T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY KOROVKIN TEORİSİ VE TOPLANABİLME METOTLARI

SELMA EKİCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR
2024

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY KOROVKIN TEORİSİ VE TOPLANABİLME METOTLARI

SELMA EKİCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
DOÇ. DR. EMRE TAŞ

KIRŞEHİR
2024

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 02/01/2024

Öğrenci
Selma EKİCİ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

TEŞEKKÜR

Emeği geçen herkese teşekkürler.

Ocak / 2024 Selma EKİCİ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FUZZY KOROVKİN TEORİSİ VE TOPLANABİLME METOTLARI

SELMA EKİCİ

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman:	**Doç. Dr. Emre TAŞ**
	Yıl: 2024 Sayfa: 35
Jüri:	**Doç. Dr. Tuğba YURDAKADİM**
	Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ
	Doç. Dr. Emre TAŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar hatırlatılmıştır. Anastassiou tarafından verilen fuzzy Korovkin teoremi incelenmiştir. Anastassiou ve Gal (Anastassiou & Gal, 2006) tarafından verilen fuzzy trigonometrik Korovkin teoremi incelenmiştir. Ayrıca A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak fuzzy Korovkin teoremi genişletilmiştir.
Üçüncü bölümde, ikinci bölümde elde edilen sonuçlar Shisha-Mond eşitsizliğinin benzeri kullanılarak k-boyutlu durum için genişletilmiş olup orjinal sonuçlar elde edilmiştir.
Dördüncü bölüm, sonuç ve önerilere ayrılmıştır.
Beşinci bölüm ise, referanslara ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: fuzzy pozitif lineer operatör, fuzzy Korovkin teorisi, fuzzy trigonometrik Korovkin teorisi, fuzzy Shisha-Mond eşitsizliği, fuzzy trigonometrik Shisha-Mond eşitsizliği, fuzzy süreklilik modülü, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel oran.

ABSTRACT

Master THESIS

FUZZY KOROVKIN THEORY AND SUMMABILITY METHODS

SELMA EKİCİ

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor:	**Assoc. Prof. Dr. Emre TAŞ**
	Year: 2024 Pages: 35
Juries:	**Assoc. Prof. Dr. Tuğba YURDAKADİM**
	Assoc. Prof. Dr. Fatih DERİNGÖZ
	Assoc. Prof. Dr. Emre TAŞ

This thesis consists of five chapters.
The first chapter has been devoted to the introduction.
In chapter two, the basic definitions and concepts have been reminded. The fuzzy Korovkin theorem given by Anastassiou has been examined. The fuzzy trigonometric Korovkin theorem given by Anastassiou and Gal (Anastassiou & Gal, 2006) have been examined. Also, using A-statistical convergence, the fuzzy Korovkin theorem has been expanded.
In chapter three, the results obtained in the second chapter are expanded for the k-dimensional case by using a similar Shisha-Mond inequality and the original results are obtained.
The chapter four has been devoted to the result and the suggestions.
The last chapter has been devoted to the references.

Key Words: fuzzy positive linear operator, fuzzy Korovkin theory, fuzzy trigonometric Korovkin theory, fuzzy Shisha-Mond inequality, fuzzy trigonometric Shisha-Mond inequality, fuzzy modulus of continuity, statistical convergence, statistical rates.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler		**Açıklama**
$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	:	Fuzzy reel sayıların kümesi
$\omega_1(.,.)$	:	Klasik süreklilik modülü
$\omega_1^{(\mathcal{F})}(.,.)$	:	Fuzzy süreklilik modülü
$C_{\mathcal{F}}([a,b])$	:	Fuzzy sürekli tüm fonksiyonların uzayı
${}_{2\pi}C_{\mathcal{F}}^{U}(\mathbb{R})$	:	2π periyotlu fuzzy düzgün sürekli tüm fonksiyonların uzayı
$C_{2\pi}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$	:	$\mathbb{R}$ üzerinde fuzzy sürekli 2π periyotlu tüm fonksiyonların uzayı
$B_n^{(\mathcal{F})}(f)$	:	Fuzzy Bernstein operatörü
$\sum^*$	:	Fuzzy toplamı
$C_{\mathcal{F}}^{U}(\mathbb{R})$	:	Fuzzy düzgün sürekli tüm fonksiyonların uzayı
$J_n(.)$	:	Fuzzy Jackson operatörü
Ax	:	x dizisinin A dönüşüm dizisi
C_1	:	Birinci dereceden Cesàro matrisi

1. GİRİŞ

Klasik kümeler teorisinde iyi tanımlılıktan dolayı bir eleman bir kümeye aittir veya ait değildir. 1965 yılında Zadeh (Zadeh, 1965) tarafından fuzzy küme teorisi ortaya atılmıştır. Fuzzy küme, olası her elemanın fuzzy küme içindeki aitlik derecesini gösteren $[0, 1]$ aralığındaki bir değer yardımıyla tanımlanmaktadır. Bu değer büyüdükçe eleman fuzzy kümeye daha çok ait olmaktadır. Zadeh'in bu çalışmasının ardından birçok araştırmacı klasik küme teorisindeki bilinen sonuçları bu teoriye uygulamıştır. Diğer taraftan 1885 yılında Karl Weierstrass'ın kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona cebirsel ve trigonometrik polinomlarla yaklaşımına ilişkin teoremin ispatı, yaklaşım teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynamaktadır. Daha sonra Korovkin (Korovkin, 1960), Weierstrass teoremini gerçekleyen genel operatörler için yeter koşullar vermiştir. Böylece pozitif lineer operatörler ile yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutan Korovkin tipi yaklaşım teorisi ortaya çıkmıştır. Anastassiou (Anastassiou, 2005), fuzzy teori ve Korovkin teoriyi bağdaştırarak fuzzy Korovkin teorisini ortaya atmıştır. Bu teorinin amacı fuzzy pozitif lineer operatörleri tanımlayarak Korovkin tipli teorem elde etmek ve yakınsaklık oranını incelemektir. Bununla birlikte Anastassiou ve Gal (Anastassiou & Gal, 2006) fuzzy trigonometrik Korovkin teoremini ortaya atmışlardır. Ayrıca Anastassiou ve Duman (Anastassiou & Duman, 2008), fuzzy pozitif lineer operatörlerin yaklaşım özelliklerini A-istatistiksel yakınsaklık kullanarak incelemişlerdir. Bu tezde altıncı bölümde, Shisha-Mond eşitsizliğinin benzeri kullanılarak fuzzy trigonometrik Korovkin teoremi k-boyutlu durum için genişletilmiş olup orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, tezimiz ile ilgili olan temel kavramlar, uzaylar ve operatörler hakkında genel bilgilere, tez konusu ile ilgili daha önce elde edilen bazı çalışmalara yer verilmiştir.

2.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda tez boyunca kullanacağımız bazı temel tanım ve kavramları vereceğiz.

Tanım 2.1. (Congxin & Zengtai, 2001) Aşağıdaki özellikleri gerçekleyen $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu bir fuzzy reel sayı olarak adlandırılır:

1. $\mu(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ varsa μ normal olarak adlandırılır.
2. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için $\mu(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$ eşitsizliği sağlanır. (μ , fuzzy konveks bir alt küme olarak adlandırılır).
3. $\mu, \mathbb{R}$ üzerinde üst yarı süreklidir. Yani, her $x_0 \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $V(x_0)$ komşuluğunda her $x \in V(x_0)$ için
$$V(x_0) : \mu(x) \leq \mu(x_0) + \varepsilon$$
olur.
4. supp$(\mu) := \{x \in \mathbb{R} : \mu(x) > 0\}$ olmak üzere $\overline{\text{supp}(\mu)}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde kompakttır.

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ile tüm μ fuzzy reel sayıların kümesi gösterilecektir.

Örneğin $\chi_{\{x_0\}}$, $\{x_0\}$ tek nokta kümesinin karakteristik fonksiyon olmak üzere her $x_0 \in \mathbb{R}$ için $\chi_{\{x_0\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olur.

$0 < r \leq 1$ ve $\mu \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olmak üzere
$$[\mu]^r := \{x \in \mathbb{R} : \mu(x) \geq r\}$$
ve
$$[\mu]^0 := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu(x) > 0\}}$$
kümeleri tanımlansın.

Goetschel ve Voxman (Goetschel & Voxman, 1986) her bir $r \in [0,1]$ için $[\mu]^r$ kümesinin reel sayıların kapalı ve sınırlı bir aralığı olduğunu göstermiştir. $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u \oplus v$ toplama ve $\lambda \odot u$ çarpma işlemleri her $r \in [0,1]$ için
$$[u \oplus v]^r = [u]^r + [v]^r, \ \ [\lambda \odot u]^r = \lambda [u]^r$$
biçiminde tanımlanır.

Burada $[u]^r + [v]^r$, $\mathbb{R}$ kümesinin alt kümeleri olarak iki aralığın alışılmış toplamı ve $\lambda[u]^r$, bir skalar ile $\mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesi arasındaki alışılmış çarpma işlemidir (Kaleva, 1987).

$1 \odot u = u$ olup, $u \oplus v = v \oplus u$ ve $\lambda \odot u = u \odot \lambda$ olduğu kolaylıkla görülür.

Eğer $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$ ise $[u]^{r_2} \subseteq [u]^{r_1}$ gerçeklenir. Aslında her $r \in [0,1]$ için $u_-^r, u_+^r \in \mathbb{R}$ ve $u_-^r \leq u_+^r$ olmak üzere $[u]^r = [u_-^r, u_+^r]$ olur. u ve v iki fuzzy reel sayı olmak üzere

$$u \precsim v \iff \text{her } r \in [0,1] \text{ için } u_-^r \leq v_-^r \text{ ve } u_+^r \leq v_+^r$$

bağıntısı tanımlanabilir.

$[u]^r = [u_-^r, u_+^r]$, $[v]^r = [v_-^r, v_+^r]$ ve $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olmak üzere

$$D(u,v) := \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{|u_-^r - v_-^r|, |u_+^r - v_+^r|\right\}$$

eşitliği ile verilen

$$D : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_+$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

D, $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ üzerinde bir metrik olur. Ayrıca $\big(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D\big)$, aşağıdaki özellikleri gerçekleyen tam bir metrik uzaydır (Congxin & Ming, 1991):

$$D(u \oplus w, v \oplus w) = D(u,v), \text{ her } u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

$$D(k \otimes u, k \otimes v) = |k| D(u,v), \text{ her } u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \text{ her } k \in \mathbb{R}$$

$$D(u \oplus v, w \oplus e) \leq D(u,w) + D(v,e), \text{ her } u, v, w, e \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$$

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fuzzy reel sayı değerli fonksiyonlar olsun. f ve g fonksiyonları arasındaki uzaklık

$$D^*(f,g) := \sup_{x\in[a,b]} D\big(f(x), g(x)\big)$$

biçiminde tanımlanır.

Şimdi de fuzzy süreklilik modülü kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fuzzy reel sayı değerli bir fonksiyon olsun. $0 < \delta \leq b - a$ aralığındaki her δ için, f fonksiyonunun süreklilik modülü

$$w_1^{(\mathcal{F})}(f,\delta) := \sup_{x,y\in[a,b],|x-y|\leq\delta} D\big(f(x), f(y)\big)$$

biçiminde tanımlanır.

Tez boyunca $i = 0, 1, 2$ olmak üzere $e_i(x) = x^i$ biçiminde verilen test fonksiyonlarını kullanacağız.

2.2. Fuzzy Korovkin Teorisi

Bu kısımda fuzzy Shisha-Mond eşitsizliği ile temel fuzzy Korovkin teoremi ispat edilecektir. Bu sonuçlar fuzzy birim operatöre fuzzy pozitif operatörlerin bir dizisinin oranı ile yakınsama derecesini göstermektedir.

Tanım 2.3. $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. f fonksiyonunu bir $x_0 \in [a, b]$ noktasında fuzzy sürekli olması için gerek ve yeter şart $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \to \infty$ için $x_n \to x_0$ iken $D\big(f(x_n), f(x_0)\big) \to 0$ olmasıdır. Eğer f, her $x \in [a, b]$ için fuzzy sürekli ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde fuzzy süreklidir denir ve tüm fuzzy sürekli fonksiyonlar uzayı $C_{\mathcal{F}}\big([a, b]\big)$ ile gösterilir. $C_{\mathcal{F}}\big([a, b]\big)$ uzayı bir vektör uzayı olmayıp yanlızca bir konidir (Anastassiou, 2005). Bununla birlikte $\mathbb{R}$'deki skalar elemanların herhangi sonlu lineer kombinasyonu bu uzaya aittir.
Her $x \in [a, b]$ ve her $r \in [0, 1]$ için $[f(x)]^r = \big[f_-^{(r)}(x), f_+^{(r)}(x)\big]$ olmak üzere $[f]^r = \big[f_-^{(r)}, f_+^{(r)}\big]$ gösterimini kullanalım. $f, g \in C_{\mathcal{F}}\big([a, b]\big)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f \succsim g &\iff f(x) \succsim g(x) \\ &\iff f_-^{(r)}(x) \geq g_-^{(r)}(x) \text{ ve } f_+^{(r)}(x) \geq g_+^{(r)}(x) \\ &\iff \text{ her } x \in [a, b] \text{ ve her } r \in [0, 1], f_-^{(r)} \geq g_-^{(r)}, f_+^{(r)} \geq g_+^{(r)} \end{aligned}$$

bağıntısı gerçeklenirse f fonksiyonu noktasal olarak g fonksiyonundan fuzzy geniştir denir.

$C_{\mathcal{F}}\big([a, b]\big)$ uzayından, $C_{\mathcal{F}}\big([a, b]\big)$ uzayının içine bir L dönüşümünün bir fuzzy lineer operatörü olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sayısı ve her $f_1, f_2 \in C_{\mathcal{F}}\big([a, b]\big)$ için

$$L(c_1 \odot f_1 \oplus c_2 \odot f_2) = c_1 \odot L(f_1) \oplus c_2 \odot L(f_2)$$

olmasıdır.

Diğer taraftan L dönüşümünün bir fuzzy pozitif operatör olması için gerek ve yeter koşul $f \succsim g$ koşulunu sağlayan her $f, g \in C_{\mathcal{F}}\big([a, b]\big)$ için $L(f) \succsim L(g)$, yani her $r \in [0, 1]$ için $[a, b]$ üzerinde $\big(L(f)\big)_-^{(r)} \geq \big(L(g)\big)_-^{(r)}$ ve $\big(L(f)\big)_+^{(r)} \geq \big(L(g)\big)_+^{(r)}$ olmasıdır.

Örnek 2.4. $f \in C_{\mathcal{F}}\big([0, 1]\big)$ olmak üzere fuzzy Bernstein operatörü, her $x \in [0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n^{(\mathcal{F})}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}{}^{*} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \odot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

biçiminde tanımlanır.
Burada Σ^* fuzzy toplamayı temsil etmektedir.

Bu operatör bir fuzzy pozitif lineer operatördür. 2000 yılında Gal tarafından fuzzy Bernstein operatörleri için yaklaşım oranı incelenmiştir.

Bu tezde ihtiyaç duyacağımız bazı sonuçları verelim.

Teorem 2.5. (Gal, 2000) $f \in C_{\mathcal{F}}\big([0,1]\big)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D^*\Big(B_n^{(\mathcal{F})}(f), f\Big) \leq \frac{3}{2} w_1^{(\mathcal{F})}\Big(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

gerçeklenir, yani

$$\lim_{n\to\infty} D^*\big(B_n^{(\mathcal{F})}(f), f\big) = 0,$$

($n \to \infty$ iken $B_n^{(\mathcal{F})}(f) \to f$ fuzzy düzgün yakınsaktır). Yukarıdaki limit $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ olduğunda $\delta \to 0$ iken $w_1^{(\mathcal{F})}(f,\delta) \to 0$ olmasından elde edilir.

Teorem 2.6. (Shisha & Mond, 1968b) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ve $\big(\tilde{L}_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $C\big([a,b]\big)$ uzayından $C\big([a,b]\big)$ içine pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $n = 1, 2, ...$ için $\tilde{L}_n(1)$ sınırlı ve $f \in C\big([a,b]\big)$ ise

$$\big\|\tilde{L}_n f - f\big\|_\infty \leq \big\|f\big\|_\infty \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty + \big\|\tilde{L}_n(1) + 1\big\|_\infty w_1\big(f, \mu_n\big) \tag{2.1}$$

elde edilir. Burada w_1 klasik reel süreklilik modülü olup $\|\cdot\|_\infty$, $[a,b]$ üzerinde sup normunu göstermektedir ve

$$\mu_n := \big\|\big(\tilde{L}_n\big((t-x)^2\big)\big)(x)\big\|_\infty^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

biçimindedir ve $C([a,b])$, $[a,b]$ kapalı sınırlı aralığı üzerinde tanımlı sürekli reel değerli tüm fonksiyonların uzayıdır.

İspat. $x \in [a,b]$ ve δ pozitif bir sayı olsun. $t \in [a,b]$ olmak üzere eğer $|t-x| > \delta$ ise

$$\big|f(t)-f(x)\big| \leq \omega_1\big(f, |t-x|\big) = \omega_1\big(f, |t-x|\delta^{-1}\delta\big) \leq \big(1+|t-x|\delta^{-1}\big)\omega_1(f,\delta) \leq \big[1+(t-x)^2\delta^{-2}\big]\omega_1(f,\delta)$$

olur. Buradan

$$\big|f(t) - f(x)\big| \leq \big[1 + (t-x)^2\delta^{-2}\big]\omega_1(f,\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlik $|t-x| \le \delta$ durumunda da gerçeklenir. n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\Big|\big(\tilde{L}_n f - f(x)L_n(1)\big)(x)\Big| \le \omega_1(f,\delta)\Big[\Big(\tilde{L}_n(1) + \delta^{-2}\tilde{L}_n\big([t-x]^2\big)\Big)(x)\Big]$$
$$\le \omega_1(f,\delta)\big[\tilde{L}_n(1)(x) + (\mu_n/\delta)^2\big]$$

olur. Eğer $\mu_n > 0$ olmak üzere $\delta = \mu_n$ alınırsa

$$\Big|\big[\tilde{L}_n(f) - f(x)\tilde{L}_n(1)\big](x)\Big| \le \omega_1(f,\mu_n)\big\|\tilde{L}_n(1)+1\big\|, \big|-f(x)+f(x)L_n(1)(x)\big| \tag{2.3}$$
$$\le \big\|f\big\|\big\|\tilde{L}_n(1)-1\big\| \tag{2.4}$$

bulunur. Buradan (3.1) eşitsizliği elde edilir. Eğer $\mu_n = 0$ ise her pozitif δ için

$$\Big|\big(\tilde{L}_n f - f(x)L_n(1)\big)(x)\Big| \le \omega_1(f,\delta)\tilde{L}_n(1)(x)$$

olur. Ayrıca $\delta \to 0$ iken $(\tilde{L}_n f)(x) = f(x)\tilde{L}_n(1)(x)$ olur. (3.4) kullanılarak

$$\Big|\big[f - \tilde{L}_n f\big](x)\Big| \le \|f\|\|\tilde{L}_n(1)-1\|$$

eşitsizliği yazılır bu da (3.1) eşitsizliğini gerektirir. ■

- Özel olarak $\tilde{L}_n(1) \to 1$ ise $\big\|\tilde{L}_n f - f\big\|_\infty \le 2w_1\big(f,\mu_n\big)$ gerçeklenir.

- $n = 1, 2, ...$ için $c := \max\Big(\big\|a\big\|, \big\|b\big\|\Big)$ olmak üzere

  $$\mu_n^2 \le \big\|\big(\tilde{L}_n(t^2)\big)(x) - x^2\big\|_\infty + 2c\big\|\big(\tilde{L}_n(t)\big)(x) - x\big\|_\infty + c^2\big\|\big(\tilde{L}_n(1)\big)(x) - 1\big\|_\infty$$

  olduğu kolaylıkla görülebilir (Shisha & Mond, 1968b).

$n \to \infty$ için $\tilde{L}_n(1) \to 1$, $\tilde{L}_n(e_1) \to e_1$, $\tilde{L}_n(e_2) \to e_2$ ise Teorem 2.6. gereğince her $f \in C\big([a,b]\big)$ için $\tilde{L}_n(f) \to f$ olup bu ise reel durumdaki klasik Korovkin teoremidir (Korovkin, 1960). Sıradaki sonuç fuzzy süreklilik modülü ile klasik süreklilik modülü arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Lemma 2.7. (Anastassiou, 2005) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ve $f \in C_{(\mathcal{F})}\big([a,b]\big)$ olsun. Bu durumda $0 < \delta \le b-a$ koşulunu sağlayan herhangi bir δ için

$$w_1^{\mathcal{F}}\big(f,\delta\big) = \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{w_1\big(f_-^{(r)},\delta\big), w_1\big(f_+^{(r)},\delta\big)\Big\}$$

gerçeklenir.

İspat. $0 < \delta \leq b-a$ olmak üzere $|x-y| \leq \delta$ koşulunu sağlayan x,$y \in [a,b]$ elemanlarını göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} D\big(f(x),f(y)\big) &= \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{\left|\big(f(x)\big)_-^{(r)}-\big(f(y)\big)_-^{(r)}\right|, \left|\big(f(x)\big)_+^{(r)}-\big(f(y)\big)_+^{(r)}\right|\right\} \\ &\leq \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{w_1\big(f_-^{(r)},\delta\big), w_1\big(f_+^{(r)},\delta\big)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$w_1^{(\mathcal{F})}\big(f,\delta\big) \leq \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{w_1\big(f_-^{(r)},\delta\big), w_1\big(f_+^{(r)},\delta\big)\right\}$$

olur. O halde herhangi bir $r \in [0,1]$ ve $|x-y| \leq \delta$ koşulunu sağlayan her x,$y \in [a,b]$ için

$$w_1^{(\mathcal{F})}\big(f,\delta\big) \geq D\big(f(x),f(y)\big) \geq \max\left|\big(f(x)\big)_-^{(r)}-\big(f(y)\big)_-^{(r)}\right|, \left|\big(f(x)\big)_+^{(r)}-\big(f(y)\big)_+^{(r)}\right|$$

bulunur. Dolayısıyla $w_1\big(f_+^{(r)},\delta\big) \leq w_1^{(\mathcal{F})}\big(f,\delta\big)$ elde edilir. Böylece

$$\sup_{r\in[0,1]} \max\left\{w_1\big(f_-^{(r)},\delta\big), w_1\big(f_+^{(r)},\delta\big)\right\} \leq w_1^{(\mathcal{F})}\big(f,\delta\big)$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar. ■
Özel olarak:

- $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ olması durumunda f fuzzy sınırlıdır ve $0 < \delta \leq b-a$ koşulunu sağlayan her δ için $w_1^{(\mathcal{F})}\big(f,\delta\big)$ sonludur. Ayrıca $f_\pm^{(r)}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve her $r \in [0,1]$ için $w_1\big(f_\pm^{(r)},\delta\big)$ sonludur.

Sıradaki teorem ile, Teorem 2.6. deki Shisha-Mond eşitsizliğinin Fuzzy analoğu verilecektir.

Teorem 2.8. (Anastassiou, 2005) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ uzayından $C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ içine fuzzy pozitif lineer operatörün bir dizisi olsun. Her $r \in [0,1]$ ve $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ için

$$\big(L_n(f)\big)_\pm^{(r)} = \tilde{L}_n\big(f_\pm^{(r)}\big) \tag{2.5}$$

özelliğini sağlayan $C\big([a,b]\big)$ uzayından $C\big([a,b]\big)$ içine pozitif lineer operatörlerin bir $\{\tilde{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi mevcut ve $\{\tilde{L}_n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlı olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D^*\big(L_nf,f\big) \leq \left\|\tilde{L}_n1-1\right\|_\infty D^*(f,\tilde{o}) + \left\|\tilde{L}_n(1)+1\right\|_\infty w_1^{(\mathcal{F})}\big(f,\mu_n\big) \tag{2.6}$$

gerçeklenir. Burada

$$\mu_n := \Big(\left\|\big(\tilde{L}_n\big((t-x)^2\big)\big)(x)\right\|_\infty\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2.7}$$

ve her $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ için $\tilde{o} = \chi_{\{0\}}$, $\oplus$ işleminin birim elemanıdır. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{L}_n 1 = 1$ ise

$$D^*\big(L_n f, f\big) \leq 2w_1^{(\mathcal{F})}\big(f, \mu_n\big) \tag{2.8}$$

elde edilir.

İspat.

$$\begin{aligned}
D^*(L_n f, f) &= \sup_{x\in[a,b]} D\big((L_n f)(x), f(x)\big) \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big|(L_n f)_-^{(r)}(x) - (f)_-^{(r)}(x)\big|, \big|(L_n f)_+^{(r)}(x) - (f)_+^{(r)}(x)\big|\Big\} \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big|\tilde{L}_n(f_-^{(r)})(x) - (f)_-^{(r)}(x)\big|, \big|\tilde{L}_n(f_+^{(r)})(x) - (f)_+^{(r)}(x)\big|\Big\} \\
&= \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big\|\tilde{L}_n f_-^{(r)} - f_-^{(r)}\big\|_\infty, \big\|\tilde{L}_n f_+^{(r)} - f_+^{(r)}\big\|_\infty\Big\}
\end{aligned}$$

olur. Teorem 2.6. gereğince

$$\begin{aligned}
D^*(L_n f, f) \leq \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{&\Big(\big\|f_-^{(r)}\big\|_\infty \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty + \big\|L_n(1) + 1\big\|_\infty w_1\big(f_-^{(r)}, \mu_n\big)\Big), \\
&\Big(\big\|f_+^{(r)}\big\|_\infty \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty + \big\|\tilde{L}_n(1) + 1\big\|_\infty w_1(f_+^{(r)}, \mu_n)\Big)\Big\} \\
\leq \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty &\sup_{r\in[0,1]} \max\Big(\big\|f_-^{(r)}\big\|, \big\|f_+^{(r)}\big\|\Big) \\
+ \big\|\tilde{L}_n(1) + 1\big\|_\infty &\sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{w_1\big(f_-^{(r)}, \mu_n\big), w_1\big(f_+^{(r)}, \mu_n\big)\Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.7. gereğince

$$D^*(L_n f, f) \leq \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty D^*(f, \tilde{o}) + \big\|\tilde{L}_n(1) + 1\big\|_\infty w_1^{(\mathcal{F})}\big(f, \mu_n\big)$$

olup bu da ispatı tamamlar. ■

Örnek 2.9. $C_{\mathcal{F}}\big([0,1]\big)$ üzerinde $B_n^{(\mathcal{F})}$ fuzzy Bernstein operatörü ve $C\big([0,1]\big)$ üzerinde B_n klasik Bernstein operatörü (1) koşulunu gerçekler.

Teorem 2.10. (Anastassiou, 2005) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ uzayından $C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ içine fuzzy pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her $r \in [0,1]$ ve $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ için

$$\big(L_n(f)_\pm^{(r)}\big) = \tilde{L}_n\big(f_\pm^{(r)}\big)$$

özelliğini sağlayan $C\big([a,b]\big)$ uzayından $C\big([a,b]\big)$ içine pozitif lineer operatörlerin $\{\tilde{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi mevcut ve $n \to \infty$ iken düzgün olarak

$$\tilde{L}_n(1) \to 1, \tilde{L}_n(e_1) \to e_1, \tilde{L}_n(e_2) \to e_2$$

olsun. Bu durumda herhangi bir $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ için

$$D^*(L_n f, f) \to 0, (n \to \infty)$$

gerçeklenir. Yani $L_n f \underrightarrow{D^*} f$ diğer bir ifade ile I fuzzy birim operatör olmak üzere $n \to \infty$ iken $L_n \to I$ fuzzy anlamında yakınsaktır.

İspat. (2.6) ve (2.7) özellikleri kullanılır. ∎

2.3. Fuzzy Trigonometrik Korovkin Teoremi

Bu kısımda trigonometrik Korovkin teoreminin fuzzy uzaylarındaki versiyonunu inceleyeceğiz. Temel kavramlarda vermiş olduğumuz tanımlar bu kısımda da geçerlidir. Ama iki fonksiyon arasındaki uzaklık ile fonksiyonun fuzzy süreklilik modülünün tanım aralıkları farklı olduğundan onları yeniden tanımlayacağız. $f, g : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fuzzy reel sayı değerli fonksiyonlar olsun. f ve g fonksiyonları arasındaki uzaklık

$$D^*(f,g) := \sup_{x \in \mathbb{I}} D\big(f(x), g(x)\big)$$

biçiminde tanımlanır.

$f(x) = f(x + 2\pi)$ koşoulunu sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonu 2π periyotludur.

Tanım 2.11. (Anastassiou & Gal, 2006) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fuzzy reel sayı değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun her $\delta > 0$ için fuzzy süreklilik modülü

$$w_1^{(\mathcal{F})}(f,\delta) := \sup_{x,y \in \mathbb{R}, |x-y| \le \delta} D\big(f(x), f(y)\big)$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbb{R}$ kümesinin altkümeleri için de benzer tanım geçerlidir.

$\mathbb{R}$ üzerinde tüm fuzzy sürekli fonksiyonları uzayını $C_{\mathcal{F}}(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. Sıradaki tanım fuzzy düzgün sürekliliği ifade etmektedir.

Tanım 2.12. (Anastassiou & Gal, 2006) Her $\epsilon > 0$ için $|x - y| \le \delta$ koşulunu sağlayan her $x, y \in \mathbb{R}$ için $D\big(f(x), f(y)\big) \le \epsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ mevcut ise f fuzzy düzgün süreklidir denir. $C_{\mathcal{F}}^U(\mathbb{R})$ ile tüm fuzzy düzgün sürekli fonksiyonların uzayı gösterilmektedir. ${C_{2\pi}}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ ile $\mathbb{R}$ üzerinde fuzzy sürekli ve 2π periyotlu tüm fonksiyonların uzayını gösterelim yani
${C_{2\pi}}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}} | f, \mathbb{R}$ üzerinde fuzzy sürekli ve 2π periyotludur$\}$ yazılabilir.

Bu bölümde ihtiyaç duyacağımız sıradaki lemmayı ispatsız olarak verelim.

Lemma 2.13. (Anastassiou & Gal, 2006) $x, y \in \mathbb{R}$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $k = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}^{*} \big\{(coskx) \odot a_k \oplus (sinkx) \odot b_k\big\}$$

fuzzy trigonometrik polinom olsun. Bu durumda Q_n, $\mathbb{R}$ üzerinde 2π periyotlu bir fuzzy sürekli fonksiyondur.
İspatı açıktır.

Lemma 2.14. (Anastassiou & Gal, 2006) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, 2π periyotlu ve fuzzy sürekli fonksiyon olsun. Yani $f \in C_{2\pi}{}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ olmak üzere her $\delta \in [0,\pi]$ için

$$\omega_1{}^{(\mathcal{F})}\Big(f|_{[0,2\pi]},\delta\Big)\leq \omega_1{}^{(\mathcal{F})}\big(f,\delta\big)\leq 2\omega_1{}^{(\mathcal{F})}\Big(f|_{[0,2\pi]},\delta\Big)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. Sol taraftaki eşitsizlik açıktır. Sağ taraftaki eşitsizliği gösterelim. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $I_k = \big[2k\pi, 2(k+1)\pi\big]$ olsun. Bunun için iki ihtimal vardır:

1. En az bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır öyleki $x, y \in I_k$'dır.

2. En az bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır öyleki $x \in I_k$, $y \in I_{k+1}$ ya da $x \in I_{k+1}$, $y \in I_k$'dır.

Durum1: $x' = x - 2k\pi$, $y' = y - 2k\pi \in [0, 2\pi]$ ve $|x' - y'| = |x - y| \leq \delta$ olduğundan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$D\big(f(x), f(y)\big)= D\big(f(x'), f(y')\big)\leq \omega_1{}^{(\mathcal{F})}\Big(f|_{[0,2\pi]},\delta\Big)\leq 2\omega_1{}^{(\mathcal{F})}\Big(f|_{[0,2\pi]},\delta\Big).$$

Durum2: $x \in I_k$, $y \in I_{k+1}$ olsun (simetrik olarak $x \in I_{k+1}$, $y \in I_k$ durumunda benzer ispat yapılır). O halde $x' = x - 2k\pi \in [0, 2\pi]$, $y' = y - 2k\pi \in [2\pi, 4\pi]$ ve $|x' - y'| \leq \delta$, $x' \leq 2\pi \leq y'$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D\big(f(x), f(y)\big)= D\big(f(x'), f(y')\big) &\leq D\big(f(x'), f(2\pi)\big)+D\big(f(2\pi), f(y')\big) \\ &\leq \omega_1{}^{(\mathcal{F})}\Big(f|_{[0,2\pi]},\delta\Big)+\omega_1{}^{(\mathcal{F})}\Big(f|_{[0,2\pi]},\delta\Big) \\ &= 2\omega_1{}^{(F)}\Big(f|_{[0,2\pi]},\delta\Big) \end{aligned}$$

elde edilir. $|x - y| \leq \delta$ koşulunu sağlayan her $x, y \in \mathbb{R}$ için supremum alınırsa istenilen elde edilir. ∎

Lemma 2.15. (Anastassiou & Gal, 2006) $f \in C_{2\pi}{}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ olmak üzere, f fonksiyonu fuzzy düzgün sürekli ve fuzzy sınırlıdır. Yani; $C_{2\pi}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R}) = {}_{2\pi}C_{\mathcal{F}}{}^{U}(\mathbb{R})$, 2π periyotlu fuzzy düzgün sürekli fonksiyonların uzayıdır.

İspat. Lemma 2.14. gereğince her $x \in [0, 2\pi]$ için

$$D\big(f(x), \tilde{o}\big)\leq M$$

olacak biçimde en az bir $M > 0$ vardır. Herhangi $z \notin [0, 2\pi]$ için en az bir $x \in [0, 2\pi]$ vardır öyle ki $z = x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ yazılabilir. Buradan her $z \in \mathbb{R} - [0, 2\pi]$ için

$$D\big(f(z), \tilde{o}\big) = D\big(f(x), \tilde{o}\big) \leq M$$

olup f fonksiyonun $\mathbb{R}$ üzerinde fuzzy sınırlı olduğunu elde edilir. (Anastassiou, 2006) daki Önerme 2 kullanılarak f fonksiyonu $[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde fuzzy düzgün sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_1{}^{(\mathcal{F})}\Big(f|_{[0,2\pi]}, \delta\Big) = 0$$

elde edilir. Böylece Lemma 2.14. gereğince

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_1{}^{(\mathcal{F})}\big(f, \delta\big) = 0$$

olur. (Anastassiou, 2002) deki Önerme 2 kullanılarak $f \in {}_{2\pi}C_{(\mathcal{F})}{}^{U}(\mathbb{R})$ olup bu da ispatı tamamlar. ■

Önerme 2.16. (Anastassiou, 2006) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fuzzy reel sayı değerli bir fonksiyon olsun. ω_1 alışılmış süreklilik modülü olmak üzere $\omega_1{}^{(\mathcal{F})}\big(f, \delta\big)$ ve $\omega_1\big(f_-{}^{(r)}, \delta\big)$, $\omega_1\big(f_+{}^{(r)}, \delta\big)$ ifadelerinin $\delta > 0$ için sonlu olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\omega_1{}^{(\mathcal{F})}\big(f, \delta\big) = \sup_{r \in [0,1]} \max\Big\{\omega_1\big(f_-{}^{(r)}, \delta\big), \omega_1\big(f_+{}^{(r)}, \delta\big)\Big\}$$

gerçeklenir.

Tanım 2.17. (Gal, 2000) $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $\triangle(P) < \delta$ koşulunu sağlayan $[a, b]$ aralığının her $P = \big\{[u, v] : \xi\big\}$ bölüntüsü için

$$D\left(\sum_{P}^{\star}(u - v) \odot f(\xi), I\right) < \epsilon$$

ise f fonksiyonu $I \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ elemanına fuzzyy-Riemann integrallenebilir denir ve $I := (FR)\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir.

Eğer $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a, b]\big)$ ise f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde fuzzy Riemann integrallenebilir olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca Gal (Gal, 2000) tarafından gösterilmiştir ki: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 2π -periyotlu fuzzy sürekli fonksiyon olmak üzere her $a \in \mathbb{R}$ için

$$(FR)\int_0^{2\pi} f(x)dx = (FR)\int_a^{a+2\pi} f(x)dx \left(= (FR)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right)$$

gerçeklenir.

Teorem 2.18. (Goetschel & Voxman, 1986) $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fuzzy sürekli fonksiyonu olsun. Her $r \in [a, b]$ için

$$\left[(FR)\int_a^b f(x)dx\right]^r = \left[\int_a^b (f)_-{}^{(r)}(x)dx, \int_a^b (f)_+{}^{(r)}(x)dx\right]$$

olur.

$f_{\pm}{}^{(r)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olduğu açıktır.

Şimdi de fuzzy Jackson operatörünü tanımlayalım ve bazı özelliklerini inceleyelim.

Tanım 2.19. (Gal, 2000) $f \in C_{2\pi}{}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ olsun. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$L_m(t) = \lambda_m{}^{-1}\left[\frac{sin(\frac{mt}{2})}{sin(\frac{t}{2})}\right]$$

ve $\int_{-\pi}^{\pi} L_m(t)dt = 1$ eşitliklerini sağlayan λ_m dizisi, $n' = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ ve

$$K_n(t) = L_{n'}(t)$$

olmak üzere

$$\big(J_n(f)\big)(x) = (FR)\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \odot f(x+t)dt$$

biçiminde tanımlanan operatöre fuzzy Jackson operatörü denir. Hatta $K_n(t) \geq 0$ olmak üzere n. dereceden çift trigonometrik polinom olarak algılanmaktadır. Diğer taraftan Gal (Gal, 2000) tarafından $\big(J_n(f)\big)(x)$'in bir fuzzy sürekli trigonometrik polinom olduğu gösterilmiştir. Ayrıca

$$\big(\tilde{J}_n(g)\big)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)g(x+t)dt, \mathrm{g} \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

operatörü ise reel Jackson operatörüne karşılık gelmektedir.

Teorem 2.20. (Gal, 2000) Her $f \in C_{2\pi}{}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$D\Big(\big(J_n(f)\big)(x), f(x)\Big) \leq C\omega_1{}^{(\mathcal{F})}\Big(f, \frac{1}{n}\Big)$$

gerçeklenecek biçimde f ve n den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır. (Anastassiou, 2002) deki Önerme 2 ve Lemma 2.15. gereğince $n \to \infty$ iken $\omega_1{}^{(\mathcal{F})}(f, \frac{1}{n}) \to 0$ olur ve $D^*(J_n f, f) \to 0$ gerçeklenir. (Goetschel & Voxman, 1986) daki Teorem 3.4 gereğince

J_n, bir fuzzy lineer operatördür. Teorem 2.18. gereğince her $r \in [0,1]$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\big[(J_n(f)(x))\big]^r &= \left[(FR)\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \odot f(x+t)dt\right]^r \\ &= \left[\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t){f_-}^{(r)}(x+t)dt, \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t){f_+}^{(r)}(x+t)dt\right]\end{aligned}$$

elde edelir. Yani her $r \in [0,1]$ için $(J_n f)_\pm{}^{(r)} = \tilde{J}_n({f_\pm}^{(r)})$ olur. Burada her $r \in [0,1]$ olmak üzere ${f_\pm}^{(r)} \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ biçimindedir. $f, g \in {C_{2\pi}}^{\mathcal{F}}(\mathbb{R})$ olsun öyle ki $f \succsim g$ olması için gerek ve yeter koşul her $r \in [0,1]$ için ${f_\pm}^{(r)} \geq {g_\pm}^{(r)}$ olmasıdır. Bu durumda her $r \in [0,1]$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t){f_\pm}^{(r)}(x+t)dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t){g_\pm}^{(r)}(x+t)dt$$

olur. Yani her $r \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$(J_n f)_\pm{}^{(r)} \geq (J_n g)_\pm{}^{(r)}$$

olması

$$(J_n f) \succsim (J_n g)$$

eşitsizliğine denktir. Bu ise J_n operatörünün bir fuzzy pozitif operatör olduğunu gösterir. Aslında fuzzy toplama ve fuzzy integral yardımıyla tanımlanan fuzzy operatörlerin hemen hepsi fuzzy pozitif lineer operatörlerdir.

Teorem 2.21. (Shisha & Mond, 1968a) K, $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlı reel fonksiyonların kümesi olsun. K üzerinde tanımlı $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, ...$ pozitif lineer operatörleri göz önüne alalım. f, her yerde sürekli ve 2π-periyotlu bir fonksiyon olmak üzere $1, cosx, sinx$ ve f, K kümesine ait olsun. $-\infty < a < b < +\infty$ ve $[a,b]$ üzerinde her $n \in [a,b]$ için $\tilde{L}_n(1)$ sınırlı olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\big\|\tilde{L}_n f - f\big\|_\infty \leq \big\|f\big\|_\infty \big\|\tilde{L}_n(1) - 1\big\|_\infty + \big\|\tilde{L}_n 1 + 1\big\|_\infty \omega_1\big(f, \mu_n\big) \tag{2.9}$$

gerçeklenir. Burada

$$\mu_n = \pi \left\|\tilde{L}_n\Big(sin^2\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\Big)(x)\right\|_\infty^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

$\|.\|_\infty$, $[a,b]$ üzerinde supremum normu ve ω_1, alışılmış süreklilik modülüdür. Özel olarak $\tilde{L}_n(1) = 1$ ise (4.1) eşitsizliği

$$\big\|\tilde{L}_n f - f\big\|_\infty \leq 2\omega_1\big(f, \mu_n\big) \tag{2.11}$$

eşitsizliğine indirgenir.

Uyarı 1: (3.2) eşitsizliğindeki $\tilde{L}_n\Big(sin^2\big(\frac{t-x}{2}\big)\Big)$ ifadesinde t bağımsız değişkendir (Shisha & Mond, 1968a).

Uyarı 2:

$$\mu_n{}^2 \leq \left(\frac{\pi^2}{2}\right)\Big(\big\|\tilde{L}_n(1) - 1\big\|_\infty + \|cosx\|_\infty \big\|\big(\tilde{L}_n(cost)\big)(x) - cosx\big\|_\infty \tag{2.12}$$

$$+\big\|sinx\big\|_\infty \big\|\big(\tilde{L}_n(sint)\big)(x) - sinx\big\|_\infty\Big) \tag{2.13}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $\tilde{L}_n F$, $F(t) = 1, sint, cost$ için $[a, b]$ aralığı üzerinde $n \to \infty$ iken F'ye düzgün yakınsak ise (4.4) eşitsizliği gereğince $\mu_n \to 0$ ve $\omega_1\big(f, \mu_n\big)\to 0$ elde edilir. Böylece (4.1) yardımıyla $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı her sürekli 2π-periyotlu f fonksiyonu için $[a, b]$ üzerinde $\tilde{L}_n f \to f$ elde edilir. Yani trigonometrik Korovkin teoremi için bir yaklaşım oranı elde edilir (Korovkin, 1960).

Şimdi de Teorem 2.21.'deki trigonometrik Shisha-Mond eşitsizliğinin fuzzy analoğunu verelim.

Teorem 2.22. (Anastassiou & Gal, 2006) $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $C_{2\pi}{}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ üzerinde fuzzy pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her $r \in [0, 1]$ ve her $f \in C_{2\pi}{}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ için

$$\big(L_n(f)\big)_\pm{}^{(r)} = \tilde{L}_n\big(f_\pm{}^{(r)}\big) \tag{2.14}$$

koşulunu gerçekleyen, $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operatör dizisine karşılık gelen $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ üzerindeki pozitif lineer operatörlerin $\{\tilde{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi mevcut olsun. $\{\tilde{L}_n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde n ye göre sınırlı olsun. $n \in \mathbb{N}$ için

$$D^*\big(L_n f, f\big)\leq \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty D^*\big(f, \tilde{o}\big) + \big\|\tilde{L}_n(1) + 1\big\|_\infty \omega_1{}^{(\mathcal{F})}\big(f, \mu_n\big) \tag{2.15}$$

gerçeklenir. Burada

$$\mu_n = \pi\left\|\tilde{L}_n\Big(sin^2\Big(\frac{t-x}{2}\Big)\Big)(x)\right\|_\infty^{\frac{1}{2}} \tag{2.16}$$

ve $\|.\|_\infty$, $[a, b]$ üzerinde supremum normudur. Özel olarak $\tilde{L}_n(1) = 1$ ise

$$D^*\big(L_n f, f\big)\leq 2\omega_1{}^{(\mathcal{F})}\big(f, \mu_n\big), n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Her $f \in {}_{2\pi}C_{\mathcal{F}}{}^{U}(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
D^*(L_n f, f) &= \sup_{x\in[a,b]} D\big((L_n f)(x), f(x)\big) \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big|(L_n f)_-{}^{(r)}(x) - (f)_-{}^{(r)}(x)\big|, \big|(L_n f)_+{}^{(r)}(x) - (f)_+{}^{(r)}(x)\big|\Big\} \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big|\tilde{L}_n(f_-{}^{(r)})(x) - (f)_-{}^{(r)}(x)\big|, \big|\tilde{L}_n(f_+{}^{(r)})(x) - (f)_+{}^{(r)}(x)\big|\Big\} \\
&= \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big\|\tilde{L}_n f_-{}^{(r)} - f_-{}^{(r)}\big\|_\infty, \big\|\tilde{L}_n f_+{}^{(r)} - f_+{}^{(r)}\big\|_\infty\Big\}
\end{aligned}$$

olup Teorem 2.18. gereğince

$$\begin{aligned}
D^*(L_n f, f) \leq \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{ &\big(\big\|f_-{}^{(r)}\big\|_\infty \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty \\
&+ \big\|\tilde{L}_n(1) + 1\big\|_\infty \omega_1\big(f_-{}^{(r)}, \mu_n\big)\big), \big(\big\|f_+{}^{(r)}\big\|_\infty \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty \\
&+ \big\|\tilde{L}_n(1) + 1\big\|_\infty \omega_1\big(f_+{}^{(r)}, \mu_n\big)\big)\Big\} \\
\leq\ & \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty \sup_{r\in[0,1]} \max\big(\big\|f_-{}^{(r)}\big\|_\infty, \big\|f_+{}^{(r)}\big\|_\infty\big) \\
&+ \big\|\tilde{L}_n(1) + 1\big\|_\infty \sup_{r\in[0,1]} \max\big\{\omega_1\big(f_-{}^{(r)}, \mu_n\big), \omega_1\big(f_+{}^{(r)}, \mu_n\big)\big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$D^*(L_n f, f) \leq \big\|\tilde{L}_n 1 - 1\big\|_\infty D^*(f, \tilde{o}) + \big\|\tilde{L}_n(1) + 1\big\|_\infty \omega_1{}^{(\mathcal{F})}\big(f, \mu_n\big)$$

bulunur. Bu da (4.7) eşitsizliğini ispatlar. $\tilde{L}_n(1) = 1$ alınırsa (4.9) eşitsizliği de kolaylıkla elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

Şimdi de fuzzy trigonometrik Korovkin teoremini verelim.

Teorem 2.23. (Anastassiou & Gal, 2006) $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $C_{2\pi}{}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ üzerinde fuzzy pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $\{\tilde{L_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ise her $r \in [0,1]$ ve her $f \in C_{2\pi}^{(\mathcal{F})}$ için

$$\big(L_n(f)\big)_\pm{}^{(r)} = \tilde{L}_n(f_\pm{}^{(r)})$$

koşulunu gerçekleyen, $\{\tilde{L_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ operatör dizisine karşılık gelen $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ üzerindeki pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca $x \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde $\tilde{L}_n(1) \to 1$, $\tilde{L}_n(sinx) \to sinx$, $\tilde{L}_n(cosx) \to cosx$ $(n \to \infty)$ olsun. Bu durumda her $f \in C_{2\pi}{}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$, $[a,b]$ üzerinde $n \to \infty$ iken $D^*\big(L_n f, f\big) \to 0$ gerçeklenir. Yani, $[a,b]$ üzerinde $L_n f \to f$ olur. Bu ise I, fuzzy birim operatör olmak üzere $[a,b]$ üzerinde $n \to \infty$ iken $L_n \to I$ anlamına gelmektedir.

İspat. (3.4) gereğince $n \to \infty$ iken $\mu_n \to 0$ diyebiliriz. Lemma 2.15. gereğince herhangi $f \in C_{2\pi}{}^{(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün süreklidir bu ise $\omega_1{}^{(\mathcal{F})}\big(f, \mu_n\big) \to 0$ olmasını gerektirir.

Ayrıca $\tilde{L}_n 1$, $[a,b]$ üzerinde n değişkenine göre sınırlıdır. (3.7) gereğince $[a,b]$ üzerinde $n \to \infty$ iken $D^*\big(L_n f, f\big) \to 0$ olur. ■

Şimdi de klasik Jackson operatörünü modifiye ederek elde ettiğimiz fuzzy Jackson operatörünün fuzzy trigonometrik Korovkin teoremini gerçeklediğini gösterelim.

Örnek 2.24. Tanım 4.8 ile verilen J_n fuzzy Jackson operatörünü göz önüne alalım. Jackson operatörünün tanımı gereğince her n için

$$\big(\tilde{J}_n(1)\big)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) 1 dt = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$$

olur. (Devore & Lorentz, 1993) deki Teorem 2.2 gereğince her $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için $c > 0$ evrensel bir sabit olmak üzere

$$\big\|\tilde{J}_n g - g\big\|_\infty \leq C\omega_1\Big(g, \frac{1}{n}\Big)$$

elde edilir. Ayrıca $n \to \infty$ iken $\mathbb{R}$ üzerinde $\tilde{J}_n(sinx) \to sinx$, $\tilde{J}_n(cosx) \to cosx$ gerçeklenir. Diğer taraftan (Shisha & Mond, 1968a) yardımıyla $c > 0$, n den ve f den bağımsız bir sabit olmak üzere $\mu_n \leq \frac{c}{n}$ bulunur. Teorem 2.22. ve (4.9) eşitsizliği yardımıyla $c > 0$ evrensel bir sabit ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$D^*\big(J_n f, f\big) \leq C\omega_1^{(\mathcal{F})}\Big(f, \frac{1}{n}\Big)$$

elde edilir.

Aslında son eşitsizlik Gal (Gal, 2000) tarafından verilen Teorem 2.20.'un alternatif bir ispatını vermektedir.

2.4. Fuzzy Pozitif Lineer Operatörler İle İstatistiksel Fuzzy Yaklaşımı

Bu Kısımda, A negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olduğunda, A-istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanarak fuzzy pozitif lineer operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremini ispatlayacağız.

Nuray ve Savaş (Nuray & Savaş, 1995) aşağıda verildiği gibi D metriğini kullanarak istatistiksel yakınsaklığı fuzzy teorisi için de tanımlamışlardır. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, fuzzy sayı değerli bir dizi olsun. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir fuzzy μ sayısına istatistiksel yakınsak olması için, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_j \frac{\#\{n \leq j : D(\mu_n, \mu) \geq \varepsilon\}}{j} = 0$$

sağlanmalıdır. $\#\{B\}$ sembolü, bir B kümesinin kardinalitesini göstermektedir. Bu limit kısaca st-$\lim_n D\big(\mu_n, \mu\big) = 0$ biçiminde gösterilir.

Sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklığın orijinal tanımını hatırlamak için (Fast, 1951), (Fridy, 1985) ve (Kolk, 1993) çalışmaları incelenebilir.

Şimdi $A = (a_{jn})$ sonsuz bir toplanabilme matrisi olsun. Verilen $x := (x_n)$ dizisi için, $Ax := \big((Ax)_j\big)_{j\in\mathbb{N}}$ ile gösterilen x dizisinin A dönüşüm dizisi

$$(Ax)_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} x_n$$

şeklinde tanımlanır. Burada serinin her j için yakınsak olduğu kabul edilmektedir. Eğer $\lim x = L$ olduğunda $\lim Ax = L$ oluyorsa A matrisine regüler matris denir. $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda yukarıdaki tanım kolayca genelleştirilebilir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n:D(\mu_n,\mu)\geq\varepsilon} a_{jn} = 0$$

oluyorsa $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, fuzzy dizisi $\mu \in \mathbb{R}_F$ sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir. Eğer yukarıdaki tanımda

$$c_{jn} := \begin{cases} \frac{1}{j}, & 1 \leq n \leq j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan birinci dereceden Cesàro matrisini göz önüne alırsak C_1-istatistiksel yakınsaklık yukarıda bahsedilen istatistiksel yakınsaklık ile çakışır. Ayrıca eğer A birim matris ile değiştirilirse, (Matloka, 1986) tarafından tanıtılan fuzzy yakınsaklık elde edilir. Sayı dizileri için A-istatistiksel yakınsaklığa ilişkin bazı temel sonuçlar (Freedman & Sember, 1981), (Miller, 1995) çalışmalarında bulunabilir.

2.4.1. İstatistiksel Fuzzy Korovkin Teorisi

Bu kısımda A-istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla bir fuzzy Korovkin teoremi vereceğiz. Elde ettiğimiz sonucun klasik durumdan daha güçlü olduğunu göstermek için fuzzy Bernstein polinomunu kullanarak fuzzy pozitif lineer operatörlerin bir örneğini vereceğiz. $C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ uzayının bir vektör uzay değil, sadece bir koni olduğunu üçüncü bölümde vurgulamıştık. Teorem 2.10.'de fuzzy Korovkin teoremi verilmişti. Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık kullanılarak fuzzy Korovkin teoremi genişletilecektir.

Teorem 2.25. (Anastassiou & Duman, 2008) $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big) \to C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ fuzzy pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her $x \in [a,b]$, $r \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ olmak üzere

$$\big\{L_n(f;x)\big\}_{\pm}^{(r)} = \tilde{L}_n\big(f_{\pm}^{(r)};x\big) \tag{2.18}$$

eşitliğini sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{L}_n : C\big([a,b]\big) \to C\big([a,b]\big)$ pozitif lineer operatörünü göz önüne alalım. Her $i = 0,1,2$ için

$$st_A - \lim_n \big\| \tilde{L}_n(e_i) - e_i \big\| = 0 \tag{2.19}$$

ise her $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ için

$$st_A - \lim_n D^*\big(L_n(f), f\big) = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$, $x \in [a,b]$ ve $r \in [0,1]$ olsun. Hipotez gereğince $f_{\pm}^{(r)} \in C\big([a,b]\big)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve en az bir $\delta > 0$ reel sayısı vardır öyle ki $|y-x| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $y \in [a,b]$ için $\big|f_{\pm}^{(r)}(y) - f_{\pm}^{(r)}(x)\big| < \varepsilon$ sağlanır. Her $y \in [a,b]$ için

$$\big|f_{\pm}^{(r)}(y) - f_{\pm}^{(r)}(x)\big| \leq \varepsilon + 2M_{\pm}^{(r)} \frac{(y-x)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. Burada $M_{\pm}^{(r)} := \|f_{\pm}^{(r)}\|$ biçiminde tanımlıdır. Şimdi $\tilde{L}_n$ operatörünün lineerlik ve pozitifliğini kullanarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\big|\tilde{L}_n(f_{\pm}^{(r)};x)\big| &\leq \tilde{L}_n\big(\big|f_{\pm}^{(r)}(y) - f_{\pm}^{(r)}(x)\big|;x\big) + M_{\pm}^{(r)}\big|\tilde{L}_n(e_0;x) - e_0(x)\big| \\
&\leq \varepsilon + \big(\varepsilon + M_{\pm}^{(r)}\big)\big|\tilde{L}_n(e_0;x) - e_0(x)\big| + \frac{2M_{\pm}^{(r)}}{\delta_2}\big|\tilde{L}_n((y-x)^2;x)\big|
\end{aligned}$$

olup bu da

$$\begin{aligned}
\big|\tilde{L}_n(f_{\pm}^{(r)};x)\big| &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M_{\pm}^{(r)} + \frac{2c^2 M_{\pm}^{(r)}}{\delta^2}\right)\big|\tilde{L}_n(e_0;x) - e_0(x)\big| \\
&\quad + \frac{4cM_{\pm}^{(r)}}{\delta^2}\big|\tilde{L}_n(e_1;x) - e_1(x)\big| + \frac{2M_{\pm}^{(r)}}{\delta^2}\big|\tilde{L}_n(e_2;x) - e_2(x)\big|
\end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Burada $c := \max\big\{|a|,|b|\big\}$ biçimindedir.
Ayrıca $K_{\pm}^{(r)}(\varepsilon) := \max\left\{\varepsilon + M_{\pm}^{(r)} + \frac{2c^2M_{\pm}^{(r)}}{\delta^2}, \frac{4cM_{\pm}^{(r)}}{\delta^2}, \frac{2M_{\pm}^{(r)}}{\delta^2}\right\}$ göz önüne alınıp $x \in [a,b]$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\big\|\tilde{L}_n(f_{\pm}^{(r)}) - f_{\pm}^{(r)}\big\| \leq \varepsilon + K_{\pm}^{(r)}(\varepsilon)\Big\{\big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\big\| + \big\|\tilde{L}_n(e_1) - e_1\big\| + \big\|\tilde{L}_n(e_2) - e_2\big\|\Big\} \tag{2.20}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi (5.1) yardımıyla

$$\begin{aligned} D^*(L_n(f), f) &= \sup_{x\in[a,b]} D\big(L_n(f;x), f(x)\big) \\ &= \sup_{x\in[a,b]} \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big|\tilde{L}_n(f_-^{(r)};x) - f_-^{(r)}(x)\big|, \big|\tilde{L}_n(f_+^{(r)};x) - f_+^{(r)}(x)\big|\Big\} \\ &= \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big\|\tilde{L}_n(f_-^{(r)}) - f_-^{(r)}\big\|, \big\|\tilde{L}_n(f_+^{(r)}) - f_+^{(r)}\big\|\Big\} \end{aligned}$$

bulunur. (5.3) ile yukarıdaki ifadeyi birleştirirsek
$K(\varepsilon) := \sup_{r\in[0,1]} \max\big\{K_-^{(r)}(\varepsilon), K_+^{(r)}(\varepsilon)\big\}$ olmak üzere

$$D^*\big(L_n(f), f\big) \leq \varepsilon + K(\varepsilon)\Big\{\big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\big\| + \big\|\tilde{L}_n(e_1) - e_1\big\| + \big\|\tilde{L}_n(e_2) - e_2\big\|\Big\} \tag{2.21}$$

elde ederiz. Şimdi verilen $\varepsilon' > 0$ için $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ seçelim ve ayrıca aşağıdaki kümeleri

$$\begin{aligned} U &:= \big\{n \in \mathbb{N} : D^*(L_n(f), f) \geq \varepsilon'\big\}, \\ U_0 &:= \Big\{n \in \mathbb{N} : \big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\big\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K(\varepsilon)}\Big\}, \\ U_1 &:= \Big\{n \in \mathbb{N} : \big\|\tilde{L}_n(e_1) - e_1\big\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K(\varepsilon)}\Big\}, \\ U_2 &:= \Big\{n \in \mathbb{N} : \big\|\tilde{L}_n(e_2) - e_2\big\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K(\varepsilon)}\Big\} \end{aligned}$$

göz önüne alalım, (5.4) eşitsizliğinden

$$U \subseteq U_0 \cup U_1 \cup U_2$$

olur ve her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n\in U} a_{jn} \leq \sum_{n\in U_0} a_{jn} + \sum_{n\in U_1} a_{jn} + \sum_{n\in U_2} a_{jn} \tag{2.22}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Eğer (5.5) eşitsizliğinin her iki tarafında $j \to \infty$ için limit alır ve (5.2) hipotezini kullanırsak

$$\lim_j \sum_{n\in U} a_{jn} = 0$$

bulunur. ■

- Eğer Teorem 2.25.'deki A matrisini birim matrisi ile değiştirirsek, Anastassiou (Anastassiou, 2005) tarafından verilen Teorem 2.10. elde edilir. Teorem 2.25.'i gerçekleyen fakat Teorem 2.10.'i gerçeklemeyen fuzzy pozitif lineer operatörlerin bir dizisini oluşturabiliriz.

$A = C_1 = (c_{jn})$ birinci dereceden Cesàro matrisini ve

$$u_n = \begin{cases} 1, & n \neq m^2, (m = 1, 2, ...) \\ \sqrt{n}, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.23}$$

(u_n) dizisini göz önüne alalım. $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ olmak üzere fuzzy Bernstein tipli polinomu

$$B_n^{(\mathcal{F})}(f;x) = u_n \odot \bigoplus_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \odot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda $f_{\pm}^{(r)} \in C\big([0,1]\big)$ olmak üzere

$$\left\{B_n^{(\mathcal{F})}(f;x)\right\}_{\pm}^{(r)} = \tilde{B}_n\left(f_{\pm}^{(r)};x\right) = u_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f_{\pm}^{(r)}\left(\frac{k}{n}\right)$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikleri kolaylıkla gözlemleyebiliriz:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n(e_0;x) &= u_n \\ \tilde{B}_n(e_1;x) &= x u_n \\ \tilde{B}_n(e_2;x) &= \left(x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\right) u_n. \end{aligned}$$

$j \to \infty$ iken

$$\sum_{n:|u_n-1|\geq\varepsilon} c_{jn} = \sum_{n:|u_n-1|\geq\varepsilon} \frac{1}{j} \leq \frac{\sqrt{j}}{j} = \frac{1}{\sqrt{j}} \to 0$$

olduğundan $st_{c_1} - \lim_n u_n = 1$ elde edilir. Her $i = 0, 1, 2$ için

$$st_{c_1} - \lim_n \left\| \tilde{B}_n(e_i) - e_i \right\| = 0$$

olup Teorem 2.26.'den her $f \in C_{\mathcal{F}}\big([0,1]\big)$ için

$$st_{c_1} - \lim_n u_n D^* \left(B_n^{(\mathcal{F})}(f), f \right) = 0$$

elde edilir. Ancak (5.6) ile verilen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alışılmış durumda yakınsak değildir. Dolayısıyla $\left\{B_n^{(\mathcal{F})}(f)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de f fonksiyonuna fuzyy yakınsak değildir.

2.4.2. İstatistiksel Fuzzy Oranı

Bu kısımda Teorem 2.25. de A-istatistiksel fuzzy yakınsaklığın oranını hesaplamaya çalışacağız. İlk olarak, A-istatistiksel anlamda yakınsaklık oranlarını tanımlayan bazı yöntemlerin (Duman ve ark., 2003)'de aşağıdaki gibi tanıtıldığını hatırlatalım.

$A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayıların pozitif artmayan bir dizisi olsun.

(a) Bir $x = (x_n)$ dizisi her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \frac{1}{p_j} \sum_{n:|x_n-L|\geq\varepsilon} a_{jn} = 0$$

oluyorsa $o(p_n)$ oranı ile L sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $n \to \infty$ iken $x_n - L = st_A - o(p_n)$ yazabiliriz.

(b) Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_j \frac{1}{p_j} \sum_{n:|x_n|\geq\varepsilon} a_{jn} < \infty$$

oluyorsa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $O(p_n)$ oranı ile A-istatistiksel sınırlıdır ve $n \to \infty$ iken $x_n = st_A - O(p_n)$ şeklinde ifade edilir.

(c) Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{n:|x_n-L|\geq\varepsilon p_n} a_{jn} = 0$$

oluyorsa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $o_m(p_n)$ oranı ile L değerine A-istatistiksel yakınsaktır ve $n \to \infty$ iken $x_n - L = st_A - o_m(p_n)$ şeklinde ifade edilir.

(d) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$$\lim_j \sum_{n:|x_n|\geq Mp_n} a_{jn} = 0$$

eşitliğini sağlayan pozitif bir M sayısı varsa $O_m(p_n)$ oranı ile A-istatistiksel sınırlıdır denir ve $n \to \infty$ iken $x_n = st_A - O_m(p_n)$ şeklinde ifade edilir.

(a) ve (b) deki oranlar, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimlerinden ziyade toplanabilme matrisinin terimleri tarafından kontrol edilir. Örnek olarak, I birim matrisi alınırsa, bazı $M > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{p_n} \leq M$ sağlayan herhangi bir artmayan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini seçersek herhangi bir yakınsak $(x_n - L)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $n \to \infty$ iken $x_n - L = st_A - o(p_n)$ ne kadar yavaş olursa olsun sıfıra gider. Böyle olumsuz bir durumdan kaçınmak için tanım (c) ve (d)'de verilen yakınsama oranını tanımlayan ölçü teorisindeki ölçüde yakınsama kavramı göz önüne alınabilir. Yani sırasıyla o_m ve O_m gösterimlerini kullanırız.

Dikkat edelim ki, fuzzy sayı değerli dizilerin ya da fuzzy sayı değerli fonksiyon dizilerinin yakınsaklığı için yukarıda belirtilen tüm tanımlarda mutlak değer metriğinin yerine D ve D^* metriklerini kullanmak zorundayız.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. (Gal, 2000) tarafından tanımlanan f fuzzy süreklilik modülü herhangi bir $0 < \delta \leq b - a$ için

$$\omega_1^{(\mathcal{F})}(f,\delta) := \sup_{x,y\in[a,b];|x-y|\leq\delta} D\big(f(x), f(y)\big)$$

tanımlandığını biliyoruz. Bu kavramlar yardımıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 2.26. (Anastassiou & Duman, 2008) $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)\to C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ fuzzy pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. (5.1) denklemini gerçekleyen her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{L}_n : C\big([a,b]\big)\to C\big([a,b]\big)$ pozitif lineer operatörünü göz önüne alalım. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif artmayan diziler olsun. $\{\tilde{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operatörleri

(i) $n \to \infty$ iken $\big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\big\| = st_A - o(a_n)$,

(ii) $\mu_n = \sqrt{\|\tilde{L}_n(\varphi)\|}$ ve her $x \in [a,b]$ için $\varphi(y) = (y-x)^2$ olmak üzere $n \to \infty$ iken $\omega_1^{\mathcal{F}}(f,\mu_n) = st_A - o(b_n)$

koşullarını gerçekler ise $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ olmak üzere her $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ için $n \to \infty$ iken

$$D^*(L_n(f), f) = st_A - o(c_n)$$

olur. Hatta "o" yerine "O" alınırsa benzer sonuçlar yine elde edilir.

İspat. Teorem 2.6. gereğince $M := D^*(f, \chi_{\{0\}})$ ve $\chi_{\{0\}}$, $\oplus$ işlemi için etkisiz eleman olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ için

$$D^*(L_n(f), f) \le M\big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\big\| + \big\|\tilde{L}_n(e_0) + e_0\big\|\omega_1^{(\mathcal{F})}(f,\mu_n)$$

olup, buradan

$$D^*(L_n(f), f) \le M\big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\big\| + \big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\big\|\omega_1^{(\mathcal{F})}(f,\mu_n) + 2\omega_1^{(\mathcal{F})}(f,\mu_n) \quad (2.24)$$

elde edilir.
Verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
V &:= \{n \in \mathbb{N} : D^*(L_n(f), f) \ge \varepsilon\},\\
V_0 &:= \Big\{n \in \mathbb{N} : \Big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\Big\| \ge \frac{\varepsilon}{3M}\Big\},\\
V_1 &:= \Big\{n \in \mathbb{N} : \Big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\Big\|\omega_1^{\mathcal{F}}(f,\mu_n) \ge \frac{\varepsilon}{3}\Big\},\\
V_2 &:= \Big\{n \in \mathbb{N} : \omega_1^{(\mathcal{F})}(f,\mu_n) \ge \frac{\varepsilon}{6}\Big\}
\end{aligned}$$

kümelerini göz önüne alalım. (5.7) gereğince $V \subseteq V_0 \cup V_1 \cup V_2$ olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}
V_1^{'} &:= \Big\{n \in \mathbb{N} : \Big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\Big\| \ge \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\Big\},\\
V_1^{''} &:= \Big\{n \in \mathbb{N} : \omega_1^{(\mathcal{F})}(f,\mu_n) \ge \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\Big\},
\end{aligned}$$

kümelerini tanımlarsak $V_1 \subseteq V_1^{'} \cup V_1^{''}$ olur. Bu ise $V \subseteq V_0 \cup V_1^{'} \cup V_1^{''} \cup V_2$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{c_j}\sum_{n\in V} a_{jn} \leq \frac{1}{c_j}\sum_{n\in V_0} a_{jn} + \frac{1}{c_j}\sum_{n\in V_1^{'}} a_{jn} + \frac{1}{c_j}\sum_{n\in V_1^{''}} a_{jn} + \frac{1}{c_j}\sum_{n\in V_2} a_{jn} \tag{2.25}$$

$c_j = \max\{a_j, b_j\}$ alınırsa (5.8) gereğince

$$\frac{1}{c_n}\sum_{n\in V} a_{jn} \leq \frac{1}{a_j}\sum_{n\in V_0} a_{jn} + \frac{1}{a_j}\sum_{n\in V_1^{'}} a_{jn} + \frac{1}{b_j}\sum_{n\in V_1^{''}} a_{jn} + \frac{1}{b_j}\sum_{n\in V_2} a_{jn} \tag{2.26}$$

elde edilir. Böylece (5.9) eşitsizliğinde $j \to \infty$ iken limit alınırsa ve hipotez (i) ve (ii) kullanılırsa

$$\lim_j \frac{1}{c_j}\sum_{n\in V} a_{jn} = 0$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.27. (Anastassiou & Duman, 2008) $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big) \to C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ fuzzy pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. (5.1) denklemini gerçekleyen $\{\tilde{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $C\big([a,b]\big)$ uzayından $C\big([a,b]\big)$ uzayına tanımlı pozitif lineer operatörünü göz önüne allım. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif artmayan diziler olsun. $\{\tilde{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operatörleri

(i) $n \to \infty$ iken $\big\|\tilde{L}_n(e_0) - e_0\big\| = st_A - o(a_n)$

(ii) $n \to \infty$ iken $\omega_1^{(\mathcal{F})}\big(f, \mu_n\big) = st_A - o(b_n)$

koşullarını gerçekler ise $d_n := \max\{a_n, b_n, a_n b_n\}$ olmak üzere $f \in C_{\mathcal{F}}\big([a,b]\big)$ için $n \to \infty$ iken

$$D^*(L_n(f), f) = st_A - o(d_n)$$

olur. Hatta "o" yerine "O" alınırsa benzer sonuçlar yine elde edilir.

3. MATERYAL VE METOT

İkinci bölümde verdiğimiz sonuçlarda Shisha-Mond eşitsizliği kullanılarak fuzzy Korovkin teorisi inşa edilmiştir. Bu tezde orjinal sonuçlarımızı elde ederken Shisha-Mond eşitsizliğinin benzeri olan Popa (Popa, 2019) tarafından elde edilen eşitsizlik kullanılacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde literatürde daha önce elde edilmemiş orjinal sonuçlarımızı vereceğiz.

4.1. Çok Değişkenli Trigonometrik Fuzzy Korovkin Teoremi

Bu kısımda, k-boyutlu durumlar için (Anastassiou & Gal, 2006) çalışmasında verilen trigonometrik fuzzy teoremini genişleteceğiz. Bu teoremin ispatında (Anastassiou & Gal, 2006) tarafından kullanılandan farklı bir yol izleyeceğiz. k=1 durumunda, bizim teoremimiz (Anastassiou & Gal, 2006) 'deki Teorem 5'de verilen yakınsamayı vermektedir. Ayrıca bizim teoremimizi gerçekleyen bir örnek vereceğiz.

Lemma 4.1. $\gamma : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to [0,\infty)$ her bir değişkene göre 2π periyotlu sürekli trigonometrik ayırma fonksiyonu ve $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^k)$ olsun. Bu durumda,
(1) her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\eta_\varepsilon > 0$ vardır öyle ki her pozitif lineer $U : C_{2\pi}(\mathbb{R}^k) \to C_{2\pi}(\mathbb{R}^k)$ operatörü ve her $s \in \mathbb{R}^k$ için

$$\big|U(f)(s) - f(s)\big| \leq \varepsilon U(1)(s) + \eta_\varepsilon U\big(\gamma(.,s)\big)(s) + \big|f(s)\big|\big|U(1)(s) - 1\big|$$

eşitsizliği gerçeklenir.
(2) her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\eta_\varepsilon > 0$ vardır öyle ki her pozitif lineer $U : C_{2\pi}(\mathbb{R}^k) \to C_{2\pi}(\mathbb{R}^k)$ operatörü için

$$\big\|U(f) - f\big\| \leq \varepsilon\big\|U(1)\big\| + \eta_\varepsilon \sup_{s\in\mathbb{R}^k} U\big(\gamma(.,s)\big)(s) + \big\|f\big\|\big\|U(1) - 1\big\|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Bu sonuç (Shisha & Mond, 1968b)'deki Shisha-Mond eşitsizliğinin bir benzeridir. Teorem 2.21.'nin alternatif ispatını bu eşitsizlik yardımıyla vereceğiz. Aşağıdaki sonuçta (Anastassiou & Gal, 2006) dan farklı olarak fuzzy süreklilik modülünü kullanmıyoruz.

Teorem 4.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n : C_{2\pi}^{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^k) \to C_{2\pi}^{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^k)$ fuzzy pozitif lineer oparatörlerin bir dizisi olsun. $\{\tilde{U_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, her $r \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $C_{2\pi}^{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^k)$ uzayı üzerinde pozitif lineer operatörlere karşılık gelen her $f \in C_{2\pi}^{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^k)$ için

$$\big(U_n(f)\big)_{\pm}^{(r)} = \tilde{U}_n(f_{\pm}^{(r)})$$

koşulunu gerçekleyen bir pozitif lineer operatör dizisi olsun. Ayrıca $\{\tilde{U}_n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $[0,2\pi]^k \subseteq \mathbb{R}^k$ üzerinde n'e göre sınırlı olduğunu kabul edelim. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon^{'} > 0$ vardır öyle ki

$$D^*\big(U_n f, f\big) \leq \varepsilon\big\|\tilde{U}_n(1)\big\| + \big\|\tilde{U}_n(1) - 1\big\|D^*(f,\tilde{o}) + \max\{\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon^{'}\} \sup_{s\in\mathbb{R}^k} \tilde{U}_n\big(\gamma(.,t)\big)$$

gerçeklenir.

İspat.

$$\begin{aligned}
D^*(U_nf,f) &= \sup_{s\in\mathbb{R}^k} D\big((U_n)(s),f(s)\big)\\
&= \sup_{s\in\mathbb{R}^k}\sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big|(U_nf)^r_-(s)-f^r_-(s)\big|,\big|(U_nf)^r_+(s)-f^r_+(s)\big|\Big\}\\
&= \sup_{t\in\mathbb{R}^k}\sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big|\tilde{U}_n(f^{(r)}_-)(s)-f^{(r)}_-\big|,\big|\tilde{U}_n(f^{(r)}_+)(s)-f^{(r)}_+\big|\Big\}\\
&= \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\big\|\tilde{U}_n(f^{(r)}_-)(s)-f^{(r)}_-\big\|_\infty,\big\|\tilde{U}_n(f^{(r)}_+)(s)-f^{(r)}_+\big\|_\infty\Big\}\\
&\le \sup_{r\in[0,1]} \max\Big\{\varepsilon\big\|\tilde{U}_n(1)\big\|+\eta_\varepsilon\sup_{t\in\mathbb{R}^k}\tilde{U}_n(\gamma(.,s))(s)+\big\|f^{(r)}_-\big\|\big\|\tilde{U}_n(1)-1\big\|,\\
&\varepsilon\big\|\tilde{U}_n(1)\big\|+\eta^{'}_\varepsilon\sup_{s\in\mathbb{R}^k}\tilde{U}_n(\gamma(.,s))(s)+\big\|f^{(r)}_+\big\|\big\|\tilde{U}_n(1)-1\big\|\Big\}\\
&\le \varepsilon\big\|\tilde{U}_n(1)\big\|+\big\|\tilde{U}_n(1)-1\big\|_\infty\sup_{r\in[0,1]}\max\Big\{\big\|f^{(r)}_-\big\|_\infty,\big\|f^{(r)}_+\big\|_\infty\Big\}\\
&+\max\{\eta_\varepsilon,\eta^{'}_\varepsilon\}\sup_{s\in\mathbb{R}^k}\tilde{U}_n\big(\gamma(.,s)\big)(t)\\
&= \varepsilon\big\|\tilde{U}_n(1)\big\|+\big\|\tilde{U}_n(1)-1\big\|D^*(f,\tilde{o})+\max\{\eta_\varepsilon,\eta^{'}_\varepsilon\}\sup_{s\in\mathbb{R}^k}\tilde{U}_n\big(\gamma(.,s)\big)(s).
\end{aligned}$$

■

Teorem 4.3. $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $C^{(\mathcal{F})}_{2\pi}(\mathbb{R}^k)$ üzerinde fuzzy pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $\{\tilde{U_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, her $r\in[0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $C^{(\mathcal{F})}_{2\pi}(\mathbb{R}^k)$ uzayı üzerinde pozitif lineer operatörlere karşılık gelen bir dizi olsun, herhangi bir $f\in C^{(\mathcal{F})}_{2\pi}(\mathbb{R}^k)$ için

$$\big(U_n(f)\big)^{(r)}_{\pm}=\tilde{U}_n(f^{(r)}_{\pm})$$

olsun. $\gamma:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\to[0,\infty)$ her bir değişkene göre 2π-periyotlu trigonometrik ayırma fonksiyonu ve her $s\in\mathbb{R}^k$ için $\gamma(s,s)=0$ olsun.
Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{U}_n(\gamma(.,s))(s)=0$$

$s\in\mathbb{R}^k$ değişkenine göre düzgün ve

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{U}_n(1)=1$$

$\mathbb{R}^k$ üzerinde düzgün ise her $f\in C^{(\mathcal{F})}_{2\pi}(\mathbb{R}^k)$ için $\mathbb{R}^k$ üzerinde düzgün olan

$$\lim_{n\to\infty}U_n(f)=f$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 4.2.'ye göre herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$D^*(U_nf,f) \le \varepsilon\big\|\tilde{U}_n(1)\big\| + \big\|\tilde{U}_n(1)-1\big\|_\infty D^*(f,\tilde{o}) + \max\{\eta_\varepsilon,\eta_\varepsilon^{'}\}\sup_{s\in\mathbb{R}^k}\tilde{U}_n\big(\gamma(.,s)\big)(s)$$

olduğu bilinmektedir. $s \in \mathbb{R}^k$'ya göre düzgün olarak $\lim_{n\to\infty}\tilde{U}_n\big(\gamma(.,s)\big)(s) = 0$ gerçeklendiğinden en az bir η_ε doğal sayısı vardır öyle ki

$$\sup_{s\in\mathbb{R}^k}\tilde{V}\big(\gamma(.,s)\big)(s) < \frac{\varepsilon}{\max\{\eta_\varepsilon,\eta_\varepsilon^{'}\}}, \text{ her } n \ge \eta_\varepsilon$$

yazabiliriz. Diğer taraftan $\mathbb{R}^k$ üzerinde düzgün olarak $\lim_{n\to\infty}\tilde{U}_n(1) = 1$ gerçeklendiğinden en az bir $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \ge m_\varepsilon$ için

$$\big\|\tilde{V}_n(1)-1\big\| \le \varepsilon$$

elde edilir ve her $n \in \mathbb{N}$ için en az bir $M > 0$ vardır öyle ki $\big\|\tilde{V}_n(1)\big\| \le M$ olur. Bu durumda her $n \ge \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ için

$$\begin{aligned} D^*(U_nf,f) &\le \varepsilon M + \max\{\eta_\varepsilon,\eta_\varepsilon^{'}\}\frac{\varepsilon}{\max\{\eta_\varepsilon,\eta_\varepsilon^{'}\}} + \varepsilon D^*(f,\tilde{o}) \\ &= \varepsilon\big(M+1+D^*(f,\tilde{o})\big) \end{aligned}$$

olup bu da ispatı tamamlar. ■

Örnek 4.4. Her $i = 1,2,...,k$ ve herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $K_n^i : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ olmak üzere

$$K_n^i(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{sin\frac{nx}{2}}{sin\frac{x}{2}}\right)$$

şeklinde tanımlanan Fejer çekirdek fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu çekirdek fonksiyonunu kullanarak fuzzy Fejer operatörü aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\big(H_n(x)\big)(s) = \frac{1}{(2\pi)^k n^k}\int_{[-\pi,\pi]^k} f(s_1-x_1,...,s_k-x_k)\left(\frac{sin\frac{nx_1}{2}}{sin\frac{x_1}{2}}\right)^2 ... \left(\frac{sin\frac{nx_k}{2}}{sin\frac{x_k}{2}}\right)^2 dx_1...dx_k.$$

$\gamma : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to [0,\infty)$ her bir değişkene göre 2π periyotlu

$$\gamma(t,s) = sin^2\Big(\frac{t_1-s_1}{2}\Big) + ... + sin^2\Big(\frac{t_k-s_k}{2}\Big)$$

biçiminde tanımlanan trigonometrik ayırma fonksiyonunu göz önüne alalım. $\gamma(.,s) \in C_{2\pi}^k(\mathbb{R}^k)$ olduğunu kolaylıkla görülebilir. (Shisha & Mond, 1968b)'deki sonuç 3-(i) gereğince $s \in \mathbb{R}^k$'a göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tilde{H}_n(\gamma(.,s))\right)(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^k n^k} \int_{[-\pi,\pi]^k} f(s_1-x_1,...,s_k-x_k) \left(\frac{sin\frac{nx_1}{2}}{sin\frac{x_1}{2}}\right)^2 ... \left(\frac{sin\frac{nx_k}{2}}{sin\frac{x_k}{2}}\right)^2 dx_1...dx_k$$

elde edilir. Bununla birlikte $\mathbb{R}^k$ üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} H_n(1) = (1)$$

ifadesi elde edilir. Bu operatör Teorem 4.3.'ün koşullarını sağlar. Ayrıca diğer bir örnek ise Jackson çekirdek fonksiyonu kullanılarak verilebilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Korovkin teoremi yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu teorem Weierstrass teoremini gerçekleyen genel operatörler için yeter koşullar vermiştir. Böylece pozitif lineer operatörler ile yaklaşım teorisi ortaya çıkmıştır. Korovkin teoremi, üzerinde çalışılan uzaylar değiştirilerek veya test fonksiyonları değiştirilerek, bununla birlikte toplanabilme teorisi ile harmanlanarak genişletilmiştir. Bu tezde Zadeh tarafından ortaya atılan fuzzy küme teorisi yardımıyla Anastassiou ve arkadaşları tarafından verilen fuzzy Korovkin teoreminin hem cebirsel hem de trigonometrik versiyonları incelenmiştir. Ayrıca toplanabilme teorisi yardımıyla Anastassiou ve Duman tarafından elde edilen sonuçlar incelenmiştir. Bununla birlikte Shisha-Mond eşitsizliğinin benzeri kullanılarak fuzzy trigonometrik Korovkin teoreminin k-boyutlu durum için genişletilmiş olup orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez, bu konuda çalışmak isteyen araştırmacılar için iyi bir altyapı oluşturma niteliğine sahiptir.

6. KAYNAKLAR

Anastassiou, G. A. (2002). Rate of convergence of fuzzy neural network operators univariate case. *Journal of Fuzzy Mathematics*, *10*, 755–780.

Anastassiou, G. A. (2005). On basic fuzzy korovkin theory. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, *50*, 3–10.

Anastassiou, G. A. (2006). *Fuzzy korovkin theorems and inequalities*. Springer.

Anastassiou, G. A., & Duman, O. (2008). Statistical fuzzy approximation by fuzzy positive linear operators. *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, *55*, 573–580.

Anastassiou, G. A., & Gal, S. G. (2006). On fuzzy trigonometric korovkin theory. *Computers and Mathematics with Applications*, *11*, 385–395.

Congxin, W., & Ming, M. (1991). On embedding problem of fuzzy number space: Part 1. *Fuzzy Sets and Systems*, *44*, 33–38.

Congxin, W., & Zengtai, G. (2001). On henstock integral of fuzzy number valued functions (i). *Fuzzy Sets and Systems*, *120*, 523–532.

Devore, R., & Lorentz, G. G. (1993). *Constructive approximation*. Springer-Verlag.

Duman, O., Khan, M. K., & Orhan, C. (2003). A-statistical convergence of approximating operators. *Math. Inequal. Appl.*, *6*, 689–699.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, *2*, 241–244.

Freedman, A. R., & Sember, J. J. (1981). Densities and summability. *Pasific J. Math.*, *95*, 293–305.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, *5*, 301–313.

Gal, S. (2000). Approximation theory in fuzzy setting. *Chapman Hall/CRC*, 617–666.

Goetschel, R. J., & Voxman, W. (1986). Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, *18*, 31–43.

Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, *24*, 301–317.

Kolk, E. (1993). Matrix summability of statistically convergent sequences. *Analysis*, *13*, 77–83.

Korovkin, P. P. (1960). *Linear operators and approximation theory*. Hindustan Publ. Corp.

Matloka, M. (1986). Sequences of fuzzy numbers. *Busefal*, *28*, 28–37.

Miller, H. I. (1995). A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *347*, 1811–1819.

Nuray, F., & Savaş, E. (1995). Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. *Math. Slovaca*, *45*, 269–273.

Popa, D. (2019). Korovkin type results for multivariate continuous periodic functions. *Results Math.*, *74*, 1–19.

Shisha, O., & Mond, B. (1968a). The degree of approximation to periodic functions by linear positive operators. *Approx J. Theory*, *1*, 335–339.

Shisha, O., & Mond, B. (1968b). The degree of convergence of sequences of linear positive operators. *Nat. Acad. of Sci. U.S.*, *60*, 1196–1200.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, *8*, 338–353.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Selma EKİCİ
Uyruğu:	T.C.
ORCID Numarası:	0000-0003-4074-6010

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte:	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2019
Yüksek Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü:	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2024

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Uluslarası Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler 1. Selma Ekici, 2023, Multivariate Trigonometric Korovkin Theorem in Fuzzy Setting, 2nd International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences, (ICOMSS-2023), 05-07 June 2023, Konya-Turkey.