(\omega(Q \setminus \Lambda_0) + \omega(\Lambda_0)\right) \\
&= C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right)^{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) |Q|.
\end{aligned}$$

Böylelikle (2.30) denklemi elde edilir ve Teorem 2.114 in ispatı tamamlanmış olur. Teorem 2.114 in sonuçları olarak A_p ağırlık fonksiyonlarının bazı özelliklerini verelim. ■

Önerme 2.115 (A_p ağırlık fonksiyonlarının (II.) özellikleri) viii. ($1 < p < \infty$) olmak üzere $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $p - \varepsilon > 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ için $\omega(x) \in A_{p-\varepsilon}$.

ix. $1 < p < \infty$ için $A_p = \bigcup_{q<p} A_q$.

x. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $\omega(x)^{1+\varepsilon} \in A_p$.

xi. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $\delta > 0$ ve $C > 0$ vardır öyle ki her bir Q kübü ve $E \subset Q$ olacak şekilde ölçülebilir E kümesi için

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta}. \tag{2.31}$$

İspat.

viii. ii. özelliğinden $\omega \in A_p$ ise $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$.$\omega^{1-p'}$ için ters Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{(1-p')(1+\theta)}dx\right)^{(p-1)/(1+\theta)} \leq C^{p-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1},$$

burada $\theta > 0$. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx$ ile çarpılırsa

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{(1-p')(1+\theta)}dx\right)^{(p-1)/(1+\theta)} \leq C.$$

olduğu görülür. $(1-p')(1+\theta) = 1-q'$ denirse $1 < q < p$ için $\omega \in A_q$ olur. Böylelikle vii. özelliği $\varepsilon = p - q$ için elde edilmiş olur.

ix. ix. özelliği i. ve viii. özelliğinin direk sonucudur. Gerçekten, $A_p \supset \bigcup_{q<p} A_q$ olduğunu i. özellikten biliyoruz. Diğer taraftan viii. den $A_p \subset \bigcup_{q<p} A_q$.

x. $\omega \in A_1$ olsun (2.30) denkleminden

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\left(x\right)^{1+\varepsilon}dx \leq \left(\frac{C}{|Q|}\int_Q \omega\left(x\right)dx\right)^{1+\varepsilon} \leq C\omega(x)^{1+\varepsilon} h.h. x \in \mathbb{R}^n.$$

Buradan $\omega(x)^{1+\varepsilon} \in A_1$.

Eğer $p > 1$ için $\omega \in A_p$ ise ii. den $\omega(x)^{1+p'} \in A_{p'}$.Teorem 3.16, kullanılarak $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}dx \leq C_1\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)^{1+\varepsilon}$$

ve

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{(1-p')(1+\varepsilon)}dx \leq C_2\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{1+\varepsilon}.$$

sağlanır. Böylece

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q [\omega(x)^{1+\varepsilon}]^{1-p'}dx\right)^{p-1}$$

$$\leq C\left\{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1}\right\}^{1+\varepsilon} \leq C.$$

xi. $1 \leq p < \infty$ için $\omega(x) \in A_p$ olduğundan $1+\varepsilon$ ve $(1+\varepsilon)/\varepsilon$ için Hölder eşitsizliği kullanılır ise (2.30) dan

$$\begin{aligned}
\int_E \omega(x)dx &\leq \left(\int_E \omega(x)^{1+\varepsilon}dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} .|E|^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|}\int_E \omega(x)^{1+\varepsilon}dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} |Q|^{1/(1+\varepsilon)}\|E|^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \\
&\leq \frac{C}{|Q|}\int_E \omega(x)dx|Q|^{1/(1+\varepsilon)}\|E|^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \\
&= C\omega(Q)\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Böylelikle $\delta = \varepsilon/(1+\varepsilon)$ için ω nın (2.31) denklemini sağladığı görülürve ispat tamamlanır.

■

Uyarı 2.116 ω, $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer ω (2.31) denklimini sağlarsa $\omega \in A_\infty$ denir. xi. özelliği gösteriyor ki $\bigcup_{1\leq p<\infty} A_p \subset A_\infty$. Bununla birlikte $\bigcup_{1\leq p<\infty} A_p \supset A_\infty$ olduğu da ispatlanabilir. Sonuç olarak $A_\infty = \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p$.

Tanım 2.117 (Hilbert dönüşümü) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(E^1)$ olsun.

$$\tilde{f}(x) = pv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{x-t}dt = lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt$$

esas değer konvolüsyonu f nin Hilbert dönüşümü olarak adlandırılır. Buradaki esas amacımız $\tilde{f}$ nin varlığını göstermek ve $1 < p < \infty$ için L^p de $Hf = \tilde{f}$ operatörünün sürekli olduğunu ifade eden Riesz'in klasik sonucunu elde etmek olacaktır. Burada $\tilde{f}$, f ile $\frac{1}{x}$ çekirdeğinin konvolüsyonudur. Fakat bu konvolüsyon esas değer anlamında alınmalıdır, çünkü $\frac{1}{x}$ çekirdeği E^1 üzerinde integrallenebilir değildir. $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L^p$ olmak üzere

$$\tilde{f}(x) = lim_{\epsilon\to 0}\tilde{f}_\epsilon(x)$$

yazalım,burada

$$\tilde{f}_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt$$

ile verilir. Hölder eşitsizliğinden $\tilde{f}_\epsilon(x)$ in var olduğu görülür, çünkü orijinin bir ϵ-komşuluğunun dışında $\frac{1}{x}$ çekirdeği her $q > 1$ için L^q ya aittir. W. H. Young teoreminden $p > 1$ olmak üzere eğer $f \in L \cap L_p$ ise $\tilde{f}_\epsilon \in L^p$ dir.

3 HARDY-LITTLEWOOD MAKSIMAL OPERATÖRÜNÜN L_p UZAYINDA SINIRLILIĞI

Bu bölümde Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü,Calderon-Zygmund Parçalanışı,Marcinkiewicz İnterpolasyon teoremi hakkında bilgi verilecektir.

3.1 Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü

Harmonik analizde çok önemli bir yeri olan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun tanımını vererek başlayalım.

Tanım 3.1 (Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu) Kabul edelimki f, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Her bir $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için f in Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $Mf(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Mf\left(x\right) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|\leq r} \left|f\left(x-y\right)\right| dy. \tag{3.1}$$

Buna ek olarak, M ye Hardy-Littlewood maximal operatorü de denilebilir.

Bazen aşağıdaki maksimal fonksiyonlara da ihtiyaç duyarız. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$, için

$$M'f\left(x\right) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} \left|f\left(y\right)\right| dy, \tag{3.2}$$

burada ve aşağıda, $Q(x,r)$ x merkezli ve kenar uzunluğu r olan kübü göstermektedir. Ek olarak,E nin Lebesgue ölçüsü $|E|$ olarak gösterilmiştir. Daha genel olarak ,

$$M''f\left(x\right) = \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|} \int_{Q} \left|f\left(y\right)\right| dy \tag{3.3}$$

burada supremum x'i içeren bütün Q küpler veya yuvarlar üzerine uygulanmıştır.

Hardy-Littlewood maksimal operatorü M için aşagıdaki uyarıları verelim.

Uyarı 3.2 $(3.1)-(3.3)$, sadece n boyuta dayanan $C_i(i=1,2,3)$ sabitlerinin her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki gibi var olduğu kolayca görülür.

$$C_0 Mf\left(x\right) \leq C_1 M'f\left(x\right) \leq C_2 M''f\left(x\right) \leq C_3 Mf\left(x\right) \tag{3.4}$$

Böylelikle, f in Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun $M'f$, $M''f$ maksimal fonksiyonları sabit farkıyla birbirlerine denktir.

Uyarı 3.3 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için,$Mf(x)$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de düşük yarı sürekli fonksiyon ve $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir fonksiyondur.

(3.4) den, sadece $M'f(x)$ için önermeyi göstermemiz yeterlidir. Aslında, her bir $\lambda \in \mathbb{R}$, için $E := \{x\epsilon\mathbb{R}^n : M'f(x) \leq \lambda\}$ kümesinin açık olduğunu göstermemiz de ispatın tamamlanması için yeterlidir. $M'f(x)$ tanımlanışından bütün $\lambda > 0$ için E nin açık olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Denk olarak, her $\lambda > 0$ için $E^c := \{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) \leq \lambda\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $x_k \subset E^c$ ve $k \to \infty$ için $x_k \to x$ olsun. Sadece $r > 0$ için göstermemiz yeterlidir.

$$\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f(y)| \leq \lambda \tag{3.5}$$

Buradan her $k = 1, 2, ...,$ için $Q_k{=}Q(x_k, r)$ ve $f_k(y) = f(y)\,\chi_{Q(x,r)\Delta Q_k}(y)$ denirse

$$Q(x,r)\,\Delta Q_k = (Q(x,r)\setminus Q_k)\bigcup(Q_k\setminus Q(x,r))$$

olur. Böylece,

$$\forall k \ \text{ için } \ |f_k(y)| \leq |f(y)| \ \ \lim_{k\to\infty} f_k(y) = 0$$

olur. Lebesgue baskılı yakınsaklık teoremini uygulanırsa, aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f_k(y)|dy = 0 \tag{3.6}$$

Diğer taraftan,

$$\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q_k} |f(y)|dy = \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(y)|dy \leq \lambda.$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f(y)|dy &\leq \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)\Delta Q_k} |f(y)|dy \\ &+ \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q_k} |f(y)|dy \\ &\leq \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f_k(y)|dy + \lambda\end{aligned}$$

$k \to 1$ için (3.6) dan (3.5) i elde ederiz.

Uyarı 3.4 M Hardy-Littlewood Maksimal operatörü , $L^1(\mathbb{R}^n)$ den $L^1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı bir operatör değildir.

Sadece $n = 1$ durmunu düşünelim. $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ olsun ve $x \leq 1$, için

$$Mf\,(x) \geq \frac{1}{2x}\int_0^{2x} |f\,(y)\,|dy = \frac{1}{2x}$$

Buradan

$$\int_{\mathbb{R}} Mf\,(x)\,dx \geq \int_1^{\infty} Mf\,(x)\,dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2x}dx = \infty$$

M,$L^1(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı bir operator olmamasına rağmen , zayıf $L^1(\mathbb{R}^n)$ uzayı için $L^1(\mathbb{R}^n)$ den $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e tanımlanan zaman M operatörü sınırlı bir operatördür.

Lemma 3.5 (Vitali örtme lemması) E,$\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir küme ve $\mathcal{B}$ $d(B) < \infty$ olan ve E yi Vitali anlayışıyla örten B kümelerinin bir kolleksiyonu olsun. Herhangibir $x \in E$ için $x \in B_x$ olmak üzere $B_x \in \mathcal{B}$ var ise $\beta > 0$, n sadece boyuta bağlı ve $B_1, B_2, ..., B_k, ...$, $\mathcal{B}$ de ayrık yuvarlar olmak üzere

$$\sum_k |B_k| \geq \beta|E|.$$

Aslında, aşağıdaki ispattanda görüleceği gibi $\beta = 5^{-n}$ almak yeterlidir.

İspat. $l_0 = \sup\{d(B) : B \in \mathcal{B} < \infty\}$ ve $B_1 \in \mathcal{B}$ olacak şekilde seçelim ve $d(B_1) \geq \frac{1}{2}l_0$ olsun. Benzer şekilde $\mathcal{B}_1 = \{B : \ B \in \mathcal{B}$ ve $B \bigcap B_1 = \emptyset\}$ ve $l_1 = \sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}_1\}$; $B_2 \in \mathcal{B}_1$ için $d(B_2) = \frac{1}{2}l_1$ seçebiliriz. $B_1, B_2, ..., B_k$, $\mathcal{B}$ den olmak üzere yukarıdaki gibi kümeleri seçelim.

$$\mathcal{B}_k = \left\{B : \ B \ \in \mathcal{B} \text{ ve } B \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) = \phi\right\}$$

olur ve $l_k = \sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}_k\}$

Daha sonra $B_{k+1} \in \mathcal{B}_k$, $d(B_{k+1}) \geq \frac{1}{2}l_k$ olacak şekilde seçebiliriz. Böylece $\mathcal{B}$ den $B_1, B_2, ...,$ dizisini aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde seçmiş oluruz.

(i)$B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$ ayrık;

(ii)$d(B_{k+1}) \geq \frac{1}{2}\sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}_k\}$ ve

$$\mathcal{B}_k = \left\{B : B \in \mathcal{B}\text{ve } B \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) = \phi\right\}$$

$k = 1, 2, ...$ için

Eğer bu şekildeki ilerleme bazı B_k kümeleri için sağlanmıyorsa bu $\mathcal{B}_k = \emptyset$ olduğunu gösterir. Bu durumda, her bir $x \in E$, $B_x \in \mathcal{B}$ vardır öyleki $x \in B_x$ ve $B_x \cap B_{k_0} = \emptyset$, $1 \geq k_0 \geq k$ olmak üzere. Genelliği bozmadan, $B_x \cap B_j = \emptyset$, olduğunu $j =$

$1, 2, ..., k_0 - 1$ için varsayabiliriz. Bundan dolayı, $d(B_{k_0}) \geq \frac{1}{2}d(B_x)$ ve bu demektir ki $B_x \subset 5B_{k_0}$ dır. Burada $5B_{k_0}$ için B_{k_0} yuvarını merkezi aynı kalacak şekilde beş kat genişlettiğini (uzattığını) söyleyebiliriz. Buradan, $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} 5B_j$ için

$$|E| \leq \left|\bigcup_{j=1}^{k} 5B_j\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |5B_j| \leq 5^n \sum_{j=1}^{k} |B_j|$$

olduğu görülmektedir. Diğer taraftan, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |B_k| = \infty$ olduğu açıktır. O halde, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |B_k| < \infty$ olduğunu görmek yeterlidir. $B_k^* = 5B_k$ ile gösterilsin.

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^* \tag{3.7}$$

olduğunu araştıralım. Burada $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k^*$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her bir $B \in \mathcal{B}$ için $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |B_k| < \infty$, ve $d(B_k) \to 0$, $k \to \infty$ olduğunu elde ederiz. Burada, $d(B_{k_0}) < \frac{1}{2}d(B)$. olacak şekilde k_0 vardır. Burada k_0 ı bu özelliği sağlayan en küçük indis olarak düşünmemiz gerekmektedir. Bu durumda, B_x, $1 \leq j \leq k_0 - 1$için B_j yuvarları ile kesişir. Diğer taraftan, $d(B_{k_0}) \geq \frac{1}{2}d(B_x)$ (3.7) görüldüğü gibi $B_x \subset 5B_j = B_j^*$ dir. Buradan

$$|E| \leq |\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^*| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k^*| \leq 5^n \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$$

olup ispat tamamlanır. ■

Şimdi M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün, zayıf $(1, 1)$ tipinden ve zayıf (p, q) tipinden olduğunu gösteren Teoremi vereceğiz.

Teorem 3.6 f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon olsun.
(a) $1 \leq p \leq \infty$ için $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $M(f(x)) < \infty$ olur.

(b) Herhangi bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.
(c) Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < p \leq \infty$, için $\|Mf\|_p \leq C\|f\|_p$ olacak şekilde bir $C = C(n, p) > 0$ sabiti vardır.

İspat. Açıkça görülüyor ki,(a), (b) ve (c) nın sonucudur. Dolayısıyla sadece (b) (c) için ispat etmek yeterlidir. Öncelikle (b) yi düşünelim. Her bir $\lambda > 0$, için Uyarı 3.2 den

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : Mf\,(x) > \lambda\}$$

kümesinin açık ve ölçülebilir küme olduğu görülmektedir. By Tanım 3.1 den $x \in E_\lambda$ için x merkezli B_x yuvarı vardır öyleki

$$\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f\,(y)\,|dy > \lambda$$

dır.Buradan her $x \in E_\lambda$ için;

$$|B_x|\frac{1}{\lambda}\int_{B_x} |f\,(y)\,|dy \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1 < \infty$$

dir.

Böylece, $\mathcal{B} = \{B_x : x \in E_\lambda\}$ şeklinde olursa E_λ kümeleri $\mathcal{B}$ yi Vitali amlamında örter. Lemma 3.5 den, $B_1, B_2, ..., B_k, ...$ kümeleri $\mathcal{B}$ kolleksiyonunun ayrık kümeleri şeklinde seçebiliriz,

$$\sum_k |B_k| \geq \beta|E_\lambda|$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\beta|E_\lambda| \leq \sum_k |B_k| &\leq \frac{1}{\lambda}\sum_k \int_{B_k} |f\,(y)\,|dy \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{\cup_k B_k} |f\,(y)\,|dy \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi (c) yi ispat edelim. Açıkça görülüyorki $p = \infty$ için (c) sağlanır. O halde $1 < p < \infty$ olsun. $f \in L^p(R^n)$ ve herbir $\lambda > 0$ için $f = f_1 + f_2$ olsun.

$$f_1\,(x) = \begin{cases} f\,(x)\ , & \text{for } |f\,(x)\,| \geq \frac{\lambda}{2} \\ 0 \quad , & \text{for } |f\,(x)\,| < \frac{\lambda}{2}\ . \end{cases}$$

$f_1 \in L^1(R^n)$ olduğunu görmek kolaydır. Buradan

$$|f\,(x)\,| \leq |f_1\,(x)\,| + \frac{\lambda}{2} \quad \text{and} \quad Mf\,(x) \leq Mf_1\,(x) + \frac{\lambda}{2}$$

elde ederiz. Böylece, (3) dan zayıf $(1,1)$ tipi için M sınırlıdır.

$$\begin{aligned}|E_\lambda| &= |\{x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \\ &\le |\{x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n : Mf_1(x) > \frac{\lambda}{2}\}| \\ &\le \frac{2\beta}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|dx \\ &= \frac{2\beta}{\lambda}\int_{\{x \,\epsilon\mathbb{R}^n : |f(x)| \ge \frac{\lambda}{2}\}} |f(x)|dx,\end{aligned}$$

burada β Lemma 3.5 de olduğu gibi bir sabittir. Böylece

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p\, dx \\ &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|E_\lambda|d\lambda \\ &\le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{2\beta}{\lambda}\int_{\{x \,\epsilon\mathbb{R}^n : |f(x)| \ge \frac{\lambda}{2}\}} |f(x)|dx\right)d\lambda \\ &\le 2\beta p\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\left(\int_0^{2|f(x)|} \lambda^{p-2}d\lambda\right)dx \\ &= \frac{2\beta p}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx.\end{aligned}$$

olur. Böylece Theorem 3.6 ispatlanmış olur. ■

Zayıf $(1,1)$ tipi için M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı için Lebesgue diferensiyelleme teoremini verelim.

Teorem 3.7 (Lebesgue diferensiyelleme teoremi) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x)$$

burada $B(xr)$, x merkezli, r yarıçaplı yuvarları göstermektedir.

İspat. Herbir $R > 0$ ve $f\chi_{B(0,R)} \in L^1(R^n)$ için

$$L_r(f)(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy,$$

ve

$$\Lambda(f)(x) = \overline{\lim_{r\to 0}} L_r(f)(x) - \underline{\lim_{r\to 0}} L_r(f)(x)$$

olup buradan

$$\Lambda(f)(x) \le 2\sup_{r>0}|L_r(f)(x)| = 2Mf(x)$$

elde edilir. Her bir $\lambda > 0$ için

$$|E_\lambda(\Lambda f)| := |\{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda(f)(x) > \lambda\}| = 0 \tag{3.8}$$

olduğunu gösterelim. Her $\varepsilon > 0$ için $f = g + h$ şeklinde yazabiliriz, burada g kompakt (desteleyeni)support ile birlikte sürekli bir fonksiyon ve $\|h\|_1 < \varepsilon$ dir. Böylece

$$\Lambda(f)(x) \leq \Lambda(g)(x) + \Lambda(h)(x) = \Lambda(h)(x)$$

ve

$$|E_\lambda(\Lambda f)| \leq |E_\lambda(\Lambda h)| \leq |E_{\frac{\lambda}{2}}(Mh)|$$

olduğu görülür. Theorem 3.6 (b) den,

$$|E_\lambda(\Lambda f)| \leq \frac{2C}{\lambda}\|h\|_1 < \frac{2C\varepsilon}{\lambda}$$

elde ederiz. Buradan, keyfi ε için (3.8) görülür ve (3.8) , $\lim_{r\to 0} L_r(f)(x)$ limitinin hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için var olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, integralin sürekliliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0}\|L_r(f) - f\|_1 \\
&= \lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy - f(x)\right| dx \\
&= \lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|B(0,r)|}\left|\int_{B(0,r)}[f(x-y) - f(x)]\,dy\right| dx \\
&\leq \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y) - f(x)|dx\ dy = 0.
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{r_k\}$ alt dizisi vardır ki $k \to \infty$ için $r_k \to 0$

$$\lim_{k\to\infty} L_{r_k}(f)(x) = f(x) \quad for\ a.e\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Çünkü $\lim_{k\to\infty} L_{r_k}(f)(x)$ exists for a.e $x \in \mathbb{R}^n$, thus

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x) \quad a.e\ x \in \mathbb{R}^n$$

dır. İspat tamamlanmış olur ■

Uyarı 3.8 (3.1) - (3.3) denkliklerinden açıkça görülüyor ki, Teorem 3.7 nin sonuçlar $B(x,r)$ yerine x i içeren $Q(x,r)$ alınması daha genel olurdu.

3.2 Calderón-Zygmund Parçalanışı

Lebesgue diferensiyelleme teoremi uygulanarak $\mathbb{R}^n$ in parçalanışı hakkında bilgiler verelim. Bu yöntem Calderón-Zygmund parçalanışı olarak adlandırılır ve harmonik analizde çok kullanılır.

Teorem 3.9 ($\mathbb{R}^n$ de Calderón-Zygmund Parçalanışı) f negatif olmayan $\mathbb{R}^n$ de integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Belirli bir $\lambda > 0$ için, $\{Q_j\}$ ayrık diyadik küplerin dizisi olmak üzere (Burada ayrık kümeler derken kümelerin iç noktalar kümelerinin ayrık olması kastedilmiştir.)

(i) $f(x) \leq \lambda$ *h.h.* $x \notin \bigcup\limits_j Q_j$;

(ii) $\left|\bigcup\limits_j Q_j\right| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$;

(iii) $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\,dx \leq 2^n\lambda$.

İspat. $f \in L^1(R^n)$ olduğundan, R_n i birbirine eşit ve iç noktalar kümeleri ayrık olan küplerin ağı olarak

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx \leq \lambda.$$

olacak şekilde ifade edebiliriz. Q' belirlenmiş, ağdaki herhangi bir küp olsun. Bu kübü 2^n tane eşit kübe bölebiliriz ve bu küplerden birine Q'' diyelim. Buradan

Durum i.

$$\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f(x)\,dx > \lambda.$$

Durum ii.

$$\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f(x)\,dx \leq \lambda.$$

şeklinde iki durum ortaya çıkar. *Durum i.* den

$$\lambda < \frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2^{-n}|Q'|}\int_{Q'} f(x)\,dx \leq 2^n\lambda.$$

elde edilir. Buradan, Q'' kümesini daha fazla bölemeyeceğimiz için, Q'', $\{Q_j\}$ şeklinde bir dizi olarak seçilir.

ii. durumunda Q'' kümesini 2^n tane eşit küplere bölmeye devam edilirse *i.* durumunda olduğu hale geri döneriz. Buradan *i.* durumunda olduğu gibi $\{Q_j\}$ şeklinde kümelerin dizisini elde ederiz. Teorem 3.7 den

$$f(x) = \lim_{\substack{Q \ni x \\ |Q| \to 0}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx \leq \lambda \quad h.h. x \in \bigcup_j Q_j.$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar. ■

Uyarı 3.10 R^n in yerine Q_0 kübünü ele alırsak, Q_0 kümesinin Calderón-Zygmund parçalınışıda $f \in L^1(Q_0)$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere, R^n in Calderón-Zygmund parçalınışının benzeridir. Buna ek olarak, $f \in L^p(R^n)$ $(p > 1)$ için benzer bir parçalanış da elde edebiliriz.

Calderón-Zygmund parçalanışının R^n üzerindeki bir başka uygulamasıda Hardy-Littlewood maksimal operatörünün L^1 de sınırlılığı için kullanılabilmesidir.

Teorem 3.11 $f \in L_1(R^n)$ olsun. Bu durumda

i.
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty,$$
sağlanıyor ise $Mf \in L^1_{loc}(R^n)$.

ii. supp$f \subset B$ ve $Mf \in L^1(B)$ ise
$$\int_B |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty,$$
dir. Burada
$$\log^+ |f(x)| = \begin{cases} \log |f(x)|, |f(x)| > 1 \\ 0, |f(x)| \leq 1. \end{cases}$$
şeklindedir.

İspat. Maksimsal operatör için iki eşitsizlik vererek ispata başlayalım.
$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 2\lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)\, dx, \tag{3.9}$$
ve
$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M'' f(x) > \lambda\}| \geq \frac{C}{\lambda} \int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)\, dx. \tag{3.10}$$
(3.9) ve (3.10) de görülen C sabiti sadece boyuta bağlıdır. Aslında, (3.9) Teorem 3.1 in ispatında da görülmektedir. (3.10) ise R^n üzerinde Calderón-Zygmund parçalanışını kullanarak Theorem 3.9 deki $\lambda > 0$ için $\{Q_j\}$ küplerin dizisini ele alırsak
$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^n \lambda,$$

ve $f(x) \leq \lambda$ h.h. $x \notin \bigcup\limits_j Q_j$ olduğu görülür. Buradan $x \in Q_j$ için $M''f(x) > \lambda$ ve

$$
\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : M''f(x) > \lambda\}| &\geq \sum_j |Q_j| \\
&\geq \frac{1}{2^n \lambda} \sum j \int_{Q_j} |f(x)| dx \\
&\geq \frac{1}{2^n \lambda} \int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)| dx
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Teorem 3.11 nin ispatına geri dönelim. İlk olarak teoremin (i) şıkkını düşünelim. Herhangi bir $K \subset R^n$ kompakt kümesi için (3.9) den

$$
\begin{aligned}
\int_K Mf(x)\, dx &= \int_0^\infty |\{x \in K : Mf(x) > \lambda\}| d\lambda \\
&= \int_0^\infty 2|\{x \in K : Mf(x) > 2\lambda\}| d\lambda \\
&\leq 2\left\{\int_0^1 |K| d\lambda + \int_1^\infty |\{x \in K : Mf(x) > \lambda\}| d\lambda\right\} \\
&\leq 2\left\{|K| + \int_1^\infty \frac{C}{\lambda} \int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)| dx d\lambda\right\} \\
&= 2\left\{|K| + C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_1^{|f(x)|} \frac{d\lambda}{\lambda} dx\right\} \\
&= 2\left\{|K| + C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx\right\} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan $i.$ sonucunu elde ederiz. $ii.$ için, genelliği bozmadan, B kümesinin çapını R olarak düşünebiliriz. B' ile B ile aynı merkezli çapı $2R$ olan yuvarı gösterelim. Her bir $x' \in B' \backslash B$, x' noktasının simetriği olan $x \in B$ noktasını ele alalım. Bu durumda $r > 0, B(x', r) \cap B \subset B(x, 10r)$ olduğu görülür. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|B(x', r)|} \int_{B(x',r)} |f(y)\, dy &= \frac{1}{|B(x', r)|} \int_{B(x',r)\cap B} |f(y)| dy \\
&\leq C_n \frac{1}{|B(x', 10r)|} \int_{B(x',10r)} |f(y)| dy \\
&\leq C_n Mf(x).
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Buradan her bir $x' \in B' \backslash B$ için $Mf(x') \leq C_n Mf(x)$. Yukarıdaki eşitsizliklerden, $Mf \in L^1(B')$ olduğunu görmek kolaydır. Diğer taraftan, her bir

$x \in \mathbb{R}^n \backslash B'$, $r < R$ olduğunda

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy = 0$$

olduğu destek (support) kümesinin özelliğinden elde edilir. Buradan Mf, $\mathbb{R}^n \setminus B'$ üzerinde sınırlıdır

$$Mf(x) \leq \frac{1}{|B(x,R)|}\|f\|_1, \quad \text{herbir} \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash B'$$

olduğundan $Mf(x) \to 0$; as $|x| \to \infty$. olduğu açıktır. Böylece, her bir $\lambda_0 > 0$için $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda_0\}$ kümesi yuvarlar tarafından kapsanır. Bu yüzden

$$I = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda_0\}} Mf(x)\,dx < \infty$$

dir.e $\lambda_0 = C_n$ alırsak,

$$I \geq \int_{C_n}^{\infty} |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}|\,d\lambda$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, (3.4) ten her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) \geq C_n M''f(x)$. $\lambda' = \lambda / C_n$ şeklinde gösterirsek (3.10) den dolayı

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| &\geq \{x \in \mathbb{R}^n : M''f(x) > \lambda'\} \\
&\geq \frac{C}{\lambda'}\int_{\{x \in : |f(x)| > \lambda'\}} |f(x)\,dx \\
&= \frac{CC_n}{\lambda}\int_{\{x : C_n|f(x)| > \lambda\}} |f(x)|dx
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki iki eşitlikten dolayı

$$\begin{aligned}
I &\geq \int_{C_n}^{\infty} \frac{CC_n}{\lambda}\int_{\{x : C_n|f(x)| > \lambda\}} |f(x)|dx \\
&= CC_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_{C_n}^{C_n|f(x)|} \frac{d\lambda}{\lambda} dx \\
&= C_n C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)|dx.
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmş olur. ■

Calderón-Zygmund parçalanışının R^n üzerinde bir diğer önemli uygulaması ise fonksiyonlar üzerindedir. Bu ise harmonik analizin önemli araçlarından biridir.

Teorem 3.12 (Fonksiyonlar için Calderón-Zygmund parçalanışı) f, R^n de negatif olmayan ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Belirli her bir $\lambda > 0$ için

$\{Q_j\}$ ayrık diyadik küplerin dizisi ve g; b fonksiyonları vardır öyleki

$$(i)\;\; f(x) = g(x) + b(x)\,;$$
$$(ii)\;\; |g(x)| \leq 2^n \lambda \text{ h.h.} x \in \mathbb{R}^n;$$
$$(iii)\;\; \|g\|_p^p \leq C\lambda^{p-1}\|f\|_1 \text{ for } \; 1 < p < \infty;$$
$$(iv)\;\; b(x) = 0,\; a.e\; x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j;$$
$$(v)\;\; \int_{Q_j} b(x)\,dx = 0, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

sağlanır.

İspat. Her bir f ve $\lambda > 0$ için R^n üzerinde Calderón-Zygmund parçalanışını uygulanırsa, $\{Q_j\}$ ayrık ve diyadik küplerin dizisini elde ederiz. Buradan

$$f(x) \leq \lambda \text{ h.h. } \; x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j;$$

$$\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1;$$

ve

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\,dx \leq 2^n\lambda, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

olduğu görülür. Şimdi $g(x)$ ve $b(x)$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j \\ \frac{1}{Q_j}\int_{Q_j} f(x)\,dx, & x \in Q_j, j = 1, 2, \ldots; . \end{cases}$$

ve

$$b(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j \\ f(x) - \frac{1}{Q_j}\int_{Q_j} f(x)\,dx, & x \in Q_j, j = 1, 2, \ldots; . \end{cases}$$

Buradan $f(x) = g(x) + b(x)$, olur ve b nin tanımından (iv) ve (v) şıklarının sağlandığı görülür. Bununla birlikte, g nin tanımından, (ii) şıkkı da sağlanır.

Son olarak, $F = \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j$ olarak gösterilirse

$$\begin{aligned}
\|g\|_p^p &= \sum_j \int_{Q_j} g(x)^{p-1} g(x)\, dx + \int_F g(x)^{p-1} g(x)\, dx \\
&\leq \sum_j (2^n\lambda)^{p-1} \int_{Q_j} f(x)\, dx + \lambda^{p-1} \int_F f(x)\, dx \\
&= (2^n\lambda)^{p-1} \sum_j \int_{Q_j} f(x)\, dx + \lambda^{p-1} \int_F f(x)\, dx \\
&\leq C\lambda^{p-1} \|f\|_1.
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylelikle (iii) de ispat edilmiş olur ve Teorem 3.12 in ispatı tamamlanmış olur. ∎

3.3 Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi

Belirtmeliyiz ki Hardy-Littlewood maksimal operatörü M nin L^p de sınırlılığının isapatı için sadece M nin L^1 ve L^∞ sınırlılığını kullandık. Bu çalışmalar bize benzer bir problemi daha genel altlineer operatörler için düşünmemiz gerektiği fikrini veriyor.

Teorem 3.13 (Marcinkiewicz İnterpolasyon teoremi) (X, χ, μ) ve $(X, \mathcal{Y}, \nu)$ öçlülebilir uzaylar ve $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ için T, (p_0, p_0) ve (p_1, p_1) için zayıf tipli altlineer operatör olsun. Bu durumda, her bir $\lambda > 0$ and f için $C_0, C_1 > 0$ vardır

$$(i)\ \nu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C_0}{\lambda}\|f\|_{p_0,\mu}\right)^{p_0};$$

$$(ii)\ \nu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C_1}{\lambda}\|f\|_{p_1,\mu}\right)^{p_1} \quad for\ p_1 < \infty.$$

sağlanır. Eğer $p_1 = \infty$ ise zayıf tip ve güçlü tip tanımı aynı anlama gelir.

$$\|Tf\|_{\infty,\nu} \leq C_1 \|f\|_{\infty,\mu}.$$

Buradan T aynı zamanda $p_0 < p < p_1$ için (p, p) tipindedir. Her bir $f \in L^p(X, \nu)$ için $C > 0$ sabit sayıları vardır öyleki

$$\left(\int_X |Tf(x)|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ifadeleri sağlanır.

İspat. $f \in L^p(X\mu)$ ve $\lambda > 0$ için $f(x) = f^\lambda(x) + f_\lambda(x)$ olsun. Burada

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} f(x), & \text{for} \quad |f(x)| > \lambda, \\ 0 \quad , & \text{for} \quad |f(x)| \leq \lambda. \end{cases}$$

şeklindedir. Buradan $f^\lambda \in L^{p_0}(X,\mu)$ ve $f_\lambda \in L^{p_1}(X,\mu)$. Bununla birlikte

$$|Tf(x)| \leq |Tf^\lambda(x)| + Tf_\lambda(x)|.$$

Durum I : $p_1 < \infty$ ve $(i = 1,2)$ için T nin zayıf (p_i, p_i) tipli olmasından

$$\begin{aligned} \nu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) &\leq \nu\left(\left\{x \in X : |Tf^\lambda(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\ &+ \nu\left(\left\{x \in X : |Tf_\lambda(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\ &\leq \left(\frac{C_0}{\lambda}\|f^\lambda\|_{p_0,\mu}\right)^{p_0} + \left(\frac{C_1}{\lambda}\|f_\lambda\|_{p_1,\mu}\right)^{p_1}. \quad (3.11) \end{aligned}$$

olduğu görülür. (3.11) den

$$\begin{aligned} \int_X |Tf(x)|^p d\nu &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\})\, d\lambda \\ &\leq 2^{p_0}C_0 p\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\int_{\{x\in X:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x)\, d\lambda \\ &+ 2^{p_1}C_1 p\int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1}\int_{\{x\in X:|f(x)|<\lambda\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x)\, d\lambda \\ &\leq 2^{p_0}C_0 p\int_X |f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)} \lambda^{p-p_0-1} d\lambda d\mu(x) \\ &+ 2^{p_1}C_1 p\int_X |f(x)|^{p_1}\int_{|f(x)|}^\infty \lambda^{p-p_0-1} d\lambda d\mu(x) \\ &= \frac{2^{p_0}C_0 p}{p-p_0}\int_X |f(x)|^p d\mu + \frac{2^{p_1}C_1 p}{p-p_1}\int_X |f(x)|^p d\mu \\ &= C_p\int_X |f(x)|^p d\mu. \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Durum II: $p_1 = \infty$. Bu durumda, $\alpha = 1/(2C_1)$ şeklinde belirlersek,

$$\nu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \nu\left(\left\{x \in X : |Tf^{\alpha\lambda}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)$$

ve

$$\int_X |Tf(x)|^p d\nu \le 2^{p_0} C_0 p \int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1} \int_{\{x\in X: |f(x)|>\lambda\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x)\, d\lambda$$
$$= 2^{p_0} C_0 p \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{\frac{|f(x)}{\alpha}} \lambda^{p-p_0-1} d\lambda d\mu(x)$$
$$= C_p \int_X |f(x)|^p d\mu.$$

olduğu elde edilir. Buradan Teorem 3.13 in ispatı tamamlanmış olur. ■

Marcinkiewicz enterpolasyon teoreminin bir uygulaması olarak aşağıda M, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün üzerinde Fefferman-Stein eşitsizliğini ispatlacağız.

Teorem 3.14 (Fefferman-Stein eşitsizliği) $1 < p < \infty$ olsun.$\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan ve ölçülebilir her bir $\varphi(x)$ ve f için $C = C_{n,p}$ sabiti vardır öyle ki

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \varphi(x)\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M\varphi(x)\, dx \tag{3.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Genelliği bozmadan, $x \in \mathbb{R}^n$ and $M\varphi(x) > 0$ olmak üzere h.h.y $M\varphi(x) < \infty$ olduğunu varsayabiliriz. Buradan

$$d\mu(x) = M\varphi(x)\, dx \quad \text{ve} \quad d\nu(x) = \varphi(x)\, dx,$$

Marcinkiewicz İnterpolasyon teoreminden (3.12) eşitsizliğini elde etmek için M nin $(L^\infty(\mu), L^\infty(\nu))$ ve zayıf $(L^\infty(\mu), L^\infty(\nu))$ tipli olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi M nin $(L^\infty(\mu), L^\infty(\nu))$ tipinde olduğunu gösterelim. Gerçekten,eğer $\|f\|_{\infty,\mu} \le a$ ise

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n: |f(x)|>a\}} M\varphi(x)\, dx = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > a\}) = 0$$

dir. Her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $M\varphi(x) > 0$ olduğundan,
$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > a\}| = 0$ olduğunu elde ederiz. Buna denk olarak, h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için $|f(x)| \le a$ dır.Buradan h.h.$x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) \le a$. Böylelikle $\|Mf\|_{\infty,\nu} \le a$ olduğu görülür. Buradan, $\|Mf\|_{\infty,\nu} \le \|f\|_{\infty,\mu}$ olur.

M nin zayıf $(L^1(\mu); L^1(\nu))$ olduğunu ispatlamadan önce aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.15 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda > 0$ olsun. $\{Q_k\}$ dizisindeki küpler $\lambda > 0$ olmak üzere f için $\mathbb{R}^n$ üzerinde Calderón-Zygmund parçalınışından seçilirse,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > 7^n\lambda\} \subset \bigcup_k Q_k^*,$$

olduğu elde edilir. Burada $Q_k^* = 2Q_k$ ve

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > 7^n\lambda\}| \leq 2^n \sum_k |Q_k|.$$

sağlanır.

İspat. $x \notin \bigcup_k Q_k^*$ olsun. Bu durumda x merkezli her Q kübü için iki durum vardır. Eğer $Q \subset \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_k Q_k$ ise

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|dx \leq \lambda.$$

Eğer bazı k indisleri için $Q \cap Q_k = \emptyset$ ise $Q_k \subset 3Q$ olduğunu görmek kolaydır ve

$$\bigcup_k \{Q_k : Q_k \cap Q \neq \emptyset\} \subset 3Q.$$

Buradan $F = \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_k Q_k$ olduğu görülür. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_Q |f(x)|dx &\leq \int_{Q\cap F} |f(x)|dx + \sum_{Q_k \cap Q \neq \emptyset} \int_{Q_k} |f(x)|dx \\
&\leq \lambda|Q| + \sum_{Q_k \cap Q \neq \emptyset} 2^n\lambda|Q| \\
&\leq \lambda|Q| + 2^n\lambda|3Q| \\
&\leq 7^n\lambda|Q|.
\end{aligned}$$

Böylelikle her bir $x \notin \bigcup_k Q_k^*$ için $M'f(x) \leq 7^n\lambda$ ve

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > 7^n\lambda\}| \leq 2^n \sum_k |Q_k| \leq \left| x \notin \bigcup_k Q_k^* \right| = 2^n \sum_k |Q_k|.$$

olduğu elde edilir. ■

Şimdi zayıf $(L^1(\mu), L^1(\nu))$ tipi için ispata geri dönebiliriz. Her bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^1(\mu)$ için

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}} \varphi(x)\,dx &= \nu(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

böyle bir C sabiti bulmamız ispatı tamamlayacaktır. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olduğunu düşünebiliriz. Gerçekten, $f_k = |f|\chi_{B(0,k)}$ olacak şekilde alırsak $x \in \mathbb{R}^n$ ve $k = 1, 2, \ldots$ için $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür. Bununla birlikte $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = |f(x)|$.

(3.4) den,$\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) \leq c_n M'f(x)$ bir $c_n > 0$ vardır. $\lambda' = \frac{\lambda}{c_n 7^n}$ olmak üzere f için $\mathbb{R}^n$ üzerinde Calderón-Zygmund parçalanışı uygulanırsa $\{Q_k\}$ küp dizisi

$$\lambda' < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|dx \leq 2^n \lambda'$$

ifadesini gerçekler. Lemma 3.15 den,

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}} \varphi(x)\,dx &\leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M'f(x)>7^n\lambda'\}} \varphi(x)\,dx \\
&\leq \int_{\bigcup_k Q_k^*} \varphi(x)\,dx \leq \sum_k \int_{Q_k^*} \varphi(x)\,dx \\
&\leq \sum_k \left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k^*} \varphi(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{\lambda^{prime}}\int_{Q_k} |f(y)|dy\right) \\
&= \frac{c_n 7^n}{\lambda}\sum_k \int_{Q_k} |f(y)| \left(\frac{2^n}{Q_k^*}\int_{Q_k^*} \varphi(x)\,dx\right) dy \\
&\leq \frac{c_n 14^n}{\lambda}\sum_k \int_{Q_k} |f(y)|M''\varphi(y)\,dy \\
&= \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|M\varphi(y)\,dy.
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan, M zayıf $(L^1(\mu), L^1(\nu))$ tipindedir ve $p_0 = 1$ ve $p_1 = \infty$ için Teorem 3.13 uygulanarak Fefferman-Stein eşitsizliği elde edilir. ■

Marcinkiewicz enterpolasyon teoremi T altlinear operatörünün indislerin iki ucunda zayıf sınırlılığa sahip ise, indislerin iki uç noktaları arasındaki bütün noktalarda T aynı zamanda güçlü sınırlılığa da sahiptir. Aşağıdaki sonuç alt lineer T operatörünün herhangi bir indis noktasında zayıf sınırlılığı var olmasının bu noktadan daha küçük olan her indis noktası için güçlü sınırlılığına sahip olduğunu gösteriyor.

Teorem 3.16 (Kolmogorov eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$, için T, $L_p(\mathbb{R}^n)$ den ölçülebilir fonksiyonlar uzayına bir alt lineer operatör olsun. Bu durumda

(a) T zayıf (p,p) tipinde ise her $0 < r < p$ için ve sonlu ölçüye sahip her E için,

$C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\int E|Tf(x)|^r \leq C|E|^{1-r/p}\|f\|_p^r. \tag{3.13}$$

(b) Eğer $0 < r < p$, her sonlu ölçüye sahip E kümesi ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için (3.13) de olduğu gibi $C > 0$ sabiti varsa T, zayıf (p,p) tipindendir.

İspat (a). Herbir $\lambda > 0$ için T zayıf (p,p) tipinde olduğundan,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p}\|f\|_p^p$$

Buradan $|E| < \infty$ olmak üzere heer bir E kümesi için

$$|\{x \in E : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p}\|f\|_p^p$$

Böylece $0 < r < p$, için

$$\begin{aligned}
&\int_E |Tf(x)|^r dx \\
&= r\int_0^\infty \lambda^{r-1}|\{x \in E : |Tf(x)| > \lambda\}|d\lambda \\
&\leq r\int_0^\infty \lambda^{r-1}\min\left\{|E|, \frac{C}{\lambda^p}\|f\|_p^p\right\}d\lambda \\
&\leq r\int_0^{C\|f\|_p|E|^{-1/p}} \lambda^{r-1}|E|d\lambda + Cr\int_{C\|f\|_p|E|^{-1/p}}^\infty \lambda^{r-1-p}\|f\|_p^p d\lambda \\
&\leq C|E|^{1-r/p}\|f\|_p^r.
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

İspat (b). Herbir $\lambda > 0$, $E = \{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}$ alınırsa, E ölçülebilir bir kümedir ve $|E| < \infty$. Bu şekilde olmasaydı,bir $\{E_k\}$ ölçülebilir kümelerin dizisi vardır öyle ki $E_k \subset E$ ve $k = 1, 2, \ldots$ için $|E_k| = k$. Buradan her k için,

$$\lambda^r k = \lambda^r|E_k| \leq \int_{E_k} |Tf(x)|^r dx \leq C|E_k|^{1-r/p}\|f\|_p^r = Ck^{1-r/p}\|f\|_p^r.$$

olurdu. Ancak, bu doğru değildir. (3.13) den,

$$\lambda^r|E| \leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|Tf(x)|>\lambda\}} |Tf(x)|^r dx \leq C|E|^{1-r/p}\|f\|_p^r.$$

elde edilir ve

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| = |E| \leq \frac{C}{\lambda^p}\|f\|_p^p.$$

olduğu görülür. Sonuç olarak T zayıf (p,p) tipindendir. ■

4 HARDY-LITTLEWOOD MAKSIMAL OPERATÖRÜNÜN AĞIRLIKLI L_p UZAYINDA SINIRLILIĞI

Bu bölümde A_p ağırlık fonksiyonlarının M Hardy-Littlewood maksimal operatörü için ağırlıklı zayıf L^p ve güçlü L^p sınırlılığı ile ilgili bilgiler verilecektir. W=1 iken ağırlıklı lebesgue için klasik L^p uzayına dönüşür. M maksimal operatörünün zayıf sınırlılığı hakkında bilgi elde edilir.

Teorem 4.1 [Ağırlıklı zayıf (p,p) tipli karakterazsyon teoremi]

$1 \leq p < \infty$ olsun. M Hardy-Littlewood maksimal öperatörünün zayıf $(L^p(\omega dx), L^p(\omega dx))$ olması için gerek ve yeter koşul $\omega \in A_p$ olmasıdır.

Yani, $\exists C > 0$, herhangi bir $\lambda > 0$ ve $1 \leq p < \infty$ için $f(x) \in L^p(\omega dx)$ olmak üzere

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}} \omega(x)dx \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx \tag{4.1}$$

olması için gerek ve yeter şart $\omega \in A_p$ olmasıdır.

İspat. $\omega \in A_p$ olması için (4.1) dekleminin gerekli koşul olduğunu ispat edelim. $p = 1$ için $Q_1 \subset Q$ olacak şekilde bir Q kübünü ele alalım. $f = \chi_{Q_1}$ olarak ifade etsek $0 < \lambda < |Q_1|/|Q|$ için $Q \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ olur. (4.1) denkleminden

$$\lambda \int_Q \omega(x)dx \leq \lambda \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:Mf(x)>\lambda\}} \omega(x)dx \leq C \int_{Q_1} \omega(x)dx$$

denklemi elde edilir. Keyfi bir $\lambda < |Q_1|/|Q|$ için

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)dx \leq \frac{C}{|Q_1|} \int_{Q_1} \omega(x)dx.$$

elde edilir. Lebesgue diferensiyelleme teoremi uygulanırsa

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(y)dy \leq C\omega(x) \quad \text{h.h. } x \in Q$$

denklemi elde edilir. Q keyfi olduğundan

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \quad \text{h.h. } x \in \mathbb{R}^n$$

bulunur ve $\omega \in A_1$.

$p > 1$ için, $f = \omega^{1-p'}\chi_Q$ şeklinde seçersek $0 < \lambda < \omega^{1-p'}(Q)/|Q|, Q \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ olacaktır. (4.1) denkleminden

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^p}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx &\leq \frac{\lambda^p}{|Q|}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}} \omega(x)dx \\
&\leq \frac{C}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n} [\omega(x)^{1-p'}\chi_Q(x)]^p \omega(x)dx \\
&= \frac{C}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx
\end{aligned}$$

λ keyfi olduğundan

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{1-p}$$

denklemi elde edilir. Buradan $\omega \in A_p$ bulunur.

Aşağıda $\omega \in A_p$ şartının (4.1) denklemi için yeter şart olduğunu ispat edeceğiz. $p = 1$ olduğunda, (4.1) denklemi denklem (3.16) nın direk sonucudur. $p > 1$ için ispata devam edelim. Hölder eşitsizliği kullanılarak, $\omega \in A_p$ olduğunda elde edilen özelliklerden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\right)^p \\
&= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\omega(x)^{1/p}\omega(x)^{-1/p}dx\right)^p \\
&\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1} \\
&\leq C\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p\omega(x)dx.
\end{aligned}$$

Eğer $f \in L^p(\omega dx)$ ise $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür ve buradan

$$\int_Q \omega(x)dx \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\right)^{-p}\left(\int_Q |f(x)|^p\omega(x)dx\right) \tag{4.2}$$

denklemi elde edilir. Genelliği bozmadan, $f \geq 0$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olduğunu kabul edelim. Küplerin boyu $7^{-n}\lambda$ olacak şekilde, f fonksiyonu için Calderón-Zygmund parçalınışı teoremini uygulanırsa

$$7^{-n}\lambda < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(x)dx \quad \forall Q_k \tag{4.3}$$

olacak şekilde $\{Q_k\}$ küplerin dizisi elde edilir. Lemma 3.15 den

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \subset \bigcup_k Q_k^*,$$

ifadesi elde edilir. Burada $Q_k^* = 2Q_k$ gibidir. A_p ağırlıklarının vi. özelliğinden ve denklemler (4.2) ve (4.3) den

$$\begin{aligned}
&\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}} \omega(x)dx \\
&\leq \sum_k \int_{2Q_k} \omega(x)dx \leq C2^{np} \sum_k \int_{Q_k} \omega(x)dx \\
&\leq C2^{np} \sum_k \left(\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(x)|dx \right)^{-p} \left(\int_{Q_k} |f(x)|^p \omega(x)dx \right) \\
&\leq C\frac{14^{np}}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx.
\end{aligned}$$

Böylelikle M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün zayıf $(L^p(\omega dx), L^p(\omega dx))$ tipinde olduğu sonucu çıkar. ■

Teorem 4.2 [Ağırlıklı güçlü (p, p) tipli karakterazsyon teoremi] $1 < p < \infty$ olsun. M Hardy-Littlewood maksimal öperatörünün güçlü $(L^p(\omega dx), L^p(\omega dx))$ olması için gerek ve yeter koşul $\omega \in A_p$ olmasıdır.

İspat. Gereklilik kısmı Teorem 4.1 nin bir sonucudur. Gerçekten, M, güçlü $(L^p(\omega dx), L^p(\omega dx))$ tipinde olduğundan aynı zamanda zayıf $(L^p(\omega dx), L^p(\omega dx))$ tipindendir. Teorem 4.1 den $\omega \in A_p$ olduğu elde edilir.

Diğer taraftan, $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun.Ağırlık fonksiyonlarının vii. özelliğinden $1 < q < p$ olacak şekilde bir q için $\omega \in A_q$. Teorem 4.1 ve M zayıf $(L^p(\omega dx), L^p(\omega dx))$ tipinde olduğundan

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}} \omega(x)dx \leq \frac{C}{\lambda^q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \omega(x)dx \tag{4.4}$$

denklemi elde edilir. Eğer $\omega \in A_p$ ve her hangi ölçülebilir $E \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\omega(E) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $|E| = 0$ olmasıdır. $L^\infty(\omega dx) = L^\infty$ olduğundan ve M nin $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sınırlılığından,

$$\|Mf\|_{\infty,\omega} \leq \|f\|_{\infty,\omega}$$

ifadesi elde edilir. Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi kullanılarak ve (4.4) denkleminden yaralanılarak

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)\omega(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx$$

denklemi elde edilir.

Bir başka deyişle M güçlü $(L^p(\omega dx), L^p(\omega dx))$ tipindedir. ■

Bu bölümde, A_1 ağırlık fonksiyonlarının daha önemli özelliklerinden olan A_1 ağırlıklarının inşası ve A_1 ve A_p ağırlıkları arasındaki ilişkileri tartışıp bazı uygulamalarına yer vereceğiz.

Teorem 4.3 (**A_1 ağırlıklarının inşa karakterizasyonları**)

a. Eğer h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $Mf(x) < \infty$ olsun. Bu durumda $0 < \varepsilon < 1$ için $\omega(x) = (Mf(x))^\varepsilon \in A_1$ ve A_1 sabiti sadece ε a bağlıdır.

b. Eğer $\omega(x) \in A_1$ ise $0 < \varepsilon < 1$ için $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ vardır ve $b(x)$ fonksiyonu için

   i. $0 < C_1 \leq b(x) \leq C_2$, h.h. $x \in \mathbb{R}^n$;

   ii. $(Mf(x))^\varepsilon < \infty$, h.h. $x \in \mathbb{R}^n$;

   iii. $\omega(x) = b(x)\,(Mf(x))^\varepsilon$

   özellikleri sağlanır.

İspat.

a. Uyarı 2.112 den herhangi bir $0 < \varepsilon < 1$, herhangi bir $Q \subset \mathbb{R}^n$ kübü için C sabit olmak üzer

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf(y))^\varepsilon\, dy \leq C\,(Mf(x))^\varepsilon \qquad \text{h.h.} x \in Q$$

dekleminin sağlandığını göstermemiz yeterlidir.

$0 < \varepsilon < 1$ ve Q belirlenmiş olsun. $f = f\chi_{2Q} + f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} := f_1 + f_2$ şeklinde ifade edelim. Buradan

$$(Mf(x))^\varepsilon \leq (Mf_1(x))^\varepsilon + (Mf_2(x))^\varepsilon .$$

M nin $(1,1)$ zayıf sınırlılığı ve Kolmogorov eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q M_1 f_1(x)^\varepsilon dx &\leq \frac{C}{|Q|}|Q|^{1-\varepsilon}\|f_1\|_1^\varepsilon \\ &\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_{2Q}|f_1(y)|dx\right)^\varepsilon \\ &\leq C2^{n\varepsilon}\,(Mf(x))^\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, $(Mf_2(x))^\varepsilon$ için eşitsizlik elde etmeye çalışalım. Eğer $y \in Q$ ve $Q' \cap (\mathbb{R}^n \setminus 2Q) \neq \emptyset$ olacak şekilde $y \in Q'$ ise $4Q' \supset Q$ olur. Buradan $x \in Q$ ise

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f_2(y)|dy \leq \frac{4^n}{|4Q'|}\int_{4Q'}|f_2(y)|dy \leq 4^n Mf(x).$$

Buradan her hangi $y \in Q$ için $Mf_2(y) \leq 4^n Mf(x)$ olduğu görülür ve

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf_2(y))^\varepsilon \, dy \leq 4^{n\varepsilon}(Mf(x))^\varepsilon.$$

b. $\omega(x) \in A_1$ ise, Ters Hölder eşitsizliğinden herhangi Q kübü için $\exists\eta > 0$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\eta}dx\right)^{1/(1+\eta)} \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx \leq C\omega(x).$$

Buradan

$$M(\omega^{1+\eta})(x)^{1/(1+\eta)} \leq C\omega(x) \quad \text{h.h.} x \in \mathbb{R}^n$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan, Lebesgue diferensiyelleme teoreminden

$$\omega(x)^{1+\eta} \leq M(\omega^{1+\eta})(x)$$

sonucu çıkartılır. Bu sebeble, $\varepsilon = 1/(1+\eta), f(x) = \omega(x)^{1+\eta}$ ve $b(x) = \omega(x)/(Mf(x))^\varepsilon$, denirse (b) sonucu elde edilir. Böylelikle Teorem 4.3 ispatlanmış olur.

■

Aşağıda A_1 ve A_p ağırlıkları arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Uyarı 2.112 den, eğer $\omega \in A_1$ ise

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx \cdot \sup_{x\in Q}\left(\omega(x)^{-1}\right) \leq C,$$

denklem (2.26) ye denktir. Burada ve aşağıda sup derken temel (essential) supremum kastedilecektir. Diğer taraftan, $p \to 1$ için

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1} \to \|\omega^{-1}\|_{\infty,Q} = \sup_{x\in Q}\left(\omega(x)^{-1}\right)$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden A_1 ağırlıkları $p \to 1$ için A_p ağırlıklarının limiti olarak görülebilir.

A_p ağırlıklarının iii. özelliğinden, eğer $\omega_1, \omega_2 \in A_1$ ise $\omega_1 \cdot \omega_2^{1-p} \in A_p$ olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki sonuçların tersi ve çok derin bir çalışma olan sıradaki sonuçta doğrudur.

Teorem 4.4 (A_p ağırlıklarının Jones parçalanışı) ω negatif olmayan ve lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $1 < p < \infty$ olmak üzere $\omega \in A_p$ olması için gerek ve yeter koşul $\omega_1(x)\omega_2(x)^{1-p} = \omega(x)$ olacak şekilde $\omega_1, \omega_2 \in A_1$ olmasıdır.

İspat. Sadece gereklilik kısmını inceleyeceğiz. $\omega \in A_p$ olduğundan ve ii. özelliğinden $\omega(x)^{1-p'} \in A_{p'}$.

İlk olarak, $1 < p \leq 2$ olsun. Bu durumda $s = p' - 1 > 1$ dir.$u_0 \in L^{p'}(\mathbb{R}^n, \omega dx)$, negatif olmayan fonksiyonunu alalım ve $\{u_j(x)\}$ dizisini oluşturalım. Hardy-Littlewood maksimal operatöründen

$$u_{j+1}(x) = [M(u_j^s)(x)]^{1/s} + \omega(x)^{-1} M(u_j \omega)(x), \qquad j = 0, 1, \ldots$$

yazılabilir ve

a. $j = 0, 1, \ldots$ için $\|u_{j+1}\|_{p',\omega dx} \leq C \|u_j\|_{p',\omega dx}$, olacak şekilde bir C sabiti vardır.

b. a. da görülen C sabiti olmak üzere $\delta > C$ için

$$U(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^{-j} u_j(x)$$

alınırsa $U\omega \in A_1$ ve $U^s \in A_1$.Aslında Teorem 2.27 den

$$\begin{aligned}
\|u_{j+1}\|_{p',\omega dx}^{p'} &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[M(u_j^s)(x) \right]^{p'/s} \omega(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \left[\omega(x)^{-1} M(u_j \omega)(x) \right]^{p'} \omega(x) dx \right) \\
&= C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[M(u_j^s)(x) \right]^{p} \omega(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} [M(u_j \omega)(x)]^{p'} \omega(x)^{1-'} dx \right) \\
&\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_j^{p'}(x) \omega(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} [u_j \omega(x) \omega(x)]^{p'} \omega(x)^{1-'} dx \right) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} u_j^{p'}(x) \omega(x) dx.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak (a) sağlanır ve her $j \geq 0$ için C sabiti u_j den bağımsızdır.(b) yi inceleyelim. u_{j+1} in tanımından

$$\begin{aligned}
M(U\omega)(x) &\leq \sum_{j=0} \delta^{-j} M(u_j \omega)(x) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \delta^{-j} u_{j+1}(x) \omega(x) \\
&= \delta \sum_{j=1}^{\infty} \delta^{-j} u_j(x) \omega(x) \\
&\leq \delta \left(U(x) \omega(x) \right).
\end{aligned}$$

Buradan $U\omega \in A_1$.Diğer taraftan,

$$[M(U^s)(x)]^{1/s} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \delta^{-j} \left[M(u_j^s)(x)\right]^{1/s} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \delta^{-j} u_{j+1}(x) \leq \delta U(x).$$

Buradan $U^s \in A_1$.Eğer $\omega_1 = U\omega$ ve $\omega_2 = U^s$ ile gösterirsek $\omega_1, \omega_2 \in A_1$ ve

$$\omega = (U\omega) . (U^s)^{-1/s} = (U\omega) \cdot (U^s)^{1-p} = \omega_1 \cdot \omega_2^{1-p}.$$

olur. $1 < p \leq 2$ için teoremin gereklilik kısmı ispatlanmış olur.

$2 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ için $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$ ve $1 < p' \leq 2$. Yukarıdaki ispata benzer ilerlemelerle $\omega^{1-p'} = \nu_1 \cdot \nu_2^{1-p'}$ olacak şekilde $\nu_1, \nu_2 \in A_1$ olduğu görülür. Denk olarak $\omega = \nu_2 \cdot \nu_1^{1-p}$ olur. Böylelikle Teorem 4.4 in ispatı tamamlanmış olur.

■

Önerme 4.5 $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $|x|^\alpha \in A_1$ olması için gerek ve yeter şart $-n < \alpha \leq 0$ olmasıdır.

İspat. $|x|^\alpha \in A_1$ olsun. $|x|^\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olması için $\alpha > -n$ olması gerekir. Diğer taraftan $\alpha > 0$ ise $|x|^\alpha \in A_1$ ise ve A_p ağırlıklarının i. özelliğinden $p \leq 1 + \alpha/n$ için $|x|^\alpha \in A_p$. Ancak p ne seçilirse seçilsin $|x|^{\alpha(1-p')} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Tersine, $-n < \alpha \leq 0$ olsun.$|x|^\alpha \in A_1$ olduğunu gösterelim. Gerçekten, Q herhangi fakat belirli bir küp olsun. Q_0 ile Q kübünün merkezi orjine taşınmış formunu gösterelim.

Durum i. $2Q_0 \cap Q \neq \emptyset$ olsun. Buradan $4Q_0 \supset Q$ ve

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |x|^\alpha dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_{4Q} |x|^\alpha dx \leq C|x|^{\alpha/n} \leq \inf_{x\in Q} |x|^\alpha.$$

Durum ii. $2Q_0 \cap Q = \emptyset$ olsun. $x, y \in Q$ için

$$|x| \leq |x-y| + |y| \leq C|Q|^{1/n} + |y| \leq (C+1)|y|,$$

Buradan

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |x|^\alpha dx \leq C \inf_{x\in Q} |x|^\alpha.$$

Durum i. ve ii. de C sabitinin sadece boyuta bağlı olduğunu görmek kolaydır. Böylelikle $|x|^\alpha \in A_1$ olduğu ispatlanmış olur. ■

Önerme 4.6 $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $1 < p < \infty$ için $|x|^\alpha \in A_p$ olması için gerek ve yeter şart $-n < \alpha < n(p-1)$ olmasıdır.

KAYNAKLAR

[1] Alvarez, J., Bagby, R.J., Kurtz, D.S., Perez, C., Weighted estimates for commutators of linear operators, Studia Math., 104(1993), 195-209.

[2] Andersen, K.F., John, R.T., Weighted inequalities for vector-valued maximal functions and singular integrals, Studia Math., 69(1980), 19-31.

[3] Christ,M., Rubio de Francia, J.-L., Weak type bounds for rough operators ll, Invent. Math., 93(1988), 225-237

[4] Coifman, R.R., Fefferman, C., Weighted normal inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math., 51(1974), 241-250.

[5] Coifman, R.R., jones, P., Rubio de Francia, J.L., Constructive decomposition of BMO functions and fractorizatiom of Ap weights, Proc. Amer. Math. Soc., 87(1983), 675-676.

[6] Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Endpoint estimates and weighted norm inequalities for commutators of fractional integrals, Publ. Mat., 47(2003), 103-131

[7] Ding, Y., weighted boundednes for commutators of fractional integral operators with rough kernels, J.Beijing Normal Univ. (Natural Science), 32(1996), 157-161.

[8] Ding, Y., Weak type bounds for a class of rough operators with power weights, Proc. Amer. Math. Soc., 125(1997), 2939-2942.

[9] Duandikoetxea, J., Weighted norm inequalities for homogeneous singular integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 336(1993), 869-880

[10] Duoandikoetxea, J., Fourier Analysis, Graduate Studies in Math.,Vol.29, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2001.

[11] Duoandikoetxea, J., Rubio de Francia, J.-L., Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates, Invent. Math., 84(1986), 541-561.

[12] Fefferman, C., Stein, E.M., Some maximal inequalities, Amer. J. Math., 93(1971), 105-115.

[13] Garcia-Cuerva, J., Rubio de Francia, J.L., Weighted norm inequalities and related topics, Amsterdam, North-Holland, 1985.

[14] Grafakos, L., Stefanov, A., Convolution Calderon-Zygmund singular integral operators with rough kernels, Analiysis of Divergence: Control and Management of Divergent Processes, 119-143, Birkhauser,Boston-Basel-Berlin, 1999

[15] Hardy, G.H., Littlewood, L.E., A maximal theorem with function theoretic applications, Acta Math., 54(1930), 81-116.

[16] Jones, P.W., Factorization of Ap weights, Ann. of Math., 111(1980), 511-530.

[17] Kurtz, D., Littlewood-Paley and multiplies theorems on weighted L^p spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 259(1980), 235-254.

[18] Kurtz, D.,Wheeden, R., Results on weighted norm inequalities for multipliers, Trans. Amer. Math. Soc., 225(1979), 343-362.

[19] Littlewood, J.E., Paley, R.E., Theorems on Fourier series and power series (I), J. London Math. Soc., 6(1931), 230-233.

[20] Lu, S., Ding, Y., Yan, D., Singular Integrals and Related Topics, World Scientific Pub. Co. Pte. Ltd., Singapore, 2007.

[21] Muckenhoupt, B., Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc., 165(1972), 207-226.

[22] Muckenhoupt, B., Wheeden R., Weighted norm inequalities for singular and fractional integrals,Trans.Amer. Math. Soc., 161(1971),249-258.

[23] Muckenhoupt, B., Wheeden R., Weighted norm inequalities for fractional integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 192(1974), 261-274.

[24] Stein, E.M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[25] Stein, E.M., Harmonic Analysis: real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton University Press, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı:Bektaş TEKİN

Doğum Tarihi:1986

Doğum Yeri:Malatya-Hekimhan

Ünvanı:Yüksek Lisans Öğrencisi

Anabilim Dalı: Matematik

Eğitim :

Orta Öğrenimi: Kırşehir Anadolu Öğretmen Lisesi

Lisans: Sivas Cumhuriyet Üniversitesi,Eğitim Fakültesi,İlköğretim Matematik Öğretmenliği

Yüksek Lisans: Ahi Evran Üniversitesi,Fen Bilimleri Enstitüsü,

Matematik Bilim Dalı,