T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEISENBERG GRUPLARINDA SCHRÖDINGER OPERATÖRLERİNE KARSILIK GELEN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN KOMÜTATÖRLERİNİN MORREY TİPLİ UZAYLARDA SINIRLILIĞI

Ecem PITRAKLI VURAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR

2024

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEISENBERG GRUPLARINDA SCHRÖDINGER OPERATÖRLERİNE KARSILIK GELEN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN KOMÜTATÖRLERİNİN MORREY TİPLİ UZAYLARDA SINIRLILIĞI

ECEM PITRAKLI VURAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
PROF. DR. ALİ AKBULUT

KIRŞEHİR
2024

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAYI

Bu Doktora Tezi ..../.../2024 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Değerlendirilmiş ve Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Kabul Edilmiştir.

Prof. Dr. Ali AKBULUT (Danışman) ....

Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV (Jüri) ....

Doç. Dr. Veysel NEZİR (Jüri) ....

Bu Tez Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında hazırlanmış ve onaylanmıştır.

Tez No:

Prof. Dr. Rüştü HATİPOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, tablo ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. .../.../2024

Öğrenci
Ecem PITRAKLI VURAL

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunda bana çalışma fırsatı veren, her ihtiyaç duyduğumda kıymetli zamanını benimle paylaşarak derin ve değerli bilgileriyle bana ışık tutan, beni tüm içtenliğiyle destekleyen, bana emek veren saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ali AKBULUT'a teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca hep yanımda olan sevgili ailem, abim Zafer ZABUN'a ve bu süreçte bana her zaman destek olan değerli eşim M. Yasin VURAL'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Nisan, 2024 Ecem PITRAKLI VURAL

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEISENBERG GRUPLARINDA SCHRÖDINGER OPERATÖRLERİNE KARSILIK GELEN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN KOMÜTATÖRLERİNİN MORREY TİPLİ UZAYLARDA SINIRLILIĞI

Ecem PITRAKLI VURAL

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: **Prof. Dr. Ali AKBULUT**
Yıl: 2024 **Sayfa: 53**
Jüri: **Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV**
Prof. Dr. Ali AKBULUT
Doç. Dr. Veysel NEZİR

Bu yüksek lisans tezinde, Heisenberg gruplarında Schrödinger operatörlerine karşlık gelen kesirli integral operatörlerinin komütatörlerinin Morrey tipli uzaylardaki sınırlılıkları hakkında bilgi verilecektir. İlk bölümde, literatürde bu konu ile ilgili araştırmaları olan bir çok matematikçi hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın amacından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, tez konusunda geçen bazı temel tanım ve özellikler verilecektir. Üçüncü bölümde, tez konusu ile ilgili materyal ve metotlar hakkında kısa bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, Heisenberg grupları, Schrödinger operatörü ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen Morrey uzayları hakkında temel tanım ve özellikleri ile ilgili bazı bilgiler verilerek Heisenberg gruplarında tanımlı Schrödinger operatörlerine karşılık gelen kesirli integral operatörlerinin komütatörlerinin Morrey tipli uzaylardaki sınırlılıkları hakkında bilgi verilmiştir. Son bölümde, tez konusunun araştırılmasındaki amaç ve hedefi hakkında kısaca bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger operatörüne karşılık gelen Morrey uzayları, maksimal fonksiyon, kesirli integral operatör, Riesz potansiyeli.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

BOUNDEDNESS OF COMMUTATORS OF FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS ON MORREY-TYPE SPACES ASSOCIATED WITH SCÖHRDINGER OPERATORS ON THE HEISENBERG GROUPS

Ecem PITRAKLI VURAL

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: **Prof. Dr. Ali AKBULUT**
Year: 2024 Pages: 53
Juries: **Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV**
Prof. Dr. Ali AKBULUT
Assoc. Prof. Dr. Veysel NEZİR

In this master's thesis, information will be given about the boundedness of the commutators of fractional integral operators corresponding to Schrödinger operators in Heisenberg groups in Morrey type spaces. In the first part, information is given about many mathematicians who have done research on this subject in the literature and the purpose of this study is mentioned. In the second part, some basic definitions and characteristics of the thesis will be given. In the third part, brief information is given about the materials and methods related to the thesis topic. In the fourth part, some information about Heisenberg groups, the Schrödinger operator and the Morrey spaces corresponding to the Schrödinger operator are given, and some information is given about the basic definitions and properties of the Schrödinger operators defined in Heisenberg groups. Information is given about the limitations of commutators of fractional integral operators in Morrey type spaces. In the last part, the purpose and objective of researching the thesis topic is briefly mentioned.
Keywords: Heisenberg Groups, Schrödinger operators, maximal function,fractional integral operator, Riesz potential.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$B(x,r)$	: x merkezli r yarıçaplı yuvar
$\lvert B\rvert$	: B kümesinin Lebesgue ölçümü
χ_B	: B kümesinin karakteristik fonksiyonu
$L^0(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir fonksiyonların sınıfı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	: Lebesgue uzayı
$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ de $p-$lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$L_{p,\lambda}$	: Morrey uzayı
$\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	: Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
$\mathbb{H}_n$	: Heisenberg grubu
$RH_{Q/2}$	: ters Hölder sınıfları
$\triangle_{\mathbb{H}_n}$	: alt-Laplasyan
L	: Schrödinger operatörü
I_β	: Kesirli integral operatörü
$[b,\mathcal{I}^L_\beta]$	: Komütatör operatörü
I_α	: Kesirli integral operatör (Riesz potansiyeli)
$[b,T]$	: Calderón-Zygmund operatörünün komütatörü
$[b,I_\alpha]$	: Riesz potansiyelinin komütatörü

1. GİRİŞ

Klasik Morrey uzayları 1938'de C.B. Morrey tarafından eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin yerel davranışlarının incelenmesi çalışmalarında ortaya çıkarılmıştır. $1 \leq p < \infty,\ 0 \leq \lambda \leq n,\ f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $L_{p,\lambda} \equiv L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$L_{p,\lambda} := \left\{ f \text{ ölçülebilir } : \ \|f\|_{L_{p,\lambda}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır, burada $\|f\|_{L_{p,\lambda}}$ normu

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ile verilir.

Kesirli integrallerin ve onların uygun fonksiyonlarla komütatörlerinin sınırlılığı harmonik analizde önemli bir rol oynamaktadır. Düzgün olmayan katsayılara sahip diferansiyel denklemlerin çalışmalarında kesirli integral operatörlerinin komütatör integralleri doğal olarak ortaya çıkar.

Son yıllarda L Schrödinger operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörleri ve bunların BMO fonksiyonları ile komütatörleri büyük ilgi görmüştür. B. Bongioanni, A. Cabral ve E. Harboure; T. Martinez; L. Tang ve J. Dong tarafından L_p Lebesgue uzayı ve $L_{p,\omega}$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarında harmonik analizin Schrödinger operatörüne karşılık gelen integral operatörlerinin sınırlılıkları araştırılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, çalışmamız ile ilgili olan temel kavramlar, uzaylar ve operatörler hakkında genel bilgilere, bazı temel tanımlara ve ana sonuçlarımızın ispatında kullanılan araçlara yer verilmiştir.

2.1. Ön Bilgiler

Bu kısımda, normlu uzayların tez konusu ile ilgili bazı tanım, teorem ve özellikleri ifade edilmiştir.

2.2. Normlu Uzaylar

Tanım 2.1. X, **K** cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to R, \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbf{K}$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir [2].

Teorem 2.2. X, **K** cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$$\| \cdot \| : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı her norm dönüşümü X vektör uzayı üzerinde süreklidir [2].

Teorem 2.3. Bir **K** cismi üzerinde tanımlı herhangi bir X normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir [2].

Tanım 2.4. **(Denk Norm)** X, **K** cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in X$ için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\| \cdot \|_1$ ve $\| \cdot \|_2$ normlarına denk normlar denir [41].

Tanım 2.5. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, (X, $\|\cdot\|$) normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama denir [41].

Tanım 2.6. (Cauchy Dizisi) (X, $\|\cdot\|$) normlu uzayı içinde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, bir Cauchy dizisidir denir [41].

Tanım 2.7. (Banach Uzayı) Bir (X, $\|\cdot\|$) normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu (X, $\|\cdot\|$) normlu uzayına Banach Uzayı adı verilir [2].

Tanım 2.8. X ve Y iki lineer uzay ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonuna operatör denir. Burada D_T, T nin tanım kümesi ve $T(D_T) \subset Y$ de T nin görüntü kümesidir. Eğer D_T, X in bir lineer alt uzayı ve T bir lineer dönüşüm ise her α, $\beta \in \mathbb{R}\,(veya\ \mathbb{C})$ ve $x, y \in X$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad [44].$$

Tanım 2.9. Bir $T : X \to Y$ lineer dönüşüm ve X, Y K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} T(x+y) &\leq Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx \end{aligned}$$

sağlanıyorsa T ye " alt lineer operatör " denir [44].

Tanım 2.10. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A\|x\|$ olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir [44].

Bir T operatörünün normu $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ ile tanımlanır.

Tanım 2.11. Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu için hemen her yerde $Tf(x) \geq 0$ ise T operatörüne pozitif operatör denir [44].

Tanım 2.12. X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için, $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T ye x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.13. (Süreklilik ve Sınırlılık) X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır.

2.3. Ölçü Teorisi

Tanım 2.14. (Cebir ve σ- Cebiri) X bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A}$, $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $k = 1, 2, ..., n$, $E_k \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) şartı yerine

$$\text{“}\forall n \in N \;\; E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}\text{”}$$

şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma-$ cebiri adı verilir [50].

Tanım 2.15. (Borel Cebiri) Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ-cebiri denir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir [50].

Tanım 2.16. X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma-$cebiri olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir [50].

Tanım 2.17. (Ölçülebilir Fonksiyon) $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in R$ için

$$f^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir [50].

Tanım 2.18. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir [40].

Tanım 2.19. (Ölçü Uzayı) Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı adı verilir [40].

Tanım 2.20. (Dış Ölçü) X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(ii)$\forall E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
(iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir [40].

Tanım 2.21. (Lebesgue Dış Ölçüsü) (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsübdenir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir [40].

$n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i\ ,\quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\ ,\ I_k \text{ bir aralık}\right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E)) \qquad \big(\text{Caratheodary Ölçümü}\big)$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir [40].

Teorem 2.22. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü, her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir [50].

Uyarı 2.23. A sayılabilir bir küme ise $m^*(A) = 0$ dır.

Uyarı 2.24. $[0, 1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 2.25. (Lebesgue Ölçüsü) $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$, m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı olsun. m^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$ sınıfına da $B(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, m ile gösterilir [40].

Tanım 2.26. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme (özellik) ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme (özellik) hemen her yerde doğrudur denir [50].

Tanım 2.27. **(L_p Uzayı)** (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p = \left\{ f \in M(X, \Sigma) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L_p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & , \; 1 \leq p < \infty \\ \\ ess \sup_{x \in X} |f(x)| & , \; p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

$$ess \sup_{x \in X} |f(x)| = \inf \{ \lambda : m(x \in X : |f(x)| > \lambda) = 0 \} \quad [44].$$

Tanım 2.28. (Örtü) Birleşimleri A kümesini kapsayan U_i kümeler ailesine A kümesinin bir örtüsüdür denir. Bu U_i kümelerinin her biri açıksa bu halde U_i, A kümesinin açık örtüsüdür denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün alt örtüsü ismi verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye sonlu alt örtü denir [40].

Tanım 2.29. X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine "kompakttır" denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani, kapalı ve sınırlı her küme kompakttır [41].

Tanım 2.30. Bir f fonksiyonunun desteği $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışıdır ve $Supp\ f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f kompakt destekli fonksiyon adını alır [41].

Tanım 2.31. f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt K kümesi üzerinde

$$\int_K |f|\, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal (yerel) integrallenebilirdir denir ve

$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \int_K |f|\, d\mu < \infty; K \subset \mathbb{R}^n,\ K \text{ kompakt} \right\}$ yazılır. Ayrıca,

$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \left(\int_K |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty;\ K \subset \mathbb{R}^n,\ K \text{ kompakt} \right\}$ ile gösterilir [44].

Teorem 2.32. Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise bu durumda

$$L_p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

[44].

Tanım 2.33. (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p$, $g \in L_q$ olsun. Bu durumda $f, g \in L^1$ ve

$$\|f\, g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır [35].

Tanım 2.34. (Minkowski Eşitsizliği) $p \geq 1$ için eğer $f, g \in L_p$ ise bu durumda $(f + g) \in L_p$ ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

dir [35].

Tanım 2.35. (Schwarz Eşitsizliği) $f(x) \in L_2$ ve $g(x) \in L_2$ olsun.

$$\left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq \left\{ \int_a^b |f(x)|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b |g(x)|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine Schwarz eşitsizliği denir [35].

Tanım 2.36. $\mathbb{R}^n$ ile n-boyutlu Öklid uzayını gösterelim.
$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ \ldots, \ y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \ \ x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq 0$$

olsun. Tüm $\mathbb{R}^n$ de veya $\mathbb{R}^n$ in bir alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon
$g(x) = g(x_1, \ ..., \ x_n)$ ve f, $[0, \ \infty)$ da hemen her yerde tanımlı tek değişkenli fonksiyon olsun. Eğer n- değişkenli bir $g(x)$ fonksiyonu herhangi bir tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun yardımıyla $g(x) = f(|x|)$ şeklinde gösterilebiliyorsa g ye radyal fonksiyon denir. Yani

$$g(x_1, \ ..., \ x_n) = f\left(\sqrt{x_1^2 + ... + \ x_n^2}\right).$$

Teorem 2.37. (Fubini) f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)| \, dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)| \, dx \right) dy$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| \, dy \right) dx$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir g integrallenebilen fonksiyonu vardır öyleki $g(y)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda
(a) Hemen her $y \in \mathbb{R}^m$ için $f(.,y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dir.
(b) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x,.) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ dir.
(c) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(.,y) \, dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$
(d) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,.) \, dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$
(e) $I_1 = I_2 = I_3$
elde edilir [37].

Tanım 2.38. $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n de$ vektörler olmak üzere $\mathbb{R}^n$, n- boyutlu Öklidyen uzayı $(x, \ y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \ y_j$ iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^n$, n- boyutlu reel uzaydır [37].

Burada x in mutlak değeri $|x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1...dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun Lebesgue integrali

$$\int f(x)dx = \int ... \int f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$$

ile gösterilir [50].

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : \ |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterilim.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx, \qquad dx = dx_1...dx_n$$

integralinin hesabı için;

$$0 \leq r < \infty, \ 0 \leq \theta_1, ..., \theta_{n-2} \leq \pi, \ 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$$

olmak üzere

$x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

...

$x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{n-1}$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J\left(r, \ \theta_1, ..., \ \theta_{n-1}\right) = r^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\sin\theta_j\right)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi ... \int\limits_0^{2\pi} f(r)J(r,\theta)drd\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= \int\limits_0^\infty r^{n-1}f(r)dr \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi ... \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1}\left(\sin\theta_j\right)^{n-1-j} d\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= w_{n-1}\int\limits_0^\infty f(r)r^{n-1}dr
\end{aligned}$$

elde edilir, burada w_{n-1}, birim kürenin yüzey alanıdır.

Genel olarak

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f\left(r\sin\theta_1, ..., \sin\theta_{n-1}\right) r^{n-1} dr d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\ &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f(r,\theta) r^{n-1} d\sigma dr\end{aligned}$$

biçimde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür [42].

Tanım 2.39. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f(x)$ ve $g(x)$ ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

integraline f ile g nin konvolüsyonu denir ve $f * g$ ile gösterilir.

Teorem 2.40. Eğer f, $g \in L^1$ ise bu durumda $h = f * g$ hemen her yerde vardır ve L^1 e aittir. Ayrıca

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

sağlanır [35].

Teorem 2.41. (Young) $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $f \in L_p$ ve $g \in L^1$ ise bu durumda $h = f * g$ hemen her yerde vardır ve L_p uzayına aittir. Ayrıca

$$\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

eşitsizliği gerçeklenir [35].

Teorem 2.42. (Young) $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ olsun, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ olsun. Bu durumda $h = f * g$ olmak üzere $h \in L_r$ dir ve

$$\|h\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır [35].

Tanım 2.43. (Fourier Dönüşümü) $f \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ olsun.

$$\hat{f}\left(x\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(y\right) e^{-i(x,y)} dy$$

ile verilen $\hat{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Burada $(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ dir. Fourier dönüşümü

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-i(x,y)} dy$$

veya

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-2\pi i(x,y)} dy$$

olarak da alınabilir. Eğer $n = 1$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ ise bu durumda

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy} dy$$

olur [11].

Lemma 2.44. Eğer $f(x) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) ... f_n(x_n)$ ise

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_1(x_1)\, \hat{f}_2(x_2) ... \hat{f}_n(x_n)$$

sağlanır [11].

Teorem 2.45. (Riemann-Lebesgue) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $\hat{f}$ sınırlı ve düzgün süreklidir. Ayrıca $|x| \to \infty$ iken $\widehat{f}(x) \to 0$ dır.

Teorem 2.46. $f, g \in L^1$ olsun. Eğer $h = f * g$ ise bu durumda $\widehat{h} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ dır [35].

Teorem 2.47. $f, g \in L^1$ olsun. Bu durumda

$$\int \widehat{f}(x) g(x) dx = \int f(x) \widehat{g}(x) dx$$

dir [35].

Teorem 2.48. (Parseval-Plancherel) $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(x,y)} dy$$

Fourier dönüşümü vardır. Ayrıca

$$\left\| \widehat{f} \right\|_2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\| f \right\|_2$$

dir. Eğer Fourier dönüşümünü

$$\widehat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i(x,y)} dy$$

ile tanımlarsak bu durumda

$$\left\| \widehat{f} \right\|_2 = \|f\|_2 \qquad \text{(Parseval formülü)}$$

$$< \widehat{f}, \hat{g} >=< f, g > \text{ (Plancherel formülü)}$$

olur. Burada $< f, g >$, f ile g nin iç çarpımını göstermektedir ve

$$< f, g >= \int f \bar{g} dx$$

dir.

Tanım 2.49. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ve f nin Fourier dönüşümü

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)} dx$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{i(x,y)} dy$$

formülüne Fourier dönüşümleri için invers formülü denir [37].

Tanım 2.50. (Homojen Fonksiyon) λ ve α reel sayılar olmak üzere

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha} f(x)$$

oluyorsa f ye α. dereceden homojen fonksiyon denir [37].

Tanım 2.51. (Karakteristik Fonksiyon) $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1 \ , \ x \in A \\ 0 \ , \ x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonu A nın karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır [37].

Tanım 2.52. Bir s fonksiyonunun görüntü kümesi sonlu elemandan meydana geliyorsa s ye bir basit fonksiyondur denir.

$$s \ : \ X \to \{a_1, a_{2,...,}a_n\} \subset$$
$$x \to s(x) = a_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

Tanım 2.53. Bir $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j tamsayılarının sıralı n-lisine katlı-indis denir.
$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ dir. Eğer α ve β iki katlı-indis ise $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ dir. Benzer şekilde, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatördür. Özel olarak $D^{(0,...,0)} f = f$ dir. Bir boyutlu durumda D^α, $\frac{d}{dx}$ e indirgenir [37].

Örnek olarak $\mathbb{R}^3$ te $\alpha = (2, 0, 5)$ ise

$$D^\alpha = \frac{\partial^7}{\partial x_1^2 \partial x_3^5} = D_1^2 D_3^5$$

biçimindedir.

Tanım 2.54. (Schwarz Uzayı) $\mathbb{R}^n$ uzayında sonsuz kez diferansiyellenebilir ve istenilen α ve β katlı-indisleri için

$$\sup_{x \in IR^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına Schwarz Uzayı denir. Schwarz Uzayı "S" ile gösterilir. Kısaca

$$S = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \, , \, f \in \mathbb{C}^\infty : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty \right\}$$

dir. Diğer yandan α ve β katlı-indisler olduğundan $\alpha = (\alpha_1, \ ..., \ \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ ..., \ \beta_n)$ ve $\alpha_j, \beta_j \ \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, 2, ...$ dir. Burada

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}, \ \ x = (x_1, \ ..., \ x_n) \, , \ \ \alpha = (\alpha_1, \ ..., \ \alpha_n)$$

$$D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} ... \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} \ \ [41].$$

Teorem 2.55. Eğer $f \in S$ ise bu durumda f sınırlıdır,
$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda f sonsuz kez diferansiyellenebilirdir,
$\hat{f}(x) \in S$ ise bu durumda $\hat{f}(x)$ sonsuz kez diferansiyellenebilirdir [41].

Teorem 2.56. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise L_p deki basit fonksiyonların kümesi L_p de yoğundur.

Tanım 2.57. (Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık) $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere

$$T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$$

bir operatör olsun. Eğer $\forall\ f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_q \ \leq A \, \|f\|_p$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne kuvvetli (p, q) tipindedir denir.

μ bir ölçü olmak üzere eğer $\forall\ \alpha > 0$ için

$$\mu \{x : \ |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A \, \|f\|_p}{\alpha} \right)^q, \quad q < \infty$$

olacak şekilde α ve f den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir [42].

Teorem 2.58. (Riesz-Torin) $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ olmak üzere T, (p_0, q_0) ve (p_1, q_1) tipli bir operatör olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad (0 < \theta < 1)$$

olmak üzere T, kuvvetli (p, q) tipli bir operatördür [11].

Teorem 2.59. (Marcinkiewicz Ara Değer Teoremi) $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olmak üzere T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun. Ayrıca p ve q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p, q) tipli operatördür [11].

Tanım 2.60. (Vitali Örtü Lemması) E, sınırlı çaplı olan $\{B_j\}$ küreler ailesinin birleşimi tarafından örtülen $\mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir alt kümesi olsun.

O halde, $B_{1,}$ B_2, ..., B_k,...(sonlu veya sonsuz) ayrık dizilerini seçtikten sonra öyle ki

$$\sum_k m(B_k) \geq Cm(E_\alpha)$$

sağlanır.
Buradaki C sadece n ye bağlı olan pozitif bir sabittir.
$C = 5^{-n}$ olacaktır [47].

Tanım 2.61. (Dağılım Fonksiyonu) (X, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$ (**veya** $\mathbb{C}$) ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\alpha_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu denir [47].

2.4. Lebesgue Uzayları

Fonksiyonel analizde, Banach uzayı ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını Lebesgue uzayı $L^p(\mathbb{R}^n)$ oluşturur. Harmonik analizin önemli konularından biri olan Lebesgue uzayı, harmonik analizin iç problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde de uygulamalara sahiptir.

Tanım 2.62. $0 < p \leq \infty$ ve f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere Lebesgue uzayı

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \left\{f \text{ ölçülebilir } : \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\}$$

ile verilir, burada $0 < p < \infty$ için

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ durumunda ise

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

biçiminde verilir [44].

Tanım 2.63. $WL_p(\mathbb{R}^n)$ zayıf L_p uzayı $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} t\,|\{y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > t\}|^{1/p} < \infty$$

quasi-normuna sahip f ölçülebilir fonksiyonlarının uzayıdır. Kolayca gösterilebilir ki $1 \leq p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n) \subset WL_p(\mathbb{R}^n)$ dir [44].

Örnek 2.64.

(1) $f(x) = |x|^\alpha \notin L_p(\mathbb{R}^n)$

(2) $f(x) = |x|^\alpha \chi_{B(0,1)}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha > -\frac{n}{p}$

(3) $f(x) = |x|^\alpha \chi_{^cB(0,1)}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha < -\frac{n}{p}$

(4) $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \notin L_p(\mathbb{R}^n)$, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \in WL_p(\mathbb{R}^n)$

Teorem 2.65. Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise L_p bir Banach uzayıdır [44].

Tanım 2.66. (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $1/p + 1/p' = 1$ olmak üzere $f \in L_p(X)$, $g \in L_{p'}(X)$ olsun. Bu durumda

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|f\|_{L_{p'}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 2.67. (Minkowski Eşitsizliği) Eğer $p \geq 1$ için $f, g \in L_p(X)$ ise bu durumda

$$\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$$

eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği denir.

Teorem 2.68. $L^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $1 \leq p \leq \infty$ için bütün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının birleşimlerini içerir. Daha genel olarak $0 < p < q < \infty$ için

$$L_q(\mathbb{R}^n) \subseteq L_q^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir [44].

Teorem 2.69. (Lebesgue Diferansiyelleme Teoremi) Eğer $f \in L^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

sağlanır [44].

Tanım 2.70. Bir f fonksiyonunun desteği

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır. Yani f fonksiyonunun desteği onun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapanışıdır. Eğer $\mathrm{supp} f$ sınırlı bir küme ise f fonksiyonuna kompakt desteğe sahiptir denir.

Tanım 2.71. $\mathcal{T}$, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir (X,μ) ölçü uzayı üzerinde tanımlanmış ve bir (Y,ν) ölçü uzayı üzerinde bütün kompleks değerli hemen her yerde sonlu ölçülebilir fonksiyonların kümesinde değerler alan bir operatör olsun. Bu durumda her f, g ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\mathcal{T}(f+g) = \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g) \;\text{ ve }\; \mathcal{T}(\lambda f) = \lambda \mathcal{T}(f)$$

ise $\mathcal{T}$ ye lineer operatör,

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq |\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)| \;\text{ ve }\; |\mathcal{T}(\lambda f)| \leq |\lambda|\,|\mathcal{T}(f)|$$

ise $\mathcal{T}$ ye altlineer operatör, bir $K > 0$ sabiti için

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq K\left(|\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)|\right) \;\text{ ve }\; |\mathcal{T}(\lambda f)| \leq |\lambda|\,|\mathcal{T}(f)|$$

ise $\mathcal{T}$ ye quasilineer operatör denir. Altlineerlik, quasilinerliğin özel bir durumudur.

Tanım 2.72. ((p,q) tipli operatör)

$1 \leq p, q \leq \infty$, (X,μ) ve (Y,ν) iki ölçü uzayı ve $\mathcal{T}$, $L_p(X,\mu)$ den tanım ve görüntü kümeleri sırasıyla Y ve $\mathbb{C}$ olan ölçülebilir fonksiyonların uzayına bir operatör (altlineer) olsun. Eğer $q < \infty$ olmak üzere

$$\nu\left(\{y \in Y : |\mathcal{T} f(y)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

ise $\mathcal{T}$ zayıf (p,q) tipinden ve eğer $q = \infty$ iken $L_p(X,\mu)$ den $L_\infty(Y,\nu)$ ye sınırlı bir operatör ise zayıf (p,∞) tipindedir denir.

Eğer $\mathcal{T}$, $L_p(X,\mu)$ den $L_q(Y,\nu)$ ya sınırlı ise kuvvetli (p,q) tiplidir denir. Yani, her $f \in L_p(X,\mu)$ için

$$\|\mathcal{T}f\|_q \leq C\|f\|_p$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Buradan $q = \infty$ olması durumunda zayıf ve kuvvetli tip çakışmaktadır.

Eğer $\mathcal{T}$, kuvvetli (p,q) tipli ise aynı zamanda zayıf (p,q) tiplidir. Gerçekten, eğer $E_\lambda = \{y \in Y : |\mathcal{T}f(y)| > \lambda\}$ olarak alırsak, bu durumda

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{\mathcal{T}f(x)}{\lambda}\right|^q d\nu \leq \frac{\|\mathcal{T}f\|_q^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

olur.

Eğer $(X,\mu) = (Y,\nu)$ ve $\mathcal{T}$ özdeşlik operatörü olursa zayıf (p,p) klasik Chebyshev eşitsizliği olur.

Teorem 2.73. (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) (X,μ) ve (Y,ν) ölçü uzayları olsunlar. $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ olmak üzere $\mathcal{T}$, $L_{p_0}(X,\mu) + L_(p_1)(X,\mu)$ den Y üzerindeki ölçülebilir fonksiyonlara giden ve zayıf (p_0,p_0) ve zayıf (p_1,p_1) tipli bir altlineer operatör olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$, $p_0 < p < p_1$ için kuvvetli (p,p) tiplidir [11].

2.5. BMO Uzayı

Bu kesimde 1961 yılında John ve Nirenberg [25] tarafından kısmi diferansiyel denklemlerin çalışmaları sırasında ortaya konan BMO (Bounded Mean Oscillation) uzayının ve komütatör operatörünün tanımını ve bazı özelliklerini vereceğiz. BMO uzayı L_∞ uzayı ile benzer özelliklere sahiptir ve sıklıkla L_∞ yerine kullanılır. Klasik singüler integral operatörler L_∞ uzayından L_∞ uzayına sınırlı değildir, fakat L_∞ uzayından BMO uzayına sınırlıdır. Çoğu kez L_p ve BMO arasındaki interpolasyon L_p ile L_∞ arasındakinden daha uygun olmaktadır. Fakat BMO uzayının rolü bundan daha kapsamlı ve derindir. Bu uzay standart çekirdekli konvolüsyon tipli olmayan singüler integral operatörlerin L_2 sınırlılığının karakterizasyonunda olduğu gibi analizde pek çok durumda önemli bir role sahiptir. 1971 de Fefferman BMO uzayının H^1 uzayına dual olduğunu göstermiştir, burada H^1 Hardy uzayıdır.

$f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve bir $B(x,r)$ yuvarı için

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

ifadesine f fonksiyonunun $B(x,r)$ üzerindeki ortalaması denir. Bu durumda $|f - f_{B(x,r)}|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun salınımı ve

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| dy$$

ifadesine $B(x,r)$ üzerinde f fonksiyonunun ortalama salınımı denir.

Tanım 2.74. $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|f\|_* = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}|dy < \infty$$

ile verilen $\|\cdot\|_*$ yarı-normu ile tanımlı Banach uzayıdır. Burada $f \in L^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy$$

dır. BMO uzayı $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına eşit değildir. Fakat $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| dy \\
&\qquad \le \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy + \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \left|f_{B(x,r)}\right| dy \\
&\qquad = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy + |f_{B(x,r)}| \\
&\qquad \le \frac{2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy \\
&\qquad \le 2\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\|f\|_* \le 2\|f\|_\infty$$

elde edilir.

$\|f\|_* \le 2\|f\|_\infty$ olduğundan $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. Her sınırlı (ölçülebilir) fonksiyon BMO uzayındandır. Ancak sınırlı olmayan BMO fonksiyonları da vardır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olan fakat $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olmayan tipik bir örnek $\log|x|$ verilebilir. Şimdi BMO uzayına ait olmayan bir fonksiyon örneği verelim.

Örnek 2.75. $g(x) = sign(x)\log\frac{1}{|x|}$ fonksiyonu $BMO([-1,1])$ uzayına ait değildir. Gerçekten $0 < h < 1$ ve $I \equiv [-h,h]$ için $g_1 = 0$ ve

$$\frac{1}{|I|}\int_I |g(y) - g_1|dy = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left|\log\frac{1}{|x|}\right|dx = \frac{1}{h}\int_0^h \log\frac{1}{x}dx$$
$$= 1 + \log\frac{1}{h} \longrightarrow \infty,\quad h \longrightarrow 0 \text{ iken}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu örnek bir fonksiyonun mutlak değeri BMO sınıfına ait ise bu fonksiyonun bir BMO fonksiyonu olmasını gerektirmeyeceğini gösterir.

Uyarı 2.76.

(1) Her $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha > 0$ için

$$|\{x \in B : |f(x) - f_B| > \alpha\}| \le C_1\,|B|\,e^{-C_2\alpha/\|f\|_*},\qquad \forall B \subset \mathbb{R}^n$$

olacak şekilde pozitif C_1 ve C_2 sayıları vardır. Bu eşitsizlik John-Nirenberg eşitsizliği olarak bilinir.

(2) John-Nirenberg eşitsizliği $1 < p < \infty$ için

$$\|f\|_* \approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0}\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\left|f(y) - f_{B(x,r)}\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmasını gerektirir.

(3) $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $0 < 2r < t$ için

$$\left|f_{B(x,r)} - f_{B(x,t)}\right| \le C\|f\|_*\ln\frac{t}{r} \tag{2.1}$$

olacak şekilde x, r, t ve f fonksiyonundan bağımsız pozitif bir C sayısı vardır [24].

Uyarı 2.77.

(i) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ ise bu durumda $f(\cdot - h) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\cdot - h)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

dır.

(ii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ ise bu durumda $f(\lambda x) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

dır.

(iii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$\|f\|_{BMO} \approx \sup_{Q} \inf_{c\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c|\, dx$$

dır.

2.6. $L_{p,\lambda}$ Morrey Uzayları

Klasik $L_{p,\lambda}$ Morrey uzayları 1938 yılında C.B. Morrey [32] tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları araştırılırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenilirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride önemli uygulamaları vardır.

Tanım 2.78. $1 \le p < \infty$ ve $0 \le \lambda \le n$ olmak üzere $L_{p,\lambda} \equiv L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu sonlu olacak şekilde tüm $f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır.

$\lambda = 0$ için $L_{p,0} \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $L_{p,\lambda} = \Theta$ olur. Burada θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir.

$WL_{p\lambda} \equiv WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile bütün $f \in WL_p^{\mathrm{loc}}$ fonksiyonlarının uzayı olan zayıf Morrey uzayını göstereceğiz. Burada,

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_{p,\lambda}(B(x,r))} < \infty$$

şeklindedir.

Lemma 2.79. $1 \le p < \infty$ olsun. Bu durumda $L_{p,n} \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{L_{p,n}} = v_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olup, burada $v_n = |B(0,1)|$ dır.

İspat. $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\left(t^{-n} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \le v_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olur. Buradan $f \in L_{p,n}$ ve

$$\|f\|_{L_{p,n}} \le v_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

şeklindedir. $f \in L_{p,n}$ olmak üzere Lebesgue yakınsaklık teoreminden (bkz. [48])

$$\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

olur. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \le v_n^{-1/p} \|f\|_{L_{p,n}}$$

şeklindedir. Buradan $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dır ve

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le v_n^{-1/p} \|f\|_{L_{p,n}}$$

olur. ■

Lemma 2.80. $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\alpha = \frac{n-\lambda}{p}$ için

$$\|f\|_{L_{1,n-\alpha}} \le v_n^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

dır ve buradan $L_{p,\lambda} \subset L_{1,n-\alpha}$ olur. Burada $1/p + 1/p' = 1$ dır.

İspat. $f \in L_{p,\lambda}$, $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda < n$ ve $\alpha p = n - \lambda$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,t)} |f(y)| dy &\le \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{B(x,t)} dy \right)^{1/p'} \\
&= v_n^{1/p'} t^{n/p'} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
t^{\alpha-n} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy &\le v_n^{1/p'} t^{\alpha - n/p} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\
&= v_n^{1/p'} \left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\
&\le v_n^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $f \in L_{1,n-\alpha}$ ve

$$\|f\|_{L_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

şeklindedir. ■

2.7. Kesirli İntegral Operatörü ve Komütatörü

Bu bölümde kesirli integral operatör tanımı ve onun komütatörleri ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Tanım 2.81. (Maksimal Operatör) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,
$Mf : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ Hardy-Littlewood Maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) := \sup_{r>0} |B(x,\ r)|^{-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

biçiminde tanımlanır [47].

Teorem 2.82. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise Mf Maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

(ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall\ \alpha > 0$ için

$$m\Big\{x : Mf(x) > y\Big\} \leq \frac{A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür [47].

I_α Riesz potansiyeli aynı zamanda I_α kesirli integral operatörüdür.

Tanım 2.83. (Riesz Potensiyeli) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere,
I_α kesirli integral operatörü

$$I_\alpha f(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır [47].

Teorem 2.84. $1 < p < \infty,\ \ \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \ d =$çap$(\Omega) = \sup\Big\{|x-y|\ ;\ x, y \in \Omega\Big\}$,
$0 < \alpha < \dfrac{n}{p}, \quad \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(\Omega)} \leq \overline{c}(p, \alpha, n)\|f\|_{L_p(\Omega)}$$

gerçeklenir, burada $\overline{c}(p, \alpha, n)$ pozitif sabiti

$$\overline{c}(p, \alpha, n) = c\frac{n}{\alpha[n - \alpha p]}(p')^{1/q}$$

şeklindedir ve $c > 0$ sabiti p ve α ya bağlı değildir [30].

$f^*_{\alpha,p}(x)$ maksimal operatörü,

$$f^*_{\alpha,p}(x) = \sup_{x\in Q}\Big(\frac{1}{|Q|^{1-\alpha p/n}}\int_Q |f(y)|^p dy\Big)^{1/p},$$

burada Q, kenarları eksenlere paralel x merkezli bir küpdür [33].

$b(y) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayında olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y) - b_Q|dy < \infty,$$

burada $b_Q = (1/|Q|)\displaystyle\int_Q b(y)dy$.

$b(y)$ fonksiyonunun BMO normu $\|b\|_*$,

$$\|b\|_* = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |b - b_Q|dy$$

[8].

Tanım 2.85. (Komütatör Operatörü) $b(x) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve I de kesirli integral operatörünün $[b.I]$ komütatör operatörleri

$$[b.I](f)(x) := b(x)If(x) - I(bf)(x)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Teorem 2.86. $b(x) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$[b, I_\alpha](f)(x) = b(x)I_\alpha f(x) - I_\alpha(fb)(x)$$

operatörü, $0 < \alpha < n$ olmak üzere

$$\|[b, I_\alpha](f)\|_q \le C\|b\|_*\|f\|_p, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, \quad 1 < p < \frac{n}{\alpha}$$

olmasını gerektirir.

Tersine, eğer $n - \alpha$ bir çift tamsayı ve $[b, I_\alpha]$ komütatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı, burada p ve q yukarıdaki gibi tanımlı, ise bu durumda $b \in BMO$ [8].

Lemma 2.87. $p > 1$ ve $1/q = 1/p - \alpha/n, 0 < \alpha < n$ ise bu durumda

$$\|I_\alpha(f)\|_q \le C\|f\|_p.$$

$p = 1$ ise bu durumda

$$|\{x : I_\alpha(|f|)(x) > \lambda\}| \le (c/\lambda\|f\|_1)^{n/(n-\alpha)}$$

[47].

Lemma 2.88. $p < r < n/\alpha$ ve $1/q = 1/r - \alpha/n$ olsun. Bu durumda

$$\|f^*_{\alpha,p}\|_s \le C\|f\|_r$$

[8].

Lemma 2.89. $b(x) \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1/p + 1/p' = 1$ ise bu durumda

$$|\{x : C(b, f)(x) > \lambda\}| \le C(\frac{\|b\|_{p'}\|f\|_p}{\lambda})^{n/(n-\alpha)}, \quad 1 < p < \frac{n}{\alpha}$$

[8].

3. MATERYAL VE METOT

L Schrödinger operatörü, V negatif olmayan potansiyel fonksiyonu, $V \neq 0$ ve bazı $q \geq Q/2$ için RH_q ters Hölder sınıflarına ait olmak üzere, $\mathbb{H}_n$ Heisenberg grubu üzerinde, $n \geq 3$ için

$$L = -\Delta_{\mathbb{H}_n} + V$$

şeklinde tanımlanır, burada Q, $\mathbb{H}_n$ Heisenberg gruplarının homojen boyutudur. b, yeni bir $\Lambda_\nu^\theta(\rho)$ Campanato uzayına ait ve $\mathcal{I}_\beta^L$, L operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörü olsun.

Bu yüksek lisans tezinde, $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$ olmak üzere $[b, \mathcal{I}_\beta^L]$ komütatör operatörlerinin $LM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ merkez (lokal) genelleştirilmiş Morrey uzaylarında, $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında ve Schrödinger operatörüne karşılık gelen $VM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığı incelenmiştir. Ayrıca $\theta > 0$, $0 < \nu < 1$ olmak üzere b, $\Lambda_\nu^\theta(\rho)$ nun elemanı olduğunda ve (φ_1, φ_2) çifti bazı yeter şartları sağladığı zaman $[b, \mathcal{I}_\beta^L]$ komütatör operatörlerinin $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına, $M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $VM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $VM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$, $1/p - 1/q = (\beta + \nu)/Q$ uzayına sınırlılığı incelenmiştir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Heisenberg Grupları, Schrödinger Operatörü ve Schrödinger Operatörüne karşılık gelen Morrey uzayları hakkında temel tanım ve özellikleri ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir. $\theta > 0$, $0 < \nu < 1$ olmak üzere b, $\Lambda_\nu^\theta(\rho)$ nun elemanı olduğunda ve (φ_1, φ_2) çifti bazı yeter şartları sağladığı zaman $[b, \mathcal{I}_\beta^L]$ komütatör operatörlerinin $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına, $M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $VM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $VM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$, $1/p - 1/q = (\beta + \nu)/Q$ uzayına sınırlılıkları ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

4.1. Morrey Tipli Uzaylarda Heisenberg Gruplarında Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kesirli İntegral Operatörünün Komütatörleri

Bu bölümde, Heisenberg Grupları, Schrödinger Operatörü ve Schrödinger Operatörüne karşılık gelen Morrey uzayları hakkında temel tanım ve özellikleri ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir.

4.1.1. Heisenberg Grupları

$\mathbb{H}_n$, $2n+1$ boyutlu bir Heisenberg grubu olsun yani $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ manifoldu altında bir nilpotent Lie grubudur. Grubun yapısı

$$(x,\ t)(y,\ s)\ = (x+y,\ t+s\ + 2\sum_{j=1}^{n}(x_{n+j}y_j - x_j y_{n+j}))$$

ve $\mathbb{H}_n$ üzerinde sol değişmez vektör alanının Lie cebiri

$$X_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial t},\ X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2x_{n+j}\frac{\partial}{\partial t},\ X_{n+j} = \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} - 2x_j\frac{\partial}{\partial t},\ j = 1,\ \cdots,\ n$$

şeklindedir. Komütasyon bağıntılarıda

$$[X_j,\ X_{n+j}] = -4X_{2n+1},\ j = 1,\ \cdots,\ n$$

ile verilir. $\triangle_{\mathbb{H}_n}$ alt-Laplasyan

$$\Delta_{\mathbb{H}_n} = \sum_{j=1}^{2n} X_j^2$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\mathbb{H}_n$ üzerindeki Haar ölçüsü, $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü olarak alınabilir. $|E|$, herhangi bir ölçülebilir $E \subset \mathbb{H}_n$ kümesinin ölçüsüdür. $\mathbb{H}_n$ üzerindeki homojen norm şu şekilde tanımlanır;

$$|g|\ = (|x|^4 + |t|^2)^{\frac{1}{4}},\ g\ = (x,\ t) \in \mathbb{H}_n,$$

burada $\mathbb{H}_n$ üzerinde sol değişmez uzunluğunun $d(g,\ h) = |g^{-1}h|$ olmasını sağlar. $\mathbb{H}_n$ üzerindeki genişlemeler $\delta_r(x,\ t) = (rx,\ r^2t),\ r > 0$ formundadır. Bu grup üzerindeki Haar ölçüsü $dx = dx_1 \ldots dx_{2n}dt$ Lebesgue ölçüsü ile çakışır. $\mathbb{H}_n$ nin birim elemanı $e = 0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ ve $g = (x, t)$ nin tersi de $g^{-1} = (-x, -t)$ dır.

$\mathbb{H}_n$ nin homejen boyutu $Q = 2n + 2$ olmak üzere r yarıçaplı ve g merkezli yuvar,

$$B(g,\ r) = \{h \in \mathbb{H}_n : |g^{-1}h| < r\}$$

ve $|B(g, r)| = r^Q|B(0, 1)|$ dır. Eğer $B = B(g,\ r)$ ise bu durumda λB, $\lambda > 0$ için $B(g,\ \lambda r)$ olduğunu gösterir. Açık bir şekilde $|\lambda B| = \lambda^Q|B|$ dır.

Heisenberg gruplarının analizi ile ilgili detaylı bilgiler Folland, G.B; Stein, E.M. [13] ve Stein, E.M. [48] tarafından verilmiştir.

4.1.2. Schrödinger Operatörü

Schrödinger operatörü, V, negatif olmayan potansiyel fonksiyonu,$V \neq 0$ ve bazı $q \geq Q/2$ için RH_q ters Hölder sınıflarına ait olmak üzere, $\mathbb{H}_n$ Heisenberg grubu üzerinde, $n \geq 3$ için

$$L = -\Delta_{\mathbb{H}_n} + V$$

şeklinde tanımlanır yani bir $C > 0$ sabiti mevcut olacak şekilde ters Hölder eşitsizliği her $g \in \mathbb{H}_n$ ve $0 < r < \infty$ için

$$\left(\frac{1}{|B(g, r)|}\int_{B(g,r)} V^q(h)dh\right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B(g, r)|}\int_{B(g,r)} V(h)dh \tag{4.1}$$

şeklinde elde edilir, burada $B(g, r)$, g merkezli r yarıçaplı bir yuvardır.

Özellikle, V negatif olmayan bir polinom ise bu durumda $V \in RH_\infty$. Açıkcası, $q_2 > q_1$ ise bu durumda $RH_{q_2} \subset RH_{q_1}$. Ayrıca RH_q ters Hölder sınıfı, $V \in RH_q$ ise bu durumda bazı $\epsilon > 0$ için $V \in RH_{q+\epsilon}$ özelliğine sahiptir. Böylece $0 \neq V \in RH_{Q/2}$ olarak kabul edilecektir.

$q \geq Q/2$ olmak üzere verilen bir $V \in RH_q$ potansiyeli için $0 < \rho(g) < \infty$ yardımcı fonksiyonu, herhangi bir $g \in \mathbb{H}_n$ için

$$\rho(g) := \frac{1}{m_V(g)} = \sup_{r>0}\left\{r : \frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(g,r)} V(h)dh \leq 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır [45].

$\theta > 0$ ve $0 < \nu < 1$ olsun. Li ve Lu tarafından [26, 28] belirtildiği gibi, her $g \in \mathbb{H}_n$ ve $r > 0$ için b lokal integrallenebilen fonksiyonları içeren $\Lambda_\nu^\theta(\rho)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen Campanato sınıfları

$$\frac{1}{|B(g,r)|^{1+\nu/Q}}\int_{B(g,r)}|b(h)-b_B|dh \le C\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\theta} \tag{4.2}$$

şeklinde ifade edilir. $b\in\Lambda_\nu^\theta(\mathbb{H}_n,\rho)$ yarı normu, $[b]_\beta^\theta$ ile gösterilir ve yukarıdaki eşitsizlikte verilen sabit sayının infimumudur.

Ayrıca $\theta=0$ durumunda $\Lambda_\nu^\theta(\mathbb{H}_n,\rho)$ klasik Campanato uzay; $\nu=0$ ise bu durumda $\Lambda_\nu^\theta(\mathbb{H}_n,\rho)$ uzayının $BMO_\theta(\mathbb{H}_n,\rho)$ uzayı olduğu Bongioanni tarafından [4] gösterildi, ayrıca [27] bakınız.

Bundan sonra, aşağıda ifade edilen gösterimler tanımlandığı şekilde kullanılacaktır:

$$\mathfrak{A}_{p,\varphi}^{\alpha,V}(f;g,r):=\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha}r^{-Q/p}\,\varphi(g,r)^{-1}\|f\|_{L_p(B(g,r))}$$

ve

$$\mathfrak{A}_{\Phi,\varphi}^{W,\alpha,V}(f;g,r):=\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha}r^{-Q/p}\,\varphi(g,r)^{-1}\|f\|_{WL_p(B(g,r))}.$$

$A\lesssim B$ sembolü; C sabiti, tüm önemli parametrelerden bağımsız olarak evrensel bir pozitif olmak üzere $A\le CB$ yerine kullanıldı. Eğer $A\lesssim B$ ve $B\lesssim A$ ise bu durumda $A\approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir.

4.1.3. Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Morrey-Tipli Uzaylar

Bu kısımda, Öklid kümesinde Guliyev [21], Akbulut, Omarova, Ragusa ve diğerleri [1, 4, 49] tarafından tanımlanan Schrödinger operatörüne karşılık gelen merkez (lokal) ve global genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanımları verilmiştir.

Tanım 4.1. (Genelleştirilmiş Morrey Uzay ve Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Lokal Genelleştirilmiş Morrey Uzay)

$\varphi(r)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında, pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1\le p<\infty$, $\alpha\ge 0$, ve $V\in RH_q$, $q\ge 1$ olsun.

$M_{p,\varphi}^{\alpha,V}=M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey Uzay, tüm $f\in L_{loc}^p(\mathbb{H}_n)$ fonksiyonlarının uzayı olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}^{\alpha,V}}=\sup_{g\in\mathbb{H}_n,r>0}\mathfrak{A}_{p,\varphi}^{\alpha,V}(f;g,r)$$

sonlu yarı normu ile tanımlanır.

$LM_{p,\varphi}^{\alpha,V}=LM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Lokal Genelleştirilmiş Morrey Uzay, tüm $f\in L_{loc}^p(\mathbb{H}_n)$ fonksiyonlarının uzayı olmak üzere e, $\mathbb{H}_n$ nin birim elemanı için

$$\|f\|_{LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \sup_{r>0} \mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi}(f;e,r)$$

sonlu yarı normu ile tanımlanır.

Ayrıca tüm $f \in L^p_{loc}(\mathbb{H}_n)$ fonksiyonlarının uzayı olmak üzere; $WM^{\alpha,V}_{p,\varphi} = WM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı,

$$\|f\|_{WM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \sup_{g\in\mathbb{H}_n, r>0} \mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{\Phi,\varphi}(f;g,r) < \infty,$$

$LWM^{\alpha,V}_{p,\varphi} = LWM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ Schrödinger operatörlerine karşılık gelen merkezi zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı,

$$\|f\|_{LWM^{\alpha,V}_{p,\varphi}} = \sup_{r>0} \mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{\Phi,\varphi}(f;e,r) < \infty$$

normları ile tanımlanır.

Uyarı 4.2. (i) Öklid kümesi üzerinde; $\alpha = 0$ ve $\varphi(r) = r^{(\lambda-Q)/p}$ olduğunda, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayı olduğu Morrey tarafından [32] ve $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının, $LM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ merkezi Morrey uzayı olduğu Alvarez ve ark. [3] tarafından incelenmiştir.

(ii) Öklid kümesi üzerinde; $\varphi(r) = r^{(\lambda-Q)/p}$ olduğunda, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $M^{\alpha,V}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen Morrey uzayı olduğu Tang ve Dong [49] tarafından incelenmiştir;

(iii) $\alpha = 0$ olduğunda, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzayının $M_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı olduğu Guliyev ve arkadaşları [20] tarafından ve $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzayının $LM_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ merkezi genelleştirilmiş Morrey uzay olduğu Guliyev [15] tarafından incelenmiştir. Ayrıca bakınız [16, 19, 22, 23].

(iv) Öklid kümesi üzerinde; $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarına sırasıyla Schrödinger operatörüne karşılık gelen merkezi genelleştirilmiş Morrey uzayları Guliyev [21], Akbulut ve ark. [1] tarafından incelenmiştir.

Tanım 4.3. (Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Vanishing Genelleştirilmiş Morrey Uzay)

$VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen vanishing genelleştirilmiş Morrey uzay, $f \in M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ fonksiyonlarının uzayları olmak üzere

$$\lim_{r\to 0} \sup_{g\in\mathbb{H}_n} \mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi}(f;g,r) = 0. \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanır.

$VWM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen vanishing genelleştirilmiş Morrey uzay, $f \in WM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ fonksiyonlarının uzayları olmak üzere

$$\lim_{r\to 0} \sup_{g\in\mathbb{H}_n} \mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{p,\varphi}(f;g,r) = 0.$$

şeklinde tanımlanır.

$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzaylarında ikinci dereceden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları Morrey [32] tarafından incelendi. Ayrıca, son yıllarda birçok matematikçi tarafından klasik Morrey uzayının özellikleri ve uygulamaları [9, 10, 12, 32, 38] ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarda r^λ fonksiyonu yerine negatif olmayan $\varphi(r)$ bir genel fonksiyonunun yeter şartları alınarak incelenmiştir. (bkz, örneğin, [17, 20, 31, 34, 46] vb.).

Ayrıca, $\alpha = 0$ ve $\varphi(x,r) = r^{(\lambda-n)/p}$ durumunda $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $VM_{p,\lambda}$ vanishing Morrey uzayı olduğunda Vitanza [51] tarafından kısmi türevli denklemlerinin uygulamaları ve vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarının bazı özellikleri de Akbulut [1], Ragusa [39] ve Samko [43] tarafından incelenmiştir.

4.1.4. Heisenberg Gruplarında Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kesirli İntegral Operatörünün Komütartörleri

Bu kısımda, $[b,\mathcal{I}^L_\beta]$ komütatörünün sınırlılığı, b nin $\Lambda^\theta_\nu(\rho)$ yeni Campanato sınıfına ait olmak üzere $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey ve $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarda gösterilmiştir.

Tanım 4.4. (Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kesirli İntegral Operatörü)

$V \in RH_{Q/2}$ olmak üzere $L = -\Delta_{\mathbb{H}_n} + V$ olsun. L Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kesirli İntegral Operatörü, $0 < \beta < Q$ için

$$\mathcal{I}^L_\beta f(g) = L^{-\beta/2} f(g) = \int_0^\infty e^{-tL}(f)(g)\, t^{\beta/2-1} dt$$

şeklinde tanımlanır.

$$[b,\mathcal{I}^L_\beta] f(g) = b(g)\mathcal{I}^L_\beta f(g) - \mathcal{I}^L_\beta(bf)(g)$$

$\mathcal{I}^L_\beta$ nin komütatörü denir.

Eğer $L = -\Delta_{\mathbb{H}_n}$, $\mathbb{H}_n$ üzerinde altlaplasyan ise bu durumda $\mathcal{I}^L_\beta$ ve $[b,\mathcal{I}^L_\beta]$ sırasıyla, I_β Riesz potansiyeli ve $[b, I_\beta]$ Riesz potansiyelinin komütatörüdür yani

$$I_\beta f(g) = \int_{\mathbb{H}_n} \frac{f(h)}{|h^{-1}g|^{Q-\beta}} dh,$$

$$[b, I_\beta]f(g) = \int_{\mathbb{H}_n} \frac{b(g) - b(h)}{|h^{-1}g|^{Q-\beta}} f(h)dh.$$

$b \in BMO$ olduğunda, Chanillo [8] tarafından, $1/q = 1/p - \beta/n$, $1 < p < n/\beta$ olmak üzere $[b, I_\beta]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğu ve b, Λ_ν, $0 < \nu < 1$, Campanato uzayına ait olduğunda, Paluszynski [36] tarafından, $1/q = 1/p - (\beta+\nu)/n$, $1 < p < n/(\beta+\nu)$ olmak üzere $[b, I_\beta]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğu ispatlandı. $b \in BMO_\theta(\rho)$ olduğu durumda ise, Bui [5] tarafından, $1/q = 1/p - \beta/n$, $1 < p < n/\beta$ olmak üzere $[b, \mathcal{I}_\beta^L]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığını elde etmiştir.

Şimdi başlıca sonuçların ispatında kullanılacak bazı yardımcı fonksiyonlar aşağıda ispatsız olarak ifade edilmiştir:

Lemma 4.5. $V \in RH_{Q/2}$ olsun. Her $g, h \in \mathbb{H}_n$ için ρ fonksiyonuna karşılık gelen

$$C^{-1}\rho(g)\Big(1 + \frac{|h^{-1}g|}{\rho(g)}\Big)^{-k_0} \le \rho(h) \le C\rho(g)\Big(1 + \frac{|h^{-1}g|}{\rho(g)}\Big)^{\frac{k_0}{1+k_0}} \tag{4.4}$$

olacak şekilde C ve $k_0 \ge 1$ sabitleri vardır [26].

Lemma 4.6. $g \in B(g_0, r)$ olsun. Bu durumda $k \in N$ için

$$\frac{1}{\Big(1 + \frac{2^k r}{\rho(g)}\Big)^N} \lesssim \frac{1}{\Big(1 + \frac{2^k r}{\rho(g_0)}\Big)^{N/(k_0+1)}} \;\; [1].$$

$\theta \ge 0$ olmak üzere $BMO_\theta(\mathbb{H}_n, \rho)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen BMO uzayı, b bütün lokal intgrallenebilir fonksiyonların bir kümesi gibi Bongioanni ve ark. [4] tarafından tanımlanır yani her $g \in \mathbb{H}_n$ ve $r > 0$ için

$$\frac{1}{|B(g,r)|}\int_{B(g,r)} |b(h) - b_B|dh \le C\Big(1 + \frac{r}{\rho(g)}\Big)^\theta \tag{4.5}$$

burada

$$b_B = \frac{1}{|B|}\int_B b(h)dh.$$

$b \in BMO_\theta(\mathbb{H}_n, \rho)$ için $[b]_\theta$ normu (4.5) eşitsizliğindeki sabitlerin infimumu ile tanımlanır ve

$$BMO(\mathbb{H}_n) \subset BMO_\theta(\mathbb{H}_n, \rho).$$

$\theta > 0$ ve $0 < \nu < 1$ olsun. $\Lambda_\nu^\theta(\rho)$ Campanato sınıfı üzerindeki $[b]_\nu^\theta$ yarı norm;

$$[b]_\nu^\theta := \sup_{g\in\mathbb{H}_n,\, r>0} \frac{\frac{1}{|B(g,r)|^{1+\nu/Q}}\int_{B(g,r)} |b(h) - b_B|dh}{(1 + \frac{r}{\rho(g)})^\theta} < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

f fonksiyonunu içeren Schrödinger operatörüne karşılık gelen Lipschitz uzayı

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\nu^\theta(\rho)} := \sup_{g\in\mathbb{H}_n,\, r>0} \frac{|f(g)-f(h)|}{|h^{-1}g|^\nu\big(1+\frac{|h^{-1}g|}{\rho(g)}+\frac{|h^{-1}g|}{\rho(h)}\big)^\theta} < \infty$$

şeklinde tanımlanır [28]. Burada $\theta = 0$ olması durumunda Lipschitz uzayı olduğu görülür.

Uyarı 4.7. (4.2) eşitsizliğinde;

(i) Eğer $\theta = 0$ ise bu durumda $\Lambda_\nu^\theta(\rho)$ klasik Campanato uzayıdır.

(ii) Eğer $\nu = 0$, $\Lambda_\nu^\theta(\rho)$ ise bu durumda $BMO_\theta(\rho)$ uzayıdır.

(iii) Eğer $\theta = 0$ ve $\nu = 0$ ise bu durumda BMO John-Nirenberg uzayıdır.

$\mathrm{Lip}_\nu^\theta(\rho)$ ve $\Lambda_\nu^\theta(\rho)$ uzayları arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

Lemma 4.8. $\theta > 0$ ve $0 < \nu < 1$ olsun. k_0 sabiti Lemma 4.5. belirtildiği gibi olmak üzere

$$\Lambda_\nu^\theta(\rho) \subseteq \mathrm{Lip}_\nu^\theta(\rho) \subseteq \Lambda_\nu^{(k_0+1)\theta}(\rho)$$

olacak şekilde bir gömme mevcuttur [28, Theorem 5] .

$\Lambda_\nu^\theta(\rho)$ Schrödinger operatörlerine karşılık gelen Campanato uzayı ile ilgili bazı eşitsizlikler aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Lemma 4.9. $\theta > 0$ ve $1 \le s < \infty$ olsun. Eğer $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$ ise bu durumda $g \in \mathbb{H}_n$ ve $r > 0$ olmak üzere her $B = B(g, r)$ için,

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |b(h)-b_B|^s dh\Big)^{1/s} \le C[b]_\nu^\theta r^\nu \Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\theta'}$$

olacak şekilde pozitif bir C sabiti vardır. Burada $\theta' = (k_0+1)\theta$ ve k_0 sabiti (4.4) eşitsizliğinde belirtildiği gibidir [28].

K_β , $\mathcal{I}_\beta^L$ nin çekirdeği olsun. $K_\beta(g, y)$ çekirdeği üzerindeki sonuç aşağıdaki gibidir.

Lemma 4.10. Eğer $V \in RH_{Q/2}$ ise bu durumda her bir N için

$$|K_\beta(g,y)| \le \frac{C}{\Big(1+\frac{\left|h^{-1}g\right|}{\rho(g)}\Big)^N} \frac{1}{\left|h^{-1}g\right|^{Q-\beta}} \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır [5].

Sonuç olarak esssup ve essinf arasıdaki ilişki ile ilgili sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.11. f reel değerli negatif olmayan ve E üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Big(\operatorname*{ess\,inf}_{g\in E} f(g)\Big)^{-1} = \operatorname*{ess\,inf}_{g\in E} \frac{1}{f(g)} \;\; [50].$$

Lemma 4.12. φ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \le p < \infty$, $\alpha \ge 0$, ve $V \in RH_q$, $q \ge 1$ olsun. Eğer

$$\sup_{t<r<\infty} \Big(1+\frac{r}{\rho(e)}\Big)^{\alpha} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(r)} = \infty \quad \text{bazı } \; t>0 \quad \text{için,} \tag{4.7}$$

ise bu durumda $LM_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)=\Theta$. Burada Θ, $\mathbb{H}_n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesidir [23].

Lemma 4.13. φ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \le p < \infty$, $\alpha \ge 0$ ve $V \in RH_q$, $q \ge 1$ olsun.

(i) Eğer

$$\sup_{t<r<\infty} \Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha} \frac{r^{-\frac{Q}{p}}}{\varphi(r)} = \infty \quad \text{bazı } t>0 \; \text{ ve her } g\in\mathbb{H}_n, \tag{4.8}$$

ise bu durumda $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)=\Theta$.

(ii) Eğer

$$\sup_{0<r<\tau} \Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha} \varphi(r)^{-1} = \infty \quad \text{bazı } \; \tau>0 \; \text{ ve her } g\in\mathbb{H}_n, \tag{4.9}$$

ise bu durumda $M_{p,\varphi}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)=\Theta$ [1].

Uyarı 4.14. $\Omega_{p,loc}^{\alpha,V}$, $(0,\infty)$ üzerinde φ tüm pozitif ölçülebilir fonksiyonların kümesi olarak tanımlansın öyle ki her $t>0$ için

$$\Big\|\Big(1+\frac{r}{\rho(e)}\Big)^{\alpha} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(r)}\Big\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty.$$

Ayrıca, $\Omega_p^{\alpha,V}$, $(0,\infty)$ üzerinde φ tüm pozitif ölçülebilir fonksiyonların kümesi olarak tanımlansın öyle ki sırasıyla; her $t>0$ için

$$\sup_{g\in\mathbb{H}_n}\Big\|\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha} \frac{r^{-\frac{Q}{p}}}{\varphi(r)}\Big\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty$$

ve

$$\sup_{g\in\mathbb{H}_n}\left\|\left(1+\frac{r}{\rho(g)}\right)^{\alpha}\varphi(r)^{-1}\right\|_{L_\infty(0,t)}<\infty,$$

[1].

$LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzaylarının aşikar olmama durumlarında daima sırasıyla $\varphi\in\Omega^{\alpha,V}_{p,loc}$ ve $\varphi\in\Omega^{\alpha,V}_{p}$ şeklinde kabul edilecektir.

Uyarı 4.15. $\Omega^{\alpha,V}_{p,1}$, $\mathbb{H}_n\times(0,\infty)$ üzerinde tüm φ pozitif ölçülebilir fonksiyonlar kümesi olmak üzere

$$\inf_{g\in\mathbb{H}_n}\inf_{r>\delta}\left(1+\frac{r}{\rho(g)}\right)^{-\alpha}\varphi(g,r)>0,\qquad \text{bazı } \delta>0 \quad \text{için,} \tag{4.10}$$

ve

$$\lim_{r\to 0}\left(1+\frac{r}{\rho(g)}\right)^{\alpha}\frac{r^{Q/p}}{\varphi(g,r)}=0.$$

$VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzaylarının aşikar olmama durumunda $\varphi\in\Omega^{\alpha,V}_{p,1}$ şeklinde kabul edilecektir.

4.2. Heisenberg Gruplarında Tanımlı Schrödinger Operatörlerine Karşılık Gelen Kesirli İntegral Operatörlerinin Komütatörlerinin Morrey Tipli Uzaylarda Sınırlılığı

Bu bölümde, sırasıyla Schrödinger operatörüne karşılık gelen $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylar, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylar ve $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylar üzerinde $\mathcal{I}^L_\beta$ operatörünün komütatörlerinin sınırlılığı ile ilgili sonuçlar verilmiştir. b, $\Lambda^\theta_\nu(\rho)$, $0<\nu<1$, yeni Campanato uzayına ait olduğunda $[b,\mathcal{I}^L_\beta]$ komütatör operatörünün $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LM^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M^{\alpha,V}_{q,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzayından, $1/q=1/p-(\beta+\nu)/Q$, $1<p<Q/(\beta+\nu)$ olmak üzere $VM^{\alpha,V}_{q,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlılığı incelenmiştir.

Ayrıca, $b\in\Lambda^\theta_\nu(\rho)$ iken $[b,\mathcal{I}^L_\beta]$ komütatör operatörlerinin sınırlılığı sırasıyla Schrödinger operatörüne karşılık gelen $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylar, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylar ve $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi}(\mathbb{H}_n)$ vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarda incelenmiştir. Ayrıca $\theta>0$, $0<\nu<1$ iken $b\in\Lambda^\theta_\nu(\rho)$ ve (φ_1,φ_2) çiftinin bazı yeter şartları sağladığında $[b,\mathcal{I}^L_\beta]$ komütatör operatörlerinin $LM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LM^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına, $M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $M^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $VM^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}(\mathbb{H}_n)$, $1/p-1/q=(\beta+\nu)/Q$ uzayına sınırlıkları ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

Teorem 4.16. $x_0 \in \mathbb{H}_n$, $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$, $V \in RH_{q_1}$, $q_1 > Q/2$, $0 < \nu < 1$, $\alpha \geq 0$, $1 \leq p < Q/(\beta+\nu)$, $1/q = 1/p - (\beta+\nu)/Q$ olsun ve $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_{p,loc}^{\alpha,V}$

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(g_0,s)s^{\frac{Q}{p}}}{t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t} \leq c_0\varphi_2(g_0,r), \tag{4.11}$$

şartını sağlasın, burada c_0 sabiti g_0 ve r den bağımsızdır. Bu durumda $[b,\mathcal{I}_\beta^L]$ komütatörü $M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından, $p>1$ için $M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına ve $M_{1,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $WM_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu},\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca, $p>1$ için

$$\|[b,\mathcal{I}_\beta^L]f\|_{M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)} \leq C[b]_\nu^\theta \|f\|_{M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)}$$

ve $p=1$ için

$$\|[b,\mathcal{I}_\beta^L]f\|_{WM_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu},\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)} \leq C[b]_\nu^\theta \|f\|_{M_{1,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)},$$

burada C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır [18].

Sonuç 4.17. $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$, $V \in RH_{q_1}$, $q_1 > Q/2$, $0<\nu<1$, $\alpha \geq 0$, $1 \leq p < Q/(\beta+\nu)$, $1/q = 1/p - (\beta+\nu)/Q$ olsun ve $\varphi_1 \in \Omega_p^{\alpha,V}$, $\varphi_2 \in \Omega_q^{\alpha,V}$

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}}{t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t} \leq c_0\varphi_2(g,r) \tag{4.12}$$

şartını sağlasın, burada c_0 sabiti x ve r den bağımsızdır. Bu durumda, $[b,\mathcal{I}_\beta^L]$ komütatörü, $M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}$ uzayından, $p>1$ için $M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}$ uzayına ve $M_{1,\varphi_1}^{\alpha,V}$ uzayından $WM_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu},\varphi_2}^{\alpha,V}$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca, $p>1$ için

$$\|[b,\mathcal{I}_\beta^L]f\|_{M_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}} \leq C[b]_\theta \|f\|_{M_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}}$$

ve $p=1$ için

$$\|[b,\mathcal{I}_\beta^L]f\|_{WM_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu},\varphi_2}^{\alpha,V}} \leq C\|f\|_{M_{1,\varphi_1}^{\alpha,V}},$$

burada C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır [18].

Teorem 4.18. $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$, $V \in RH_{q_1}$, $q_1 > Q/2$, $0 < \nu < 1$, $\alpha \geq 0$, $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$, $1 < p < Q/(\beta+\nu)$, $1/q = 1/p - (\beta+\nu)/Q$ olsun ve $\varphi_1 \in \Omega_{p,1}^{\alpha,V}$, $\varphi_2 \in \Omega_{q,1}^{\alpha,V}$, her $\delta > 0$ için

$$c_\delta := \int_\delta^\infty \sup_{g \in \mathbb{H}_n} \varphi_1(g,t) \frac{dt}{t} < \infty$$

ve

$$\int_r^\infty \varphi_1(g,t) \frac{dt}{t^{1-\beta-\nu}} \leq C_0 \varphi_2(g,r) \tag{4.13}$$

şartlarını sağlasın, burada C_0 sabiti $g \in \mathbb{H}_n$ ve $r > 0$ dan bağımsızdır. Bu durumda, $[b, \mathcal{I}_\beta^L]$ komütatör operatörü $VM_{1,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $VWM_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu},\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlıdır [18].

Lemma 4.19. $0 < \nu < 1$, $0 < \beta + \nu < Q$ olsun ve $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$ ise bu durumda

$$\left|[b, \mathcal{I}_\beta^L](f)(g)\right| \lesssim [b]_\nu^\theta \, I_{\beta+\nu}(|f|)(g)$$

[18].

İspat. Hatırlatalım ki;

$$[b, \mathcal{I}_\beta^L](f)(g) = b(g)\mathcal{I}_\beta^L(f)(g) - \mathcal{I}_\beta^L(bf)(g)$$

$$= \int_{\mathbb{H}_n} [b(g) - b(h)] K_\beta(g,h) \, f(h) dy.$$

Eğer $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$ ise bu durumda Lemma 4.10. den

$$\left|[b, \mathcal{I}_\beta^L](f)(g)\right| \leq \int_{\mathbb{H}_n} |b(g) - b(h)| \, |K_\beta(g,h)| \, |f(h)| dy$$

$$\lesssim [b]_\nu^\theta \int_{\mathbb{H}_n} |h^{-1}g|^\nu |K_\beta(g,h)| \, |f(h)| dy$$

$$= [b]_\nu^\theta I_{\beta+\nu}(|f|)(g)$$

elde edilir. ■

Lemma 4.19. den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.20. $q_1 > Q/2$ için $V \in RH_{q_1}$ ve $0 < \nu < 1$ için $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$ olduğu kabul edilsin. $0 < \beta + \nu < Q$ olsun ve $1 \leq p < q < \infty$ için $1/q = 1/p - (\beta+\nu)/Q$ sağlansın. Bu durumda, $f \in L_p(\mathbb{H}_n)$ için $p > 1$ olduğunda

$$\|[b, \mathcal{I}_\beta^L](f)\|_{L_q(\mathbb{H}_n)} \lesssim \|f\|_{L_p(\mathbb{H}_n)}$$

ve $p = 1$ olduğunda

$$\|[b, \mathcal{I}_\beta^L](f)\|_{WL_q(\mathbb{H}_n)} \lesssim \|f\|_{L_1(\mathbb{H}_n)}$$

eşitsizlikleri gerçekleşir [18].

Teorem 4.16. ispatı için gerekli olan teorem aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 4.21. $q_1 > Q/2$ için $V \in RH_{q_1}$ ve $\theta > 0$, $0 < \nu < 1$ için $b \in \Lambda_\nu^\theta(\rho)$ olduğu kabul edilsin. $0 < \beta + \nu < Q$ olsun ve $1 \leq p < q < \infty$ için $1/q = 1/p - (\beta + \nu)/Q$ sağlansın. Bu durumda, herhangi bir $f \in L_{loc}^p(\mathbb{H}_n)$ için

$$\begin{aligned}\|[b, \mathcal{I}_\beta^L](f)\|_{L_q(B(g_0,r))} &\lesssim \|I_{\beta+\nu}(|f|)\|_{L_q(B(g_0,r))} \\ &\lesssim r^{\frac{Q}{q}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.
Ayrıca, $p = 1$ olduğunda herhangi bir $f \in L_{loc}^1(\mathbb{H}_n)$ için

$$\begin{aligned}\|[b, \mathcal{I}_\beta^L(f)]\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu}}(B(g_0,r))} &\lesssim \|I_{\beta+\nu}(|f|)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu}}(B(g_0,r))} \\ &\lesssim r^{n-\beta} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta-\nu}} \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir [18].

İspat. Keyfi $g_0 \in \mathbb{H}_n$ için $B = B(g_0, r)$ ve herhangi bir $\lambda > 0$ için $\lambda B = B(g_0, \lambda r)$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2$ şeklinde yazılabilir, burada $f_1(h) = f(h)\chi_{B(g_0,2r)}(h)$ ve $\chi_{B(g_0,2r)}$, $B(g_0, 2r)$ nin karakteristik fonksiyonudur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|[b, \mathcal{I}_\beta^L](f)\|_{L_q(B(g_0,r))} &\lesssim \|I_{\beta+\nu}(|f|)\|_{L_q(B(g_0,r))} \\ &\leq \|I_{\beta+\nu}(f_1)\|_{L_q(B(g_0,r))} + \|I_{\beta+\nu}(f_2)\|_{L_q(B(g_0,r))}.\end{aligned}$$

$f_1 \in L_p(\mathbb{H}_n)$ ve $I_{\beta+\nu}$ operatörü, $L_p(\mathbb{H}_n)$ uzayından $L_q(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlı olduğundan (bkz. [48])

$$\|I_{\beta+\nu}(f_1)\|_{L_q(B(g_0,r))} \lesssim \|f\|_{L_p(B(g_0,2r))}$$

$$\lesssim r^{\frac{Q}{q}} \|f\|_{L_p(B(g_0,2r))} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{Q}{q}+1}}$$

$$\lesssim r^{\frac{Q}{q}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t}. \tag{4.14}$$

$\|I_{\beta+\nu}(f_2)\|_{L_p(B(g_0,r))}$ ifadesi için $g \in B$, $h \in (2B)^c$ nin tersi $|h^{-1}g| \approx |h^{-1}g_0|$. Bu durumda (4.6) eşitsizliğinden

$$\sup_{g\in B} |I_{\beta+\nu}(f_2)(g)| \lesssim \int_{(2B)^c} \frac{|f(h)|}{|h^{-1}g_0|^{Q-\beta-\nu}} dh$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k+1}r)^{-n+\beta} \int_{2^{k+1}B} |f(h)| dh$$

elde edilir.
Hölder eşitsizliğinden

$$\sup_{g\in B} |I_{\beta+\nu}(f_2)(g)| \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \|f\|_{L_p(2^{k+1}B)} (2^{k+1}r)^{-1-\frac{Q}{p}+\beta} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} dt$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t}$$

$$\lesssim \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t}. \tag{4.15}$$

Sonra, $1 \leq p < Q/\beta$ için

$$\|I_{\beta+\nu}(f_2)\|_{L_q(B(g_0,r))} \lesssim r^{\frac{Q}{q}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t} \tag{4.16}$$

elde edilir. Bundan dolayı, (4.14) ve (4.16) eşitsizliklerinden $1 < p < Q/\beta$ için

$$\|I_{\beta+\nu}(|f|)\|_{L_q(B(g_0,r))} \lesssim r^{\frac{Q}{q}} \int_{2r}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t} \tag{4.17}$$

elde edilir.

$p = 1$ için $I_{\beta+\nu}$ operatörünün $L_1(\mathbb{H}_n)$ uzayından $WL_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu}}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned}\|I_{\beta+\nu}(f_1)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu}}(B(g_0,r))} &\lesssim \|f\|_{L_1(B(g_0,2r))}\\ &\lesssim r^{Q-\beta-\nu}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta-\nu}}\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

(4.16) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|I_{\beta+\nu}(f_2)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu}}(B(g_0,r))} &\leq \|I_{\beta+\nu}(f_2)\|_{L_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu}}(B(g_0,2r))}\\ &\lesssim r^{Q-\beta-\nu}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta-\nu}}\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Böylece

$$\|I_{\beta+\nu}(|f|)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu}}(B(g_0,r))} \lesssim r^{Q-\beta-\nu}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta-\nu}}\frac{dt}{t}.$$

■

Teorem 4.16., $b \in \Lambda_{\nu}^{\theta}(\rho)$ olduğunda $[b, \mathcal{I}_{\beta}^{L}]$ komütatör operatörünün $LM_{p,\varphi_1}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayından $LM_{q,\varphi_2}^{\alpha,V}(\mathbb{H}_n)$ uzayına sınırlılığına, Teorem 4.21. deki $[b, \mathcal{I}_{\beta}^{L}]$ komütatör operatörleri için lokal durumlar temel oluşturmaktadır.

4.2.1. Teorem 4.16. İspatı:

Lemma 4.11. den

$$\frac{1}{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}} = \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{1}{\varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}}$$

elde edilir.

Burada hatırlatalım ki; $\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}$, t parametresine göre azalmayan fonksiyon ve $f \in M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}$ ise budurumda

$$\frac{\left(1+\frac{t}{\rho(g_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}} \lesssim \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{\left(1+\frac{t}{\rho(g_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{\varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}}$$
$$\lesssim \sup_{0<s<\infty}\frac{\left(1+\frac{s}{\rho(g_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(g_0,s))}}{\varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}}$$
$$\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}.$$

$\alpha \geq 0$ olduğundan ve (φ_1,φ_2) çifti (4.11) şartlarını sağladığından dolayı

$$\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t} = \int_{2r}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{t}{\rho(g_0)}\right)^{\alpha}\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(g_0)}\right)^{\alpha}t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t}$$
$$\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}\int_{2r}^{\infty}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}}{\left(1+\frac{t}{\rho(g_0)}\right)^{\alpha}t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t}$$
$$\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(g_0)}\right)^{-\alpha}\int_{r}^{\infty}\frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty}\varphi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}}{t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t}$$
$$\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(g_0)}\right)^{-\alpha}\varphi_2(g_0,r). \tag{4.18}$$

Sonra, Teorem 4.21. den dolayı

$$\|[b,\mathcal{I}^L_{\beta}](f)\|_{M^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}} \lesssim \|I_{\beta+\nu}(|f|)\|_{M^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}}$$
$$\lesssim \sup_{g_0\in\mathbb{H}_n,r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(g_0)}\right)^{\alpha}\varphi_2(g_0,r)^{-1}r^{-Q/q}\|I_{\beta+\nu}(|f|)\|_{L_p(B(g_0,r))}$$
$$\lesssim \sup_{g_0\in\mathbb{H}_n,r>0}\left(1+\frac{r}{\rho(g_0)}\right)^{\alpha}\varphi_2(g_0,r)^{-1}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_p(B(g_0,t))}}{t^{\frac{Q}{q}}}\frac{dt}{t}$$
$$\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}.$$

$q = \frac{Q}{Q-\beta-\nu}$ olsun. (4.18) eşitsizliğindeki benzer durumdan

$$\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta-\nu}}\frac{dt}{t} \lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}}\left(1+\frac{r}{\rho(g_0)}\right)^{-\alpha}\varphi_2(g_0,r).$$

Böylece, Teorem 4.21. den dolayı

$$\begin{aligned}
\|[b,\mathcal{I}_\beta^L](f)\|_{WM^{\alpha,V}_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu},\varphi_2}} &\lesssim \|I_{\beta+\nu}(|f|)\|_{WM^{\alpha,V}_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu},\varphi_2}} \\
&\lesssim \sup_{g_0\in\mathbb{H}_n, r>0}\Big(1+\frac{r}{\rho(g_0)}\Big)^{\alpha}\varphi_2(g_0,r)^{-1}r^{\beta-n}\|I_{\beta+\nu}(|f|)\|_{WL_{\frac{Q}{Q-\beta-\nu}}(B(g_0,r))} \\
&\lesssim \sup_{g_0\in\mathbb{H}_n, r>0}\Big(1+\frac{r}{\rho(g_0)}\Big)^{\alpha}\varphi_2(g_0,r)^{-1}\int_{2r}^{\infty}\frac{\|f\|_{L_1(B(g_0,t))}}{t^{Q-\beta-\nu}}\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|f\|_{M^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.2. Teorem 4.18. İspatı:

Teorem 4.18., (4.17) eşitsizliğinden ifade edilir. $[b,\mathcal{I}_\beta^L]$ komütatör operatörünün normunun ifadesi yani vanishing olmayan uzaylardaki sınırlılığıda Teorem 4.16. den dolayı elde edilir. Bundan dolayı sadece

$$\lim_{r\to 0}\sup_{g\in\mathbb{H}_n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(f;g,r)=0 \;\Rightarrow\; \lim_{r\to 0}\sup_{g\in\mathbb{H}_n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{q,\varphi_2}([b,\mathcal{I}_\beta^L](f);g,r)=0 \tag{4.19}$$

ve

$$\lim_{r\to 0}\sup_{g\in\mathbb{H}_n}\mathfrak{A}^{\alpha,V}_{1,\varphi_1}(f;g,r)=0 \;\Rightarrow\; \lim_{r\to 0}\sup_{g\in\mathbb{H}_n}\mathfrak{A}^{W,\alpha,V}_{Q/(Q-\beta),\varphi_2}([b,\mathcal{I}_\beta^L](f);g,r)=0 \tag{4.20}$$

ispatlamak yeterli olacaktır.

r için $\sup\limits_{g\in\mathbb{H}_n}\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha}\varphi_2(g,r)^{-1}r^{-Q/p}\|[b,\mathcal{I}_\beta^L](f)\|_{L_q(B(g,r))}<\varepsilon$ olduğunu göstermek için (4.17) eşitsizliğinin sağ tarafından:

$$\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha}\varphi_2(g,r)^{-1}r^{-Q/p}\|[b,\mathcal{I}_\beta^L](f)\|_{L_q(B(g,r))}\le C[I_{\delta_0}(g,r)+J_{\delta_0}(g,r)], \tag{4.21}$$

burada $\delta_0>0$ ($\delta_0>1$ alınabilir) ve

$$I_{\delta_0}(g,r):=\frac{\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha}}{\varphi_2(g,r)}\int_r^{\delta_0}t^{-\frac{Q}{q}-1}\|f\|_{L_p(B(g,t))}dt$$

ve

$$J_{\delta_0}(g,r):=\frac{\Big(1+\frac{r}{\rho(g)}\Big)^{\alpha}}{\varphi_2(g,r)}\int_{\delta_0}^{\infty}t^{-\frac{Q}{q}-1}\|f\|_{L_p(B(g,t))}dt$$

ve burada $r < \delta_0$ olarak kabul edilmektedir. $f \in VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}(\mathbb{H}_n)$ olduğundan ve $\delta_0 > 0$ herhangi bir sabit olarak seçilerek

$$\sup_{g\in\mathbb{H}_n}\left(1+\frac{t}{\rho(g)}\right)^{\alpha}\varphi_1(g,t)^{-1}t^{-n/p}\|f\|_{L_p(B(g,t))} < \frac{\varepsilon}{2CC_0}$$

elde edilir, burada C ve C_0 sabitleri sırasıyla (4.13) ve (4.21) eşitsizliklerindeki sabitlerdir. Bu durum $r \in (0,\delta_0)$ deki ilk terimin tek tip olmasından:

$$\sup_{g\in\mathbb{H}_n} CI_{\delta_0}(g,r) < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; 0 < r < \delta_0.$$

Şimdi, ikinci terimin ifadesini, yeterince küçük r seçimiyle durum aşikardır. Gerçekten de, (4.10) şartından

$$J_{\delta_0}(g,r) \leq c_{\sigma_0}\,\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(g)}\right)^{\alpha}}{\varphi_1(g,r)}\,\|f\|_{VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}$$

elde edilir, burada c_{σ_0} sabiti (4.3) eşitsizliğindeki sabittir. Dolaysıyla (4.10) eşitsizliğinde r nin yeterince küçük alınmasıyla

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{\left(1+\frac{r}{\rho(g)}\right)^{\alpha}}{\varphi_2(g,r)} \leq \frac{\varepsilon}{2c_{\sigma_0}\|f\|_{VM^{\alpha,V}_{p,\varphi_1}}}$$

elde edilerek (4.19) eşitsizliğinin ispatlanmış olur.

(4.20) eşitsizliğinin ispatı, (4.19) eşitsizliğinin ispatı gibi benzer şekildedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kesirli integrallerin ve onların uygun fonksiyonlarla komütatörlerinin sınırlılığı harmonik analizde önemli bir rol oynamaktadır. Düzgün olmayan katsayılara sahip diferansiyel denklemlerin çalışmalarında kesirli integral operatörlerinin komütatör integralleri doğal olarak ortaya çıkar. Heisenberg gruplarının fark ve sürekli versiyonları, matematiğin birçok alanında özellikle Fourier analiz, çok değişkenli kompleks analiz, geometri ve topoloji de uygulamaları yer almaktadır.

Bu tez konusunu bir baslangıç kabul edilerek, "Schrödinger operatörlerine karşılık gelen integral operatörlerinin komütatör operatörlerinin Morrey-Tipli uzaylarda sınırlılığı" konusunda daha ileri düzeyde çalışmalar yapabilmek için bir temel oluşturulması hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

[1]. Akbulut, A., Guliyev, V.S. and Omarova, M.N. (2017). Marcinkiewicz integrals associated with Schrödinger operators and their commutators on vanishing generalized Morrey spaces, *Bound. Value Probl.*, 2017:121.

[2]. Alp, M. and Musayev, B. (2000). Fonksiyonel Analiz, *Balcı Yayınları, Ankara.*

[3]. Alvarez, J., Lakey, J. and Guzman-Partida, M. (2000). Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures, *Collect. Math.*, 51(1), 1-47.

[4]. Bongioanni, B., Harboure, E. and Salinas, O., (2011). Commutators of Riesz transforms related to Schödinger operators, *J. Fourier Anal. Appl.*, 17(1), 115-134.

[5]. Bui, T. (2014). Weighted estimates for commutators of some singular integrals related to Schrödinger operators, *Bull. Sci. Math.,* 138(2), 270-292.

[6]. Burenkov, V.I. and Guliyev, V.S. (2009). Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces, *Potential Anal.,* 30(3), 211-249.

[7]. Capogna, L., Danielli, D., Pauls, S. and Tyson, J. (2007). An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem, *Progr. Math. 259,* Birkhauser, Basel.

[8]. Chanillo S., (1982). A note on commutators, *Indiana Univ. Math. J.,* 31(1), 7-16.

[9]. Chiarenza F.and Frasca M. (1987). Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, *Rend Mat.,* 7 , 273-279.

[10]. Difazio, G.and Ragusa, M.A. (1993). Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form eqnarrays with discontinuous coefficients, *J. Funct. Anal.,* 112(2), 241-256.

[11]. Duoandikoetxea, J., (2000). Fourier Analysis, *Amer. Math. Soc., 29, Providence, Rhode. Island.*

[12]. Fan, D., Lu, S. and Yang, D. (1998). Boundedness of operators in Morrey spaces on homogeneous spaces and its applications, *Acta Math. Sinica, (N.S.),* 14, 625-634.

[13]. Folland, G.B. and Stein, E.M. (1982). Hardy Spaces on Homogeneous Groups, *Mathematical Notes Vol. 28, Princeton Univ. Press, Princeton.*

[14]. Folland, G.B. and Stein, E.M. (1974). Estimates for the ∂_b-complex and analysis on the Heisenberg group, *Comm. Pure Appl. Math.,* 27, 429-522.

[15]. Guliyev, V.S. (1994). Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in $\mathbb{R}^n$, Doctoral dissertation, *Moscow, Mat. Inst. Steklov (Russian),* 329p.

[16]. Guliyev, V.S. (1999). Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups, *Some applications, Baku, Elm.,* 332 p.

[17]. Guliyev, V.S. (2009). Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces, *J. Inequal. Appl.,* Art. ID 503948, 20 pp.

[18]. Guliyev, V.S., Akbulut, A. and Namazov, F.M. (2018). Morrey-type estimates for commutator of fractional integral associated with Schrödinger operators on the Heisenberg group, *Adv. Difference Equ.,* 273, 14 pp.

[19]. Guliyev, V.S. (2013). Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel, *Problems in mathematical analysis, 71, J. Math. Sci., (N.Y.),* 193(2), 211-227.

[20]. Guliyev, V.S., Eroglu, A. and Mammadov, Y.Y. (2013). Riesz potential in generalized Morrey spaces on the Heisenberg group, *Problems in mathematical analysis, 68, J. Math. Sci., (N. Y.),* 189(3), 365-382.

[21]. Guliyev, V.S. (2014). Function spaces and integral operators associated with Schrödinger operators: an overview, *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.,* 40, 178-202.

[22]. Guliyev, V.S., Gadjiev, T.S. and Galandarova, Sh. (2017). Dirichlet boundary value problems for uniformly elliptic eqnarrays in modified local generalized Sobolev-Morrey spaces, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,* 71, 17 pp.

[23]. Guliyev, V.S., Omarova, M.N., Ragusa, M.A. and Scapellato, A. (2018). Commutators and generalized local Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.,* 457(2), 1388-1402.

[24]. Janson, S., (1978). Mean oscillation and commutators of singular integral operators, *Ark. Mat.,* 16, 263-270.

[25]. John, F., Nirenberg, L. (1961). On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.,* 14, 415-426.

[26]. Li, H.Q. (1999). Estimations L_p des opérateurs de Schrödinger sur les groupes nilpotents, *J. Funct. Anal.,* 161(1), 152-218.

[27]. Liu, Y., Huang, J.Z. and Dong, J.F. (2013). Commutators of Calderón-Zygmund operators related to admissible functions on spaces of homogeneous type and applications to Schrödinger operators, *Sci. China Math.,* 56(9), 1895-1913.

[28]. Liu, Y., Sheng, J., (2014). Some estimates for commutators of Riesz transforms associated with Schrödinger operators, *J. Math. Anal. Appl.,* 419, 298-328.

[29]. Martinez, T. (2004). Extremal Spaces Related to Schrödinger Operators With Potentials Satisfying a Reverse Hölder Inequality, *Paginas,* 45(1), 43-61.

[30]. Meskhi, A., (2011). Maksimal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces, *Complex Variables and Elliptic Equations,* 56, 1003-1019.

[31]. Mizuhara T. (1991). Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, *Harmonic Analysis (S.Igari, Ed.) ICM 90 Satellite Proceedings, Springer-Verlag, Tokyo,* 183-189.

[32]. Morrey, C. (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential eqnarrays, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 43, 126-166.

[33]. Muckenhoupt, B. and Wheeden, R. L., (1974). Weighted norm inequalities for fractional integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 192, 261-274.

[34]. Nakai E. (1994). Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.,* 166, 95-103.

[35]. Neri U. (1971). Singular Integrals, *Springer Verlag, New York.*

[36]. Paluszyński M. (1995). Characterization of the Besov spaces via the commutator operator of Coifman, Rochberg and Weiss, *Indiana Univ. Math. J.,* 44(1), 1-17 .

[37]. Pick, L., Kufner, A., John, O. and Fucík, S. (2012). Function Spaces, *1. Berlin, Boston: De Gruyter.*

[38]. Polidoro, S. and Ragusa, M.A. (1998). Sobolev-Morrey spaces related to an ultraparabolic equation, *Manuscripta Math.,* 96(3), 371-392.

[39]. Ragusa M.A. (2008). Commutators of fractional integral operators on vanishing-Morrey spaces, *J. Global Optim.,* 40(1-3), 361-368.

[40]. Royden, H. L. (1968). Real Analysis, *MacMillan, New York, 2nd ed..*

[41]. Rudin, W. (1991). Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics, *McGraw-Hill, Inc., New York.*

[42]. Sadosky, C. (1979). Interpolation of operators and singular integrals, *Marcel Dekker Inc.,* 375 p., New York.

[43]. Samko N. (2013). Maximal, potential and singular operators in vanishing generalized Morrey spaces, *J. Global Optim.,* 57 (4), 1385-1399.

[44]. Sawano, Y. (2020). Morrey Spaces:Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, *Volume I, New York.*

[45]. Shen, Z. (1995). L_p estimates for Schrödinger operators with certain potentials, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* 45(2), 513-546.

[46]. Softova L. (2006). Singular integrals and commutators in generalized Morrey spaces, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.),* 22(3), 757-766.

[47]. Stein, E.M. (1970). Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, *Princeton University Press, Princeton, NJ.,* 304pp..

[48]. Stein, E.M. (1993). Harmonic Analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, *Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.*

[49]. Tang, L. and Dong, J. (2009). Boundedness for some Schrödinger type operator on Morrey spaces related to certain nonnegative potentials, *J. Math. Anal. Appl.,* 335, 101-109.

[50]. Wheeden, R. and Zygmund, A. (1977). Measure and integral, An introduction to real analysis, *Pure and Applied Mathematics,* 43, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel.

[51]. Vitanza C., (1990). Functions with vanishing Morrey norm and elliptic partial differential eqnarrays, In: Proceedings of methods of real analysis and partial differential eqnarrays, *Capri,* pp. 147-150.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	Ecem PITRAKLI VURAL
Uyruğu :	T.C.
Orcid Numarası:	0000-0003-0544-5060

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Ankara Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölüm	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2021
Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Bilimleri Enstitüsü
Bölüm	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Yılı	2024

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Uluslararası Konferans ve Senpozyumlarda Sunulan Bildiriler Akbulut A., Pıtlaklı E., Çelik M. (2022). Boundedness of commutators of Calderón-Zygmund operators associated to Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces. *International Conference on Control and Optimization with Industrial Applicstions*, 24-26 August 2022, Bakü, Azarbaijan, 8(2), 54.