T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEISENBERG GRUPLARINDA SCHRÖDINGER OPERATÖRLERİNE KARŞILIK GELEN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN MORREY TİPLİ UZAYLARDA SINIRLILIĞI

Mehtap ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR
2024

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEISENBERG GRUPLARINDA SCHRÖDINGER OPERATÖRLERİNE KARSILIK GELEN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN MORREY TİPLİ UZAYLARDA SINIRLILIĞI

MEHTAP ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
PROF. DR. ALİ AKBULUT

KIRŞEHİR
2024

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAYI

Bu Doktora Tezi ..../.../2024 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Değerlendirilmiş ve Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Kabul Edilmiştir.

Prof. Dr. Ali AKBULUT (Danışman) ....

Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV (Jüri) ....

Doç. Dr. Veysel NEZİR (Jüri) ....

Bu Tez Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında hazırlanmış ve onaylanmıştır.

Tez No:

Prof. Dr. Rüştü HATİPOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, tablo ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. .../.../2024

Öğrenci
Mehtap ÇELİK

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Sayın Prof. Dr. Ali AKBULUT 'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Beni dünyaya getiren rahmetli annem Güldane SULAR ve rahmetli babam Zeki SULAR'a, tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen rahmetli teyzem Fethiye BENLİ ve eniştem Abdurrahman BENLİ'ye, her koşulda psikolojik desteğini esirgemeyip yanımda olan kıymetli eşim Mustafa ÇELİK'e de ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Nisan, 2024 Mehtap ÇELİK

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEISENBERG GRUPLARINDA SCHRÖDINGER OPERATÖRLERİNE KARSILIK GELEN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN MORREY TİPLİ UZAYLARDA SINIRLILIĞI

Mehtap ÇELİK

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: **Prof. Dr. Ali AKBULUT**
Yıl: 2024 **Sayfa: 39**
Jüri: **Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV**
Prof. Dr. Ali AKBULUT
Doç. Dr. Veysel NEZİR

Bu yüksek lisans tezinde, Heisenberg gruplarında tanımlanan Schrödinger operatörlerine karşılık gelen kesirli integral operatörlerinin bazı Morrey tipli uzaylarda sınırlılığı hakkında bilgi verilecektir. İlk bölümde, literatürde bu konu ile ilgili araştırmaları olan bir çok matema- tikçi hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın amacından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, tez konusunda geçen bazı temel tanım ve özellikler verilecektir. Üçüncü bölümde, tez konusu ile ilgili materyal ve metotlar hakkında kısa bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, Heisenberg gruplarında tanımlanan Morrey tipli uzaylarda Schrödinger operatörlerine karşlık gelen kesirli integral operatörlerinin sınırlılığı ile ilgili sonuçlara yer verilerek, Heisenberg gruplarında Schrödinger operatörlerine karşlık gelen kesirli integral operatörlerinin Morrey tipli uzaylarda sınırlılığı ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir. Son bölümde, tez konusunun araştırılmasındaki amaç ve hedefi hakkında kısaca bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Heisenberg Grupları, Schrödinger operatörleri, Kesirli integral operatörleri, Morrey Tipli Uzaylar.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

THE BOUNDEDNESS OF FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS ON MORREY-TYPE SPACES ASSOCIATED WITH SCHRÖDINGER OPERATORS ON THE HEISENBERG GROUPS

Mehtap ÇELİK

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: **Prof. Dr. Ali AKBULUT**
Year: 2024 Pages: 39
Juries: **Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV**
Prof. Dr. Ali AKBULUT
Assoc. Prof. Dr. Veysel NEZİR

In this master's thesis, information will be given about the limitations of fractional integral operators corresponding to Schrödinger operators defined in Heisenberg groups in some Morrey type spaces. In the first part, information is given about many mathematicians who have done research on this subject in the literature and the purpose of this study is mentioned. In the second part, some basic definitions and features of the thesis will be given. In the third part, brief information is given about the materials and methods related to the thesis topic. In the fourth part, the results regarding the limitations of fractional integral operators corresponding to Schrödinger operators in Morrey type spaces defined in Heisenberg groups are given, and the results regarding the limitations of fractional integral operators corresponding to Schrödinger operators in Heisenberg groups in Morrey type spaces are given. results are included. In the last part, the purpose and objective of researching the thesis topic is briefly mentioned.

Keywords: Heisenberg Groups, Schrödinger operators, Fractional integral operators, Morrey-Type Spaces.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$B(x,r)$	: x merkezli, r yarıçaplı yuvar
$\lvert B(x,r)\rvert$	: $B(x,r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü
$\lVert\cdot\rVert_{L^p}$	: Lebesgue normu
$L^p(\mathbb{R}^n)$	: Lebesgue uzayı
$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$	: f fonksiyonu lokal integrallenebilir
$L_{p,\lambda}$	: Morrey uzayı
$M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$	: Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
$\mathbb{H}_n$	: Heisenberg grubu
$RH_{Q/2}$	: Ters Hölder sınıfları
$\triangle_{\mathbb{H}_n}$	: Alt-Laplasyan
$L=-\Delta_{\mathbb{H}_n}+V$	: Schrödinger operatörü
I_α	: Kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli)
T	: Singüler integral operatörü

1. GİRİŞ

Harmonik analizin klasik operatörlerinin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki sınırlılığı yoğun bir şekilde birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Elde edilen sonuçlar, kısmi diferansiyel denklemler teorisinde verimli bir şekilde uygulanabilmektedir. Kısmi diferansiyel teorisinde son yıllarda genel Morrey tipli uzaylar önemli bir rol oynamaktadır. Son yüzyılın başında bu alanda önemli gelişmeler oldu. Özellikle, 1994 yılında V.S. Guliyev doktora tezinde lokal Morrey tipli genel uzaylarda klasik operatörlerin incelenmesinde, harmonik analizde önemli bir yeri olan Guliyev lokal metodu ile konuya farklı bir bakış geliştirmiştir. 2000'li yıllarda V.S.Guliyev ve V.I. Burenkov, lokal global Morrey tipli genel uzaylarda klasik operatörlerin incelenmesi ile ilgili harmonik analizde önemli yeni Hardy oparatörlerinin monoton fonksiyonlar konusunda sınırlılığı ile ilgili metodu ile konuya farklı bir bakış açısı geliştirerek operatörlerinin sınırlılığı ile gerek ve yeter koşullarını geliştirmişlerdir. Geliştirilen yöntemlerin önemi, Schrödinger operatörüne karşılık gelen diferansiyel denklemlerin çözümleri için düzenlilik teorisine müteakip uygulama ile Schrödinger operatörüne karşılık gelen singüler tipli integral operatörler sınıflarının sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşulların elde edilmesi gerçeğidir. Sonuç olarak, belirli bir sayısal parametreler aralığı için yeterli şartlar bulunmaktadır. Schrödinger operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörlerinin sınırlılığını bir genelleştirilmiş lokal Morrey tipli uzaydan diğerine sağlayan fonksiyonel parametrelerden elde edilir. Dolayısıyla bu tür sonuçlar, çağdaş reel analizin geliştirilmesi ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen kısmi diferansiyel denklemlerin uygulamaları için çok önemlidir.

Ters Hölder eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan V potansiyelli $-\triangle+V$ formundaki Schrödinger operatörüne karşılık gelen harmonik analizde L_p (Lebesgue) ve $M_{p,\lambda}$ (Morrey) uzaylarının özel bir yeri vardır. Ayrıca Schrödinger operatörüne karşılık gelen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılması da bu uzaylarda önemli bir yere sahiptir.

"Heisenberg grubu" terimi, matematikte Heisenberg cebiri veya Heisenberg grubu olarak bilinen bir konsepti ifade eder. Heisenberg cebiri, kuantum mekaniği ve topoloji gibi alanlarda önemli olan matematiksel bir yapıdır. Heisenberg cebiri, Heisenberg cebiri adını taşıyan matrislerin oluşturduğu bir Lie cebiridir. Bu cebir, özellikle kuantum mekaniği ve kuantum alan teorisi gibi alanlarda kullanılır. Heisenberg cebiri, Heisenberg belirsizlik ilkesiyle de bağlantılıdır ve bu ilkenin matematiksel olarak ifade edilmesinde kullanılır. Genellikle bir n-boyutlu vektör uzayı üzerinde tanımlanan Heisenberg grubu, Heisenberg cebirinin bir örneğidir. Bu grup, nxn boyutlu üst üçgensel matrislerle tanımlanır ve matrislerin çarpımı işlemi Heisenberg grubu operasyonunu oluşturur.

$\mathbb{H}_n$ Heisenberg gruplarında

$$L = -\Delta_{\mathbb{H}_n} + V$$

Schrödinger operatörü, burada V, $RH_{Q/2}$ ters Hölder sınıflarına ait negatif olmayan potansiyeli ve Q, $\mathbb{H}_n$ Heisenberg gruplarının homojen boyutudur. $\mathcal{I}_\beta^L$, L operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörü olsun.

Bu yüksek lisans tezinde, $\mathcal{I}_\beta^L$ operatörünün, $LM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarında ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığı, $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$, $1/p - 1/q = \beta/Q$ uzayına sınırlılığında (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeter şartları incelemiştir.

Heisenberg gruplarının fark ve sürekli versiyonları, matematiğin birçok alanında özellikle Fourier analiz, çok değişkenli kompleks analiz, geometri ve topoloji de uygulamalarında yer almaktadır. Tezde Heisenberg gruplarının bazı temel sonuçlarına yer verilecektir [6, 16, 17].

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, çalışmamız ile ilgili olan temel kavramlar, uzaylar ve operatörler hakkında genel bilgilere, bazı temel tanımlara ve ana sonuçlarımızın ispatında kullanılan araçlara yer verilmiştir.

2.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde, bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.2. Normlu Uzay

Herhangi bir $x, y \in X$ için, $X \times X$ kartezyen çarpımında tanımlı negatif olmayan reel değerli bir ρ fonksiyonu:

(i) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (özdeşlik aksiyomu);
(ii) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$ (üçgen eşitsizliği);
(iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (simetri aksiyomu)

koşulları sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde metrik uzaklık denir. Üzerine bir metrik eklemenin mümkün olduğu bir X kümesinede ölçülebilir ve (X, ρ) ikilisine metrik uzay denir [44].

Örnek 2.1. 1) Herhangi bir küme üzerinde metrik uzaklık mevcutsa,

$$x = y \Rightarrow \rho(x,y) = 0 \quad \text{ve} \quad x \neq y \quad \Rightarrow \rho(x,y) = 1.$$

2) $\mathbb{R}^n$ uzayında çeşitli metrikler mümkündür:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2};$$

$$\rho(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|;$$

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|;$$

burada $\{x_i = x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \{y_i = y_1, y_2, \ldots, y_n\} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [44].

X bir vektör uzayında reel veya kompleks sayılardan reel sayılara $x \to \|x\|$ dönüşümü:
(i) $\|x\| \geq 0$ ve $x = 0$ için $\|x\| = 0$;

(ii) λ skaleri için $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
(iii) Her $x, y \in X$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)
koşullarını sağlıyorsa $\|x\|$ sayısına x elemanın normu denir [35].

Belirli bir norma sahip X vektör uzayına normlu uzay denir. Bir norm, X üzerinde $dist(x, y) = \|x - y\|$ formülüyle bir metrik oluşturur, dolayısıyla tanımlanan bu metrikle uyumlu bir topoloji de vardır. Böylece normlu bir uzay, bir topolojik vektör uzayının doğal yapısı ile donatılmış olur. Ayrıca bu metrik ile, tamlanmış bir normlu uzay Banach uzayı olarak adlandırılır. Her normlu uzayın, bir Banach tamlaması vardır.

Bir topolojik vektör uzayının, topolojisi bazı normlarla uyumlu ise normlanabilir olduğu söylenir. Normluk, dışbükey sınırlı bir sıfır komşuluğunun varlığına eşdeğerdir [35].

Normlu bir X vektör uzayındaki norm, bir iç çarpım tarafından üretilir (yani X, bir pre-Hilbert uzaya izometrik olarak izomorftur) gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in X$ için,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Aynı X vektör uzayı üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ iki norm, aynı topolojiye sahip iseler bu normlar eşdeğer olarak adlandırılır. Bu da C_1 ve C_2 gibi iki sabitin varlığıyla aynı anlama gelir, öyle ki $\forall x \in X$ için

$$\|\cdot\|_1 \leq C_1 \|\cdot\|_2 \leq C_2 \|\cdot\|_1.$$

X vektör uzayı, her iki normda da tam ise bu durum eşdeğerliklerinin benzer bir sonucudur. Böylece

$$\|x_n - a\|_1 \to 0, \quad \|x_n - b\|_2 \to 0$$

aynı olduğu anlamına gelir yani $a = b$.

Her topolojik vektör uzayı, lokal olarak konveks olduğu kabul edilse bile, sürekli bir norma sahip değildir. Örneğin, koordinat bazında yakınsama topolojisine sahip doğruların sonsuz çarpımı üzerinde sürekli bir norm yoktur. Sürekli bir normun yokluğu, bir topolojik vektör uzayının diğerine sürekli gömülmesinin önünde açık bir engel olabilir.

Y, normlu bir X uzayının kapalı alt uzayı ise bu durumda Y tarafından ortak kümelerin X/Y bölüm uzayının normu

$$\|\tilde{x}\| = \inf\{\|x\| : x \in \tilde{x}\} \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Bu norm altında X/Y bölüm uzayı normlu bir uzaydır.

$X \to X/Y$ bölüm dönüşümü altındaki bir x öğesinin görüntüsünün normuna, x'ın Y'ye göre bölüm normu denir.

Normlu bir X uzayındaki ψ sürekli doğrusal fonksiyonellerin X^* toplamı,

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(x)| \colon \|x\| \leq 1\} \tag{2.2}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tüm fonksiyonellerin normları, orijinal uzayın birim yuvarının uygun noktalarında ancak ve ancak uzayın dönüşlü olması durumunda elde edilir.

Normlu bir X uzayından normlu Y bir uzayına A sürekli (sınırlı) lineer operatörlerinin $L(X,Y)$ tamlığı,

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \colon \|x\| \leq 1\}$$

normuna göre bir normlu uzaydır. Bu norm altında $L(X,Y)$ uzayı Y ise tamdır. $X = Y$ tam olduğunda , $L(X) = L(X,X)$ uzayında operatörlerin çarpımı (birleşimi) yani bir Banach cebiri olur, çünkü operatör normu

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \quad \|I\| = 1,$$

burada I özdeşlik operatörüdür (cebirin birim elemanıdır). $L(x)$ üzerindeki diğer eşdeğer normlar benzer koşula tabi olması ilginçtir. Bu tür normlara bazen cebirsel veya halkalı denir. Cebirsel normlar, X eşdeğerini yeniden düzenleyerek ve karşılık gelen operatör normlarını alarak elde edilebilir; ancak $\dim X = 2$ için bile $L(x)$ üzerindeki tüm cebirsel normlar bu şekilde elde edilemez.

2.3. Ölçü Uzayı

Tanım 2.2. (**Borel**). $f^{-1}(A)$ fonksiyonu herhangi bir A açık kümesi için bir Borel kümesi ise bu durumda iki topolojik uzay arasındaki $f : X \to Y$ dönüşümüne Borel veya Borel ölçülebilir denir. (Aynı zamanda, Borel ölçülebilir, X in Borel kümelerinin σ-cebirinin açık kümeleri içeren en küçük σ-cebiridir [50].)

Tanım 2.3. (**σ-cebiri**)

X bir küme olsun. $\mathcal{B} \subset 2^X$ boş olmayan ailesi aşağıdaki özelliklere sahipse bir *σ-cebiri* denir.

(1) $\mathcal{B}$ tamlık altında kapalıdır. Yani, $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$.

(2) $\mathcal{B}$ sayılabilir birleşim altında kapalıdır. Yani, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}$,

$A_1, A_2, A_j, \in \mathcal{B}$ [50].

Tanım 2.4. (**Ölçü**) $\mathcal{B}$, X kümesi üzerinde bir σ-cebiri olsun. $\mu{:}\mathcal{B} \to [0,\infty]$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahipse bir ölçü denir.

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.
(2) $A_1, A_2, A_j, \in \mathcal{B}$ ayrık ise, yani, $\forall i \neq j$ için $A_i \cap A_j = l$, bu durumda
$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$ [50].

Tanım 2.5. (Düzenli bir ölçü)

μ, μ'ın iç ve dış düzenliliğe sahip olduğu anlamına gelir. Kesin olmak gerekirse, eğer μ düzenli bir Borel ölçüsü (Radon ölçüsü) ise bu durumda sonlu ölçünün her bir Borel E kümesi için iç düzenlilik

$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$, E nin tüm kompakt alt kümeleri üzerinedir.$\}$

ve dış düzenlilik

$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$, E içeren tüm açık kümeleri üzerinedir$\}$ [50].

2.3.1. Lebesgue Ölçüsü

Lebesgue ölçüsü H. Lebesgue [36] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

n-boyutlu aralıkların bir fonksiyonu olarak hacmin daha geniş bir kümeler sınıfı olan $\mathcal{A}$'a, yani Lebesgue ölçülebilir kümeler, bir λ ölçüsünün genişletilmesi olan sayılabilir-toplanabilir bir kümedir. $\mathcal{A}$ sınıfı, Borel kümelerinin sınıfını içerir ve $A \cup B$ biçimindeki tüm kümelerden oluşur, burada $B \subset B_1$, $A, B_1 \in \mathcal{B}$ ve $\lambda(B_1) = 0$.

Herhangi bir $A \in \mathcal{A}$ için bir tane

$$\lambda(A) = \inf \sum_j \lambda(I_j), \tag{2.3}$$

sahiptir, burada infimum değeri $\{I_j\}$ aralığının tüm olası sayılabilir aileleri üzerinden alınır, öyle ki $A \subset \cup I_j$. (2.3) eşitsizliği her bir $A \subset \mathbf{R}^n$ için geçerlidir ve bir λ^*($\mathcal{A}$ üzerinde λ ile çakışan) küme fonksiyonu tanımlar, dış Lebesgue ölçüsü olarak adlandırılır. Bir A kümesinin $\mathcal{A}$ kümesine ait olaması için gerek ve yeter koşul her bir sınırlı I aralığı için

$$\lambda(I) = \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(I \setminus A);$$

her $A \subset \mathbf{R}^n$ için

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subset U, U \text{ açık}\};$$

ve her $A \in \mathcal{A}$ için

$$\lambda(A) = \lambda^*(A) = \sup\{\lambda(F) : A \supset F, F \text{ kompakttır}\};$$

$\lambda^*(A) < \infty$ ise bu durumda son eşitlik $A \in \mathcal{A}$ elemanları için sağlanır; O, $\mathbf{R}^n$ de bir ortagonal operatör ve $a \in \mathbf{R}^n$ ise bu durumda her bir $A \in \mathcal{A}$ için $\lambda(OA + a) = \lambda(A)$.

$L^0(\mu)$ tüm ölçülebilir fonksiyonlarının bir uzayı olsun. Öklid uzayında, tüm Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlarının kümesi $L^0(\mathbb{R}^n)$ ile tanımlanır. $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ değeri $\mathbb{C}$ veya $[0, \infty]$ içinde olabilir.

2.3.2. Haar Ölçüsü

Haar ölçüsü A. Haar [29] tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Tüm kompakt alt kümelerin ailesi tarafından oluşturulan, lokal olarak kompakt bir G grubunun E alt kümelerinin M σ-halkası üzerindeki, G nin tüm kompakt alt kümelerinde sonlu değerlerini alan, sıfır olmayan bir pozitif μ ölçüsü ve sol değişmezlik koşulu:
$gE = \{gx \in G \mid x \in E\}$ olacak şekilde

$$\forall E \in M,\ \forall g \in G : \qquad \mu(E) = \mu(gE),$$

veya sağ değişmezlik koşulu:
$Eg = \{xg \in G \mid x \in E\}$ olacak şekilde

$$\forall E \in M,\ \forall g \in G : \qquad \mu(E) = \mu(Eg),$$

yerine getiren ölçüye Haar ölçüsü olarak tanımlanır, yani, sağ veya sol değişmezliği yerine getiren ölçüdür.

Her bir Haar ölçüsü μ-düzenli, yani,

$$\forall E \in M : \qquad \mu(E) = \sup(\{\mu(K) \in \mathbf{R}_{\geq 0} \mid K \subseteq E \text{ ve } K \text{ bir kompaktumdur}\}).$$

A. Haar [29] tarafından, sol değişmez (ve ayrıca sağ değişmez) bir Haar ölçüsü (G grubunun ayrılabilir olduğu ek varsayımı altında) mevcut ve pozitif bir faktöre kadar tek olduğu gösterilmiştir.

$f \in C_c(G)$ ise bu durumda f fonksiyonu G de sol değişmeyen bir Haar ölçüsüne göre integrallenebilir ve karşılık gelen integral, sol değişmez, yani,

$$\forall g_0 \in G : \qquad \int_G f(g)\,\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g_0 g)\,\mathrm{d}\mu(g).$$

Sağ değişmez bir Haar ölçüsü benzer özelliğe sahiptir. Tüm G grubunun Haar ölçüsü, ancak ve ancak G kompaktsa sonludur.

μ, G üzerinde bir sol değişmez bir Haar ölçüsü ise bu durumda aşağıdaki eşitlik gerçeklenir:

$$\forall f \in C_c(G),\ \forall g_0 \in G : \qquad \int_G f(g g_0^{-1})\,\mathrm{d}\mu(g) = \Delta(g_0) \int_G f(g)\,\mathrm{d}\mu(g),$$

burada Δ, G'ın $\mathbf{R}^+$ pozitif reel sayıların f seçimine bağlı olmayan çarpım grubuna sürekli bir homomorfizmasıdır.

Δ homomorfizması, G nin modüler fonksiyonu olarak adlandırılır; $\Delta(g^{-1})\ \mathrm{d}\mu(g)$ ölçüsü, G üzerinde sağ değişmez Haar ölçüsüdür. Eğer her bir $g \in G$ için $\Delta(g) = 1$ ise bu durumda G tek model olarak adlandırılır; yani, sol değişmez Haar ölçüsü aynı zamanda sağ değişmez dir ve (iki taraflı) değişmez olarak da adlandırılır. Ayrıca bir G gurubunun tekmodelliği, G üzerindeki her sol değişmez Haar ölçüsünün μ da ters değişmez olduğu gerçeğine eşdeğerdir, yani, her $E \in M$ için $\mu(E^{-1}) = \mu(E)$.

Örnek 2.6. 1) $\mathbf{R}$ toplama grubu ve $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (dairenin dönme grubu) bölüm grubundaki Haar ölçüsü, sıradan Lebesgue ölçüsüyle aynıdır.
2) $\mathbf{F} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$ için $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ genel lineer grup tek modüldür ve Haar ölçüsü

$$\mathrm{d}\mu(x) = |\det(x)|^{-k}\ \mathrm{d}x,$$

burada $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ için $k = n$ ve $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ için $k = 2n$ ve $\mathrm{d}x$, $\mathbf{F}$ alanı üzerinde n mertebeden tüm metriklerinin Öklid uzayında bir Lebesgue ölçüsüdür.

2.4. İntegrasyon Teoremleri

Aşağıdaki Teorem 2.7. ve Teorem 2.8. de $\mathrm{MI}^+(\mathbb{R}^n)$, tüm negatif olmayan Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlarının konisi ve $\mathrm{MI}^+(\mu)$ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ bir ölçü uzayında tanımlanan tüm negatif olmayan μ-ölçülebilir fonksiyonların konisi olsun. Burada,
$\mathrm{MI}^+(\mathbb{R}^n) \equiv\{f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty] : f$ ölçülebilirdir.$\}$

Teorem 2.7. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\overline{\mathbb{R}}$- değerli μ- ölçülebilir fonksiyonlarının bir dizisi olsun.

(1) (**Monoton Yakınsaklık Teoremi**) $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^0(\mu)$ artan bir dizi ise : $0 \leq f_j \leq f_{j+1}, \mu - h.h.$. Bu durumda

$$\lim_{j\to\infty} \int_X f_j(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{j\to\infty} f_j(x) d\mu(x)$$

(2) (**Fatou Lemması**) $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathrm{MI}^+(\mu)$ için

$$\int_X \liminf_{j\to\ \infty} f_j(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \liminf_{j\to\ \infty} \int_X f_j(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

(3) (**Baskın Yakınsaklık Teoremi, Lebesgue Yakınsaklık Teoremi**) $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, μ-hemen hemen her yerde f yakınsak olsun. $\forall j \in \mathbb{N}$ için $|f_j| \leq gh.h.$ olacak şekilde bir

$g \in L^1(\mu)$ mevcut ise bu durumda

$$\lim_{j\to\infty}\int_X f_j(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

[44].

Teorem 2.8. (**İntegrasyon ve farklılaşmanın değişimi**) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun ve $f : X \times (a, b) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlasın:
(1) Her bir $t \in (a, b)$ için $f(\cdot, t) \in L^1(\mu)$.
(2) μ- h.h. her $x \in X$ için $t \mapsto f(x, t)$ fonksiyonu her $t \in (a, b)$ için diferansiyellenebilir.
(3) Her bir $t \in (a, b)$ ve μ-hemen hemen her $x \in X$ için $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$ olacak şekilde bir $g \in L^1(\mu)$ vardır bu durumda

$$\frac{d}{dt}\int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$$

[44].

Tanım 2.9. $((\mu \otimes \nu)^*)$. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{B}', \nu)$ ölçülebilir uzayların bir çifti olsun. $X \times Y$ üzerindeki bir $(\mu \otimes \nu)^*$ dış ölçüsü, $(\mu \otimes \nu)^*(\emptyset) = 0$ ve

$$\mu \otimes \nu)^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)\nu(F_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \times F_j\}, A \in 2^{X\times Y}\backslash\{\emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır.

Her $G \subset X \times Y$ için

$$(\mu \otimes \nu)^*(G) = (\mu \otimes \nu)^*(E \cap G) + (\mu \otimes \nu)^*(E^{\mathrm{c}} \cap G)$$

ise bu durumda $E \subset X \times Y$ kümesine $(\mu \otimes \nu)^*$-ölçülebilir denir [44].

Aşağıdaki temel teoremleri ispatsız olarak verelim.

Teorem 2.10. $E \in \mathcal{M}$ ile $E \times F$ formunun kümesi ve $F \in \mathcal{N}$, $(\mu \otimes \nu)^*$-ölçülebilir ve $(\mu \otimes \nu)^*(E \times F) = \mu(E)\nu(F)$. Buradan anlaşılacaktır ki $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$ [44].

Sonuç olarak, $\mu \otimes \nu$ ölçümüne yönlendirilir: Eğer E $(\mu \otimes \nu)^*$-ölçülebilir ise bu durumda $\mu \otimes \nu(E) = (\mu \otimes \nu)^*(E)$ yazılır.

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ ölçülebilir bir uzay olsun. X, sonlu μ-ölçüsüne sahip sayılabilir bir ayrık alt küme koleksiyonuna bölünebilir ise bu durumda bir μ ölçüsü σ- sonludur. Tanım 2.9. den, başka bir $\mu \otimes \nu$ ölçüsü oluşturulabilir. Bu yeni ölçü ile ilgili teorem aşağıda ifade edilmiştir:

Teorem 2.11. (**Fubini Teoremi**). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{N}', \nu)$ σ-sonlu ölçü uzayları olsun. f negatif olmayan $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$- ölçülebilir bir fonksiyon veya $f \in L^1(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ olmak üzere

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}\mu \otimes \nu(x,y) = \int_X (\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y))\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_Y (\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x))\mathrm{d}\nu(y)$$

[44].

2.5. Lebesgue Uzayları

Fonksiyonel analizde, Banach uzayı ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını $L^p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayı oluşturur. Harmonik analizin önemli konularından biri olan Lebesgue uzayı, harmonik analizin iç problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde de uygulamalara sahiptir.

Fonksiyonların boyutunun ölçüsünün bulunmasının en basit yollarından biri Lebesgue uzaylarının kullanılmasıdır. Burada önemli olan $0 < p < 1$ durumunu dikkate almakdır. Bazen $0 < p < 1$ durumunun dikkate alınması faydalı olacaktır.

Örneğin, f ve g fonksiyonlarının L^1 uzayında $f \cdot g$ çarpımının ele alındığında, $f \cdot g$ çarpımı $L^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonlarından başka bir şey olmadığı fark edilir.

Bu bölümde, Lebesgue uzaylarının tanımı ve bazı özellikleri ispatsız olarak verilmiştir.

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $0 < p \leq \infty$ olsun. Tüm $f \in L^0(\mu)$ fonksiyonlarının kümesi için $L^p(\mu)$ Lebesgue uzayı,

$p < \infty$ ise

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \equiv (\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x))^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ve

$p = \infty$ ise

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

olarak adlandılır. Aynı zamanda, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ Lebesgue ölçüsü ise bu durumda $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mu)$ şeklinde yazılır ve

$$L^p(\mu) \equiv \{f \in L^0(\mu) : \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty\}/\sim$$

olarak tanımlanır.

Burada $\sim$ eşdeğerlik ilişkisi yani $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ ile tanımlanır. Bundan sonra fonksiyon uzaylarını tanımlarken bu denklik göz ardı edilecektir.

Örnek 2.12. $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$f_\gamma(x) \equiv |x|^\gamma \chi_{B(1)}(x), \qquad g_\gamma(x) \equiv |x|^\gamma \chi_{B(1)^c}(x) \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

.

(1) $f_\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \gamma > -\dfrac{n}{p}$.

(2) $g_\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \gamma < -\dfrac{n}{p}$.

(3) Herhangi bir $\gamma \in \mathbb{R}$ için $f_\gamma + g_\gamma = |\cdot|^{-\frac{n}{p}}$ $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayına asla ait değildir.

$\gamma = -\dfrac{n}{p}$ fonksiyonların sınır durumunda $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olmaması dikkat çekicidir.

Tanım 2.13. (**Dağılım fonksiyonu**)

$f : X \to \mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda λ_f:$[0, \infty) \to [0, \infty]$ dağılım fonksiyonu

$$\lambda_f(t) = \lambda_{f,\mu}(t) \equiv \mu\{x \in X : |f(x)| > t\} \qquad (t \geq 0)$$

şeklinde tanımlanır [44].

Aşağıdaki "Katman-Kek Formülü (Layer Cake Formula)", fonksiyonların Lebesgue normunu incelerken önemli olacaktır.

Teorem 2.14. (**Katman-Kek Formülü**) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ uzayı bir σ-sonlu ölçü uzayı, $0 < p < \infty$ ve f fonksiyonu bir μ-ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = (p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_{f,\mu}(t) \mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}.$$

Daha genel olarak, $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ olmak üzere C^1-artan fonksiyon ise bu durumda

$$\int_X \Phi(|f(x)|) \mathrm{d}\mu(x) = \int_0^\infty \Phi'(t) \lambda_{f,\mu}(t) dt$$

[44].

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun.

$1 \leq p < \infty$ ise p nin eşleniği $p' \equiv \dfrac{p}{p-1}$. $p = \infty$ ise $p' = 1$. burada belirtelim ki $1 \leq p \leq \infty$ durumunda $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} = 1$ ve $(p')' = p$.

Teorem 2.15. (**Hölder Eşitsizliği**). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda her $f, g \in L^0(\mu)$ için

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^{p'}(\mu)}$$

[44].

Teorem 2.16. (**Minkowski Eşitsizliği**). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda her $f, g \in L^0(\mu)$ için

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)}$$

[44].

$0 < p < 1$ iken üçgen eşitsizliği doğru olmaz. Bunun yerine p-dışbükey veya p–üçgen eşitsizliği:

Önerme 2.17. (p-**dışbükey**) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $0 < p \leq 1$ olsun. Bu durumda her $f, g \in L^0(\mu)$ için

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)^p} \leq \|f\|_{L^p(\mu)^p} + \|g\|_{L^p(\mu)^p}$$

[44] .

Tanım 2.18. $(L^p_{loc}(\mathbb{R}^n))$ $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Her bir K kompakt kümesi için $f \in L^p(K)$ olacak şekilde tüm $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ kümesine $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir veya denk olarak $\mathbb{R}^n$ deki her bir B yuvarı için $\chi_B \cdot f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayının topolojisi $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_K |f(y)|^p \mathrm{d}y$ fonksiyonu tarafından oluşturulur, burada K tüm kompakt kümelerdir [44].

Örnek 2.19. $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun. $x \in \mathbb{R}^n$ için $f_\gamma(x) \equiv |x|^\gamma$ tanımlansın,
$f_\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \gamma > -\dfrac{n}{p}$ den dolayı
$f \in L^p_{1\mathrm{oc}}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \gamma > -\dfrac{n}{p}$.

$\gamma = -\dfrac{n}{p}$ durumunda ise her $g \in L^0(\mathbb{R}^n)$ kümesi olarak $\mathrm{W}L^p(\mathbb{R}^n)$ zayıf Lebesgue uzayı

$$\|g\|_{\mathrm{W}L^p} \equiv \sup_{\lambda > 0} \lambda \|\chi_{(\lambda,\infty]}(|g|)\|_{L^p} < \infty$$

şeklinde tanımlanır [44].

Hölder eşitsizliği ve Tanım 2.18. dan Lebesgue uzayında gömme teoremi aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 2.20. $0 < q < p \leq \infty$ olsun. Bu durumda

$$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q_{1oc}(\mathbb{R}^n)$$

[44].

Lebesgue uzaylarının çerçevesinin dışına çıkacak olunursa, yine de bazı yerel integrasyonlar mevcuttur. Bu durumda, ortalamayı dikkate almak önemlidir. E ölçülebilir bir kümesi ve $f \in L^1(E)$ için f fonksiyonu integrallebilir olmasında E üzerinde f'ın ortalaması $m_E(f)$:

$$m_E(f) \equiv \frac{1}{|E|}\int_E f(y)\mathrm{d}y.$$

Teorem 2.21. (**Lebesgue Diferansiyel Teoremi**) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda h.h. her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \downarrow 0} m_{B(x,r)}(|f - f(x)|) = 0 \tag{2.4}$$

[44].

(2.4) eşitsizliği için bulunan bir x noktasına f fonksiyonunun Lebesgue noktası denir.

2.6. Morrey Uzayları ve Kesirli İntegral Operatörleri

Bu bölümde, Akbulut ve ark. [1] tarafından ifade edilen Morrey uzayların, kesirli integral operatörlerinin tanım ve bazı özelliklerine yer verilmiştir.

$X := (X, \rho, \mu)$ bir topolojik uzayında, kompakt destekli sürekli fonksiyonların uzayı, $L^1(X, \mu)$ uzayında yoğun olacak şekilde bir tam μ ölçüsüne sahip $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı bir (yarımetrik) fonksiyonu da aşağıdaki koşulları sağlar:
(1) $\forall x \neq y$ için $\rho(x, y) > 0$ ve $\forall x \in X$ için $\rho(x, x) = 0$;
(2) $\forall x, y \in X$ için $\rho(x, y) \leq a_0\rho(y, x)$ olacak şekilde bir $a_0 \geq 1$ sabiti vardır;
(3) $\forall x, y, z \in X$ için $\rho(x, y) \leq a_1(\rho(x, z) + \rho(z, y))$ olacak şekilde bir $a_1 \geq 1$ sabiti vardır.
Aynı zamanda (X, ρ, μ) üçlüsüne, yarımetrik ölçü uzayı adı verilir.

Aşağıdaki özellikler ispatsız olarak verilmiştir.

- $B(a, r) := \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ yuvarları μ-ölçülebilir ve $a \in X, r > 0$ için $0 < \mu(B(a, r)) < \infty$.
- $x \in X$ in her bir V komşuluğu için $B(x, r) \subset V$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı vardır.
- $\mu(X) = \infty, \mu\{a\} = 0$ ve $\forall a \in X$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ için $B(a, r_2) \backslash B(a, r_1) \neq \emptyset$.

$0 < \alpha < 1$ olsun. $f \in X$ için I_α ve K_α kesirli integral operatörleri

$$I_\alpha f(x) := \int_X f(y)\rho(x,y)^{\alpha-1} d\mu(y),$$

$$K_\alpha f(x) := \int_X f(y)(\mu B(x,p(x,y)))^{\alpha-1} d\mu(y)$$

şeklinde tanımlanır.

v, X uzayında başka bir ölçü, $\lambda \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun.

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(X,v,\mu)} := \sup_B \left(\frac{1}{\mu(B))} \int_B |f(y)|^p dv(y)\right)^{1/p} < \infty,$$

normuna sahip tüm $f \in L^p_{1oc}(X,v)$ fonksiyonların kümesine $L^{p,\lambda}(X,v,\mu)$ Morrey uzayı denir, burada tüm B yuvarları üzerinde supremum alınır.

$v = \mu$ ise bu durumda μ ölçüne göre $L^{p,\lambda}(X,\mu)$ klasik Morrey uzaydır. $\lambda = 0$ olması durumunda ise v ölçüsüne $L^{p,\lambda}(X,v,\mu) = L^p(X,v)$ Lebesgue uzayıdır.

Ayrıca, $\beta \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\|f\|_{M^{p,\lambda}_\beta(X,\mu)} := \sup_{a\in X; r>0} \left(\frac{1}{r^j} \int_{B(a,r)} |f(y)|^p \rho(a,y)^\beta d\mu(y)\right)^{1/p} < \infty$$

olacak şekildeki tüm μ-ölçülebilir f fonksiyonların kümesine $M^{p,\prime\lambda}_\beta(X,\mu)$ ağırlıklı Morrey uzayı denir.

$\beta = 0$ ise burumda $M^{p,\lambda}_\beta(X,\mu) := M^{p,\lambda}(X,\mu)$.

μ ölçüsü ($\mu \in (GC)$) büyüme koşulunu sağlarsa bu durumda

$$\mu(B(a,r)) \leq C_0 r$$

olacak şekilde bir $C_0 > 0$ sabiti vardır; aynı zamanda, μ ölçüsü ($\mu \in (DC)$) doubling koşulunu sağlar ise bu durumda da

$$\mu(B(a,2r)) \leq C_1 \mu(B(a,r))$$

olacak şekilde herhangi bir $C_1 > 1$ sabiti vardır.

Şimdi ispatsız olarak Eridani ve ark. [9] tarafından verilen bazı sonuçları verelim. Aynı zamanda bu sonuçlar Öklid uzayında, Kokilashvili [32], Kokilashvili ve Meskhi [34] tarafından verilmiştir.

Teorem 2.22. (X,ρ,μ) uzayı bir yarımetrik ölçülebilir uzay olsun. $1 < p < q < \infty$ ve $0 < \alpha < 1$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda I_α operatörü $L^p(X)$ uzayından $L^q(X)$ sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in X$ ve $r > 0$ için

$$\mu(B(a,r)) \leq Cr^s \qquad , \qquad s = \frac{pq(1-\alpha)}{pq+p-q}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabitinin olmasıdır [9].

Sonuç 2.23. (X, ρ, μ) uzayı bir yarımetrik ölçülebilir uzay, $1 < p < 1/\alpha$ ve $1/q = 1/p - \alpha$ olsun. Bu durumda I_α operatörü $L^p(X)$ uzayından $L^q(X)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\mu \in (GC)$ [9].

2.7. BMO Uzayı

Sınırlı ortalama salınım (BMO) fonksiyonları, diferansiyel denklemlerle bağlantılı olarak F. John ve L. Nirenberg [30], Stein [47] tarafından tanımlanmıştır. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki tanım şu şekildedir: Kabul edelim ki f, $\mathbb{R}^n$ kümesindeki kompakt kümelerde integranebilen bir fonksiyon , (yani $f \in L^{1_{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R})$) ve $|Q|$ ile Q nun hacmini gösteren, $\mathbb{R}^n$ içindeki herhangi bir yuvardır. f fonksiyonun Q ortalaması:

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t)dt.$$

Tanımdan, f fonksiyonu BMO ait ise

$$\|f\|_* = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q| dt < \infty,$$

burada supremum tüm Q yuvarları üzerinden alınır. Ayrıca,$\|f\|_*$, f fonksiyonunun BMO-normu olarak adlandırılır ve sabit fonksiyonları böldükten sonra BMO üzerinde bir norm haline gelir. Sınırlı fonksiyonlar BMO da dır ve BMO-fonksiyonu, her bir $p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R})$ lokaldir. BMO-fonksiyonlarına tipik bir örnek, $\mathbb{R}^n$ kümesinde bir P polinomu ile $\log|P|$ formudur.

BMO uzayı modern harmonik analizde önemli bir yeri vardır.
$n = 1$ alınırsa H Hilbert dönüşümü:

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|t|>\epsilon} f(x-t)/t dt,$$

$L_\infty(\mathbb{R})$ uzayından BMO uzayına sınırlıdır, yani,

$$\|Hf\|_* \leq G\|f\|_\infty.$$

Benzer durum singüler integral dönüşümlerinin geniş bir sınıfı ve Riesz dönüşümler içinde doğrudur [47]. $\{T_s\}$, $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ operatörlerinin analitik aileleri için Riesz interpolasyon teoreminin bir versiyonu vardır ve L_2-sınırlılık varsayımlarının yanı sıra $\|T_{it}\|$, (zayıf) varsayımı içerir $\|T_{1+bent}(f)\|_* \leq C\|f\|_\infty$ yerine her zamanki varsayım $\|T_{1+bent}(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ [47]. Ancak en popüler sonuç, Fefferman dualite teoremidir [14], [15], [47]. Bu teoremden, H^1 dualinin BMO olduğunu belirtir. Burada H^1, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki reel Hardy uzayını gösterir. Sonuç, BMO üzerinde uygun bir kompleks çarpımı ile, diskteki veya üst yarı-düzlemdeki olağan H^1 uzayı için de geçerlidir [18].

$\mathbb{R}^n$ üzerinde Calderon-Zygmund operatörleri singüler integral operatörlerinin önemli bir sınıfı formundadır.

Calderon-Zygmund operatörü, lineer bir $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gibi $K(x,y)$ Schwarz çekirdeğine karşılık gelen $\Omega = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y\}$ üzerinde aşağıdaki özellikler ile tanımlanır:

i) K, Ω kümesinde lokal integranebilirdir ve $|K(x,y)| = O(|x-y|^{-n})$ sağlanır;

ii) $(x,y) \in \Omega$ ve$|x'-x| \leq |x-y|/2$ için

$$|K(x',y) - K(x,y)| \leq C|x'-x|^\gamma |x-y|^{-n-\gamma}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti ve $0 < \gamma \leq 1$ vardır.

Benzer şekilde, $(x,y) \in \Omega$ ve $|y'-y| \leq |x-y|/2$ için

$$|K(x,y') - K(x,y)| \leq C|y'-y|^\gamma |x-y|^{-n-\gamma}.$$

iii) T, $L_2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde genişletilmiş sınırlı lineer bir operatördür [31].

3. MATERYAL VE METOT

$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzaylarında ikinci dereceden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları Morrey [39] tarafından incelendi. Ayrıca, son yıllarda birçok matematikçi tarafından klasik Morrey uzayının özellikleri ve uygulamaları [7, 8, 13, 39, 41] ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarda r^λ fonksiyonu yerine negatif olmayan $\varphi(r)$ bir genel fonksiyonunun yeter şartları alınarak incelenmiştir [21, 24, 38, 40, 46].

Ayrıca, $\alpha = 0$ ve $\varphi(x,r) = r^{(\lambda-n)/p}$ durumunda $VM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $VM_{p,\lambda}$ vanishing Morrey uzayı olduğunda Vitanza [49] tarafından kısmi türevli denklemlerinin uygulamaları ve vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarının bazı özellikleri de Akbulut [2], Ragusa [42] ve Samko [43] tarafından incelenmiştir.

$\mathbb{H}_n$ Heisenberg gruplarında

$$L = -\Delta_{\mathbb{H}_n} + V$$

Schrödinger operatörü olsun, burada V, $RH_{Q/2}$ ters Hölder sınıflarına ait negatif olmayan potansiyeli ve Q, $\mathbb{H}_n$ Heisenberg gruplarının homojen boyutudur. $\mathcal{I}_\beta^L$, L operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörü olsun.

Bu yüksek lisans tezinde, $\mathcal{I}_\beta^L$ operatörünün, $LM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarında ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığı, $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$, $1/p - 1/q = \beta/Q$ uzayına sınırlılığında (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeter şartları incelemiştir. Ayrıca tezde Heisenberg gruplarının bazı temel sonuçları verilecektir [6, 16, 17].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Heisenberg gruplarının fark ve sürekli versiyonları, matematiğin birçok alanında özellikle Fourier analiz, çok değişkenli kompleks analiz, geometri, topoloji ve cebirsel geometri gibi alanlarda çalışan matematikçiler tarafından incelenmekte olup ve uygulamaları çalışılmaktadır. Bu bölümde Heisenberg grupları ile ilgili bazı temel sonuçlara yer verilecektir [6, 16, 17].

4.1. Heisenberg Grupları

$\mathbb{H}_n$, $2n+1$ boyutlu bir Heisenberg grubu olsun yani $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ manifoldu altında bir nilpotent Lie grubudur. Grubun yapısı

$$(x,\ t)(y,\ s)\ = (x+y,\ t+s\ + 2\sum_{j=1}^{n}(x_{n+j}y_j - x_j y_{n+j}))$$

ve $\mathbb{H}_n$ üzerinde sol değişmez vektör alanının Lie cebiri

$$X_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial t},\ X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2x_{n+j}\frac{\partial}{\partial t},\ X_{n+j} = \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} - 2x_j\frac{\partial}{\partial t},\ j = 1,\ \cdots,\ n$$

şeklindedir. Komütasyon bağıntılarıda

$$[X_j,\ X_{n+j}] = -4X_{2n+1},\ j = 1,\ \cdots,\ n$$

ile verilir. $\triangle_{\mathbb{H}_n}$ alt-Laplasyan

$$\Delta_{\mathbb{H}_n} = \sum_{j=1}^{2n} X_j^2$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\mathbb{H}_n$ üzerindeki Haar ölçüsü, $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü olarak alınabilir. $|E|$, herhangi bir ölçülebilir $E \subset \mathbb{H}_n$ kümesinin ölçüsüdür. $\mathbb{H}_n$ üzerindeki homojen norm şu şekilde tanımlanır;

$$|g|\ = (|x|^4 + |t|^2)^{\frac{1}{4}},\ g\ = (x,\ t) \in \mathbb{H}_n,$$

burada $\mathbb{H}_n$ üzerinde sol değişmez uzunluğunun $d(g,\ h)\ =\ |g^{-1}h|$ olmasını sağlar. $\mathbb{H}_n$ üzerindeki genişlemeler $\delta_r(x,\ t)\ =\ (rx,\ r^2t),\ r > 0$ formundadır. Bu grup üzerindeki Haar ölçüsü $dx = dx_1 \ldots dx_{2n}dt$ Lebesgue ölçüsü ile çakışır. $\mathbb{H}_n$ nin birim elemanı $e = 0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ ve $g = (x, t)$ nin terside $g^{-1} = (-x, -t)$ dır.

$\mathbb{H}_n$ nin homejen boyutu $Q = 2n+2$ olmak üzere r yarıçaplı ve g merkezli yuvar,

$$B(g,\ r) = \{h \in \mathbb{H}_n : |g^{-1}h| < r\}$$

ve $|B(g,r)| = r^Q|B(0,1)|$ dır. Eğer $B = B(g,\ r)$ ise bu durumda λB, $\lambda > 0$ için $B(g,\ \lambda r)$ olduğunu gösterir. Açık bir şekilde $|\lambda B| = \lambda^Q|B|$ dır.

Heisenberg gruplarının analizi ile ilgili detaylı bilgiler için bakınız [16, 47].

4.2. Schrödinger Operatörü

Schrödinger operatörü, V, negatif olmayan potansiyel fonksiyonu, $V \neq 0$ ve bazı $q \geq Q/2$ için RH_q ters Hölder sınıflarına ait olmak üzere, $\mathbb{H}_n$ Heisenberg grubu üzerinde, $n \geq 3$ için

$$L = -\Delta_{\mathbb{H}_n} + V$$

şeklinde tanımlanır. Yani bir $C > 0$ sabiti mevcut olacak şekilde ters Hölder eşitsizliği her $g \in \mathbb{H}_n$ ve $0 < r < \infty$ için

$$\left(\frac{1}{|B(g,r)|}\int_{B(g,r)} V^q(h)dh\right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B(g,r)|}\int_{B(g,r)} V(h)dh \tag{4.1}$$

şeklinde elde edilir, burada $B(g,r)$, g merkezli r yarıçaplı bir yuvardır.

Özellikle, V negatif olmayan bir polinom ise bu durumda $V \in RH_\infty$. Açıkcası, $q_2 > q_1$ ise budurumda $RH_{q_2} \subset RH_{q_1}$. Ayrıca RH_q ters Hölder sınıfı, $V \in RH_q$ ise bu durumda bazı $\epsilon > 0$ için $V \in RH_{q+\epsilon}$ özelliğine sahiptir. Böylece $0 \neq V \in RH_{Q/2}$ olarak kabul edilecektir.

$q \geq Q/2$ olmak üzere verilen bir $V \in RH_q$ potansiyeli için $0 < \rho(g) < \infty$ yardımcı fonksiyonu, herhangi bir $g \in \mathbb{H}_n$ için

$$\rho(g) := \frac{1}{m_V(g)} = \sup_{r>0}\left\{r : \frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(g,r)} V(h)dh \leq 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır [45].

$\theta \geq 0$ olduğunda $\mathrm{BMO}_\theta(\mathbb{H}_n,\rho)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen BMO uzayı, tüm lokal integralenebilen b fonksiyonlarının bir kümesi gibi her $g \in \mathbb{H}_n$ ve $r > 0$ için

$$\frac{1}{|B(g,r)|}\int_{B(g,r)} |b(h) - b_B|dh \leq C\Big(1 + \frac{r}{\rho(g)}\Big)^\theta$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$b_B = \frac{1}{|B|}\int_B b(h)dh$$

[4]. $b \in \mathrm{BMO}_\theta(\mathbb{H}_n,\rho)$ normu, $[b]_\theta$ ile gösterilir ve yukarıdaki eşitsizlikte verilen sabit sayının infimumudur. $\mathrm{BMO}(\mathbb{H}_n) \subset \mathrm{BMO}_\theta(\mathbb{H}_n,\rho)$ olduğu aşikardır.

$A \lesssim B$ sembolü; C sabiti, tüm önemli parametrelerden bağımsız olarak evrensel bir pozitif olmak üzere $A \leq CB$ yerine kullanıldı. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir.

4.3. Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Morrey-Tipli Uzaylar

Bu kısımda, Öklid kümesinde Guliyev [25], Akbulut, Omarova, Ragusa ve diğerleri [2, 1, 4, 28, 48] tarafından tanımlanan Schrödinger operatörüne karşılık gelen merkez (lokal) ve global genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanımları verilmiştir.

Tanım 4.1. (Genelleştirilmiş Morrey Uzay ve Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Lokal (merkez) Genelleştirilmiş Morrey Uzay) $\varphi(r)$ fonksiyonu, $(0,\infty)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha \geq 0$ de ölçülebilir bir fonksiyon ve $V \in RH_q$, $q \geq 1$ olsun. $M^{\alpha,V}_{p,\varphi} = M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi} = LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzayı, sırasıyla,

$$\|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \sup_{g\in\mathbb{H}_n, r>0} \left(1+\frac{r}{\rho(g)}\right)^{\alpha} \varphi(r)^{-1} r^{-Q/p} \|f\|_{L_p(B(g,r))}$$

$$\|f\|_{LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \sup_{r>0} \left(1+\frac{r}{\rho(e)}\right)^{\alpha} \varphi(r)^{-1} r^{-Q/p} \|f\|_{L_p(B(e,r))}.$$

sonlu yarı normları ile tüm $f \in L^p_{loc}(\mathbb{H}_n)$ fonksiyonlarının uzayı şeklinde tanımlanır [25]. Burada e, $\mathbb{H}_n$ de birim elemandır.

Ayrıca, $WM^{\alpha,V}_{p,\varphi} = WM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen $LWM^{\alpha,V}_{p,\varphi} = LWM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ lokal zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı, sırasıyla,

$$\|f\|_{WM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \sup_{g\in\mathbb{H}_n, r>0} \left(1+\frac{r}{\rho(g)}\right)^{\alpha} \varphi(r)^{-1} r^{-Q/p} \|f\|_{WL_p(B(g,r))} < \infty,$$

$$\|f\|_{LWM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \sup_{r>0} \left(1+\frac{r}{\rho(e)}\right)^{\alpha} \varphi(r)^{-1} r^{-Q/p} \|f\|_{WL_p(B(e,r))} < \infty$$

sonlu yarı normları ile tüm $f \in WL^p_{loc}(\mathbb{H}_n)$ fonksiyonlarının uzayı şeklinde tanımlanır.

Uyarı 4.2. (i) $\alpha = 0$ ve $\varphi(r) = r^{(\lambda-Q)/p}$ olduğunda $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayı olduğu Morrey [39] tarafından ve Öklid kümesinde $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $LM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ merkez Morrey uzayı olduğu Alvarez ve ark. [3] tarafından incelenmiştir;

(ii) $\varphi(r) = r^{(\lambda-Q)/p}$ olduğunda $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının Schrödinger operatörüne karşılık gelen $M^{\alpha,V}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzay olduğunu Öklid kümesinde Tang ve Dong [48] çalışmışlardır;

(iii) $\alpha = 0$ olduğunda $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzayının $M_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey uzay olduğunu Guliyev ve ark. [24] tarafından ve $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzayının $LM_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ merkezi genelleştirilmiş Morrey uzay olduğu Guliyev [19], tarafından incelenmiştir [20, 23, 26, 27].

(iv) $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının, sırasıyla, genelleştirilmiş Morrey uzayı, Schrödinger operatörüne karşılık gelen merkezi genelleştirilmiş Morrey uzay olduğunu Öklid kümesinde Guliyev [25] tarafından incelenmiştir [1, 2, 28].

$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayları, Morrey [39] tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışını incelemek için tanıtıldı. Klasik Morrey uzaylarının özellikleri ve uygulamaları birçok matematikçi tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir, [8, 13, 39, 41]. Genelleştirilmiş Morrey uzayları, bazı varsayımları sağlayan genel negatif olmayan bir $\varphi(r)$ fonksiyonun yerine r^λ ile tanımlanır [10, 11, 22, 24].

4.4. Heisenberg Gruplarında Kesirli İntegral Operatörü

Heisenberg gruplarında kesirli integral operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I_\beta f(g) = \int_{\mathbb{H}_n} \frac{f(h)}{|h^{-1}g|^{Q-\beta}} dh.$$

Kesirli integral operatörlerin, $L_p(\mathbb{H}_n)$ ve $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzaylarındaki sınırlığı ile ilgili teoremler ispatsız olarak aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 4.3. $0 < \beta < 2n+2$, $1 \le p < q < \infty$ ve $1/p = 1/q + \beta/(2n+2)$ olsun. $f \in L_p(\mathbb{H}_n)$ için,
(a) $p > 1$ ise bu durumda I_β, (p, q) tiplidir,
(b) $p = 1$ ise bu durumda I_β, $(1, q)$ zayıf tiplidir [51].

Teorem 4.4. $1 \le p < \infty, 0 < \beta < \dfrac{Q}{p}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\beta}{Q}$, $\varphi_1 \in \Omega_p, \varphi_2 \in \Omega_q$ olsun ve (φ_1, φ_2) çifti aşağıdaki koşulu sağlasın

$$\int_t^\infty \frac{\operatorname{ess\,sup}_{r<s<\infty} \varphi_1(u,s) s^{\frac{Q}{p}}}{r^{\frac{Q}{q}}} \frac{dr}{r} \le C\varphi_2(u,t), \tag{4.2}$$

burada C sabiti u ve r den bağımsızdır. Bu durumda $p > 1$ için I_β operatörü $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $p = 1$ için I_β operatörü $M_{1,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $WM_{q,\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlıdır [24].

Teorem 4.5. $0 < \beta < Q, p, q \in [1, \infty)$, $\varphi_1 \in \Omega_p$ ve $\varphi_2 \in \Omega_q$ olsun.

1. $1 \leq p < \dfrac{Q}{\beta}$ ve $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\beta}{Q}$ bu durumda (4.2) koşulu altında I_β operatörü $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca, $1 < p < \dfrac{Q}{\beta,)}$ ise bu durumda (4.2) koşulu altında I_β operatörü $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlıdır.

2. $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ ise bu durumda her $t > 0$ için $C > 0$ sabiti t den bağımsız olmak üzere

$$t^\beta \varphi_1(t) \leq C\varphi_2(t), \tag{4.3}$$

koşulu altında, I_β operatörü $M_{p\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $WM_{\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $M_{p\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M_{\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlıdır.

3. $1 \leq p < \frac{Q}{q}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\beta}{Q}$ olsun. $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ durumunda her $t > 0$ için $C > 0$ sabiti t den bağımsız olmak üzere

$$\int_t^\infty r^{\beta-1}\varphi_1(r)dr \leq Ct^\beta \varphi_1(t), \tag{4.4}$$

düzenlilik koşulu sağlanırsa bu durumda (4.3) koşulu I_β operatörünün $M_{p\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $WM_{\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Ayrıca, $1 < p < \dfrac{Q}{\beta}$ ise burumda (4.3) koşulu I_β operatörünün $M_{p\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M_{\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşuldur [10].

4.5. Heisenberg Gruplarında Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kesirli İntegral Operatörünün Morrey Tipli Uzaylarda Sınırlılığı

Bu kısımda, $\mathcal{I}_\beta^L$ operatörünün $LM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ merkezi genelleştirilmiş Morrey uzaylarda ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarda sınırlılığı incelenmiştir.

Tanım 4.6. (Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kesirli İntegral Operatörü)

$V \in RH_{Q/2}$ olmak üzere $L = -\Delta_{\mathbb{H}_n} + V$ olsun. L operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörü $0 < \beta < Q$ için

$$\mathcal{I}_\beta^L f(g) = L^{-\beta/2} f(g) = \int_0^\infty e^{-tL}(f)(g)\, t^{\beta/2-1} dt$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 4.7. Eğer $\mathbb{H}_n$ üzerinde, $L = -\Delta_{\mathbb{H}_n}$ altLaplasiyan ise budurumda $\mathcal{I}_\beta^L$ operatörü I_β Riesz potansiyelidir yani

$$I_\beta f(g) = \int_{\mathbb{H}_n} \frac{f(h)}{|h^{-1}g|^{Q-\beta}} dh.$$

Şimdi ileriki kısımlarda kullanılacak kritik fonksiyonlarla ilgili bazı teoremler ispatsız ifade edilmiştir.

Lemma 4.8. $V \in RH_{Q/2}$ olsun. Her $g, h \in \mathbb{H}_n$ için ρ fonksiyonuna karşılık gelen

$$C^{-1}\rho(g)\Big(1 + \frac{|h^{-1}g|}{\rho(g)}\Big)^{-k_0} \leq \rho(h) \leq C\rho(g)\Big(1 + \frac{|h^{-1}g|}{\rho(g)}\Big)^{\frac{k_0}{1+k_0}} \tag{4.5}$$

olacak şekilde C ve $k_0 \geq 1$ sabitleri vardır [37] .

Lemma 4.9. $g \in B(g_0, r)$ olsun. Bu durumda $k \in N$ için

$$\frac{1}{\Big(1 + \frac{2^k r}{\rho(g)}\Big)^N} \lesssim \frac{1}{\Big(1 + \frac{2^k r}{\rho(g_0)}\Big)^{N/(k_0+1)}} [2].$$

$BMO_\theta(\mathbb{H}_n, \rho)$ yeni BMO uzayı ile ilgili bazı eşitsizlikler aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.10. $1 \leq s < \infty$ olsun. Eğer $b \in BMO_\theta(\mathbb{H}_n, \rho)$ ise bu durumda $BMO_\theta(\mathbb{H}_n, \rho)$ için $g \in \mathbb{H}_n$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |b(h) - b_B|^s dh\Big)^{1/s} \leq [b]_\theta\Big(1 + \frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\theta'},$$

burada $\theta' = (k_0 + 1)\theta$ ve k_0, (4.5) eşitsizliğinde belirtilen sabitlerdir [4].

Lemma 4.11. $1 \leq s < \infty$, $b \in BMO_\theta(\mathbb{H}_n, \rho)$ ve $B = B(g, r)$ olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için θ' Lemma 4.10. daki gibi olmak üzere

$$\Big(\frac{1}{|2^k B|}\int_{2^k B} |b(h) - b_B|^s dh\Big)^{1/s} \leq [b]_\theta k\Big(1 + \frac{2^k r}{\rho(g)}\Big)^{\theta'} \quad [4].$$

$\mathcal{I}_\beta^L$ operatörünün çekirdeği K_β olsun. $K_\beta(g, y)$ çekirdeği ile ilgili bazı sonuçlar ispatsız olarak aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.12. Eğer $V \in RH_{Q/2}$ ise bu durumda herbir N için

$$|K_\beta(g, y)| \leq \frac{C}{\Big(1 + \frac{|h^{-1}g|}{\rho(g)}\Big)^N} \frac{1}{|h^{-1}g|^{Q-\beta}} \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır [5].

Son olarak, essential supremum ve essential infimum arasındaki bağıntıyı veren sonuçlar ispatsız olarak aşağıda ifade edilmiştir.

Lemma 4.13. f, reel-değerli negatif olmayan E kümesinde ölçülebilir bir fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\Big(\operatorname*{ess\,inf}_{g\in E} f(g)\Big)^{-1} = \operatorname*{ess\,inf}_{g\in E} \frac{1}{f(g)}$$

[50].

Lemma 4.14. φ, $(0,\infty)$ aralığında pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \le p < \infty$, $\alpha \ge 0$ ve $V \in RH_q$, $q \ge 1$ olsun. Eğer

$$\sup_{t<r<\infty} \Big(1+\frac{r}{\rho(e)}\Big)^{\alpha} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(r)} = \infty \quad \text{bazı } t>0 \text{ için} \tag{4.7}$$

ise bu durumda $LM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n) = \Theta$, burada Θ, $\mathbb{H}_n$ gruplarında tüm 0 denk fonksiyonların kümesidir [28].

Lemma 4.15. φ, $(0,\infty)$ aralığında pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \le p < \infty$, $\alpha \ge 0$ ve $V \in RH_q$, $q \ge 1$ olsun.

(i) Eğer

$$\sup_{t<r<\text{ß}} \Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha} \frac{r^{-\frac{Q}{p}}}{\varphi(r)} = \infty \quad \text{bazı} \quad t>0 \quad \text{ve her} \quad g\in\mathbb{H}_n \quad \text{için} \tag{4.8}$$

ise bu durumda $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n) = \Theta$.

(ii) Eğer

$$\sup_{0<r<\tau} \Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha} \varphi(r)^{-1} = \infty \quad \text{bazı} \quad \tau>0 \quad \text{ve her} \quad g\in\mathbb{H}_n \quad \text{için} \tag{4.9}$$

ise bu durumda $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n) = \Theta$ [2, 10].

Uyarı 4.16. $(0,\infty)$ aralığında tüm pozitif ölçülebilir φ fonksiyonlarının kümesi $\Omega_{p,loc}^{\alpha,V}$ olarak tanımlansın. Her $t>0$ için

$$\Big\|\Big(1+\frac{r}{\rho(e)}\Big)^{\alpha} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(r)}\Big\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty \ \text{[28].}$$

Ayrıca, $(0,\infty)$ aralığında tüm pozitif ölçülebilir φ fonksiyonlarının kümesi $\Omega_p^{\alpha,V}$ olarak tanımlansın. Her $t>0$ için sırasıyla;

$$\sup_{g\in\mathbb{H}_n}\Big\|\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha}\frac{r^{-\frac{Q}{p}}}{\varphi(r)}\Big\|_{L_\infty(t,\infty)}<\infty$$

ve

$$\sup_{g\in\mathbb{H}_n}\Big\|\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha}\varphi(r)^{-1}\Big\|_{L_\infty(0,t)}<\infty$$

[2, 10].

Bundan sonra, $LM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ ve $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzaylarında aşikar olmayan durumlarda ,sırasıyla, daima $\varphi\in\Omega_{p,loc}^{\alpha,V}$ ve $\varphi\in\Omega_p^{\alpha,V}$ olarak kabul edilecekdir.

$\mathcal{I}_\beta^L$ operatörü için lokal Guliyev eşitsizliği aşağıda ifade edilmiştir [19, 20, 21].

Teorem 4.17. $V\in RH_{Q/2}$ olsun. Eğer $1<p<Q/\beta$, $1/q=1/p-\beta/Q$ ise bu durumda herhangi bir $f\in L_{loc}^p(\mathbb{H}_n)$ için

$$\|\mathcal{I}_\beta^L(f)\|_{L_q(B(g_0,r))}\lesssim r^{\frac{Q}{q}}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t}$$

eşitsizliği sağlanır.
Ayrıca, $p=1$ ise bu durumda herhangi bir $f\in L_{loc}^1(\mathbb{H}_n)$ için

$$\|\mathcal{I}_\beta^L(f)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta}}(B(g_0,r))}\lesssim r^{Q-\beta}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta}}\frac{dt}{t}$$

eşitsizliği sağlanır [12].

İspat. Keyfi bir $g_0\in\mathbb{H}_n$ alınmak üzere, $B=B(g_0,r)$ kümesi ve herhangi bir $\lambda>0$ için $\lambda B=B(g_0,\lambda r)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu $f=f_1+f_2$ şeklinde yazılabilir, burada $f_1(h)=f(h)\chi_{B(g_0,2r)}(h)$ ve $\chi_{B(g_0,2r)}$, $B(g_0,2r)$ kümesinin karekteristik fonksiyonudur.
Dolaysıyla,

$$\|\mathcal{I}_\beta^L(f)\|_{L_q(B(g_0,r))}\le\|\mathcal{I}_\beta^L(f_1)\|_{L_q(B(g_0,r))}+\|\mathcal{I}_\beta^L(f_2)\|_{L_q(B(g_0,r))}.$$

$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{I}_\beta^L$ operatörü, $L_p(\mathbb{H}_n)$ uzayından $L_q(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlı olmasından (bkz. [37, 47])

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_\beta^L(f_1)\|_{L_q(B(g_0,r))} &\lesssim \|f\|_{L_p(B(g_0,2r))} \\
&\lesssim r^{\frac{Q}{q}} \|f\|_{L_p(B(g_0,2r))} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{Q}{q}+1}} \\
&\lesssim r^{\frac{Q}{q}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

gerçeklenir.

$\|\mathcal{I}_\beta^L(f_2)\|_{L_p(B(g_0,r))}$ normunda $g \in B$, $h \in (2B)^c$ olduğundan

$$\left|h^{-1}g\right| \approx \left|h^{-1}g_0\right|$$

olmasını gerektirir. Böylece, (4.6) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sup_{g\in B} |\mathcal{I}_\beta^L(f_2)(g)| &\le \int_{(2B)^c} |K_\beta(g,h) f(h)| dh \\
&\lesssim \int_{(2B)^c} \frac{|f(h)|}{\left|h^{-1}g_0\right|^{Q-\beta}} dy \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k+1}r)^{-Q+\beta} \int_{2^{k+1}B} |f(h)| dh
\end{aligned}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sup_{g\in B} |\mathcal{I}_\beta^L(f_2)(g)| &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \|f\|_{L_p(2^{k+1}B)} (2^{k+1}r)^{-1-\frac{Q}{p}+\beta} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} dt \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Bu durumda, $1 \le p < Q/\beta$ için

$$\|\mathcal{I}_\beta^L(f_2)\|_{L_q(B(g_0,r))} \lesssim r^{\frac{Q}{q}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t} \tag{4.12}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, (4.10) ve (4.12) eşitsizliklerinden $1 \le p < Q/\beta$ için

$$\|\mathcal{I}_\beta^L(f)\|_{L_q(B(g_0,r))} \lesssim r^{\frac{Q}{q}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t} \tag{4.13}$$

elde edilir.

$p = 1$ olması durumunda ise $\mathcal{I}_\beta^L$ operatörünün $L_1(\mathbb{H}_n)$ uzayından $WL_{\frac{Q}{Q-\beta}}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlı olduğundan (bkz. [37, 47]),

$$\|\mathcal{I}_\beta^L(f_1)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta}}(B(g_0,r))} \lesssim \|f\|_{L_1(B(g_0,2r))} \lesssim r^{Q-\beta}\int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta}}\frac{dt}{t}$$

sağlanır. (4.12) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}_\beta^L(f_2)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta}}(B(g_0,r))} &\leq \|\mathcal{I}_\beta^L(f_2)\|_{L_{\frac{Q}{Q-\beta}}(B(g_0,2r))} \\ &\lesssim r^{Q-\beta}\int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta}}\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

Dolaysıyla,

$$\|\mathcal{I}_\beta^L(f)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta}}(B(g_0,r))} \lesssim r^{Q-\beta}\int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta}}\frac{dt}{t}.$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi, $\mathcal{I}_\beta^L$ operatörünün (φ_1, φ_2) çiftinin sağladığı şartlar üzerinde $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $LM_{1,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LWM_{\frac{Q}{Q-\beta},\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlığı ile ilgili sonucu verelim.

Teorem 4.18. $V \in RH_{Q/2}$, $\alpha \geq 0$, $1 < p < Q/\beta$, $1/q = 1/p - \beta/Q$ olsun ve $\varphi_1 \in \Omega_{p,loc}^{\alpha,V}$, $\varphi_2 \in \Omega_{q,loc}^{\alpha,V}$

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}}{t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t} \leq c_0\varphi_2(r) \tag{4.14}$$

şartını sağlasın, burada c_0 sabiti r den bağımsızdır. Bu durumda $\mathcal{I}_\beta^L$ operatörü $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $LM_{1,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LWM_{\frac{Q}{Q-\beta},\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlıdır [12].

İspat. Lemma 4.13. den dolayı

$$\frac{1}{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}} = \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{1}{\varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}}$$

elde edilir. Burada hatırlatalım ki, $\|f\|_{L_p(B(e,r))}$ fonksiyonu r ye göre azalmayan bir fonksiyon ve $f \in LM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(e)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(e,r))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{r<s<\infty}\varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}} &\lesssim \operatorname*{ess\,inf}_{r<s<\infty}\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(e)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(e,r))}}{\varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}} \\
&\lesssim \sup_{0<s<\infty}\frac{\left(1+\frac{s}{\rho(e)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(e,s))}}{\varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}.
\end{aligned}$$

$\alpha \geq 0$ olması durumunda ve (φ_1,φ_2) çifti (4.14) şartını sağladığında ise

$$\begin{aligned}
\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(e,\tau))}}{\tau^{\frac{Q}{q}}}\frac{d\tau}{\tau} &= \int_{2r}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\tau}{\rho(e)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(e,\tau))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{\tau<s<\infty}\varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{\tau<s<\infty}\varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}}{\left(1+\frac{\tau}{\rho(e)}\right)^{\alpha}\tau^{\frac{Q}{q}}}\frac{d\tau}{\tau} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}\int_{2r}^{\infty}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{\tau<s<\infty}\varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}}{\left(1+\frac{\tau}{\rho(e)}\right)^{\alpha}\tau^{\frac{Q}{q}}}\frac{d\tau}{\tau} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(e)}\right)^{-\alpha} \\
&\times \int_{r}^{\infty}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{\tau<s<\infty}\varphi_1(s)s^{\frac{Q}{p}}}{\tau^{\frac{Q}{q}}}\frac{d\tau}{\tau} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(e)}\right)^{-\alpha}\varphi_2(r) \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.17. den dolayı

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}^L_\beta(f)\|_{LM^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(e)}\right)^{\alpha}\varphi_2(r)^{-1}r^{-Q/q}\|\mathcal{I}^L_\beta(f)\|_{L_p(B(e,r))} \\
&\lesssim \sup_{r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(e)}\right)^{\alpha}\varphi_2(r)^{-1}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(e,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}.
\end{aligned}$$

$q=\frac{Q}{Q-\beta}$ olsun. (4.15) eşitsizliğindeki benzer durumdan dolayı

$$\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(e,\tau))}}{\tau^{Q-\beta}}\frac{d\tau}{\tau} \lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(e)}\right)^{-\alpha}\varphi_2(r).$$

Böylece, Teorem 4.17. den dolayı

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_\beta^L(f)\|_{LWM^{\alpha,V}_{\frac{Q}{Q-\beta},\varphi_2}} &\lesssim \sup_{r>0}\Big(1+\frac{r}{\rho(e)}\Big)^{\alpha}\varphi_2(r)^{-1}r^{\beta-Q}\|\mathcal{I}_\beta^L(f)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta}}(B(e,r))} \\
&\lesssim \sup_{r>0}\Big(1+\frac{r}{\rho(e)}\Big)^{\alpha}\varphi_2(r)^{-1}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(e,\tau))}}{\tau^{Q-\beta}}\frac{d\tau}{\tau} \\
&\lesssim \|f\|_{LM^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}}.
\end{aligned}$$

■

Sonuç 4.19. $V \in RH_{Q/2}$, $\alpha \geq 0$, $1 < p < Q/\beta$, $1/q = 1/p - \beta/Q$ olsun ve $\varphi_1 \in \Omega_p^{\alpha,V}$, $\varphi_2 \in \Omega_q^{\alpha,V}$ (4.14) şartını sağlasın. Bu durumda $\mathcal{I}_\beta^L$ operatörü $p > 1$ için $M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $M^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $WM^{\alpha,V}_{\frac{Q}{Q-\beta},\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlıdır.

Uyarı 4.20. Teorem 4.18. de $V \equiv 0$ olması durumundaki ispatı Guliyev ve ark. tarafından [24] Teorem 5.2 de verilmiştir [12].

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kesirli integrallerin ve onların uygun fonksiyonlarla komütatörlerinin sınırlılığı harmonik analizde önemli bir rol oynamaktadır. Düzgün olmayan katsayılara sahip diferansiyel denklemlerin çalışmalarında kesirli integral operatörlerinin komütatör integralleri doğal ola- rak ortaya çıkar. Son yıllarda L Schrödinger operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörle- ri ve bunların BMO fonksiyonları ile komütatörleri büyük ilgi görmüştür. Bongioanni ve ark. [4], Martinez [33], Tang ve Dong [48] tarafından L_p Lebesgue uzayı ve $L_{p,\omega}$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarında harmonik analizin Schrödinger operatörüne karşılık gelen integral operatörlerinin sınırlılıkları araştırılmıştır.

Bu tez konusunu bir baslangıç kabul edilerek, "Schrödinger operatörlerine karşılık gelen integral operatörlerinin Morrey-Tipli uzaylarda sınırlılığı" konusunda daha ileri düzeyde çalışmalar yapabilmek için bir temel olusturulması hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

[1]. Akbulut, A., Guliyev, R.V., Celik, S. and Omarova, M.N., (2018). Fractional integral associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces, *J. Math. Ineq.,* 12(3), 789-805.

[2]. Akbulut, A., Guliyev, V.S. and Omarova, M.N. (2017). Marcinkiewicz integrals associated with Schrödinger operators and their commutators on vanishing generalized Morrey spaces, *Bound. Value Probl.*, 2017:121.

[3]. Alvarez, J., Lakey, J. and Guzman-Partida, M. (2000). Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures, *Collect. Math.*, 51(1), 1-47.

[4]. Bongioanni, B., Harboure, E. and Salinas, O., (2011). Commutators of Riesz transforms related to Schödinger operators, *J. Fourier Anal. Appl.*, 17(1), 115-134.

[5]. Bui, T. (2014). Weighted estimates for commutators of some singular integrals related to Schrödinger operators, *Bull. Sci. Math.,* 138(2), 270-292.

[6]. Capogna, L., Danielli, D., Pauls, S. and Tyson, J. (2007). An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem, *Progr. Math. 259,* Birkhauser, Basel.

[7]. Chiarenza F. and Frasca M. (1987). Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, *Rend Mat.,* 7 , 273-279.

[8]. Difazio, G. and Ragusa, M.A. (1993). Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form eqnarrays with discontinuous coefficients, *J. Funct. Anal.,* 112(2), 241-256.

[9]. Eridani, A., Kokilashvilic, V. and Meskhib, A. (2009). Morrey spaces and fractional integral operators, *Expo. Math.,* 27, 227-239.

[10]. Eroglu, A. and Azizov, J.V. (2017). A note of the fractional integral operators in generalized Morrey spaces on Heisenberg groups, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.,* 37(1), Mathematics, 86-91.

[11]. Eroglu, A., Guliyev, V.S. and Azizov, C.V. (2017). Characterizations for the fractional integral operators in generalized Morrey spaces on Carnot groups, *Math. Notes,* 102(5), 127-139.

[12]. Eroglu, A., Gadjiev, T. and Namazov, F. (2018). Fractional integral associated to Schrödinger operator on the Heisenberg groups in central generalized Morrey spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.,* 6, 152-161.

[13]. Fan, D., Lu, S. and Yang, D. (1998). Boundedness of operators in Morrey spaces on homogeneous spaces and its applications, *Acta Math. Sinica, (N.S.),* 14, 625-634.

[14]. Fefferman, C. (1971). Characterizations of bounded mean oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77, 587-588.

[15]. Fefferman, C. and Stein, E.M. (1974). Hp spaces of several variables, *Acta Math.,* 129, 137-193.

[16]. Folland, G.B. and Stein, E.M. (1982). Hardy Spaces on Homogeneous Groups, *Mathematical Notes Vol. 28, Princeton Univ. Press, Princeton.*

[17]. Folland, G.B. and Stein, E.M. (1974). Estimates for the ∂_b-complex and analysis on the Heisenberg group, *Comm. Pure Appl. Math.,* 27, 429-522.

[18]. Garnett, J. (1981). Bounded analytic functions, *Acad. Press.*

[19]. Guliyev, V.S. (1994). Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in $\mathbb{R}^n$, Doctoral dissertation, *Moscow, Mat. Inst. Steklov (Russian),* 329p.

[20]. Guliyev, V.S. (1999). Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups, *Some applications, Baku, Elm,* 332 p.

[21]. Guliyev, V.S. (2009). Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces, *J. Inequal. Appl.,* Art. ID 503948, 20 pp.

[22]. Guliyev, V.S. and Mammadov, Y.Y. (2013). Boundedness of the fractional maximal operator in generalized Morrey space on the Heisenberg group, *Indian J. Pure Appl. Math.,* 44 (2), 185-202.

[23]. Guliyev, V.S. (2013). Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel, *Problems in mathematical analysis, 71, J. Math. Sci., (N.Y.),* 193(2), 211-227.

[24]. Guliyev, V.S., Eroglu, A. and Mammadov, Y.Y. (2013). Riesz potential in generalized Morrey spaces on the Heisenberg group, *Problems in mathematical analysis, 68, J. Math. Sci., (N. Y.),* 189(3), 365-382.

[25]. Guliyev, V.S. (2014). Function spaces and integral operators associated with Schrödinger operators: an overview, *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.,* 40, 178-202.

[26]. Guliyev, V.S. and Gadjiev, T.S. and Galandarova, Sh. (2017). Dirichlet boundary value problems for uniformly elliptic eqnarrays in modified local generalized Sobolev-Morrey spaces, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,* 71, 17 pp.

[27]. Guliyev, V.S., Omarova, M.N., Ragusa, M.A. and Scapellato, A. (2018). Commutators and generalized local Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.,* 457(2), 1388-1402.

[28]. Guliyev, V.S., Guliyev, R.V., Omarova, M.N. and Ragusa, M.A. (2020). Schrödinger type operators on local generalized Morrey spaces related to certain nonnegative potentials, *American Ins. of Math. Sci.,* 25(2), 671-690.

[29]. Haar, A. (1993). Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Ann. of Math.,* 34(2), 147-169.

[30]. John, F. and Nirenberg, L. (1961). On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.,* 14, 415-426.

[31]. Krantz, S.G. (1993). Geometric analysis and function spaces, *CBMS, 81, Amer. Math. Soc.*.

[32]. Kokilashvili, V. (1990). Weighted estimates for classical integral operators,in: Nonlinear Analysis,Function Spaces and Applications IV, *Roudnicenad Labem Teubner-TexteMath, Leipzig,* 119, 86-103.

[33]. Martinez, T. (2004). Extremal Spaces Related to Schrödinger Operators With Potentials Satisfying a Reverse Hölder Inequality, *Paginas,* 45(1), 43-61.

[34]. Kokilashvili, V. and Meskhi, A. (2001). Fractional integrals on measure spaces, *Frac. Calc. Appl.Anal.,* 4(4), 1-24.

[35]. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V. (1957). Elements of the theory of functions and functional analysis, *Volume I, Graylock press Rochester, N. Y.*.

[36]. Lebesgue, H. (1902). Intégrale, longueur, aire, *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898-1922),* 7, 231-359.

[37]. Li, H.Q. (1999). Estimations L_p des opérateurs de Schrödinger sur les groupes nilpotents, *J. Funct. Anal.,* 161(1), 152-218.

[38]. Mizuhara T. (1991). Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, *Harmonic Analysis (S.Igari, Ed.) ICM 90 Satellite Proceedings, Springer-Verlag, Tokyo,* 183-189.

[39]. Morrey, C. (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential eqnarrays, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 43, 126-166.

[40]. Nakai E. (1994). Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.,* 166, 95-103.

[41]. Polidoro, S. and Ragusa, M.A. (1998). Sobolev-Morrey spaces related to an ultraparabolic eqnarray, *Manuscripta Math.,* 96(3), 371-392.

[42]. Ragusa M.A. (2008). Commutators of fractional integral operators on vanishing-Morrey spaces, *J. Global Optim.,* 40(1-3), 361-368.

[43]. Samko N. (2013). Maximal, potential and singular operators in vanishing generalized Morrey spaces, *J. Global Optim.,* 57 (4), 1385-1399.

[44]. Sawano, Y. (2020). Morrey Spaces:Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, *Volume I, New York.*

[45]. Shen, Z. (1995). L_p estimates for Schrödinger operators with certain potentials, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* 45(2), 513-546.

[46]. Softova L. (2006). Singular integrals and commutators in generalized Morrey spaces, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.),* 22(3), 757-766.

[47]. Stein, E.M. (1993). Harmonic Analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, *Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.*

[48]. Tang, L. and Dong, J. (2009). Boundedness for some Schrödinger type operator on Morrey spaces related to certain nonnegative potentials, *J. Math. Anal. Appl.,* 335, 101-109.

[49]. Vitanza C., (1990). Functions with vanishing Morrey norm and elliptic partial differential eqnarrays, In: Proceedings of methods of real analysis and partial differential eqnarrays, *Capri,* pp. 147-150.

[50]. Wheeden, R. and Zygmund, A. (1977). Measure and integral, An introduction to real analysis, *Pure and Applied Mathematics,* 43, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel.

[51]. Xiao, J. and He, J. (2011). Riesz Potential on the Heisenberg Group, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications,* Volume 2011, Article ID 498638, p.13.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	Mehtap ÇELİK
Uyruğu :	T.C.
Orcid Numarası:	0000-0003-0544-5060

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Gazi Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölüm	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2020
Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Bilimleri Enstitüsü
Bölüm	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Yılı	2024

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Uluslararası Konferans ve Senpozyumlarda Sunulan Bildiriler Akbulut A., Pıtlaklı E., Çelik M. (2022). Boundedness of commutators of Calderón-Zygmund operators associated to Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces. *International Conference on Control and Optimization with Industrial Applicstions*, 24-26 August 2022, Bakü, Azarbaijan, 8(2), 54.