T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI KESİRLİ TÜREV İÇEREN PROBLEMLERE UYGULAMALARI

ENES ATA

DOKTORA TEZİ

KIRŞEHİR
2024

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI KESİRLİ TÜREV İÇEREN PROBLEMLERE UYGULAMALARI

ENES ATA

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
PROF. DR. İSMAİL ONUR KIYMAZ

KIRŞEHİR
2024

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 28/06/2024

Öğrenci

Enes ATA

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca beni destekleyen, yardımlarını ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi birikimleri ve tecrübeleriyle çalışmama yön veren, bilim insanı olarak yetişmem adına gösterdikleri çabalardan dolayı her zaman takdir edeceğim kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ'a, kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA'ya ve yakın zamanda kendisini elim bir kaza sonucu kaybettiğimiz kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Recep ŞAHİN'e; engin bilgileriyle çalışmamı daha iyi hale getirmeme yardımcı olan kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Ali AKBULUT'a, Sayın Prof. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ'a ve Sayın Prof. Dr. Sezer SORGUN'a; Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik Bölümü'nün tüm öğretim üyelerine ve öğretim elemanlarına; tecrübeleriyle bana yol gösteren ve beni her zaman destekleyen kıymetli amcam Sayın Prof. Dr. Ferudun ATA'ya; sevgi ve ilgisini derinden hissettiren ve her daim yanımda olan kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Esin İLHAN'a; bugünlere gelmemde büyük emeği olan, hayatım boyunca beni yalnız bırakmayan, sevgi ve ilgiyle büyüten, sabrını ve fedakarlığını asla esirgemeyen kıymetli anneme ve babama; hayatımın her evresinde her yönüyle bana destek olan ve sevgilerini esirgemeyen kıymetli kardeşlerime; koşullar ne olursa olsun uzaktan ya da yakından her zaman yanımda olan, beni yalnız bırakmayan, bana değer veren ve beni önemseyen kıymetli sevenlerime; doktora eğitimim boyunca sağladıkları burs imkanı dolayısıyla BİDEB (Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında TÜBİTAK'a (Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu) sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2024 Enes ATA

ÖZET

DOKTORA TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI KESİRLİ TÜREV İÇEREN PROBLEMLERE UYGULAMALARI

Enes ATA

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ
Yıl: 2024 Sayfa: 101
Jüri: Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ
Prof. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA
Prof. Dr. Ali AKBULUT
Prof. Dr. Sezer SORGUN
Prof. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

Bu tez çalışmasında, çeşitli bilim dallarında önemli uygulama alanları olan, integral dönüşümlerinin genelleştirilmiş formları incelenmiştir. İlk olarak, genelleştirilmiş Fourier, Fourier sinüs, Fourier kosinüs, Laplace ve Mellin dönüşümleri ile bunların ters dönüşümleri tanımlanmış, bu dönüşümlerin temel özellikleri incelenmiş ve elementer fonksiyonlara uygulamaları örneklerle açıklanmıştır. Ardından, genelleştirilmiş integral dönüşümleri kullanılarak çeşitli adi, kısmi ve kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilmiştir. Son olarak, genelleştirilmiş integral dönüşümlerinin tabloları verilmiş ve bu dönüşümlerin farklı parametreler altında nasıl davrandığını görselleştirmek amacıyla, bazı grafikler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fourier Dönüşümü, Fourier Sinüs Dönüşümü, Fourier Kosinüs Dönüşümü, Laplace Dönüşümü, Mellin Dönüşümü, Adi Diferansiyel Denklemler, Kısmi Diferansiyel Denklemler, Kesirli Diferansiyel Denklemler.

ABSTRACT

PhD THESIS

GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORMS AND APPLICATIONS TO SOME PROBLEMS INVOLVING FRACTIONAL DERIVATIVES

Enes ATA

KIRŞEHİR AHİ EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: **Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ**
Year: 2024 **Pages: 101**
Juries: **Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ**
Prof. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA
Prof. Dr. Ali AKBULUT
Prof. Dr. Sezer SORGUN
Prof. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

In this thesis, generalized forms of integral transforms, which have important application areas in various branches of science, are investigated. Firstly, generalized Fourier, Fourier sine, Fourier cosine, Laplace and Mellin transforms and their inverse transforms are defined, their basic properties are examined and their applications to elementary functions are illustrated with examples. Then, solutions of various ordinary, partial and fractional differential equations are obtained using generalized integral transforms. Finally, tables of generalized integral transforms are given and some graphs are presented to visualise how these transforms behave under different parameters.

Keywords: Fourier Transform, Fourier Sine Transform, Fourier Cosine Transform, Laplace Transform, Mellin Transform, Ordinary Differential Equations, Partial Differential Equations, Fractional Differential Equations.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi: $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	: Sıfır Dahil Pozitif Reel Sayılar Kümesi: $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi: $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	: Sıfır Dahil Doğal Sayılar Kümesi: $\{0, 1, 2, \ldots\}$
L_p	: L_p Uzayı (p. Kuvvetten İntegrallenebilen Fonksiyonlar Sınıfı)
$S(\mathbb{R})$	: Schwartz Uzayı
$V(\mathbb{R})$	: n. Dereceden Türevleri Sıfıra Eşit Olan Fonksiyonlar Kümesi
$\phi(\mathbb{R})$	: Lizorkin Uzayı
AC	: Mutlak Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
AC^m	: $(m-1)$. Mertebeden Sürekli Türevleri Olan Fonksiyonlar Uzayı
${}_p\mathfrak{F}_q$	: Genelleştirilmiş Fourier Dönüşümü
${}_p\mathfrak{F}_q^{-1}$	: Genelleştirilmiş Ters Fourier Dönüşümü
${}_p^s\mathfrak{F}_q$	: Genelleştirilmiş Fourier Sinüs Dönüşümü
${}_p^s\mathfrak{F}_q^{-1}$	: Genelleştirilmiş Ters Fourier Sinüs Dönüşümü
${}_p^c\mathfrak{F}_q$	: Genelleştirilmiş Fourier Kosinüs Dönüşümü
${}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}$	: Genelleştirilmiş Ters Fourier Kosinüs Dönüşümü
$\mathfrak{L}_n$	: Genelleştirilmiş Laplace Dönüşümü
$\mathfrak{L}_n^{-1}$	: Genelleştirilmiş Ters Laplace Dönüşümü
${}_p\mathfrak{M}_q$	: Genelleştirilmiş Mellin Dönüşümü
${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$	: Genelleştirilmiş Ters Mellin Dönüşümü
$E_\alpha(z)$	: Bir Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$	: İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$\zeta(x)$	: Riemann Zeta Fonksiyonu
$\delta(t)$	: Dirac Delta Fonksiyonu
$\Gamma(x)$	: Gama Fonksiyonu
$B(x, y)$	: Beta Fonksiyonu
$\left(I_+^\varepsilon u\right)(t)$	: Reel Eksen Üzerinde Sol R-L Kesirli İntegrali
$\left(D_+^\varepsilon u\right)(t)$	: Reel Eksen Üzerinde Sol R-L Kesirli Türevi
$\left({}^cD_+^\varepsilon u\right)(t)$	: Reel Eksen Üzerinde Sol Caputo Kesirli Türevi
$\left(I_{0+}^\varepsilon u\right)(t)$	: Pozitif Reel Eksen Üzerinde Sol R-L Kesirli İntegrali
$\left(D_{0+}^\varepsilon u\right)(t)$	: Pozitif Reel Eksen Üzerinde Sol R-L Kesirli Türevi
$\left({}^cD_{0+}^\varepsilon u\right)(t)$	: Pozitif Reel Eksen Üzerinde Sol Caputo Kesirli Türevi

Kısaltmalar	**Açıklama**
R-L	: Riemann-Liouville
Res	: Rezidü

1. GİRİŞ

İntegral dönüşümleri, çeşitli bilim dallarında ortaya çıkan diferansiyel ve integral denklemleri çözmek ve incelemek için kullanılan çok güçlü araçlardır. Bu dönüşümler, genellikle ele alınan belirli bir problemin basitleştirilmesiyle sonuçlanacak, iki değişkenli bir ağırlık fonksiyonu ile verilen fonksiyonun integrasyonundan ibarettir. Bu dönüşümler, diferansiyel ve integral denklemleri çözerken sıklıkla kullanılır ve hangi dönüşümlerin kullanılacağı, ele alınan problemlerin tiplerine bağlıdır. Hareket, elektrik, difüzyon, Bagley-Torvik, harmonik titreşim gibi bir çok problem bu dönüşümler yardımıyla çözülebilir.

u fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon ve aşağıdaki integral mevcut olmak üzere, bir boyutlu uzayda bir integral dönüşümünün en genel şekli

$$I\Big[u(x)\Big](y) = \int_a^b K(x, y)u(x)dx$$

biçimindedir [18]. Burada $K(x, y)$ integral dönüşümünün çekirdeği olarak adlandırılır. Yukarıdaki integral dönüşümü, a, b sınır değerlerinin ve $K(x, y)$ çekirdek fonksiyonunun özel seçimlerine göre Fourier, Fourier sinüs, Fourier kosinüs, Laplace, Mellin, Hankel, Hilbert ve Stieltjes dönüşümleri gibi çeşitli isimler alır. Örneğin;

1. Sınır değerlerini $a = -\infty$, $b = \infty$ ve çekirdek fonksiyonunu da $K(x, y) = \frac{\exp(-ixy)}{\sqrt{2\pi}}$ olarak seçersek Fourier dönüşümü,

$$\mathfrak{F}\Big[u(x)\Big](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixy)u(x)dx, \quad (y \in \mathbb{R}),$$

2. Sınır değerlerini $a = 0$, $b = \infty$ ve çekirdek fonksiyonunu da $K(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(xy)$ olarak seçersek Fourier sinüs dönüşümü,

$$\mathfrak{F}_s\Big[u(x)\Big](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xy)u(x)dx, \quad (y \in \mathbb{R}^+),$$

3. Sınır değerlerini $a = 0$, $b = \infty$ ve çekirdek fonksiyonunu da $K(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(xy)$ olarak seçersek Fourier kosinüs dönüşümü,

$$\mathfrak{F}_c\Big[u(x)\Big](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xy)u(x)dx, \quad (y \in \mathbb{R}^+),$$

4. Sınır değerlerini $a = 0$, $b = \infty$ ve çekirdek fonksiyonunu da $K(x, y) = \exp(-xy)$ olarak seçersek Laplace dönüşümü,

$$\mathfrak{L}\Big[u(x)\Big](y) = \int_0^{\infty} \exp(-xy)u(x)dx, \quad (y \in \mathbb{C}),$$

5. Sınır değerlerini $a = 0$, $b = \infty$ ve çekirdek fonksiyonunu da $K(x,y) = x^{y-1}$ olarak seçersek Mellin dönüşümü,

$$\mathfrak{M}\Big[u(x)\Big](y) = \int\limits_{0}^{\infty} x^{y-1}u(x)dx, \quad (y \in \mathbb{C}),$$

6. Sınır değerlerini $a = 0$, $b = \infty$ ve çekirdek fonksiyonunu da $K(x,y) = xJ_n(xy)$ olarak seçersek Hankel dönüşümü,

$$\mathscr{H}_n\Big[u(x)\Big](y) = \int\limits_{0}^{\infty} xJ_n(xy)u(x)dx, \quad (y \in \mathbb{R}^+),$$

7. Sınır değerlerini $a = -\infty$, $b = \infty$ ve çekirdek fonksiyonunu da $K(x,y) = \frac{1}{\pi(x-y)}$ olarak seçersek Hilbert dönüşümü,

$$\mathbf{H}\Big[u(x)\Big](y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-y}dx, \quad (y \in \mathbb{R}),$$

8. Sınır değerlerini $a = 0$, $b = \infty$ ve çekirdek fonksiyonunu da $K(x,y) = \frac{1}{x+y}$ olarak seçersek Stieltjes dönüşümü,

$$\mathscr{S}\Big[u(x)\Big](y) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{u(x)}{x+y}dx, \quad (y \in \mathbb{C}),$$

elde edilir.

Yukarıda bahsi geçen integral dönüşümlerinin tümü

$$I\Big[\lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x)\Big](y) = \lambda_1 I\Big[u(x)\Big](y) + \lambda_2 I\Big[v(x)\Big](y)$$

lineerlik özelliğini sağlar.

Tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde tanımı, özellikleri, örnekleri ve uygulamaları verilecek olan integral dönüşümleri çok geniş uygulama alanlarına sahiptir. Örneğin Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümleri gerek adi ve kısmi türevli denklemlerde, gerekse kesirli türevli denklemlerde başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Literatür incelendiğinde integral dönüşümleri hakkında çok sayıda kaynağa ulaşılabilmektedir (bkz. Bölüm 2.).

Kesirli Analizin kökeni 1695 yılında ünlü Fransız matematikçi L'Hospital'ın ünlü Alman matematikçi Leibniz'e yazdığı mektuptaki "Tamsayılı mertebeden türevler, kesirli mertebeden türevlere genişletilebilir mi?" sorusuna dayanır. Bu soru için Leibniz'in L'Hospital'a cevabı "Bu durum şu an için bir paradokstan ibarettir ancak bir gün faydalı sonuçlar elde edilecektir." biçiminde olmuştur [18, 35, 50].

Keyfi mertebeli bir türevden ilk kez 1819 yılında ünlü Fransız matematikçi Lacroix bahsetmiştir [39].

$n \in \mathbb{Z}^+$ için $u(t) = t^n$ fonksiyonunun m. mertebeden türevi

$$\frac{d^m u}{dt^m} = \frac{n!}{(n-m)!} t^{n-m}$$

eşitliği ile verilebilir. Lacroix, Legendre'nin genelleştirilmiş faktöriyeli olarak bilinen gama fonksiyonunu göz önünde bulundurmuş ve $m = \frac{1}{2}$, $n = \lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} u}{dt^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} t^{\lambda-\frac{1}{2}}$$

bağıntısını elde etmiştir. Bu bağıntıda özel olarak $\lambda = 1$ seçilir ve gama fonksiyonunun

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ ve } \Gamma(2) = 1$$

eşitliklerinden faydalanılırsa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} u}{dt^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

eşitliği bulunur.

Kesirli Analiz geçmişten günümüze kadar Leibniz, Laplace, Fourier, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov, Hadamard, Erdelyi ve Kober gibi bir çok ünlü bilim insanı tarafından geliştirilmiş ve çeşitli kesirli integral ve türev operatörleri tanımlanmıştır [18, 35, 50, 56].

Bu doktara tezinin amacı, farklı genelleştirilmiş integral dönüşümleri tanımlamak ve bu dönüşümler aracılığıyla bazı adi, kısmi ve kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşmaktır.

Tez altı ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriştir. İkinci bölümde literatürde yer alan çeşitli genelleştirilmiş Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümleri verilmiştir. Üçüncü bölüm tez boyunca ihtiyaç duyulacak temel bilgileri içermektedir. Dördüncü bölümde Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümlerinin genelleştirilmeleri tanımlanmış ve onların bazı özellikleri, açıklayıcı örnekleri, kesirli operatörlere uygulamaları verilmiştir. Ayrıca çeşitli adi, kısmi ve kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri de bu dönüşümler aracılığıyla elde edilmiştir. Beşinci bölümde, tanımlanan integral dönüşümlerinin literatürde yer alan diğer genelleştirilmiş integral dönüşümleri ile olan ilişkileri belirtilmiştir. Son olarak altıncı bölümde, tezde kullanılan kaynaklar sunulmuştur. Ek olarak, tanımlanan genelleştirilmiş integral dönüşümlerinin tabloları (bkz. Tablo 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5) ve bu dönüşümlerin farklı parametreler altında nasıl davrandığını görselleştirmek amacıyla, bazı grafikleri (bkz. Şekil 6.1, 6.2, 6.3) Ekler bölümünde sunulmuştur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, literatürde yer alan, Fourier, Laplace ve Mellin integral dönüşümleri üzerine yapılan bazı çalışmalar kronolojik sıra ile sunulmuştur.

2.1. Fourier Dönüşümü Üzerine Yapılan Çalışmalar

2008 yılında Luchko ve ark. [41] tarafından α-mertebeden kesirli Fourier dönüşümü

$$(\mathcal{F}_\alpha u)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp_\alpha(w,t)\, u(t)dt \tag{2.1}$$

$$(u \in \phi(\mathbb{R}),\ w \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha \leq 1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\exp_\alpha(w,t)$ fonksiyonu

$$\exp_\alpha(w,t) = \begin{cases} \exp\left(-i|w|^{\frac{1}{\alpha}}t\right), & w \leq 0 \\ \exp\left(i|w|^{\frac{1}{\alpha}}t\right) & , \ w \geq 0 \end{cases}$$

biçimindedir ve $\phi(\mathbb{R})$ Lizorkin uzaydır (bkz. Bölüm 3.).

2008 yılında Jumarie [29] tarafından α-mertebeden kesirli Fourier dönüşümü

$$F_\alpha\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(iw^\alpha t^\alpha)\, u(t)(dt)^\alpha, \quad (0 < \alpha < 1) \tag{2.2}$$

olarak verilmiştir. Burada kullanılan $(dt)^\alpha$ ifadesi kesirli integrali temsil eder ve

$$\int_0^v u(t)(dt)^\alpha = \alpha \int_0^v (v-t)^{\alpha-1}u(t)dt, \quad (0 < \alpha < 1)$$

şeklindedir. Ayrıca $E_\alpha(\cdot)$ bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonudur (bkz. Bölüm 3.).

2011 yılında Romero ve ark. [52] tarafından α-mertebeden kesirli Fourier dönüşümü

$$\mathfrak{F}_\alpha[u](w) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{\frac{1}{\alpha}}t\right) u(t)dt \tag{2.3}$$

$$(u \in \phi(\mathbb{R}),\ w \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha \leq 1)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

2020 yılında Kumar [38] tarafından μ-mertebeden kesirli Fourier dönüşümü

$$\Omega_\mu[u](w) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{\frac{\rho}{\mu}}t\right) u(t)dt \tag{2.4}$$

$$\left(u \in \phi(\mathbb{R}),\ \mu,\rho \in \mathbb{R}^+,\ w > 0,\ \mu \leq \rho\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2020 yılında Mahor ve ark. [43] tarafından kesirli Fourier sinüs ve kosinüs dönüşümleri

$$\hat{f}_s^{\alpha}(w) = \int_0^{\infty} \sin_{\alpha}(wt)^{\alpha} u(t)(dt)^{\alpha}, \quad (w > 0,\ 0 < \alpha \leq 1), \tag{2.5}$$

$$\hat{f}_c^{\alpha}(w) = \int_0^{\infty} \cos_{\alpha}(wt)^{\alpha} u(t)(dt)^{\alpha}, \quad (w > 0,\ 0 < \alpha \leq 1) \tag{2.6}$$

olarak verilmiştir. Burada kullanılan $\sin_{\alpha}(wt)^{\alpha}$ ve $\cos_{\alpha}(wt)^{\alpha}$ trigonometrik fonksiyonları

$$\begin{aligned} \sin_{\alpha}(wt)^{\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(wt)^{(2n+1)\alpha}}{(2n\alpha + \alpha)!}, \\ \cos_{\alpha}(wt)^{\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(wt)^{2n\alpha}}{(2n\alpha)!} \end{aligned}$$

serisel gösterimlerine sahiptir.

2.2. Laplace Dönüşümü Üzerine Yapılan Çalışmalar

1993 yılında Watugala [68] tarafından Sumudu dönüşümü

$$\mathscr{S}\big[u(t)\big] = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{s}\right) u(t)dt \tag{2.7}$$

$$\big(s \in (-k_1, k_2),\ k_1, k_2 > 0\big)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

2008 yılında Khan ve Khan [34] tarafından N-dönüşümü

$$N\left(u\right) = \int_0^{\infty} \exp(-st) u(\lambda t) dt \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $s > \gamma$, $\lambda > \gamma$ biçimindedir.

2011 yılında Elzaki [21] tarafından Elzaki dönüşümü

$$E\big[u(t)\big] = s \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{s}\right) u(t)dt \tag{2.9}$$

$$(t \geq 0,\ k_1 \leq s \leq k_2,\ k_1, k_2 > 0)$$

olarak verilmiştir.

2013 yılında Aboodh [2] tarafından Aboodh dönüşümü

$$A\big[u(t)\big] = \frac{1}{s}\int_{0}^{\infty} \exp(-st)u(t)dt \tag{2.10}$$

$$(t \geq 0,\ k_1 \leq s \leq k_2,\ k_1, k_2 > 0)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2013 yılında Kashuri ve Fundo [31] tarafından Kashuri-Fundo dönüşümü

$$\mathcal{K}\big[u(t)\big](s) = \frac{1}{s}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{s^2}\right) u(t)dt \tag{2.11}$$

$$(t \geq 0, -k_1 < s < k_2,\ k_1, k_2 > 0)$$

biçiminde ifade edilmiştir.

2013 yılında Atangana ve Kılıçman [12] tarafından Atangana-Kilicman dönüşümü

$$M_n\big[u(t)\big](s) = \int_{0}^{\infty} \exp(-st)t^n u(t)dt \tag{2.12}$$

olarak verilmiştir. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $s > \gamma$ biçimindedir.

2015 yılında Srivastava ve ark. [59] tarafından $\mathbb{M}$-dönüşümü

$$\mathbb{M}_{\rho,m}\big[u(t)\big](s,\lambda) = \int_{0}^{\infty} \frac{\exp(-st)u(\lambda t)}{(t^m + \lambda^m)^{\rho}} dt \tag{2.13}$$

$$\big(\rho, s \in \mathbb{C},\ \Re(\rho) \geqq 0,\ m \in \mathbb{Z}^{+},\ \lambda \in \mathbb{R}^{+}\big)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2016 yılında Medina ve ark. [45] tarafından α-integral Laplace dönüşümü

$$\mathfrak{L}_{\alpha}\big[u(t)\big](s) = \int_{0}^{\infty} \exp\left(-s^{\frac{1}{\alpha}}t\right) u(t)dt, \quad (\alpha > 0,\ s \in \mathbb{R}) \tag{2.14}$$

biçiminde ifade edilmiştir. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $s > \gamma^{\alpha}$ şeklindedir.

2016 yılında Kamal ve Sedeeg [30] tarafından Kamal dönüşümü

$$K\big[u(t)\big] = \int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{s}\right) u(t)dt \tag{2.15}$$

$$(t \geq 0,\ k_1 \leq s \leq k_2,\ k_1, k_2 > 0)$$

olarak verilmiştir. Bu integral dönüşümü literatürde Yang dönüşümü olarak da bilinir [62].

2016 yılında Zafar [65] tarafından ZZ dönüşümü

$$H\left\{u(t)\right\} = s\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-st)u(\lambda t)dt \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $s > \gamma,\ \lambda > \gamma$ biçimindedir.

2016 yılında Mahgoub [42] tarafından Mahgoub dönüşümü

$$M\big[u(t)\big] = s\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-st)u(t)dt \tag{2.17}$$

$$(t \geq 0,\ k_1 \leq s \leq k_2,\ k_1, k_2 > 0)$$

biçiminde ifade edilmiştir. Bu integral dönüşümü literatürde Laplace-Carson dönüşümü olarak da bilinir [3].

2017 yılında Kim [36] tarafından G-dönüşümü

$$G\big(u\big) = s^{\beta}\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{s}\right) u(t)dt, \quad (\beta \in \mathbb{Z}) \tag{2.18}$$

şeklinde verilmiştir. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $s < \frac{1}{\gamma}$ biçimindedir.

2017 yılında Mohand ve Mahgoub [46] tarafından Mohand dönüşümü

$$M\big[u(t)\big] = s^2\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-st)u(t)dt \tag{2.19}$$

$$(t \geq 0,\ k_1 \leq s \leq k_2,\ k_1, k_2 > 0)$$

olarak tanımlanmıştır.

2018 yılında Shaikh [54] tarafından Sadik dönüşümü

$$S\big[u(t)\big] = \frac{1}{s^{\beta}}\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-s^{\alpha}t\right) u(t)dt \tag{2.20}$$

$$(s \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{R} - \{0\},\ \beta \in \mathbb{R})$$

biçiminde verilmiştir. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $s^{\alpha} > \gamma$ şeklindedir.

2019 yılında Ahmadi ve ark. [5] tarafından HY dönüşümü

$$HY\left\{u(t)\right\} = s\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-s^2 t\right) u(t)dt \tag{2.21}$$

olarak verilmiştir. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $s > \sqrt{\gamma}$ biçimindedir. Bu integral dönüşümü literatürde AF dönüşümü olarak da bilinir [4].

2019 yılında Mohand ve Mahgoub [47] tarafından Sawi dönüşümü

$$S\big[u(t)\big] = \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{s}\right)u(t)dt \tag{2.22}$$

$$(t \geq 0,\ k_1 \leq s \leq k_2,\ k_1, k_2 > 0)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

2019 yılında Maitama ve Zhao [44] tarafından Shedu dönüşümü

$$\mathbb{S}\big[u(t)\big] = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{\lambda}\right)u(t)dt, \quad (s > 0,\ \lambda > 0) \tag{2.23}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

2019 yılında Upadhyaya [61] tarafından Upadhyaya dönüşümü

$$U\left\{u(t);\kappa,s,\lambda\right\} = \kappa\int_0^\infty \exp\left(-st\right)u(\lambda t)dt \tag{2.24}$$

olarak verilmiştir. Burada $a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, f_j$ kompleks sabitler ve $j = 1, 2, \ldots, 6$ için m_j, r_j pozitif tamsayılar olmak üzere κ, s ve λ değerleri

$$\kappa = \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_1} a_j z_1^j\right)^{m_1}}{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_2} b_j z_2^j\right)^{m_2}}, \quad s = \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_3} c_j z_3^j\right)^{m_3}}{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_4} d_j z_4^j\right)^{m_4}}, \quad \lambda = \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_5} e_j z_5^j\right)^{m_5}}{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_6} f_j z_6^j\right)^{m_6}}$$

biçimindedir.

2020 yılında Saadeh ve ark. [53] tarafından ARA dönüşümü

$$\mathcal{G}_n\big[u(t)\big](s) = s\int_0^\infty \exp(-st)t^{n-1}u(t)dt \tag{2.25}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $s > \gamma$ biçimindedir.

2020 yılında Gupta ve ark. [27] tarafından Gupta dönüşümü

$$\dot{R}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{s^3}\int_0^\infty \exp(-st)u(t)dt \tag{2.26}$$

biçiminde verilmiştir. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $s > \gamma$ şeklindedir.

2021 yılında Jafari [28] tarafından genel integral dönüşümü

$$T\left\{u(t);s\right\} = p(s)\int_0^\infty \exp\big(-q(s)t\big)u(t)dt \tag{2.27}$$

$$\big(p(s) \neq 0,\ q(s) \in \mathbb{R}^+\big)$$

olarak verilmiştir. Burada u fonksiyonu γ-üstel mertebeden ve $q(s) > \gamma$ biçimindedir.

2.3. Mellin Dönüşümü Üzerine Yapılan Çalışmalar

2007 yılında Yang ve ark. [63] tarafından modifiye Mellin dönüşümü

$$M_u^m(\alpha) = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} u(t) dt \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2012 yılında González-Gaxiola ve Santiago [25] tarafından genelleştirilmiş Mellin dönüşümü

$$\mathcal{M}_\alpha(u(t), s_\alpha) = \int_0^\infty t^{s_\alpha - 1} u(t) dt \tag{2.29}$$

$$\left(s_\alpha = a + iw^{\frac{1}{\alpha}},\ 0 < \alpha \leq 1\right)$$

biçiminde verilmiştir.

2019 yılında Erdoğan ve ark. [23] tarafından genelleştirilmiş Mellin dönüşümü

$$\mathscr{M}_n\{u(t); \alpha\} = \int_0^\infty t^{n\alpha - 1} u(t) dt \tag{2.30}$$

olarak tanımlanmıştır.

Uyarı 2.1. Bu bölümde listelenen yayınlar, bahsi geçen integral dönüşümlerinin temel çekirdekleri üzerinden elde edilen benzer genelleştirmeleri içeren, bugüne kadar yapılmış popüler çalışmalardan bazılarıdır. Bunlar dışında, literatürde farklı türden genelleştirilmiş integral dönüşümleri çalışmalarının olduğunu da belirtmek gerekir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tez boyunca ihtiyaç duyulan temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 3.1. (Gama Fonksiyonu) Gama fonksiyonu $\Re(x) > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t)\, dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanan özel fonksiyondur [10, 58].

Tanım 3.2. (Beta Fonksiyonu) Beta fonksiyonu $\Re(x) > 0$ ve $\Re(y) > 0$ için

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanan özel fonksiyondur [10, 58].

Tanım 3.3. (Riemann Zeta Fonksiyonu) Riemann zeta fonksiyonu $\Re(x) > 1$ için

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

biçiminde tanımlanır [10].

Tanım 3.4. (Mittag-Leffler Fonksiyonları) Bir ve iki parametreye sahip Mittag-Leffler fonksiyonları $z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ için sırasıyla

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)},$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$$

şeklinde tanımlanır [26].

Tanım 3.5. (L_p Uzayı) $\Omega = [a,b]$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere L_p uzayı

$$L_p = \left\{ ||u||_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon uzayıdır [56].

Tanım 3.6. (AC^m Uzayı) $m \in \mathbb{N}$ için $[a,b]$ üzerinde $(m-1)$. mertebesine kadar sürekli türevleri olan karmaşık değerli fonksiyonların

$$AC^m[a,b] = \left\{ u : [a,b] \to \mathbb{C},\ u^{(m-1)}(t) \in AC[a,b] \right\}$$

olarak tanımlanan uzayıdır [35]. Burada $AC[a,b]$ ifadesi $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar uzayını temsil eder.

Tanım 3.7. (Schwartz Uzayı) $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilen u fonksiyonu ve onun tüm türevlerinin aşağıdaki özelliği sağladığı uzaydır [60]

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ u \in C^\infty : \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^m u^{(n)}(t) \right| < \infty, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Tanım 3.8. (Lizorkin Uzayı) $V(\mathbb{R})$ uzayı

$$V(\mathbb{R}) = \left\{ v \in S(\mathbb{R}) : v^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

şeklindeki fonksiyonların kümesi olsun. Lizorkin uzayı

$$\phi(\mathbb{R}) = \left\{ u \in S(\mathbb{R}) : \mathfrak{F}\left[u\right] \in V(\mathbb{R}) \right\}$$

biçiminde tanımlanır [56].

Tanım 3.9. (Fourier ve Ters Fourier Dönüşümleri) $u \in S(\mathbb{R})$ olmak üzere Fourier ve ters Fourier dönüşümleri sırasıyla

$$\mathfrak{F}\left[u(t)\right](w) = \widehat{u}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iwt)u(t)dt, \quad (w \in \mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\widehat{u}(w)\right](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iwt)\widehat{u}(w)dw, \quad (t \in \mathbb{R})$$

şeklindedir [35].

Tanım 3.10. (Fourier Konvolüsyonu) u ve v fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)v(\tau)d\tau, \quad (t \in \mathbb{R})$$

biçimindedir [15].

Tanım 3.11. (Laplace ve Ters Laplace Dönüşümleri) Reel değişkenli bir $t \in \mathbb{R}^+$ için u fonksiyonunun Laplace ve ters Laplace dönüşümleri sırasıyla

$$\mathfrak{L}\left[u(t)\right](s) = \widehat{u}(s) = \int_{0}^{\infty} \exp(-st)u(t)dt, \quad (s \in \mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\widehat{u}(s)\right](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st)\widehat{u}(s)ds, \quad (\gamma = \Re(s) > \alpha)$$

olarak tanımlanır [35].

Tanım 3.12. (Laplace Konvolüsyonu) u ve v fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$(u * v)(t) = \int_0^t u(t-\tau)v(\tau)d\tau, \quad (t \in \mathbb{R}^+)$$

bağıntısı ile verilir [35].

Tanım 3.13. (Mellin ve Ters Mellin Dönüşümleri) Reel değişkenli bir $t \in \mathbb{R}^+$ için u fonksiyonunun Mellin ve ters Mellin dönüşümleri sırasıyla

$$\mathfrak{M}\Big[u(t)\Big](\alpha) = \widetilde{u}(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}u(t)dt, \quad (\alpha \in \mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{M}^{-1}\Big[\widetilde{u}(\alpha)\Big](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^{-\alpha}\widetilde{u}(\alpha)d\alpha, \quad (\gamma = \Re(s))$$

olarak tanımlanır [35].

Tanım 3.14. (Mellin Konvolüsyonları) u ve v fonksiyonlarının konvolüsyonları

$$(u * v)(t) = \int_0^\infty u(\tau)v\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}, \quad (t \in \mathbb{R}^+),$$

$$(u \circ v)(t) = \int_0^\infty u(t\tau)v(\tau)d\tau, \quad (t \in \mathbb{R}^+)$$

bağıntıları ile verilir [18].

Tanım 3.15. (Dirac Delta Fonksiyonu) Dirac delta fonksiyonu

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

biçimindedir [18]. $n \in \mathbb{N}$ için Dirac delta fonksiyon dizisi ise

$$\delta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\exp(-nt^2) \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada $t \neq 0$ için $n \to \infty$ iken $\delta_n(t) \to 0$ ve $n \to \infty$ iken $\delta_n(0) \to \infty$ olur. (3.1) eşitliğinin her iki yanının $n \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\exp(-nt^2) \tag{3.2}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t)dt = u(0) \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanır [18].

Tanım 3.16. (Reel Eksen Üzerinde Sol R-L Kesirli İntegrali) $u \in L_1(\mathbb{R})$ olmak üzere u fonksiyonunun ε. mertebeden sol R-L kesirli integrali

$$\left(I_{+}^{\varepsilon}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{\varepsilon-1}u(\tau)d\tau, \quad (t\in\mathbb{R},\ \Re(\varepsilon)>0)$$

biçiminde tanımlanır [35].

Tanım 3.17. (Reel Eksen Üzerinde Sol R-L Kesirli Türevi) $u \in L_1(\mathbb{R})$ olmak üzere u fonksiyonunun ε. mertebeden sol R-L kesirli türevi

$$\left(D_{+}^{\varepsilon}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\frac{d^m}{dt^m}\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{m-\varepsilon-1}u(\tau)d\tau, \quad (t\in\mathbb{R},\ \Re(\varepsilon)>0)$$

$$(m-1<\Re(\varepsilon)<m,\ m\in\mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanır [35].

Tanım 3.18. (Reel Eksen Üzerinde Sol Caputo Kesirli Türevi) $u\in AC^m(\mathbb{R})$ olmak üzere u fonksiyonunun ε. mertebeden sol Caputo kesirli türevi

$$\left({}^{c}D_{+}^{\varepsilon}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{m-\varepsilon-1}u^{(m)}(\tau)d\tau, \quad (t\in\mathbb{R},\ \Re(\varepsilon)>0)$$

$$(m-1<\Re(\varepsilon)<m,\ m\in\mathbb{N})$$

olarak tanımlanır [35].

Tanım 3.19. (Pozitif Reel Eksen Üzerinde Sol R-L Kesirli İntegrali) $u \in L_1(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere u fonksiyonunun ε. mertebeden sol R-L kesirli integrali

$$\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)^{\varepsilon-1}u(\tau)d\tau, \quad (t>0,\ \Re(\varepsilon)>0)$$

biçiminde tanımlanır [35].

Tanım 3.20. (Pozitif Reel Eksen Üzerinde Sol R-L Kesirli Türevi) $u \in L_1(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere u fonksiyonunun ε. mertebeden sol R-L kesirli türevi

$$\left(D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\frac{d^m}{dt^m}\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)^{m-\varepsilon-1}u(\tau)d\tau, \quad (t>0,\ \Re(\varepsilon)>0)$$

$$(m-1<\Re(\varepsilon)<m,\ m\in\mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanır [35].

Tanım 3.21. (Pozitif Reel Eksen Üzerinde Sol Caputo Kesirli Türevi) $u \in AC^m(\mathbb{R}^+)$ için u fonksiyonunun ε. mertebeden sol Caputo kesirli türevi

$$\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)^{m-\varepsilon-1}u^{(m)}(\tau)d\tau, \quad (t>0,\ \Re(\varepsilon)>0)$$

$$(m-1<\Re(\varepsilon)<m,\ m\in\mathbb{N})$$

olarak tanımlanır [35].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, yeni genelleştirilmiş Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümleri tanıtılacak, temel özellikleri verilecek, açıklayıcı bazı örnekleri sunulacak ve kesirli operatörlere uygulamalarına değinilecektir. Ayrıca, çeşitli adi, kısmi ve kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri yeni tanımlanan bu integral dönüşümleri yardımıyla elde edilecektir.

4.1. Genelleştirilmiş Fourier Dönüşümleri

Bir $u(t)$ fonksiyonu $(-a, a)$ aralığında Dirichlet koşullarını gerçeklesin ve $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt$ integrali yakınsak, yani $\mathbb{R}$ üzerinde $u(t)$ fonksiyonu mutlak integrallenebilir olsun. Bu bilgiler doğrultusunda kompleks Fourier serisi ve katsayısı sırasıyla

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{in\pi t}{a}\right),$$

$$a_n = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} \exp\left(\frac{in\pi\xi}{a}\right) u(\xi)d\xi$$

şeklindedir [9]. Buradan a_n katsayısı Fourier serisinde yerine yazılırsa

$$u(t) = \frac{1}{2a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-a}^{a} \exp\left(\frac{in\pi\xi}{a}\right) u(\xi)d\xi\right)\exp\left(-\frac{in\pi t}{a}\right) \tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) eşitliğinin sağ yanı π ile çarpılıp bölünürse

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{a}\left(\int\limits_{-a}^{a} \exp\left(\frac{in\pi\xi}{a}\right) u(\xi)d\xi\right)\exp\left(-\frac{in\pi t}{a}\right) \tag{4.2}$$

bulunur. Ardından

$$w_n = \frac{n\pi}{a} \quad \text{ve} \quad \Delta(w_n) = w_{n+1} - w_n = \frac{\pi}{a}$$

eşitlikleri (4.2) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta(w_n)\left(\int\limits_{-a}^{a} \exp\Big(iw_n\xi\Big)u(\xi)d\xi\right)\exp\Big(-iw_n t\Big)$$

elde edilir. Burada $a \to \infty$ iken limit alınırsa, w_n değerleri birbirine yaklaşır ve yoğun bir küme oluşturur. Böylece w_n değerleri sürekli w değerine, $\Delta(w_n)$ değerleri dw değerine ve toplam serisi integrale dönüşür. Yani,

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(iw\xi)\, u(\xi)d\xi\right)\exp(-iwt)\, dw \tag{4.3}$$

bulunur.

$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$, $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ olmak üzere (4.3) eşitliğinin sağ yanı $p(\alpha)$ ile çarpılıp bölünür ve w yerine $w^{q(\alpha)}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{p(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}\xi\right)u(\xi)d\xi\right)\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)q(\alpha)w^{q(\alpha)-1}dw \\
&= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{p(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}\xi\right)u(\xi)d\xi}_{{}_p\mathfrak{F}_q\left[u(t)\right](w)={}_p\widehat{u}_q(w)}\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}dw \\
&= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right){}_p\mathfrak{F}_q\left[u(t)\right](w)w^{q(\alpha)-1}dw \\
&= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right){}_p\widehat{u}_q(w)w^{q(\alpha)-1}dw
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki bu aşağıdaki 4.1. Tanımı verir.

Tanım 4.1. $u\in\phi(\mathbb{R})$, $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$, $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ ve $w,t\in\mathbb{R}$ olmak üzere genelleştirilmiş Fourier ve ters Fourier dönüşümleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{F}_q\left[u(t)\right](w) &= {}_p\widehat{u}_q(w)=p(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt, \\
{}_p\mathfrak{F}_q^{-1}\left[{}_p\widehat{u}_q(w)\right](t) &= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right){}_p\widehat{u}_q(w)w^{q(\alpha)-1}dw
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)$ üstel fonksiyonu

$$\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right):=\begin{cases}\exp\left(-i|w|^{q(\alpha)}t\right), & w\le 0\\ \exp\left(i|w|^{q(\alpha)}t\right), & w\ge 0\end{cases}$$

biçimindedir.

Uyarı 4.2. Yukarıdaki tanımda $p(\alpha)=q(\alpha)=1$ olarak alınırsa klasik Fourier ve ters Fourier dönüşümleri elde edilir.

Teorem 4.3. Bir $u(t)$ fonksiyonu Dirichlet koşullarına sahip, mutlak integrallenebilir ve Lizorkin uzayına ait bir fonksiyon olsun. O zaman $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$, $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ ve $w,t\in\mathbb{R}$ için $u(t)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Fourier dönüşümü mevcuttur.

İspat. Dirichlet koşullarına sahip bir $u(t)$ fonksiyonu için mutlak integrallenebilirlik ve Lizorkin uzay göz önünde bulundurularak, genelleştirilmiş Fourier dönüşümün tanımından

$$\left|{}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w)\right| = \left|p(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt\right| \leq \Big|p(\alpha)\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\Big|u(t)\Big|dt < \infty$$

sonucuna ulaşılır. ■

Genelleştirilmiş Fourier integral formülü

$$u(x) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{p(\alpha)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}(t-x)\right)u(t)w^{q(\alpha)-1}dtdw$$

şeklindedir. Burada Euler formülü kullanılırsa

$$u(x) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{p(\alpha)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cos\left(w^{q(\alpha)}(t-x)\right)+i\sin\left(w^{q(\alpha)}(t-x)\right)\right)u(t)w^{q(\alpha)-1}dtdw$$

elde edilir. w parametresine bağlı olarak simetrik aralıkta trigonometrik fonksiyonların tek ve çift olma durumları dikkate alınırsa

$$u(x) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{p(\alpha)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(w^{q(\alpha)}(t-x)\right)u(t)w^{q(\alpha)-1}dtdw$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{p(\alpha)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)\cos\left(w^{q(\alpha)}x\right)+\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)\sin\left(w^{q(\alpha)}x\right)\right)\\
&\times u(t)w^{q(\alpha)-1}dtdw\\
&= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{p(\alpha)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\cos\left(w^{q(\alpha)}x\right)\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt\right.\\
&\left.+\sin\left(w^{q(\alpha)}x\right)\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt\right)w^{q(\alpha)-1}dw
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Eğer (4.4) eşitliğinde $u(t)$ çift fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\left(w^{q(\alpha)}x\right)\underbrace{p(\alpha)\int_{0}^{\infty}\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt}_{{}_p^c\mathfrak{F}_q\left[u(t)\right](w)\,=\,{}_p^c\widehat{u}_q(w)}w^{q(\alpha)-1}dw\\
&= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\left(w^{q(\alpha)}x\right){}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w)w^{q(\alpha)-1}dw
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Eğer (4.4) eşitliğinde $u(t)$ tek fonksiyon ise

$$u(x) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}x\right) \underbrace{p(\alpha)\int_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt}_{{}_p^s\mathfrak{F}_q\left[u(t)\right](w)\,=\,{}_p^s\widehat{u}_q(w)} w^{q(\alpha)-1}dw$$

$$= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}x\right) {}_p^s\mathfrak{F}_q\left[u(t)\right](w) w^{q(\alpha)-1}dw$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuçlar aşağıdaki 4.4. ve 4.5. Tanımları verir.

Tanım 4.4. $u \in \phi(\mathbb{R})$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ve $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere genelleştirilmiş Fourier sinüs ve ters Fourier sinüs dönüşümleri sırasıyla

$${}_p^s\mathfrak{F}_q\left[u(t)\right](w) = {}_p^s\widehat{u}_q(w) = p(\alpha)\int_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt,$$

$${}_p^s\mathfrak{F}_q^{-1}\left[{}_p^s\widehat{u}_q(w)\right](t) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right){}_p^s\widehat{u}_q(w) w^{q(\alpha)-1}dw$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.5. $u \in \phi(\mathbb{R})$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ve $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere genelleştirilmiş Fourier kosinüs ve ters Fourier kosinüs dönüşümleri sırasıyla

$${}_p^c\mathfrak{F}_q\left[u(t)\right](w) = {}_p^c\widehat{u}_q(w) = p(\alpha)\int_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt,$$

$${}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}\left[{}_p^c\widehat{u}_q(w)\right](t) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right){}_p^c\widehat{u}_q(w) w^{q(\alpha)-1}dw$$

biçiminde tanımlanır.

Uyarı 4.6. Genelleştirilmiş Fourier sinüs, ters Fourier sinüs, Fourier kosinüs ve ters Fourier kosinüs dönüşümlerinde $p(\alpha) = q(\alpha) = 1$ alınırsa sırasıyla klasik Fourier sinüs, ters Fourier sinüs, Fourier kosinüs ve ters Fourier kosinüs dönüşümleri elde edilir.

4.1.1. İntegral Dönüşümlerin Temel Özellikleri

Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe $u, v \in \phi(\mathbb{R})$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olarak alınacaktır. Ayrıca genelleştirilmiş Fourier, ters Fourier, Fourier sinüs, ters Fourier sinüs, Fourier kosinüs ve ters Fourier kosinüs dönüşümleri sırasıyla ${}_p\mathfrak{F}_q$, ${}_p\mathfrak{F}_q^{-1}$, ${}_p^s\mathfrak{F}_q$, ${}_p^s\mathfrak{F}_q^{-1}$, ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ ve ${}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}$ sembolleri ile gösterilecektir.

Teorem 4.7. $\lambda_1, \lambda_2, w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\lambda_1 u(t) + \lambda_2 v(t)\Big](w) = \lambda_1 \, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) + \lambda_2 \, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[v(t)\Big](w) $$

lineerlik özelliğine sahiptir.

İspat. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü kullanılarak

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{F}_q \, \Big[\lambda_1 u(t) + \lambda_2 v(t)\Big](w) &= p(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) \left(\lambda_1 u(t) + \lambda_2 v(t)\right) dt \\ &= \lambda_1 \left(p(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u(t)dt \right) + \lambda_2 \left(p(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) v(t)dt \right) \\ &= \lambda_1 \, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) + \lambda_2 \, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[v(t)\Big](w) \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.8. $w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t-x)\Big](w) = \exp\left(iw^{q(\alpha)}x\right) {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) $$

eşitliğini sağlar.

İspat. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü kullanılarak

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t-x)\Big](w) &= p(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u(t-x)dt, \quad (t - x = \tau) \\ &= p(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}(x+\tau)\right) u(\tau)d\tau \\ &= \exp\left(iw^{q(\alpha)}x\right) p(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}\tau\right) u(\tau)d\tau \\ &= \exp\left(iw^{q(\alpha)}x\right) {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.9. $w, t \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u^{(n)}(t)\Big](w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^n {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) \tag{4.5} $$

eşitliğini sağlar.

İspat. $n = 1$ için

$$
\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[u'(t)\Big](w) &= p(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u'(t)dt \\
&= \left(-iw^{q(\alpha)}\right) p(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u(t)dt \\
&= \left(-iw^{q(\alpha)}\right) {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w)
\end{aligned}
$$

bulunur. $n = 2$ için

$$
\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[u''(t)\Big](w) &= p(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u''(t)dt \\
&= \left(-iw^{q(\alpha)}\right) p(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u'(t)dt \\
&= \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^2 p(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u(t)dt \\
&= \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^2 {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $n = k$ için

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[u^{(k)}(t)\Big](w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^k {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) \tag{4.6}
$$

eşitliği doğru olsun. (4.6) eşitliği göz önünde bulundurularak, $n = k + 1$ için

$$
\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[u^{(k+1)}(t)\Big](w) &= p(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u^{(k+1)}(t)dt \\
&= \left(-iw^{q(\alpha)}\right) \left(p(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u^{(k)}(t)dt \right) \\
&= \left(-iw^{q(\alpha)}\right) \left(\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^k {}_p\mathfrak{F}_q[u(t)](w) \right) \\
&= \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{k+1} {}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w)
\end{aligned}
$$

eşitliğinin doğru olduğu görülür. ■

Teorem 4.10. $w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere konvolüsyonun ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[(u * v)(t)\Big](w) = \frac{{}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w)\, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[v(t)\Big](w)}{p(\alpha)} \tag{4.7}
$$

şeklindedir.

İspat. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü ve konvolüsyon kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[(u*v)(t)\Big](w) &= p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)(u*v)(t)dt \\
&= p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t-x)v(x)dxdt
\end{aligned}$$

elde edilir. Fubini teoremi göz önünde bulundurulur ve $\tau = t - x$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[(u*v)(t)\Big](w) &= p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}(x+\tau)\right)u(\tau)d\tau dx \\
&= p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}x\right)v(x)dx\,\frac{p(\alpha)}{p(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}\tau\right)u(\tau)d\tau \\
&= \frac{{}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w)\;{}_p\mathfrak{F}_q\Big[v(t)\Big](w)}{p(\alpha)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.11. $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}^s_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$\begin{aligned}
{}^s_p\mathfrak{F}_q\Big[u'(t)\Big](w) &= -w^{q(\alpha)}\,{}^c_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w), \\
{}^s_p\mathfrak{F}_q\Big[u''(t)\Big](w) &= -w^{2q(\alpha)}\,{}^s_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) + w^{q(\alpha)}p(\alpha)u(0)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. ${}^s_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümünde $u(t)$ yerine $u'(t)$ yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
{}^s_p\mathfrak{F}_q\Big[u'(t)\Big](w) &= p(\alpha)\int\limits_{0}^{\infty}\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u'(t)dt \\
&= p(\alpha)\left(\lim_{A\to\infty}\left[\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)\right]_0^A - w^{q(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)\right)dt \\
&= -w^{q(\alpha)}p(\alpha)\int\limits_{0}^{\infty}\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt \\
&= -w^{q(\alpha)}\,{}^c_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Yine ${}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q$ dönüşümünde $u(t)$ yerine $u''(t)$ yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$
\begin{aligned}
{}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q\Big[u''(t)\Big](w) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u''(t)dt \\
&= p(\alpha)\left(\lim_{A\to\infty}\left[\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u'(t)\right]_0^A - w^{q(\alpha)}\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u'(t)\right)dt \\
&= -w^{q(\alpha)}p(\alpha)\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u'(t)dt \\
&= -w^{q(\alpha)}p(\alpha)\left(\lim_{A\to\infty}\left[\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)\right]_0^A + w^{q(\alpha)}\int\limits_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)\right)dt \\
&= -w^{2q(\alpha)}p(\alpha)\int\limits_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt + w^{q(\alpha)}p(\alpha)u(0) \\
&= -w^{2q(\alpha)}\ {}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) + w^{q(\alpha)}p(\alpha)u(0)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.12. $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$
\begin{aligned}
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\Big[u'(t)\Big](w) &= w^{q(\alpha)}\ {}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) - p(\alpha)u(0), \\
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\Big[u''(t)\Big](w) &= -w^{2q(\alpha)}\ {}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) - p(\alpha)u'(0)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. ${}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q$ dönüşümünde $u(t)$ yerine $u'(t)$ yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$
\begin{aligned}
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\Big[u'(t)\Big](w) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u'(t)dt \\
&= p(\alpha)\left(\lim_{A\to\infty}\left[\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)\right]_0^A + w^{q(\alpha)}\int\limits_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)\right)dt \\
&= w^{q(\alpha)}p(\alpha)\int\limits_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt - p(\alpha)u(0) \\
&= w^{q(\alpha)}\ {}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) - p(\alpha)u(0)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

Yine ${}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q$ dönüşümünde $u(t)$ yerine $u''(t)$ yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\left[u''(t)\right](w) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u''(t)dt \\
&= p(\alpha)\left(\lim_{A\to\infty}\left[\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u'(t)\right]_0^A + w^{q(\alpha)}\int\limits_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u'(t)\right)dt \\
&= w^{q(\alpha)}p(\alpha)\int\limits_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u'(t)dt - p(\alpha)u'(0) \\
&= w^{q(\alpha)}p(\alpha)\left(\lim_{A\to\infty}\left[\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)\right]_0^A - w^{q(\alpha)}\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)\right)dt - p(\alpha)u'(0) \\
&= -w^{2q(\alpha)}p(\alpha)\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt - p(\alpha)u'(0) \\
&= -w^{2q(\alpha)}\,{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\left[u(t)\right](w) - p(\alpha)u'(0)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ∎

Teorem 4.13. $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü

$$ {}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q^{-1}\left[\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) = \frac{1}{p(\alpha)}\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right) \tag{4.10}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. ${}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümün tanımından

$$ {}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q^{-1}\left[\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)dw$$

bulunur. Burada $\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right) = \frac{\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)+\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)}{2}$ formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q^{-1}\left[\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) \\
&\quad = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\left(\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)+\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)\right)w^{q(\alpha)-1}dw
\end{aligned}$$

elde edilir. Üstel fonksiyon dağılımı yapılarak

$$\begin{aligned}
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q^{-1}\left[\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{\pi}\Bigg(&\int\limits_0^\infty \exp\left(-aw^{2q(\alpha)}+iw^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}dw \\
&+\int\limits_0^\infty \exp\left(-aw^{2q(\alpha)}-iw^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}dw\Bigg)
\end{aligned}$$

bulunur.

Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}{}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}\left[\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) &= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty \exp\left(-a\left(w^{q(\alpha)}-\frac{it}{2a}\right)^2-\frac{t^2}{4a}\right)w^{q(\alpha)-1}dw\right.\\ &\left.+\int_0^\infty \exp\left(-a\left(w^{q(\alpha)}+\frac{it}{2a}\right)^2-\frac{t^2}{4a}\right)w^{q(\alpha)-1}dw\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}{}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}\left[\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) &= \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right)\\ &\times\left[\int_0^\infty \exp\left(-a\left(w^{q(\alpha)}-\frac{it}{2a}\right)^2\right)w^{q(\alpha)-1}dw\right.\\ &\left.+\int_0^\infty \exp\left(-a\left(w^{q(\alpha)}+\frac{it}{2a}\right)^2\right)w^{q(\alpha)-1}dw\right]\end{aligned}$$

bulunur. Ardından $y=\left(w^{q(\alpha)}-\frac{it}{2a}\right)$ ve $z=\left(w^{q(\alpha)}+\frac{it}{2a}\right)$ dönüşümleri yapılırsa

$${}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}\left[\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) = \frac{1}{p(\alpha)}\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right)\left[\int_0^\infty \exp\left(-ay^2\right)dy+\int_0^\infty \exp\left(-az^2\right)dz\right]$$

elde edilir. Burada $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-ax^2\right)dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ eşitliği kullanılırsa

$${}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}\left[\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) = \frac{1}{p(\alpha)}\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right)$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.14. $w,t\in\mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_p^s\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü

$${}_p^s\mathfrak{F}_q^{-1}\left[w^{q(\alpha)}\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) = \frac{1}{p(\alpha)}\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{a^{3/2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right) \tag{4.11}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. ${}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümün tanımından

$${}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}\left[\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\right](t) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)dw$$

bulunur. (4.10) eşitliği göz önünde bulundurularak t parametresine göre türevlenirse

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right)}{p(\alpha)\sqrt{a\pi}}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)dw\right\}$$

elde edilir.

Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$ {}^{s}_{p}\mathfrak{F}_q^{-1}\Big[w^{q(\alpha)}\exp\left(-aw^{2q(\alpha)}\right)\Big](t)=\frac{1}{p(\alpha)}\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{a^{3/2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right) $$

sonucuna ulaşılır. ■

4.1.2. Bazı Elementer Fonksiyonların İntegral Dönüşümleri

Örnek 4.15. $w,t\in\mathbb{R}$ olmak üzere Dirac delta δ fonksiyonunun ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\delta(t)\Big](w)=p(\alpha) \tag{4.12} $$

şeklindedir. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\delta(t)\Big](w)=p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\delta(t)dt $$

bulunur. Ardından (3.3) eşitliği kullanılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\delta(t)\Big](w)=p(\alpha) $$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 4.16. (4.12) eşitliğine ${}_p\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanır ve ardından $t=w^{q(\alpha)}$ dönüşümü yapılırsa

$$ \delta\left(w^{q(\alpha)}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)dt \tag{4.13} $$

elde edilir.

Örnek 4.17. $w,t\in\mathbb{R}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp\left(-at^2\right)\Big](w)=p(\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{w^{2q(\alpha)}}{4a}\right),\quad (a>0) \tag{4.14} $$

eşitliğini sağlar. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp\left(-at^2\right)\Big](w) &= p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\exp\left(-at^2\right)dt \\ &= p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-a\left(t-\frac{iw^{q(\alpha)}}{2a}\right)^2-\frac{w^{2q(\alpha)}}{4a}\right)dt \end{aligned} $$

bulunur.

Ardından $x = t - \frac{iw^{q(\alpha)}}{2a}$ dönüşümü yapılarak

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp\left(-at^2\right)\Big](w) = p(\alpha)\exp\left(-\frac{w^{2q(\alpha)}}{4a}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-ax^2\right)dx $$

elde edilir. Burada $a > 0$ için $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-ax^2\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ formülü kullanılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp\left(-at^2\right)\Big](w) = p(\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{w^{2q(\alpha)}}{4a}\right) $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.18. $w, t \in \mathbb{R}$ ve c sabit bir sayı olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[c\Big](w) = 2c\pi p(\alpha)\delta\left(w^{q(\alpha)}\right) $$

eşitliğini sağlar. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[c\Big](w) = cp(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)dt $$

bulunur. $I = \exp\left(-\frac{t^2}{4n}\right)$ birim fonksiyon dizisi olmak üzere $c = cI$ dönüşümü yapılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[c\Big](w) = cp(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\exp\left(-\frac{t^2}{4n}\right)dt $$

elde edilir. Ardından (4.14) eşitliğinde $a = 1/4n$ alınır ve burada kullanılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[c\Big](w) = cp(\alpha)\sqrt{\pi 4n}\exp\left(-nw^{2q(\alpha)}\right) $$

bulunur. Eşitliğin sağ yanı $\sqrt{\pi}$ ile çarpılıp bölünürse

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[c\Big](w) = 2c\pi p(\alpha)\sqrt{\frac{n}{\pi}}\exp\left(-nw^{2q(\alpha)}\right) $$

elde edilir. (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[c\Big](w) = 2c\pi p(\alpha)\delta_n\left(w^{q(\alpha)}\right) $$

bulunur. Son olarak (3.2) eşitliği kullanılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[c\Big](w) = 2c\pi p(\alpha)\delta\left(w^{q(\alpha)}\right) $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.19. $w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp\left(-a|t|\right)\Big](w) = \frac{2ap(\alpha)}{a^2 + w^{2q(\alpha)}}, \quad (a > 0) $$

eşitliğini sağlar. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp\left(-a|t|\right)\Big](w) = p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\exp\left(-a|t|\right)dt $$

bulunur. İntegralin sınırları bölünerek

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp\left(-a|t|\right)\Big](w) = p(\alpha)\left(\int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left(t\left(iw^{q(\alpha)} + a\right)\right)dt + \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-t\left(a - iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt\right) $$

elde edilir. Limit kullanılarak integraller hesaplanırsa

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp\left(-a|t|\right)\Big](w) &= p(\alpha)\lim_{A\to\infty}\left(\left[\frac{\exp\left(t\left(iw^{q(\alpha)} + a\right)\right)}{iw^{q(\alpha)} + a}\right]_{-A}^{0}\right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\exp\left(-t\left(a - iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{iw^{q(\alpha)} - a}\right]_{0}^{A}\right) \\ &= p(\alpha)\left(\frac{1}{a + iw^{q(\alpha)}} + \frac{1}{a - iw^{q(\alpha)}}\right) \end{aligned} $$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp\left(-a|t|\right)\Big](w) = \frac{2ap(\alpha)}{a^2 + w^{2q(\alpha)}} $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.20. $w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[H(a - |t|)\Big](w) = \frac{2p(\alpha)\sin\left(aw^{q(\alpha)}\right)}{w^{q(\alpha)}} $$

eşitliğini sağlar. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[H(a - |t|)\Big](w) = p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)H(a - |t|)dt $$

bulunur. Burada $H(a - |t|)$ Heaviside fonksiyonu [48]

$$ H(a - |t|) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases} $$

şeklindedir.

Heaviside tanımı integral dönüşümünde kullanılırsa

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[H(a-|t|)\Big](w) = p(\alpha)\int\limits_{-a}^{a}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)dt
$$

elde edilir. Ardından integral hesaplanırsa

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[H(a-|t|)\Big](w) = p(\alpha)\left[\frac{\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)}{iw^{q(\alpha)}}\right]_{-a}^{a}
$$

bulunur. Sınırlar yerine yazılırsa

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[H(a-|t|)\Big](w) = p(\alpha)\left(\frac{\exp\left(iaw^{q(\alpha)}\right)}{iw^{q(\alpha)}}-\frac{\exp\left(-iaw^{q(\alpha)}\right)}{iw^{q(\alpha)}}\right)
$$

elde edilir. Eşitliğin sağ yanı 2 ile çarpılıp bölünürse

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[H(a-|t|)\Big](w) = \frac{2p(\alpha)}{w^{q(\alpha)}}\left(\frac{\exp\left(iaw^{q(\alpha)}\right)-\exp\left(-iaw^{q(\alpha)}\right)}{2i}\right)
$$

bulunur. Son olarak $\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right) = \frac{\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)-\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)}{2i}$ formülü kullanılırsa

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[H(a-|t|)\Big](w) = \frac{2p(\alpha)\sin\left(aw^{q(\alpha)}\right)}{w^{q(\alpha)}}
$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.21. $w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)H(t)\Big](w) = \frac{p(\alpha)\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)}{a^2+w^{2q(\alpha)}}
$$

eşitliğini sağlar. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)H(t)\Big](w) = p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\exp(-at)H(t)dt
$$

bulunur. Burada $H(t)$ Heaviside fonksiyonu [48]

$$
H(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}
$$

şeklinde olup integral dönüşümünde kullanılırsa

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)H(t)\Big](w) = p(\alpha)\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left(-t\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt
$$

elde edilir.

Limit kullanılarak integral hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)H(t)\Big](w) &= p(\alpha)\lim_{A\to\infty}\left[\frac{\exp\left(-t\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{iw^{q(\alpha)}-a}\right]_0^A \\
&= \frac{p(\alpha)}{a-iw^{q(\alpha)}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)H(t)\Big](w) = \frac{p(\alpha)\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)}{a^2+w^{2q(\alpha)}}
$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.22. $w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\sin(at)\Big](w) = -i\pi p(\alpha)\Big(\delta\left(-w^{q(\alpha)}-a\right)-\delta\left(-w^{q(\alpha)}+a\right)\Big)
$$

eşitliğini sağlar. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\sin(at)\Big](w) = p(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\sin(at)dt
$$

bulunur. Burada $\sin(at) = \frac{\exp(iat)-\exp(-iat)}{2i}$ formülü kullanılırsa

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\sin(at)\Big](w) = p(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\left(\frac{\exp(iat)-\exp(-iat)}{2i}\right)dt
$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$
\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\sin(at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2i}\Bigg(&\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-it\left(-w^{q(\alpha)}-a\right)\right)dt \\
&-\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-it\left(-w^{q(\alpha)}+a\right)\right)dt\Bigg)
\end{aligned}
$$

bulunur. Ardından eşitliğin sağ yanı π ile çarpılıp bölünürse

$$
\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\sin(at)\Big](w) = \frac{\pi p(\alpha)}{i}\Bigg(&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-it\left(-w^{q(\alpha)}-a\right)\right)dt \\
&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-it\left(-w^{q(\alpha)}+a\right)\right)dt\Bigg)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son olarak (4.13) eşitliği kullanılırsa

$$
{}_p\mathfrak{F}_q\Big[\sin(at)\Big](w) = -i\pi p(\alpha)\Big(\delta\left(-w^{q(\alpha)}-a\right)-\delta\left(-w^{q(\alpha)}+a\right)\Big)
$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.23. $w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\cos(at)\Big](w) = \pi p(\alpha)\Big(\delta\left(-w^{q(\alpha)} - a\right) + \delta\left(-w^{q(\alpha)} + a\right)\Big) $$

eşitliğini sağlar. ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\cos(at)\Big](w) = p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\cos(at)dt $$

bulunur. Burada $\cos(at) = \frac{\exp(iat)+\exp(-iat)}{2}$ formülü kullanılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\cos(at)\Big](w) = p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)\left(\frac{\exp(iat)+\exp(-iat)}{2}\right)dt $$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\cos(at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2}\Bigg(&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-it\left(-w^{q(\alpha)} - a\right)\right)dt \\ &+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-it\left(-w^{q(\alpha)} + a\right)\right)dt\Bigg) \end{aligned} $$

bulunur. Ardından eşitliğin sağ yanı π ile çarpılıp bölünürse

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\cos(at)\Big](w) = \pi p(\alpha)\Bigg(&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-it\left(-w^{q(\alpha)} - a\right)\right)dt \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-it\left(-w^{q(\alpha)} + a\right)\right)dt\Bigg) \end{aligned} $$

elde edilir. Son olarak (4.13) eşitliği kullanılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\cos(at)\Big](w) = \pi p(\alpha)\Big(\delta\left(-w^{q(\alpha)} - a\right) + \delta\left(-w^{q(\alpha)} + a\right)\Big) $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.24. $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_p^s\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)w^{q(\alpha)}}{a^2 + w^{2q(\alpha)}}, \quad (a > 0) \tag{4.15} $$

eşitliğini sağlar. ${}_p^s\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = p(\alpha)\int\limits_{0}^{\infty} \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)\exp(-at)dt $$

bulunur.

Burada $\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right) = \frac{\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)-\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)}{2i}$ formülü kullanılırsa

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2i}\int\limits_0^\infty \left(\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) - \exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)\right)\exp(-at)dt $$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2i}\Bigg(&\int\limits_0^\infty \exp\left(-t\left(a - iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt \\ &- \int\limits_0^\infty \exp\left(-t\left(a + iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt\Bigg) \end{aligned} $$

bulunur. Her iki integral hesaplanırsa

$$ \begin{aligned} {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2i}\lim_{A\to\infty}\Bigg(&\left[\frac{\exp\left(-t\left(a - iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{-\left(a - iw^{q(\alpha)}\right)}\right]_0^A \\ &- \left[\frac{\exp\left(-t\left(a + iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{-\left(a + iw^{q(\alpha)}\right)}\right]_0^A\Bigg) \end{aligned} $$

elde edilir. Sınırlar yerine yazılırsa

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2i}\left(\frac{1}{a - iw^{q(\alpha)}} - \frac{1}{a + iw^{q(\alpha)}}\right) $$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)w^{q(\alpha)}}{a^2 + w^{2q(\alpha)}} $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.25. $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{ap(\alpha)}{a^2 + w^{2q(\alpha)}}, \quad (a > 0) \tag{4.16} $$

eşitliğini sağlar. ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = p(\alpha)\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)\exp(-at)dt $$

bulunur. Burada $\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right) = \frac{\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)+\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)}{2}$ formülü kullanılırsa

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2}\int\limits_0^\infty \left(\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) + \exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)\right)\exp(-at)dt $$

elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_{q}\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2}\left(\int_{0}^{\infty}\exp\left(-t\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt + \int_{0}^{\infty}\exp\left(-t\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt\right)
$$

bulunur. Her iki integral hesaplanırsa

$$
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_{q}\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\left[\frac{\exp\left(-t\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{-\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)}\right]_{0}^{A} + \left[\frac{\exp\left(-t\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{-\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)}\right]_{0}^{A}\right)
$$

elde edilir. Sınırlar yerine yazılırsa

$$
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_{q}\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2}\left(\frac{1}{a-iw^{q(\alpha)}}+\frac{1}{a+iw^{q(\alpha)}}\right)
$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_{q}\Big[\exp(-at)\Big](w) = \frac{ap(\alpha)}{a^{2}+w^{2q(\alpha)}}
$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.26. $w, t \in \mathbb{R}_{0}^{+}$ olmak üzere ${}_{p}^{s}\mathfrak{F}_{q}$ dönüşümü

$$
{}_{p}^{s}\mathfrak{F}_{q}\left[\frac{t}{a^{2}+t^{2}}\right](w) = \frac{\pi p(\alpha)\exp\left(-aw^{q(\alpha)}\right)}{2}
$$

eşitliğini sağlar. ${}_{p}^{s}\mathfrak{F}_{q}$ dönüşümün tanımından

$$
{}_{p}^{s}\mathfrak{F}_{q}\left[\frac{t}{a^{2}+t^{2}}\right](w) = p(\alpha)\int_{0}^{\infty}\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)\frac{t}{a^{2}+t^{2}}dt \tag{4.17}
$$

bulunur. ${}_{p}^{s}\mathfrak{F}_{q}^{-1}$ dönüşümü (4.15) eşitliğine uygulanırsa

$$
\exp(-at) = \frac{2q(\alpha)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)w^{2q(\alpha)-1}}{a^{2}+w^{2q(\alpha)}}dw
$$

elde edilir. Burada $t = w^{q(\alpha)}$ dönüşümü yapılırsa

$$
\exp\left(-aw^{q(\alpha)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)\frac{t}{a^{2}+t^{2}}dt \tag{4.18}
$$

bulunur.

Son olarak (4.18) eşitliği (4.17) eşitliğinde kullanılırsa

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\left[\frac{t}{a^2+t^2}\right](w)=\frac{\pi p(\alpha)\exp\left(-aw^{q(\alpha)}\right)}{2} $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.27. $w,t\in\mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right](w)=\frac{\pi p(\alpha)\exp\left(-aw^{q(\alpha)}\right)}{2a} $$

eşitliğini sağlar. ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right](w)=p(\alpha)\int_0^\infty\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)\frac{1}{a^2+t^2}dt \tag{4.19} $$

bulunur. ${}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü (4.16) eşitliğine uygulanırsa

$$ \exp(-at)=\frac{2aq(\alpha)}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}}{a^2+w^{2q(\alpha)}}dw $$

elde edilir. Burada $t=w^{q(\alpha)}$ dönüşümü yapılırsa

$$ \exp\left(-aw^{q(\alpha)}\right)=\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)\frac{1}{a^2+t^2}dt \tag{4.20} $$

bulunur. Son olarak (4.20) eşitliği (4.19) eşitliğinde kullanılırsa

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right](w)=\frac{\pi p(\alpha)\exp\left(-aw^{q(\alpha)}\right)}{2a} $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.28. $w,t\in\mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_p^s\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w)=\frac{2ap(\alpha)w^{q(\alpha)}}{\left(a^2+w^{2q(\alpha)}\right)^2},\qquad(a>0) $$

eşitliğini sağlar. ${}_p^s\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w)=p(\alpha)\int_0^\infty\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)t\exp(-at)dt $$

bulunur. Burada $\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)=\frac{\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)-\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)}{2i}$ formülü kullanılırsa

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w)=\frac{p(\alpha)}{2i}\int_0^\infty\left(\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)-\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)\right)t\exp(-at)dt $$

elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
{}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2i}\Bigg(&\int_0^\infty t\exp\left(-t\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt \\
&- \int_0^\infty t\exp\left(-t\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt\Bigg)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada her iki integral için kısmi integrasyon kullanılır ve sınırlar yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
{}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2i}\Bigg(&\int_0^\infty \frac{\exp\left(-t\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{a-iw^{q(\alpha)}}dt \\
&- \int_0^\infty \frac{\exp\left(-t\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{a+iw^{q(\alpha)}}dt\Bigg)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ardından her iki integral hesaplanarak

$$
{}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2i}\left(\frac{1}{\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)^2} - \frac{1}{\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)^2}\right)
$$

bulunur. Son olarak gerekli hesaplamalar yapılarak

$$
{}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{2ap(\alpha)w^{q(\alpha)}}{\left(a^2+w^{2q(\alpha)}\right)^2}
$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.29. $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$
{}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)\left(a^2-w^{2q(\alpha)}\right)}{\left(a^2+w^{2q(\alpha)}\right)^2}, \quad (a>0)
$$

eşitliğini sağlar. ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$
{}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = p(\alpha)\int_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)t\exp(-at)dt
$$

bulunur. Burada $\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right) = \frac{\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)+\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)}{2}$ formülü kullanılırsa

$$
{}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2}\int_0^\infty \left(\exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right)+\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)\right)t\exp(-at)dt
$$

elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2}\left(\int_0^\infty t\exp\left(-t\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt + \int_0^\infty t\exp\left(-t\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)\right)dt\right)
$$

bulunur. Burada her iki integral için kısmi integrasyon kullanılır ve sınırlar yerine yazılırsa

$$
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2}\left(\int_0^\infty \frac{\exp\left(-t\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{a-iw^{q(\alpha)}}dt + \int_0^\infty \frac{\exp\left(-t\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)\right)}{a+iw^{q(\alpha)}}dt\right)
$$

elde edilir. Ardından her iki integral hesaplanarak

$$
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)}{2}\left(\frac{1}{\left(a-iw^{q(\alpha)}\right)^2} + \frac{1}{\left(a+iw^{q(\alpha)}\right)^2}\right)
$$

bulunur. Son olarak gerekli hesaplamalar yapılarak

$$
{}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\Big[t\exp(-at)\Big](w) = \frac{p(\alpha)\left(a^2-w^{2q(\alpha)}\right)}{\left(a^2+w^{2q(\alpha)}\right)^2}
$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.30. $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$
{}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = \frac{p(\alpha)\left(1-\cos\left(aw^{q(\alpha)}\right)\right)}{w^{q(\alpha)}}, \quad (a>0)
$$

eşitliğini sağlar. ${}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$
{}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = p(\alpha)\int_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)H(a-t)dt
$$

bulunur. Burada $H(a-t)$ Heaviside fonksiyonu [48]

$$
H(a-t) = \begin{cases} 1, & a>t \\ 0, & a<t \end{cases}
$$

şeklinde olup integral dönüşümünde kullanılırsa

$$
{}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = p(\alpha)\int_0^a \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)dt
$$

elde edilir.

Ardından integral hesaplanarak

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = p(\alpha)\left[-\frac{\cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)}{w^{q(\alpha)}}\right]_0^a $$

bulunur. Son olarak sınırlar yerine yazılırsa

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = \frac{p(\alpha)\left(1-\cos\left(aw^{q(\alpha)}\right)\right)}{w^{q(\alpha)}} $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.31. $w, t \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = \frac{p(\alpha)\sin\left(aw^{q(\alpha)}\right)}{w^{q(\alpha)}}, \quad (a>0) $$

eşitliğini sağlar. ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümün tanımından

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = p(\alpha)\int_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right) H(a-t)dt $$

bulunur. Burada $H(a-t)$ Heaviside fonksiyonu integral dönüşümünde kullanılırsa

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = p(\alpha)\int_0^a \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right) dt $$

elde edilir. Ardından integral hesaplanarak

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = p(\alpha)\left[\frac{\sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)}{w^{q(\alpha)}}\right]_0^a $$

bulunur. Son olarak sınırlar yerine yazılırsa

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[H(a-t)\Big](w) = \frac{p(\alpha)\sin\left(aw^{q(\alpha)}\right)}{w^{q(\alpha)}} $$

sonucuna ulaşılır.

4.1.3. Dönüşümün Kesirli Operatörlere Uygulanması

Teorem 4.32. $w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integralin ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\left(I_+^\varepsilon v\right)(t)\Big](w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{-\varepsilon} {}_p\widehat{v}_q(w), \quad (0 < \Re(\varepsilon) < 1) \tag{4.21} $$

biçimindedir.

İspat. Reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integral

$$\left(I_{+}^{\varepsilon}v\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{\varepsilon-1}v(\tau)d\tau$$

şeklindedir. Burada $u(t-\tau)=\frac{(t-\tau)^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)}$ için $u(t)=\frac{t^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)}$ olur. Ayrıca $u_{+}(t)$ fonksiyonu

$$u_{+}(t)=\begin{cases}\frac{t^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)}, & t>0\\ 0\quad, & t\leq 0\end{cases}$$

biçimindedir [50]. Böylece reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integral ile $u_{+}(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu arasında

$$\left(I_{+}^{\varepsilon}v\right)(t)=\left(u_{+}*v\right)(t) \tag{4.22}$$

şeklinde ilişki vardır. $u_{+}(t)$ fonksiyonuna ${}_{p}\mathfrak{F}_{q}$ dönüşümü uygulanırsa

$${}_{p}\mathfrak{F}_{q}\Big[u_{+}(t)\Big](w)=p(\alpha)\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{-\varepsilon} \tag{4.23}$$

bulunur. (4.22) eşitliğine ${}_{p}\mathfrak{F}_{q}$ dönüşümü uygulanırsa

$${}_{p}\mathfrak{F}_{q}\Big[\left(I_{+}^{\varepsilon}v\right)(t)\Big](w)={}_{p}\mathfrak{F}_{q}\Big[(u_{+}*v)(t)\Big](w)$$

elde edilir. (4.7) eşitliği göz önünde bulundurulursa

$${}_{p}\mathfrak{F}_{q}\Big[\left(I_{+}^{\varepsilon}v\right)(t)\Big](w)=\frac{{}_{p}\mathfrak{F}_{q}\Big[u_{+}(t)\Big](w)\;{}_{p}\mathfrak{F}_{q}\Big[v(t)\Big](w)}{p(\alpha)}$$

bulunur. Son olarak (4.23) eşitliği kullanılırsa

$${}_{p}\mathfrak{F}_{q}\Big[\left(I_{+}^{\varepsilon}v\right)(t)\Big](w)=\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{-\varepsilon}{}_{p}\widehat{v}_{q}(w)$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.33. $w,t\in\mathbb{R}$ olmak üzere reel eksen üzerinde sol R-L kesirli türevin ${}_{p}\mathfrak{F}_{q}$ dönüşümü

$${}_{p}\mathfrak{F}_{q}\Big[\left(D_{+}^{\varepsilon}v\right)(t)\Big](w)=\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon}{}_{p}\widehat{v}_{q}(w),$$

$$(m-1<\Re(\varepsilon)<m,\; m\in\mathbb{N})$$

biçimindedir.

İspat. Reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integral ile türev arasında

$$\left(D_{+}^{\varepsilon}v\right)(t)=\frac{d^{m}}{dt^{m}}\left(I_{+}^{m-\varepsilon}v\right)(t)$$

şeklinde ilişki vardır.

Burada

$$g(t) := \left(I_+^{m-\varepsilon} v\right)(t) \tag{4.24}$$

denirse

$$\left(D_+^{\varepsilon} v\right)(t) = g^{(m)}(t) \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.5) eşitliği göz önünde bulundurularak (4.25) eşitliğine ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$${}_p\mathfrak{F}_q\Big[\left(D_+^{\varepsilon} v\right)(t)\Big](w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^m {}_p\widehat{g}_q(w) \tag{4.26}$$

bulunur. (4.21) eşitliği göz önünde bulundurularak (4.24) eşitliğine ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$${}_p\widehat{g}_q(w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{-(m-\varepsilon)} {}_p\widehat{v}_q(w) \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.26) eşitliğinde (4.27) eşitliği kullanılırsa

$${}_p\mathfrak{F}_q\Big[\left(D_+^{\varepsilon} v\right)(t)\Big](w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon} {}_p\widehat{v}_q(w)$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.34. $w, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere reel eksen üzerinde sol Caputo kesirli türevin ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$${}_p\mathfrak{F}_q\Big[\left({}^cD_+^{\varepsilon} v\right)(t)\Big](w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon} {}_p\widehat{v}_q(w),$$

$$(m-1 < \Re(\varepsilon) < m,\ m \in \mathbb{N})$$

biçimindedir.

İspat. Reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integral ile Caputo kesirli türev arasında

$$\left({}^cD_+^{\varepsilon} v\right)(t) = \left(I_+^{m-\varepsilon} v^{(m)}\right)(t)$$

şeklinde ilişki vardır. Burada

$$g(t) := v^{(m)}(t) \tag{4.28}$$

denirse

$$\left({}^cD_+^{\varepsilon} v\right)(t) = \left(I_+^{m-\varepsilon} g\right)(t) \tag{4.29}$$

bulunur. (4.28) eşitliğine ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$${}_p\widehat{g}_q(w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^m {}_p\widehat{v}_q(w) \tag{4.30}$$

elde edilir.

(4.21) eşitliği göz önünde bulundurularak (4.29) eşitliğin her iki tarafına ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\left({}^cD_+^\varepsilon v\right)(t)\Big](w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{-(m-\varepsilon)} {}_p\widehat{g}_q(w) $$

bulunur. Ardından (4.30) eşitliği kullanılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\left({}^cD_+^\varepsilon v\right)(t)\Big](w) = \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon} {}_p\widehat{v}_q(w) $$

sonucuna ulaşılır. ■

Uyarı 4.35. 4.33. ve 4.34. Teoremden görüldüğü üzere reel eksen üzerinde sol yan R-L ve Caputo kesirli türev operatörlerinin ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü çakışır.

4.1.4. Çeşitli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Örnek 4.36. Kesirli hareket denklemi

$$ y''(t) + \lambda_1\left({}^cD_+^\varepsilon y\right)(t) + \lambda_2 y(t) = f(t), \quad (0 < \Re(\varepsilon) < 1) $$

olmak üzere ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümünden

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[y''(t)\Big](w) + \lambda_1\, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\left({}^cD_+^\varepsilon y\right)(t)\Big](w) + \lambda_2\, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[y(t)\Big](w) = {}_p\mathfrak{F}_q\Big[f(t)\Big](w) $$

elde edilir. Ardından gerekli hesaplamalar yapılarak

$$ \begin{aligned} \left(-iw^{q(\alpha)}\right)^2 {}_p\mathfrak{F}_q\Big[y(t)\Big](w) &+ \lambda_1\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon} {}_p\mathfrak{F}_q\Big[y(t)\Big](w) \\ &+ \lambda_2\, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[y(t)\Big](w) = {}_p\mathfrak{F}_q\Big[f(t)\Big](w) \end{aligned} $$

bulunur. ${}_p\mathfrak{F}_q\Big[y(t)\Big](w)$ yalnız bırakılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[y(t)\Big](w) = \frac{{}_p\mathfrak{F}_q\Big[f(t)\Big](w)}{\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^2 + \lambda_1\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon} + \lambda_2} $$

elde edilir. Burada

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[g(t)\Big](w) := \frac{1}{\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^2 + \lambda_1\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon} + \lambda_2} \tag{4.31} $$

denirse

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[y(t)\Big](w) = {}_p\mathfrak{F}_q\Big[f(t)\Big](w)\, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[g(t)\Big](w) $$

bulunur. Ardından ${}_p\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$ y(t) = {}_p\mathfrak{F}_q^{-1}\Big[{}_p\mathfrak{F}_q\Big[f(t)\Big](w)\, {}_p\mathfrak{F}_q\Big[g(t)\Big](w)\Big](t) \tag{4.32} $$

elde edilir.

4.10. Teoremden
$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[(f*g)(t)\Big](w) = \frac{{}_p\mathfrak{F}_q\Big[f(t)\Big](w)\ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[g(t)\Big](w)}{p(\alpha)} $$
eşitliğine ${}_p\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$ (f*g)(t) = \frac{{}_p\mathfrak{F}_q^{-1}\Big[{}_p\mathfrak{F}_q\Big[f(t)\Big](w)\ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[g(t)\Big](w)\Big](t)}{p(\alpha)} \tag{4.33} $$

bulunur. (4.32) eşitliğinin sağ yanı $p(\alpha)$ ile çarpılıp bölünür ve (4.33) eşitliği kullanılırsa
$$ y(t) = p(\alpha)\,(f*g)\,(t) $$
elde edilir. Fourier konvolüsyonu kullanılarak
$$ y(t) = p(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{4.34} $$
bulunur. (4.31) eşitliğinin her iki tarafına ${}_p\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa
$$ g(t) = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}}{\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^2 + \lambda_1\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon} + \lambda_2}dw \tag{4.35} $$
elde edilir. Son olarak (4.35) eşitliği (4.34) eşitliğinde kullanılırsa
$$ y(t) = \frac{q(\alpha)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t-\tau)\exp\left(-iw^{q(\alpha)}\tau\right)w^{q(\alpha)-1}}{\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^2 + \lambda_1\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon} + \lambda_2}dwd\tau \tag{4.36} $$
sonucuna ulaşılır.

Sonuç 4.37. (4.36) eşitliğinde $q(\alpha) = 1$ seçilirse
$$ y(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t-\tau)\exp(-iw\tau)}{(-iw)^2 + \lambda_1(-iw)^{\varepsilon} + \lambda_2}dwd\tau $$
sonucuna ulaşılır ki bu klasik Fourier dönüşümünün çözümü ile çakışır [14, 33].

Örnek 4.38. L: endüktans, I: akım, R: direnç ve E: uygulanan elektromanyetik kuvvet olmak üzere elektrik akım denklemi
$$ L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E(t) $$
şeklindedir. Burada elektromanyetik kuvvet $E(t) = \delta(t)$ (Dirac delta fonksiyonu) olarak seçilir ve ardından ${}_p\mathfrak{F}_q$ dönüşümü uygulanırsa
$$ L\,{}_p\mathfrak{F}_q\left[\frac{dI(t)}{dt}\right](w) + R\,{}_p\mathfrak{F}_q\left[I(t)\right](w) = {}_p\mathfrak{F}_q\Big[\delta(t)\Big](w) $$
elde edilir.

Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$-iLw^{q(\alpha)}{}_p\mathfrak{F}_q\Big[I(t)\Big](w)+R\,{}_p\mathfrak{F}_q\Big[I(t)\Big](w)=p(\alpha)$$

bulunur. ${}_p\mathfrak{F}_q\Big[I(t)\Big](w)$ yalnız bırakılırsa

$$ {}_p\mathfrak{F}_q\Big[I(t)\Big](w)=\frac{p(\alpha)}{R-iLw^{q(\alpha)}} \tag{4.37}$$

elde edilir. (4.37) eşitliğine ${}_p\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$I(t)=\frac{q(\alpha)}{L}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}}{\left(\frac{R}{iL}-w^{q(\alpha)}\right)}dw \tag{4.38}$$

bulunur. (4.38) eşitliğinde $w=\left(\frac{R}{iL}\right)^{\frac{1}{q(\alpha)}}$ kutup noktası olup Cauchy Rezidü Teoremi [66] kullanılırsa

$$\begin{aligned}I(t)&=\frac{q(\alpha)}{L}\frac{2\pi i}{2\pi i}\mathrm{Res}\left(w=\left(\frac{R}{iL}\right)^{\frac{1}{q(\alpha)}}\right)\\&=\frac{q(\alpha)}{L}\lim_{w\to\left(\frac{R}{iL}\right)^{\frac{1}{q(\alpha)}}}\frac{\left(\frac{R}{iL}-w^{q(\alpha)}\right)\exp\left(-iw^{q(\alpha)}t\right)w^{q(\alpha)-1}}{\left(\frac{R}{iL}-w^{q(\alpha)}\right)}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$I(t)=\frac{q(\alpha)}{L}\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\left(\frac{R}{iL}\right)^{\frac{q(\alpha)-1}{q(\alpha)}} \tag{4.39}$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 4.39. (4.39) eşitliğinde $q(\alpha)=1$ seçilirse

$$I(t)=\frac{1}{L}\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \tag{4.40}$$

sonucuna ulaşılır ki bu klasik Fourier dönüşümünün çözümü ile çakışır [18].

Örnek 4.40. Başlangıç ve sınır koşulları

(a) $u(t,0)=0, \quad 0<t<\infty,$

(b) $u(0,\xi)=f(\xi), \quad \xi\geq 0, \quad t\to\infty$ iken $u(t,\xi)\to 0,$

(c) $u_t(0,\xi)=f(\xi), \quad \xi\geq 0, \quad t\to\infty$ iken $u(t,\xi)\to 0$

şeklinde olan ve κ sabit olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (0<t<\infty,\ \xi>0)$$

difüzyon denklemini ele alalım.

Bir $u(t,\xi)$ fonksiyonunun ${}_p^s\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p^s\mathfrak{F}_q\Big[u(t,\xi)\Big](w) = {}_p^s\widehat{u}_q(w,\xi) = p(\alpha)\int\limits_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t,\xi)dt $$

şeklindedir. (4.8) eşitliği göz önünde bulundurularak difüzyon denklemi ve başlangıç koşulu (a) eşitliklerine ${}_p^s\mathfrak{F}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$$ \begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\left\{{}_p^s\widehat{u}_q(w,\xi)\right\} &= \kappa\left(w^{q(\alpha)}p(\alpha)u(0,\xi) - w^{2q(\alpha)}\,{}_p^s\widehat{u}_q(w,\xi)\right) \\ {}_p^s\widehat{u}_q(w,0) &= 0 \end{aligned} $$

bulunur. Sınır koşulu (b) kullanılırsa

$$ \frac{d}{d\xi}\left\{{}_p^s\widehat{u}_q(w,\xi)\right\} = \kappa w^{q(\alpha)}p(\alpha)f(\xi) - \kappa w^{2q(\alpha)}\,{}_p^s\widehat{u}_q(w,\xi) $$

elde edilir. Son eşitliğin çözümü

$$ {}_p^s\widehat{u}_q(w,\xi) = \kappa w^{q(\alpha)}p(\alpha)\int\limits_0^\xi f(\tau)\exp\left(-\kappa w^{2q(\alpha)}(\xi-\tau)\right)d\tau $$

şeklinde bulunur. ${}_p^s\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$ u(t,\xi) = \kappa p(\alpha)\int\limits_0^\xi f(\tau)\,{}_p^s\mathfrak{F}_q^{-1}\Big[w^{q(\alpha)}\exp\left(-\kappa w^{2q(\alpha)}(\xi-\tau)\right)\Big](t)d\tau $$

elde edilir. (4.11) eşitliğinde $a = \kappa(\xi-\tau)$ seçilir ve yukarıdaki son eşitlikte kullanılırsa verilen difüzyon denkleminin ${}_p^s\mathfrak{F}_q$ dönüşümü yardımıyla çözümü

$$ u(t,\xi) = \frac{t}{2\sqrt{\kappa\pi}}\int\limits_0^\xi \frac{f(\tau)}{(\xi-\tau)^{3/2}}\exp\left(\frac{-t^2}{4\kappa(\xi-\tau)}\right)d\tau $$

biçiminde bulunur ki bu klasik Fourier sinüs dönüşümünün çözümü ile çakışır [18].

Benzer olarak bir $u(t,\xi)$ fonksiyonunun ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümü

$$ {}_p^c\mathfrak{F}_q\Big[u(t,\xi)\Big](w) = {}_p^c\widehat{u}_q(w,\xi) = p(\alpha)\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t,\xi)dt $$

şeklindedir. (4.9) eşitliği göz önünde bulundurularak, difüzyon denklemi ve başlangıç koşulu (a) eşitliklerine ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$$ \begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\left\{{}_p^c\widehat{u}_q(w,\xi)\right\} &= \kappa\left(-p(\alpha)u'(0,\xi) - w^{2q(\alpha)}\,{}_p^c\widehat{u}_q(w,\xi)\right) \\ {}_p^c\widehat{u}_q(w,0) &= 0 \end{aligned} $$

bulunur.

Sınır koşulu (c) kullanılırsa

$$\frac{d}{d\xi}\left\{{}_p^c\widehat{u}_q(w,\xi)\right\} = -\kappa p(\alpha) f(\xi) - \kappa w^{2q(\alpha)}\ {}_p^c\widehat{u}_q(w,\xi)$$

elde edilir. Son eşitliğin çözümü

$$ {}_p^c\widehat{u}_q(w,\xi) = -\kappa p(\alpha)\int\limits_0^{\xi} f(\tau)\exp\left(-\kappa w^{2q(\alpha)}(\xi-\tau)\right)d\tau$$

şeklinde bulunur. ${}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$u(t,\xi) = -\kappa p(\alpha)\int\limits_0^{\xi} f(\tau)\ {}_p^c\mathfrak{F}_q^{-1}\Big[\exp\left(-\kappa w^{2q(\alpha)}(\xi-\tau)\right)\Big](t)d\tau$$

elde edilir. (4.10) eşitliğinde $a = \kappa(\xi-\tau)$ seçilir ve yukarıdaki son eşitlikte kullanılırsa verilen difüzyon denkleminin ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümü yardımıyla çözümü

$$u(t,\xi) = -\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\int\limits_0^{\xi}\frac{f(\tau)}{\sqrt{(\xi-\tau)}}\exp\left(\frac{-t^2}{4\kappa(\xi-\tau)}\right)d\tau$$

biçiminde bulunur ki bu klasik Fourier kosinüs dönüşümünün çözümü ile çakışır [18].

4.2. Genelleştirilmiş Laplace Dönüşümü

Fourier integral formülü

$$u_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx)\exp(-ikt)u_1(t)dtdk$$

biçimindedir [18]. Heaviside fonksiyonu

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

şeklindedir [48]. $x < 0$ iken $u_1(x) = 0$ ve γ pozitif sabit olmak üzere $u_1(x)$ fonksiyonu

$$u_1(x) = \exp(-\gamma x)u(x)H(x) = \exp(-\gamma x)u(x), \quad (x > 0)$$

biçiminde seçilirse

$$u(x) = \frac{\exp(\gamma x)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\exp(ikx)\exp\big(-t(\gamma+ik)\big)u(t)dtdk$$

elde edilir. $n \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $\gamma + ik = s^n$ seçilir ve yerine yazılırsa

$$u(x) = \frac{\exp(\gamma x)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\int\limits_0^{\infty}\exp\big((s^n-\gamma)x\big)\exp(-s^n t)u(t)dtd\left(s^n\right)$$

$$= \frac{n}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\exp(s^n x)\, \underbrace{s^{n-1}\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-s^n t)u(t)dt}_{\mathfrak{L}_n\left[u(t)\right](s)=\widehat{u}_n(s)}\, ds$$

$$= \frac{n}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\exp(s^n x)\widehat{u}_n(s)ds$$

$$= \mathfrak{L}_n^{-1}\left[\widehat{u}_n(s)\right](t)$$

sonucuna ulaşılır ki bu aşağıdaki 4.41. Tanımı verir.

Tanım 4.41. $\Re(s^n) > 0$, $n \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $u(t)$ fonksiyonu parçalı sürekli ve α-üstel mertebeden olmak üzere genelleştirilmiş Laplace ve ters Laplace dönüşümleri sırasıyla

$$\mathfrak{L}_n\left[u(t)\right](s) := \widehat{u}_n(s) = s^{n-1}\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-s^n t)u(t)dt,$$

$$\mathfrak{L}_n^{-1}\left[\widehat{u}_n(s)\right](t) := u(t) = \frac{n}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\exp(s^n t)\widehat{u}_n(s)ds$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 4.42. Yukarıdaki tanımda $n = 1$ olarak alınırsa klasik Laplace ve ters Laplace dönüşümleri elde edilir.

Teorem 4.43. Bir $u(t)$ fonksiyonu sürekli veya her sonlu $(0, T)$ aralığında parçalı sürekli ve α-üstel mertebeden ise, o zaman $\Re(s^n) > \alpha$ ile sağlanan tüm s^n için $u(t)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Laplace dönüşümü mevcuttur.

İspat. Genelleştirilmiş Laplace dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\left[u(t)\right](s) = \left(s^{n-1}\int\limits_{0}^{T}\exp(-s^n t)u(t)dt\right) + \left(s^{n-1}\int\limits_{T}^{\infty}\exp(-s^n t)u(t)dt\right) = I_1 + I_2$$

şeklinde yazılsın. I_1 integrali, $\exp(-s^n t)u(t)$ ifadesinin sürekli olduğu aralıklar üzerinden alınan integrallerin toplamı şeklinde yazılabildiğinden mevcuttur. I_2 integralin varlığı yeterlidir. Buradan M pozitif sabit sayı ve $0 \leq t < \infty$ aralığındaki tüm $t > T$ için $|u(t)| \leq M\exp(\alpha t)$ eşitsizliği göz önünde bulundurularak

$$\left|I_2\right| = \left|s^{n-1}\int\limits_{T}^{\infty}\exp(-s^n t)u(t)dt\right| \leq \left|s^{n-1}\right|\int\limits_{T}^{\infty}\exp(-s^n t)\left|u(t)\right|dt$$

$$\leq \left|s^{n-1}\right| M \int\limits_{T}^{\infty} \exp(-s^n t)\exp(\alpha t)dt \leq \left|s^{n-1}\right| M \int\limits_{0}^{\infty} \exp\big(-t(s^n-\alpha)\big)dt$$

elde edilir. Limit kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left|I_2\right| &= \left|s^{n-1}\right| M \lim_{A\to\infty} \int\limits_{0}^{A} \exp\big(-t(s^n-\alpha)\big)dt \\
&= \left|s^{n-1}\right| M \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{\exp\big(-t(s^n-\alpha)\big)}{s^n-\alpha}\right]_0^A \\
&= \left|s^{n-1}\right| M \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{\exp\big(-A(s^n-\alpha)\big)}{s^n-\alpha} + \frac{1}{s^n-\alpha}\right) \\
&= \frac{M\left|s^{n-1}\right|}{s^n-\alpha} \lim_{A\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\exp\big(A(s^n-\alpha)\big)}\right), \quad \big(\Re\left(s^n\right) > \alpha\big) \\
&= \frac{M\left|s^{n-1}\right|}{s^n-\alpha}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

4.2.1. İntegral Dönüşümünün Temel Özellikleri

Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe $\Re\left(s^n\right) > 0$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve u, v fonksiyonları parçalı sürekli ve α-üstel mertebeden olarak alınacaktır. Ayrıca genelleştirilmiş Laplace ve ters Laplace dönüşümleri sırasıyla $\mathfrak{L}_n$ ve $\mathfrak{L}_n^{-1}$ sembolleri ile gösterilecektir.

Tanım 4.44. u ve v fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$(u*v)(t) = s^{n-1} \int\limits_{0}^{t} u(t-\tau)v(\tau)d\tau \tag{4.41}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.45. Konvolüsyonun $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[(u*v)(t)\Big](s) = \widehat{u}_n(s)\widehat{v}_n(s) \tag{4.42}$$

biçimindedir.

İspat. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümün tanımından

$$\mathfrak{L}_n\Big[(u*v)(t)\Big](s) = s^{n-1} \int\limits_{0}^{\infty} \exp(-s^n t)\big((u*v)(t)\big)dt$$

bulunur.

(4.41) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[(u*v)(t)\Big](s) &= s^{n-1}s^{n-1}\int_0^\infty\int_0^t \exp(-s^n t)u(t-\tau)v(\tau)d\tau dt \\
&= s^{n-1}s^{n-1}\int_0^\infty\int_{t=\tau}^\infty v(\tau)\exp(-s^n t)u(t-\tau)dtd\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x=t-\tau$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[(u*v)(t)\Big](s) &= s^{n-1}s^{n-1}\int_0^\infty\int_0^\infty v(\tau)\exp\big(-s^n(x+\tau)\big)u(x)dxd\tau \\
&= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n x)u(x)dx\ s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n\tau)v(\tau)d\tau \\
&= \widehat{u}_n(s)\widehat{v}_n(s)
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. ■

Teorem 4.46. $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\lambda_1 u(t)+\lambda_2 v(t)\Big](s)=\lambda_1\mathfrak{L}_n\Big[u(t)\Big](s)+\lambda_2\mathfrak{L}_n\Big[v(t)\Big](s)$$

lineerlik özelliğine sahiptir.

İspat. u ve v fonksiyonlarına sırasıyla $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[u(t)\Big](s) &= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)u(t)dt, \quad \big(\Re(s^n)>\alpha_1\big), \\
\mathfrak{L}_n\Big[v(t)\Big](s) &= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)v(t)dt, \quad \big(\Re(s^n)>\alpha_2\big)
\end{aligned}$$

bulunur. $\Re(s^n)>\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[\lambda_1 u(t)+\lambda_2 v(t)\Big](s) &= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)\big(\lambda_1 u(t)+\lambda_2 v(t)\big)dt \\
&= \lambda_1 s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)u(t)dt+\lambda_2 s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)v(t)dt \\
&= \lambda_1\mathfrak{L}_n\Big[u(t)\Big](s)+\lambda_2\mathfrak{L}_n\Big[v(t)\Big](s)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.47. m. mertebeden türevli u fonksiyonunun $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\left[u^{(m)}(t)\right](s) = s^{mn}\widehat{u}_n(s) - s^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}(s^n)^{m-1-k}u^{(k)}(0) \tag{4.43}$$

şeklindedir.

İspat. $t \to \infty$ iken $u(t)\exp(-s^n t) \to 0$ varsayımı altında, $m = 1$ için

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\left[u'(t)\right](s) &= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)u'(t)dt \\
&= s^{n-1}\left(\lim_{A\to\infty}\left[\frac{u(t)}{\exp(s^n t)}\right]_0^A + s^n\int_0^\infty \exp(-s^n t)u(t)dt\right) \\
&= s^n s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)u(t)dt - s^{n-1}u(0) \\
&= s^n\widehat{u}_n(s) - s^{n-1}u(0)
\end{aligned}$$

bulunur. $t \to \infty$ iken $u'(t)\exp(-s^n t) \to 0$ ve $u(t)\exp(-s^n t) \to 0$ varsayımı altında, $m = 2$ için

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\left[u''(t)\right](s) &= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)u''(t)dt \\
&= s^{n-1}\left(-u'(0) + s^n\int_0^\infty \exp(-s^n t)u'(t)dt\right) \\
&= s^{n-1}\left(-u'(0) + s^n\left(\lim_{A\to\infty}\left[\frac{u(t)}{\exp(s^n t)}\right]_0^A + s^n\int_0^\infty \exp(-s^n t)u(t)dt\right)\right) \\
&= s^{n-1}\left(-u'(0) - s^n u(0) + s^{2n}\int_0^\infty \exp(-s^n t)u(t)dt\right) \\
&= s^{2n}\widehat{u}_n(s) - s^{2n-1}u(0) - s^{n-1}u'(0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $t \to \infty$ iken $u^{(\alpha)}(t)\exp(-s^n t) \to 0$, $(\alpha = 0, 1, \ldots, r-1)$ varsayımı altında, $m = r$ için

$$\mathfrak{L}_n\left[u^{(r)}(t)\right](s) = s^{rn}\widehat{u}_n(s) - s^{n-1}\sum_{k=0}^{r-1}(s^n)^{r-1-k}u^{(k)}(0) \tag{4.44}$$

eşitliği sağlansın.

(4.44) eşitliği göz önünde bulundurularak $t \to \infty$ iken $u^{(\alpha)}(t)\exp\left(-s^n t\right) \to 0$, $(\alpha = 0, 1, \ldots, r)$ varsayımı altında, $m = r + 1$ için

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[u^{(r+1)}(t)\Big](s) &= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)u^{(r+1)}(t)dt \\
&= s^{n-1}\left(-u^{(r)}(0) + s^n\int_0^\infty \exp(-s^n t)u^{(r)}(t)dt\right) \\
&= s^n\left(s^{rn}\widehat{u}_n(s) - s^{n-1}\sum_{k=0}^{r-1}(s^n)^{r-1-k}u^{(k)}(0)\right) - s^{n-1}u^{(r)}(0) \\
&= s^{(r+1)n}\widehat{u}_n(s) - s^{n-1}\sum_{k=0}^{r}(s^n)^{r-k}u^{(k)}(0)
\end{aligned}
$$

bulunur. ■

Uyarı 4.48. m. mertebeden türevli u fonksiyonunun $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$
\mathfrak{L}_n\Big[u^{(m)}(t)\Big](s) = s^{mn}\widehat{u}_n(s) - s^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\left(s^n\right)^k u^{(m-k-1)}(0) \tag{4.45}
$$

şeklinde de yazılabilir.

Teorem 4.49. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$
\mathfrak{L}_n\Big[t^m\Big](s) = \frac{m!}{s^{mn+1}} \tag{4.46}
$$

eşitliğine sahiptir.

İspat. $m = 1$ için

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[t\Big](s) &= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)t\,dt \\
&= s^{n-1}\left(\lim_{A\to\infty}\left[\frac{t\exp(-s^n t)}{-s^n}\right]_0^A + \frac{1}{s^n}\int_0^\infty \exp(-s^n t)dt\right) \\
&= s^{n-1}\lim_{A\to\infty}\left[\frac{\exp(-s^n t)}{-s^{2n}}\right]_0^A \\
&= \frac{1}{s^{n+1}}
\end{aligned}
$$

bulunur. $m = 2$ için

$$
\mathfrak{L}_n\Big[t^2\Big](s) = s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^n t)t^2 dt
$$

$$= s^{n-1}\left(\lim_{A\to\infty}\left[\frac{t^2\exp(-s^nt)}{-s^n}\right]_0^A+\frac{2}{s^n}\int_0^\infty \exp(-s^nt)tdt\right)$$
$$= \frac{2}{s}\left(\lim_{A\to\infty}\left[\frac{t\exp(-s^nt)}{-s^n}\right]_0^A+\frac{1}{s^n}\int_0^\infty \exp(-s^nt)dt\right)$$
$$= -\frac{2}{s^{n+1}}\frac{1}{s^n}\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{\exp(s^nt)}\right]_0^A$$
$$= \frac{2}{s^{2n+1}}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $m = k$ için

$$\mathfrak{L}_n\Big[t^k\Big](s) = \frac{k!}{s^{kn+1}} \tag{4.47}$$

eşitliği sağlansın. (4.47) eşitliği göz önünde bulundurularak, $m = k + 1$ için

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[t^{k+1}\Big](s) &= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^nt)t^{k+1}dt \\
&= s^{n-1}\left(\lim_{A\to\infty}\left[\frac{t^{k+1}\exp(-s^nt)}{-s^n}\right]_0^A+\frac{(k+1)}{s^n}\int_0^\infty \exp(-s^nt)t^kdt\right) \\
&= \frac{(k+1)}{s^n}\left(s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^nt)t^kdt\right) \\
&= \frac{(k+1)!}{s^{n(k+1)+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.50. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)u(t)\Big](s) = \frac{s^{n-1}}{(s^n-a)^{\frac{n-1}{n}}}\mathfrak{L}_n\Big[u(t)\Big](s^n-a)^{\frac{1}{n}}$$

eşitliğine sahiptir.

İspat. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)u(t)\Big](s) &= s^{n-1}\int_0^\infty \exp(-s^nt)\exp(at)u(t)dt \\
&= \frac{s^{n-1}}{(s^n-a)^{\frac{n-1}{n}}}(s^n-a)^{\frac{n-1}{n}}\int_0^\infty \exp\left(-\left((s^n-a)^{\frac{1}{n}}\right)^n t\right)u(t)dt \\
&= \frac{s^{n-1}}{(s^n-a)^{\frac{n-1}{n}}}\mathfrak{L}_n\Big[u(t)\Big](s^n-a)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

4.2.2. Bazı Elementer Fonksiyonların İntegral Dönüşümü

Örnek 4.51. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[1\Big](s) = \frac{1}{s} \tag{4.48}$$

eşitliğini sağlar. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_n\Big[1\Big](s) &= s^{n-1}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)dt \\ &= s^{n-1}\lim_{A\to\infty}\int\limits_0^A \exp(-s^n t)dt \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.52. a sabit sayı ve $\Re\left(s^n\right) > a$ olmak üzere

$$\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)\Big](s) = \frac{s^{n-1}}{s^n - a}$$

eşitliği sağlanır. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)\Big](s) &= s^{n-1}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)\exp(at)dt \\ &= s^{n-1}\lim_{A\to\infty}\int\limits_0^A \exp\big(-t(s^n - a)\big)dt \\ &= \frac{s^{n-1}}{s^n - a}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.53. $\sin(at)$ fonksiyonunun $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\sin(at)\Big](s) = \frac{as^{n-1}}{s^{2n} + a^2}$$

şeklindedir. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümün tanımından

$$\mathfrak{L}_n\Big[\sin(at)\Big](s) = s^{n-1}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)\sin(at)dt$$

elde edilir.

Burada $\sin(at) = \frac{\exp(iat)-\exp(-iat)}{2i}$ formülü kullanılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[\sin(at)\Big](s) &= \frac{s^{n-1}}{2i}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)\big(\exp(iat)-\exp(-iat)\big)dt \\
&= \frac{s^{n-1}}{2i}\lim_{A\to\infty}\left(\int\limits_0^A \exp\big(-t(s^n-ia)\big)dt - \int\limits_0^A \exp\big(-t(s^n+ia)\big)dt\right) \\
&= \frac{s^{n-1}}{2i}\left(\frac{1}{s^n-ia}-\frac{1}{s^n+ia}\right) \\
&= \frac{as^{n-1}}{s^{2n}+a^2}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.54. $\cos(at)$ fonksiyonunun $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\cos(at)\Big](s) = \frac{s^{2n-1}}{s^{2n}+a^2}$$

biçimindedir. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümün tanımından

$$\mathfrak{L}_n\Big[\cos(at)\Big](s) = s^{n-1}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)\cos(at)dt$$

elde edilir. Burada $\cos(at) = \frac{\exp(iat)+\exp(-iat)}{2}$ formülü kullanılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[\cos(at)\Big](s) &= \frac{s^{n-1}}{2}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)\big(\exp(iat)+\exp(-iat)\big)dt \\
&= \frac{s^{n-1}}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\int\limits_0^A \exp\big(-t(s^n-ia)\big)dt + \int\limits_0^A \exp\big(-t(s^n+ia)\big)dt\right) \\
&= \frac{s^{n-1}}{2}\left(\frac{1}{s^n-ia}+\frac{1}{s^n+ia}\right) \\
&= \frac{s^{2n-1}}{s^{2n}+a^2}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.55. $\sinh(at)$ fonksiyonunun $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\sinh(at)\Big](s) = \frac{as^{n-1}}{s^{2n}-a^2}$$

biçimindedir. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümün tanımından

$$\mathfrak{L}_n\Big[\sinh(at)\Big](s) = s^{n-1}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)\sinh(at)dt$$

elde edilir.

Burada $\sinh(at) = \frac{\exp(at)-\exp(-at)}{2}$ formülü kullanılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[\sinh(at)\Big](s) &= \frac{s^{n-1}}{2}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)\big(\exp(at)-\exp(-at)\big)dt \\
&= \frac{s^{n-1}}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\int\limits_0^A \exp\big(-t(s^n-a)\big)dt - \int\limits_0^A \exp\big(-t(s^n+a)\big)dt\right) \\
&= \frac{s^{n-1}}{2}\left(\frac{1}{s^n-a}-\frac{1}{s^n+a}\right) \\
&= \frac{as^{n-1}}{s^{2n}-a^2}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.56. $\cosh(at)$ fonksiyonunun $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\cosh(at)\Big](s) = \frac{s^{2n-1}}{s^{2n}-a^2}$$

şeklindedir. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümün tanımından

$$\mathfrak{L}_n\Big[\cosh(at)\Big](s) = s^{n-1}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)\cosh(at)dt$$

elde edilir. Burada $\cosh(at) = \frac{\exp(at)+\exp(-at)}{2}$ formülü kullanılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n\Big[\cosh(at)\Big](s) &= \frac{s^{n-1}}{2}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)\big(\exp(at)+\exp(-at)\big)dt \\
&= \frac{s^{n-1}}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\int\limits_0^A \exp\big(-t(s^n-a)\big)dt + \int\limits_0^A \exp\big(-t(s^n+a)\big)dt\right) \\
&= \frac{s^{n-1}}{2}\left(\frac{1}{s^n-a}+\frac{1}{s^n+a}\right) \\
&= \frac{s^{2n-1}}{s^{2n}-a^2}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.57. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)\sin(bt)\Big](s) = \frac{bs^{n-1}}{(s^n-a)^2+b^2}$$

eşitliğine sahiptir.

4.50. Teoremde $u(t) = \sin(bt)$ seçilir ve 4.53. Örnek göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)\sin(bt)\Big](s) &= \frac{s^{n-1}}{(s^n-a)^{\frac{n-1}{n}}}\frac{b\left((s^n-a)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}{\left(\left((s^n-a)^{\frac{1}{n}}\right)^{2n}+b^2\right)}\\ &= \frac{bs^{n-1}}{(s^n-a)^2+b^2}\end{aligned}$$

sonucuna varılır.

Örnek 4.58. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)\cos(bt)\Big](s) = \frac{s^{n-1}(s^n-a)}{(s^n-a)^2+b^2}$$

eşitliğine sahiptir. 4.50. Teoremde $u(t) = \cos(bt)$ seçilir ve 4.54. Örnek göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)\cos(bt)\Big](s) &= \frac{s^{n-1}}{(s^n-a)^{\frac{n-1}{n}}}\frac{\left((s^n-a)^{\frac{1}{n}}\right)^{2n-1}}{\left(\left((s^n-a)^{\frac{1}{n}}\right)^{2n}+b^2\right)}\\ &= \frac{s^{n-1}(s^n-a)}{(s^n-a)^2+b^2}\end{aligned}$$

sonucuna varılır.

Örnek 4.59. $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)t^m\Big](s) = \frac{s^{n-1}m!}{(s^n-a)^{m+1}}$$

eşitliğine sahiptir. 4.50. Teoremde $u(t) = t^m$ seçilir ve 4.49. Teorem göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_n\Big[\exp(at)t^m\Big](s) &= \frac{s^{n-1}}{(s^n-a)^{\frac{n-1}{n}}}\frac{m!}{\left((s^n-a)^{\frac{1}{n}}\right)^{mn+1}}\\ &= \frac{s^{n-1}m!}{(s^n-a)^{m+1}}\end{aligned}$$

sonucuna varılır.

4.2.3. Dönüşümün Kesirli Operatörlere Uygulanması

Teorem 4.60. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integralin $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](s) = s^{-\varepsilon n}\,\widehat{u}_n(s), \quad (\Re(\varepsilon)>0)$$

şeklinde elde edilir.

İspat. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integral

$$\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\varepsilon-1}u(\tau)d\tau$$

şeklindedir. Eşitliğin sağ yanı s^{n-1} $(s\neq 0)$ ile çarpılıp bölünürse

$$\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)s^{n-1}}\left(s^{n-1}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\varepsilon-1}u(\tau)d\tau\right)$$

bulunur. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integralin konvolüsyon ile olan ilişkisi

$$\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)=\frac{\left(t^{\varepsilon-1}*u\right)(t)}{\Gamma(\varepsilon)s^{n-1}}\tag{4.49}$$

şeklindedir. $t^{\varepsilon-1}$ fonksiyonunun $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\left[t^{\varepsilon-1}\right](s)=\frac{\Gamma(\varepsilon)}{s^{(\varepsilon-1)n+1}}\tag{4.50}$$

biçimindedir. (4.49) eşitliğine $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü uygulanırsa

$$\mathfrak{L}_n\left[\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\right](s)=\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)s^{n-1}}\mathfrak{L}_n\left[\left(t^{\varepsilon-1}*u\right)(t)\right](s)$$

elde edilir. (4.42) eşitliği kullanılırsa

$$\mathfrak{L}_n\left[\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\right](s)=\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)s^{n-1}}\mathfrak{L}_n\left[t^{\varepsilon-1}\right](s)\mathfrak{L}_n\left[u(t)\right](s)$$

bulunur. Son olarak (4.50) eşitliği kullanılırsa

$$\mathfrak{L}_n\left[\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\right](s)=s^{-\varepsilon n}\,\widehat{u}_n(s)\tag{4.51}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.61. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli türevin $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\left[\left(D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\right](s)=s^{\varepsilon n}\,\widehat{u}_n(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{nk+n-1}\left[\left(D_{0+}^{\varepsilon-k-1}u\right)(t)\right]_{t=0}$$

$$(m-1<\Re(\varepsilon)<m,\ m\in\mathbb{N})$$

şeklindedir.

İspat. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli türev

$$\left(D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)=\frac{d^m}{dt^m}\frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\int\limits_0^t(t-\tau)^{m-\varepsilon-1}u(\tau)d\tau$$

biçimindedir.

Burada

$$v(t) := \frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\varepsilon-1} u(\tau) d\tau$$

denirse

$$\left(D_{0+}^{\varepsilon} u\right)(t) = v^{(m)}(t) \tag{4.52}$$

elde edilir. Ayrıca $v(t)$ fonksiyonu

$$v(t) = \left(I_{0+}^{m-\varepsilon} u\right)(t) \tag{4.53}$$

şeklindedir. (4.52) eşitliğine $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü uygulanırsa

$$\mathfrak{L}_n\Big[\left(D_{0+}^{\varepsilon} u\right)(t)\Big](s) = \mathfrak{L}_n\Big[v^{(m)}(t)\Big](s)$$

bulunur. (4.45) eşitliği kullanılırsa

$$\mathfrak{L}_n\Big[\left(D_{0+}^{\varepsilon} u\right)(t)\Big](s) = s^{mn}\, \widehat{v}_n(s) - s^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} s^{nk} v^{(m-k-1)}(0) \tag{4.54}$$

elde edilir. (4.53) eşitliğine $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü uygulanırsa

$$\mathfrak{L}_n\Big[v(t)\Big](s) = \mathfrak{L}_n\Big[\left(I_{0+}^{m-\varepsilon} u\right)(t)\Big](s)$$

bulunur. (4.51) eşitliği kullanılırsa

$$\mathfrak{L}_n\Big[v(t)\Big](s) = s^{-(m-\varepsilon)n}\, \widehat{u}_n(s) \tag{4.55}$$

elde edilir. (4.53) eşitliği $(m-k-1)$. mertebeden türevlenirse

$$v^{(m-k-1)}(t) = \frac{d^{m-k-1}}{dt^{m-k-1}} \left(I_{0+}^{m-\varepsilon} u\right)(t)$$

bulunur. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli türev ve integralin

$$\left(D_{0+}^{\varepsilon} u\right)(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left(I_{0+}^{m-\varepsilon} u\right)(t) \tag{4.56}$$

ilişkisi kullanılırsa

$$v^{(m-k-1)}(t) = \left(D_{0+}^{\varepsilon-k-1} u\right)(t) \tag{4.57}$$

elde edilir. Son olarak (4.55) ve (4.57) eşitlikleri (4.54) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\mathfrak{L}_n\Big[\left(D_{0+}^{\varepsilon} u\right)(t)\Big](s) = s^{\varepsilon n}\, \widehat{u}_n(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{nk+n-1} \left[\left(D_{0+}^{\varepsilon-k-1} u\right)(t)\right]_{t=0}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.62. Pozitif reel eksen üzerinde sol Caputo kesirli türevin $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü

$$\mathfrak{L}_n\Big[\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](s) = s^{\varepsilon n}\,\widehat{u}_n(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\varepsilon n - nk - 1}u^{(k)}(0) \tag{4.58}$$

$$(m-1 < \Re(\varepsilon) < m,\ m \in \mathbb{N})$$

şeklindedir.

İspat. Pozitif reel eksen üzerinde sol Caputo kesirli türev

$$\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\varepsilon-1}u^{(m)}(\tau)d\tau$$

biçimindedir. Burada

$$v(t) := u^{(m)}(t) \tag{4.59}$$

denirse

$$\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\varepsilon-1}v(\tau)d\tau$$

elde edilir ki bu pozitif reel eksen üzerinde sol Caputo kesirli türev ile R-L kesirli integral arasındaki

$$\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) = \left(I_{0+}^{m-\varepsilon}v\right)(t) \tag{4.60}$$

ilişkisini verir. (4.60) eşitliğine $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü uygulanırsa

$$\mathfrak{L}_n\Big[\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](s) = \mathfrak{L}_n\Big[\left(I_{0+}^{m-\varepsilon}v\right)(t)\Big](s)$$

bulunur. (4.51) eşitliği kullanılırsa

$$\mathfrak{L}_n\Big[\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](s) = s^{-(m-\varepsilon)n}\,\widehat{v}_n(s) \tag{4.61}$$

elde edilir. (4.59) eşitliğine $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü uygulanırsa

$$\widehat{v}_n(s) = s^{mn}\,\widehat{u}_n(s) - s^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}(s^n)^{m-k-1}u^{(k)}(0) \tag{4.62}$$

bulunur. Son olarak (4.62) eşitliği (4.61) eşitliğinde kullanılırsa

$$\mathfrak{L}_n\Big[\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](s) = s^{\varepsilon n}\,\widehat{u}_n(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\varepsilon n - nk - 1}u^{(k)}(0)$$

sonucuna ulaşılır. ■

4.2.4. Çeşitli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Örnek 4.63. Bagley-Torvik kesirli diferansiyel denklemi ve başlangıç koşulları

$$y''(t) + \left({}^{c}D_{0+}^{\frac{3}{2}}y\right)(t) + y(t) = t + 1, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

şeklinde olmak üzere $\mathfrak{L}_n$ dönüşümünden

$$\mathfrak{L}_n\Big[y''(t)\Big](s) + \mathfrak{L}_n\Big[\left({}^{c}D_{0+}^{\frac{3}{2}}y\right)(t)\Big](s) + \mathfrak{L}_n\Big[y(t)\Big](s) = \mathfrak{L}_n\Big[t\Big](s) + \mathfrak{L}_n\Big[1\Big](s)$$

bulunur. Buradan verilen başlangıç koşulları göz önünde bulundurularak sırasıyla (4.48) eşitliği, $m = 1$ için (4.46) eşitliği, $m = 2$ için (4.45) ve (4.58) eşitlikleri kullanılırsa

$$s^{2n}\hat{y}_n(s) - s^{2n-1} - s^{n-1} + s^{\frac{3n}{2}}\hat{y}_n(s) - s^{\frac{3n}{2}-1} - s^{\frac{3n}{2}-n-1} + \hat{y}_n(s) = \frac{1}{s^{n+1}} + \frac{1}{s}$$

elde edilir. Burada $\widehat{y}_n(s)$ yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}\widehat{y}_n(s) &= \frac{s^{-n-1} + s^{-1} + s^{2n-1} + s^{n-1} + s^{\frac{3n}{2}-1} + s^{\frac{3n}{2}-n-1}}{s^{2n} + s^{\frac{3n}{2}} + 1} \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} + \frac{1}{s}\end{aligned}$$

bulunur. Ardından $\mathfrak{L}_n^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_n^{-1}\Big[\widehat{y}_n(s)\Big](t) &= \mathfrak{L}_n^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right](t) + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) \\ y(t) &= t + 1\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki bu klasik Laplace dönüşümünün çözümü ile çakışır [32].

Örnek 4.64. $1 < \Re(\varepsilon) < 2$ için harmonik titreşim denklemi ve başlangıç koşulları

$$\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}y\right)(t) + w^2 y(t) = 0, \quad y(0) = A,\ y'(0) = B$$

şeklinde olmak üzere $\mathfrak{L}_n$ dönüşümünden

$$\mathfrak{L}_n\Big[\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}y\right)(t)\Big](s) + w^2\mathfrak{L}_n\Big[y(t)\Big](s) = 0$$

bulunur. Buradan verilen başlangıç koşulları göz önünde bulundurularak $m = 2$ için (4.58) eşitliği kullanılırsa

$$s^{\varepsilon n}\widehat{y}_n(s) - As^{\varepsilon n-1} - Bs^{\varepsilon n-n-1} + w^2\widehat{y}_n(s) = 0$$

elde edilir. Ardından $\widehat{y}_n(s)$ yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}\widehat{y}_n(s) &= \frac{As^{\varepsilon n-1}}{s^{\varepsilon n} + w^2} + \frac{Bs^{\varepsilon n-n-1}}{s^{\varepsilon n} + w^2} \\ &= \frac{As^{-1}}{1 + w^2 s^{-\varepsilon n}} + \frac{Bs^{-n-1}}{1 + w^2 s^{-\varepsilon n}}\end{aligned}$$

bulunur.

Burada $\frac{1}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-t)^k$ formülü kullanılırsa

$$\widehat{y}_n(s) = A\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^{2k} s^{-\varepsilon kn-1} + B\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^{2k} s^{-\varepsilon kn-n-1}$$

elde edilir. Son olarak eşitliğin her iki yanına $\mathfrak{L}_n^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} y(t) &= A\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^{2k}\mathfrak{L}_n^{-1}\left[s^{-\varepsilon kn-1}\right](t) + B\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^{2k}\mathfrak{L}_n^{-1}\left[s^{-\varepsilon kn-n-1}\right](t) \\ &= A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-w^2t^{\varepsilon}\right)^k}{\Gamma\left(\varepsilon k+1\right)} + Bt\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-w^2t^{\varepsilon}\right)^k}{\Gamma\left(\varepsilon k+2\right)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$y(t) = AE_{\varepsilon,1}\left(-w^2t^{\varepsilon}\right) + BtE_{\varepsilon,2}\left(-w^2t^{\varepsilon}\right) \tag{4.63}$$

sonucuna ulaşılır ki bu klasik Laplace dönüşümün çözümü ile çakışır [40]. Burada kullanılan $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ fonksiyonu iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonudur (bkz. Bölüm 3.).

Sonuç 4.65. Özel olarak (4.63) eşitliğinde sırasıyla $w = A = B = 1$, $w = A = B = 2$, $w = A = B = 3$ alınır ve Mittag-Leffler fonksiyonlarının ilk üç terimi açılırsa

$$y(t) = \sum_{k=0}^{2}\frac{\left(-t^{\varepsilon}\right)^k}{\Gamma\left(\varepsilon k+1\right)} + t\sum_{k=0}^{2}\frac{\left(-t^{\varepsilon}\right)^k}{\Gamma\left(\varepsilon k+2\right)}, \tag{4.64}$$

$$y(t) = 2\sum_{k=0}^{2}\frac{\left(-4t^{\varepsilon}\right)^k}{\Gamma\left(\varepsilon k+1\right)} + 2t\sum_{k=0}^{2}\frac{\left(-4t^{\varepsilon}\right)^k}{\Gamma\left(\varepsilon k+2\right)}, \tag{4.65}$$

$$y(t) = 3\sum_{k=0}^{2}\frac{\left(-9t^{\varepsilon}\right)^k}{\Gamma\left(\varepsilon k+1\right)} + 3t\sum_{k=0}^{2}\frac{\left(-9t^{\varepsilon}\right)^k}{\Gamma\left(\varepsilon k+2\right)} \tag{4.66}$$

elde edilir ki bu eşitliklerin farklı ε değerleri için yaklaşık davranışları Şekil 6.3'de sunulmuştur.

4.3. Genelleştirilmiş Mellin Dönüşümü

Fourier ve ters Fourier dönüşümleri sırasıyla

$$\mathfrak{F}\left\{v(\xi)\right\} = V(w) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(iw\xi)v(\xi)d\xi, \tag{4.67}$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{V(w)\right\} = v(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-iw\xi)V(w)dw \tag{4.68}$$

şeklindedir [18].

$\alpha \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4.67) ve (4.68) eşitliklerinde $\exp(\xi) = t$, $iw = \alpha - \gamma$ dönüşümleri yapılırsa sırasıyla

$$V\left(\frac{\alpha-\gamma}{i}\right) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} t^{-\gamma}\, v\left(\log t\right) dt, \tag{4.69}$$

$$v\left(\log t\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^{\gamma-\alpha}\, V\left(\frac{\alpha-\gamma}{i}\right) d\alpha \tag{4.70}$$

bulunur. (4.69) eşitliğinde

$$u(t) := t^{-\gamma}\, v\left(\log t\right) \tag{4.71}$$

denirse

$$V\left(\frac{\alpha-\gamma}{i}\right) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} u(t) dt = \widetilde{u}(\alpha) \tag{4.72}$$

elde edilir. Ardından (4.71) bağıntısı göz önünde bulundurularak (4.72) eşitliği (4.70) eşitliğinde kullanılırsa

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^{-\alpha}\, \widetilde{u}(\alpha) d\alpha \tag{4.73}$$

bulunur. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$, $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olmak üzere (4.73) eşitliğinin sağ yanı $p(\alpha)$ ile çarpılıp bölünür ve α yerine $q(\alpha)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{t^{-q(\alpha)} q'(\alpha)}{p(\alpha)} \underbrace{p(\alpha)\widetilde{u}\big(q(\alpha)\big)}_{{}_p\mathfrak{M}_q\left[u(t)\right](\alpha)} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{t^{-q(\alpha)} q'(\alpha)}{p(\alpha)} \underbrace{{}_p\mathfrak{M}_q\left[u(t)\right](\alpha)}_{\widehat{u}\left(q(\alpha)\right)} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{t^{-q(\alpha)} q'(\alpha) \widehat{u}\big(q(\alpha)\big)}{p(\alpha)} d\alpha \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki bu aşağıdaki 4.66. Tanımı verir.

Tanım 4.66. $u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$, $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ve $t > 0$ olmak üzere genelleştirilmiş Mellin ve ters Mellin dönüşümleri sırasıyla

$$
{}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)\Big](\alpha) = \widehat{u}\big(q(\alpha)\big) := p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(t)dt,
$$

$$
{}_p\mathfrak{M}_q^{-1}\Big[\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\Big](t) = u(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{t^{-q(\alpha)}q'(\alpha)\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)}{p(\alpha)}d\alpha
$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 4.67. Yukarıdaki tanımda $p(\alpha)=q(\alpha)=1$ olarak alınırsa klasik Mellin ve ters Mellin dönüşümleri elde edilir.

Teorem 4.68. Bir $u(t)$ fonksiyonu her kapalı $[a,b] \subset (0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli olsun. O zaman $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$, $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ve $\gamma_1 < \Re(q(\alpha)) < \gamma_2$ için $u(t)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Mellin dönüşümü mevcuttur.

İspat. Genelleştirilmiş Mellin dönüşümün tanımından

$$
\Big|{}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)\Big](\alpha)\Big| = \Big|p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(t)dt\Big| \leq \Big|p(\alpha)\Big|\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}\Big|u(t)\Big|dt
$$

elde edilir. Buradan $\gamma_1 < \Re(q(\alpha)) < \gamma_2$ için

$$
\Big|{}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)\Big](\alpha)\Big| \leq \Big|p(\alpha)\Big|\int\limits_0^1 t^{\gamma_1-1}\Big|u(t)\Big|dt + \Big|p(\alpha)\Big|\int\limits_1^\infty t^{\gamma_2-1}\Big|u(t)\Big|dt < \infty
$$

sonucuna ulaşılır. ■

4.3.1. İntegral Dönüşümünün Temel Özellikleri

Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe $u, v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$, $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ve $t > 0$ olarak alınacaktır. Ayrıca genelleştirilmiş Mellin ve ters Mellin dönüşümleri sırasıyla ${}_p\mathfrak{M}_q$ ve ${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$ sembolleri ile gösterilecektir.

Teorem 4.69. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$
{}_p\mathfrak{M}_q\Big[\lambda_1 u(t) + \lambda_2 v(t)\Big](\alpha) = \lambda_1\, {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)\Big](\alpha) + \lambda_2\, {}_p\mathfrak{M}_q\Big[v(t)\Big](\alpha)
$$

lineerlik özelliğine sahiptir.

İspat. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü kullanılarak

$$\begin{aligned}{}_p\mathfrak{M}_q\Big[\lambda_1 u(t)+\lambda_2 v(t)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}\big(\lambda_1 u(t)+\lambda_2 v(t)\big)dt\\ &= \lambda_1\, p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(t)dt+\lambda_2\, p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}v(t)dt\\ &= \lambda_1\,{}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)\Big](\alpha)+\lambda_2\,{}_p\mathfrak{M}_q\Big[v(t)\Big](\alpha)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.70. $a>0$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$${}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(at)\Big](\alpha)=\frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)}{a^{q(\alpha)}}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü kullanılarak

$$\begin{aligned}{}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(at)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(at)dt, \quad (at=x \text{ dönüşümü ile})\\ &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{a}\right)^{q(\alpha)-1}u(x)\frac{dx}{a}\\ &= \frac{p(\alpha)}{a^{q(\alpha)}}\int\limits_0^\infty x^{q(\alpha)-1}u(x)dx\\ &= \frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)}{a^{q(\alpha)}}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.71. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$${}_p\mathfrak{M}_q\Big[t^a u(t)\Big](\alpha)=\widehat{u}\big(q(\alpha)+a\big) \tag{4.74}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü kullanılarak

$$\begin{aligned}{}_p\mathfrak{M}_q\Big[t^a u(t)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}t^a u(t)dt\\ &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)+a-1}u(t)dt\\ &= \widehat{u}\big(q(\alpha)+a\big)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.72. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u\left(t^a\right)\Big](\alpha) = \frac{1}{a}\widehat{u}\left(\frac{q(\alpha)}{a}\right) $$

eşitliğini sağlar.

İspat. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü kullanılarak

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u\left(t^a\right)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u\left(t^a\right)dt, \quad (t^a = x \text{ dönüşümü ile}) \\ &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{q(\alpha)-1} u(x)\frac{dx}{ax^{\frac{a-1}{a}}} \\ &= \frac{p(\alpha)}{a}\int\limits_0^\infty x^{\frac{q(\alpha)}{a}-1}u(x)dx \\ &= \frac{1}{a}\widehat{u}\left(\frac{q(\alpha)}{a}\right) \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.73. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u^{(n)}(t)\Big](\alpha) = (-1)^n\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)-n\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-n\big) $$

eşitliğini sağlar.

İspat. $n = 1$ için

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u'(t)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u'(t)dt \\ &= p(\alpha)\lim_{A\to\infty}\left[t^{q(\alpha)-1}u(t)\right]_0^A - (q(\alpha)-1)p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-2}u(t)dt \\ &= -(q(\alpha)-1)p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-2}u(t)dt \\ &= -(q(\alpha)-1)\widehat{u}\big(q(\alpha)-1\big) \\ &= -\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)-1\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-1\big) \end{aligned} $$

elde edilir.

Burada $t \to 0$ ve $t \to \infty$ iken $t^{q(\alpha)-1}u(t) = 0$ olarak kabul edilir. $n = k$ için

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u^{(k)}(t)\Big](\alpha) = (-1)^k \frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)-k\big)} \widehat{u}\big(q(\alpha)-k\big) $$

eşitliği sağlansın. $n = k+1$ için

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q \ \Big[u^{(k+1)}(t)\Big](\alpha) &= {}_p\mathfrak{M}_q \left[\frac{d}{dt}u^{(k)}(t)\right](\alpha) \\ &= (-1)^k (q(\alpha)-1)(q(\alpha)-2)\dots(q(\alpha)-k)p(\alpha)\int_0^\infty t^{q(\alpha)-(k+1)}u'(t)dt \\ &= (-1)^{k+1}(q(\alpha)-1)(q(\alpha)-2)\dots(q(\alpha)-(k+1))p(\alpha)\int_0^\infty t^{q(\alpha)-(k+2)}u(t)dt \\ &= (-1)^{k+1}(q(\alpha)-1)(q(\alpha)-2)\dots(q(\alpha)-(k+1))\widehat{u}\big(q(\alpha)-(k+1)\big) \\ &= (-1)^{k+1}\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)-(k+1)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-(k+1)\big) \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır. Burada belirtilmelidir ki $t \to 0$ ve $t \to \infty$ iken kısmi integrasyondan gelen ilk terimler sıfır olarak kabul edilir. ■

Teorem 4.74. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[t^n u^{(n)}(t)\Big](\alpha) = (-1)^n \frac{\Gamma\big(q(\alpha)+n\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \tag{4.75} $$

eşitliğini sağlar.

İspat. $n = 1$ için

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[tu'(t)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int_0^\infty t^{q(\alpha)}u'(t)dt \\ &= p(\alpha)\lim_{A\to\infty}\left[t^{q(\alpha)}u(t)\right]_0^A - q(\alpha)p(\alpha)\int_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(t)dt \\ &= -q(\alpha)p(\alpha)\int_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(t)dt \\ &= -q(\alpha)\widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \\ &= -\frac{\Gamma\big(q(\alpha)+1\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \end{aligned} $$

elde edilir.

Burada $t \to 0$ ve $t \to \infty$ iken $t^{q(\alpha)} u(t) = 0$ olarak kabul edilir. $n = k$ için

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[t^k u^{(k)}(t)\Big](\alpha) = (-1)^k \frac{\Gamma\big(q(\alpha)+k\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)\big)} \widehat{u}\big(q(\alpha)\big) $$

eşitliği sağlansın. $n = k+1$ için

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[t^{k+1} u^{(k+1)}(t)\Big](\alpha) &= {}_p\mathfrak{M}_q\Big[t\frac{d}{dt} t^k u^{(k)}(t)\Big](\alpha) - {}_p\mathfrak{M}_q\Big[k t^k u^{(k)}(t)\Big](\alpha) \\ &= -q(\alpha)(-1)^k q(\alpha)(q(\alpha)+1)(q(\alpha)+2)\ldots(q(\alpha)+k-1)\widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \\ &\quad - k(-1)^k q(\alpha)(q(\alpha)+1)(q(\alpha)+2)\ldots(q(\alpha)+k-1)\widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \\ &= (-1)^{k+1} q(\alpha)(q(\alpha)+1)(q(\alpha)+2)\ldots(q(\alpha)+k)\widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{\Gamma\big(q(\alpha)+k+1\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)\big)} \widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır. Burada belirtilmelidir ki $t \to 0$ ve $t \to \infty$ iken kısmi integrasyondan gelen ilk terimler sıfır olarak kabul edilir. ■

Teorem 4.75. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left(t\frac{d}{dt}\right)^n u(t)\Big](\alpha) = (-1)^n \big(q(\alpha)\big)^n \, \widehat{u}\big(q(\alpha)\big) $$

eşitliğini sağlar.

İspat. $n = 1$ için

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left(t\frac{d}{dt}\right) u(t)\Big](\alpha) &= p(\alpha) \int_0^\infty t^{q(\alpha)-1} \left(t\frac{d}{dt}\right) u(t)dt \\ &= -q(\alpha)\widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \end{aligned} $$

elde edilir. Burada $t \to 0$ ve $t \to \infty$ iken $t^{q(\alpha)} u(t) = 0$ olarak kabul edilir. $n = k$ için

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left(t\frac{d}{dt}\right)^k u(t)\Big](\alpha) = (-1)^k \big(q(\alpha)\big)^k \, \widehat{u}\big(q(\alpha)\big) $$

eşitliği sağlansın. $n = k+1$ için

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left(t\frac{d}{dt}\right)^{k+1} u(t)\Big](\alpha) &= {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left(t\frac{d}{dt}\right)\left(t\frac{d}{dt}\right)^k u(t)\Big](\alpha) \\ &= (-1)^k \big(q(\alpha)\big)^k p(\alpha) \int_0^\infty t^{q(\alpha)-1} \left(t\frac{d}{dt}\right) u(t)dt \\ &= (-1)^{k+1} \big(q(\alpha)\big)^{k+1} \, \widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır. Burada belirtilmelidir ki $t \to 0$ ve $t \to \infty$ iken kısmi integrasyondan gelen ilk terimler sıfır olarak kabul edilir. ■

Teorem 4.76. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[I_n u(t)\Big](\alpha) = (-1)^n \frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)+n\big)} \widehat{u}\big(q(\alpha)+n\big) $$

eşitliğini sağlar. Burada $I_n u(t) = \underbrace{\int\limits_0^t \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t}_{n \text{ kez}} u(x)dx$ biçimindedir.

İspat. $U(t) = I_n u(t)$ ve $U^{(n)}(t) = u(t)$ olmak üzere $n = 1$ için

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[U'(t) = u(t)\Big](\alpha) &= -\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)-1\big)} \widehat{U}\big(q(\alpha)-1\big) \\ &= -\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)-1\big)} \widehat{I_1 u}\big(q(\alpha)-1\big) \end{aligned} $$

elde edilir. Burada $q(\alpha)$ yerine $q(\alpha)+1$ yazılırsa

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[I_1 u(t)\Big](\alpha) = -\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)+1\big)} \widehat{u}\big(q(\alpha)+1\big) $$

bulunur. $n = k$ için

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[I_k u(t)\Big](\alpha) = (-1)^k \frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)+k\big)} \widehat{u}\big(q(\alpha)+k\big) \tag{4.76} $$

eşitliği sağlansın. $n = k+1$ için

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[U^{(k+1)}(t) = u(t)\Big](\alpha) = {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{d}{dt}U^{(k)}(t) = u(t)\right](\alpha) $$

elde edilir. (4.76) eşitliği gözönünde bulundurulursa

$$ \widehat{u}\big(q(\alpha)\big) = (-1)^{k+1} \frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)-k-1\big)} \widehat{I_{k+1} u}\big(q(\alpha)-k-1\big) $$

bulunur. Ardından $q(\alpha)$ yerine $q(\alpha)+k+1$ yazılırsa

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[I_{k+1} u(t)\Big](\alpha) = (-1)^{k+1} \frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)+k+1\big)} \widehat{u}\big(q(\alpha)+k+1\big) $$

sonucuna ulaşılır. ∎

Teorem 4.77. Konvolüsyonların ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[(u * v)(t)\Big](\alpha) = \frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}\big(q(\alpha)\big)}{p(\alpha)}, \tag{4.77} $$

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[(u \circ v)(t)\Big](\alpha) = \frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}\big(1-q(\alpha)\big)}{p(\alpha)} \tag{4.78} $$

biçimindedir.

İspat. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü ve konvolüsyon kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{M}_q\Big[(u*v)(t)\Big](\alpha) &= {}_p\mathfrak{M}_q\left[\int\limits_0^\infty u(\xi)v\left(\frac{t}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}\right](\alpha)\\
&= p(\alpha)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(\xi)v\left(\frac{t}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}dt, \qquad \left(\frac{t}{\xi}=\eta \text{ dönüşümü ile}\right)\\
&= p(\alpha)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (\xi\eta)^{q(\alpha)-1}u(\xi)v(\eta)\frac{d\xi}{\xi}\xi d\eta\\
&= p(\alpha)\int\limits_0^\infty \xi^{q(\alpha)-1}u(\xi)d\xi\int\limits_0^\infty \eta^{q(\alpha)-1}v(\eta)d\eta
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ yanı $p(\alpha)$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{M}_q\Big[(u*v)(t)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty \xi^{q(\alpha)-1}u(\xi)d\xi\,\frac{p(\alpha)}{p(\alpha)}\int\limits_0^\infty \eta^{q(\alpha)-1}v(\eta)d\eta\\
&= \frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}\big(q(\alpha)\big)}{p(\alpha)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yine ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü ve konvolüsyon kullanılırsa

$$\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{M}_q\Big[(u\circ v)(t)\Big](\alpha) &= {}_p\mathfrak{M}_q\left[\int\limits_0^\infty u(t\xi)v(\xi)d\xi\right](\alpha)\\
&= p(\alpha)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(t\xi)v(\xi)d\xi dt, \qquad \big(t\xi=\eta \text{ dönüşümü ile}\big)\\
&= p(\alpha)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{q(\alpha)-1}u(\eta)v(\xi)d\xi\frac{d\eta}{\xi}\\
&= p(\alpha)\int\limits_0^\infty \eta^{q(\alpha)-1}u(\eta)d\eta\int\limits_0^\infty \xi^{-q(\alpha)}v(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ yanı $p(\alpha)$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{M}_q\Big[(u\circ v)(t)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int\limits_0^\infty \eta^{q(\alpha)-1}u(\eta)d\eta\,\frac{p(\alpha)}{p(\alpha)}\int\limits_0^\infty \xi^{-q(\alpha)}v(\xi)d\xi\\
&= \frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}\big(1-q(\alpha)\big)}{p(\alpha)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ∎

Sonuç 4.78. (4.78) eşitliğine ${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$(u\circ v)(t) = {}_p\mathfrak{M}_q^{-1}\left[\frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}\big(1-q(\alpha)\big)}{p(\alpha)}\right](t)$$

bulunur. Konvolüsyon tanımı kullanılırsa

$$\int_0^\infty u(t\xi)v(\xi)d\xi = {}_p\mathfrak{M}_q^{-1}\left[\frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}\big(1-q(\alpha)\big)}{p(\alpha)}\right](t)$$

elde edilir. Burada $u(t)=\exp(-t)$ seçilir ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\mathfrak{L}\Big[v(\xi)\Big](t) = {}_p\mathfrak{M}_q^{-1}\Big[\Gamma\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}\big(1-q(\alpha)\big)\Big](t)$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.79. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$${}_p\mathfrak{M}_q\left[t^\lambda\int_0^\infty \tau^\eta u(t\tau)v(\tau)d\tau\right](\alpha) = \frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)+\lambda\big)\widehat{v}\big(\eta+1-q(\alpha)-\lambda\big)}{p(\alpha)} \qquad (4.79)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü kullanılarak

$$\begin{aligned}
&{}_p\mathfrak{M}_q\left[t^\lambda\int_0^\infty \tau^\eta u(t\tau)v(\tau)d\tau\right](\alpha)\\
&= p(\alpha)\int_0^\infty\int_0^\infty t^{q(\alpha)-1}t^\lambda\tau^\eta u(t\tau)v(\tau)d\tau dt, \quad (t\tau = x \text{ dönüşümü ile})\\
&= p(\alpha)\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{x}{\tau}\right)^{q(\alpha)+\lambda-1}\tau^\eta u(x)v(\tau)d\tau\frac{dx}{\tau}\\
&= p(\alpha)\int_0^\infty x^{q(\alpha)+\lambda-1}u(x)dx\int_0^\infty \tau^{\eta-q(\alpha)-\lambda}v(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ yanı $p(\alpha)$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}
{}_p\mathfrak{M}_q\left[t^\lambda\int_0^\infty \tau^\eta u(t\tau)v(\tau)d\tau\right](\alpha) &= p(\alpha)\int_0^\infty x^{q(\alpha)+\lambda-1}u(x)dx\,\frac{p(\alpha)}{p(\alpha)}\int_0^\infty \tau^{\eta-q(\alpha)-\lambda}v(\tau)d\tau\\
&= \frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)+\lambda\big)\widehat{v}\big(\eta+1-q(\alpha)-\lambda\big)}{p(\alpha)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.80. (Parseval Özelliği) ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)v(t)\Big](\alpha) = \frac{1}{p(\alpha)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \widehat{u}\big(q(s)\big)q'(s)\widehat{v}\big(q(\alpha)-q(s)\big)ds $$

eşitliğini sağlar.

İspat. ${}_p\mathfrak{M}_q$ ve ${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$ dönüşümleri kullanılarak

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)v(t)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int\limits_0^{\infty} t^{q(\alpha)-1}u(t)v(t)dt \\ &= \frac{p(\alpha)}{p(\alpha)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^{q(\alpha)-1}t^{-q(s)}v(t)\widehat{u}\big(q(s)\big)q'(s)dsdt \\ &= \frac{1}{p(\alpha)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \widehat{u}\big(q(s)\big)q'(s)\widehat{v}\big(q(\alpha)-q(s)\big)ds \end{aligned} \tag{4.80} $$

sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.81. (4.80) eşitliğinde $p(\alpha) = q(\alpha) = 1$ ve $q(s) = s$ olarak seçilirse

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)v(t)\Big](\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \widehat{u}(s)\widehat{v}(1-s)ds $$

elde edilir.

4.3.2. Bazı Elementer Fonksiyonların İntegral Dönüşümü

Örnek 4.82. $a > 0$ olmak üzere $\exp(-at)$ fonksiyonunun ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\exp(-at)\Big](\alpha) = \frac{p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{a^{q(\alpha)}}, \quad \big(\Re(q(\alpha)) > 0\big) \tag{4.81} $$

şeklindedir. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümün tanımından

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\exp(-at)\Big](\alpha) &= p(\alpha)\int\limits_0^{\infty} t^{q(\alpha)-1}\exp(-at)dt, \quad \big(at = x \text{ dönüşümü ile}\big) \\ &= p(\alpha)\int\limits_0^{\infty}\Big(\frac{x}{a}\Big)^{q(\alpha)-1}\exp(-x)\frac{dx}{a} \\ &= \frac{p(\alpha)}{a^{q(\alpha)}}\int\limits_0^{\infty} x^{q(\alpha)-1}\exp(-x)dx \\ &= \frac{p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{a^{q(p)}} \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.83. $\frac{1}{\exp(t)-1}$ fonksiyonunun ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{\exp(t)-1}\right](\alpha)=p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\zeta\big(q(\alpha)\big),\quad \big(\Re(q(\alpha))>1\big) \tag{4.82}$$

biçimindedir. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümünde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-nt\right)=\frac{1}{\exp(t)-1}$$

formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{\exp(t)-1}\right](\alpha) &= p(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}t^{q(\alpha)-1}\exp\left(-nt\right)dt \\ &= p(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{n^{q(\alpha)}} \\ &= p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\zeta\big(q(\alpha)\big) \end{aligned}$$

bulunur. Burada kullanılan $\zeta(\cdot)$ fonksiyonu Riemann zeta fonksiyonudur (bkz. Bölüm 3.).

Örnek 4.84. $\frac{2}{\exp(2t)-1}$ fonksiyonunun ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{2}{\exp(2t)-1}\right](\alpha)=2^{1-q(\alpha)}p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\zeta\big(q(\alpha)\big),\quad \big(\Re(q(\alpha))>1\big) \tag{4.83}$$

şeklindedir. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{2}{\exp(2t)-1}\right](\alpha) &= 2p(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}t^{q(\alpha)-1}\exp\left(-2nt\right)dt \\ &= 2^{1-q(\alpha)}p(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{n^{q(\alpha)}} \\ &= 2^{1-q(\alpha)}p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\zeta\big(q(\alpha)\big) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.85. $\frac{1}{\exp(t)+1}$ fonksiyonunun ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{\exp(t)+1}\right](\alpha)=\left(1-2^{1-q(\alpha)}\right)p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\zeta\big(q(\alpha)\big),\quad \big(\Re(q(\alpha))>1\big)$$

biçimindedir. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$\left(\frac{1}{\exp(t)-1}-\frac{1}{\exp(t)+1}\right)=\frac{2}{\exp(2t)-1}$$

eşitliğine uygulanırsa

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{\exp(t)+1}\right](\alpha) = {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{\exp(t)-1}\right](\alpha) - {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{2}{\exp(2t)-1}\right](\alpha) $$

bulunur. (4.82) ve (4.83) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{\exp(t)+1}\right](\alpha) = \big(1-2^{1-q(\alpha)}\big)\, p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\zeta\big(q(\alpha)\big) $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.86. $\frac{1}{1+t}$ fonksiyonunun ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{1+t}\right](\alpha) = p(\alpha)B(q(\alpha), 1-q(\alpha)), \quad \big(0<\Re(q(\alpha))<1\big) $$

biçimindedir. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümün tanımından

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{1+t}\right](\alpha) &= p(\alpha)\int_0^\infty t^{q(\alpha)-1}\left(\frac{1}{1+t}\right)dt, \quad \left(t=\frac{x}{1-x} \text{ dönüşümü ile}\right) \\ &= p(\alpha)\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{q(\alpha)-1}(1-x)\frac{dx}{(1-x)^2} \\ &= p(\alpha)\int_0^1 x^{q(\alpha)-1}(1-x)^{-q(\alpha)}dx \\ &= p(\alpha)B\big(q(\alpha), 1-q(\alpha)\big) \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.87. $n>0$ olmak üzere $\frac{1}{(1+t)^n}$ fonksiyonunun ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$ {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{(1+t)^n}\right](\alpha) = p(\alpha)B\big(q(\alpha), n-q(\alpha)\big), \quad \big(0<\Re(q(\alpha))<n\big) $$

şeklindedir. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümün tanımından

$$ \begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{1}{(1+t)^n}\right](\alpha) &= p(\alpha)\int_0^\infty t^{q(\alpha)-1}\frac{1}{(1+t)^n}dt, \quad \left(t=\frac{x}{1-x} \text{ dönüşümü ile}\right) \\ &= p(\alpha)\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{q(\alpha)-1}(1-x)^n\frac{dx}{(1-x)^2} \\ &= p(\alpha)\int_0^1 x^{q(\alpha)-1}(1-x)^{n-q(\alpha)-1}dx \\ &= p(\alpha)B\big(q(\alpha), n-q(\alpha)\big) \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.88. $\cos(nt)$ ve $\sin(nt)$ fonksiyonlarının ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümleri sırasıyla

$$\begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\cos(nt)\Big](\alpha) &= \frac{p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\cos\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right)}{n^{q(\alpha)}}, \\ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\sin(nt)\Big](\alpha) &= \frac{p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\sin\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right)}{n^{q(\alpha)}} \end{aligned}$$

biçimindedir. (4.81) eşitliğinde $a = in$ seçilirse

$$\begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\exp(-int)\Big](\alpha) &= {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\cos(nt) - i\sin(nt)\Big](\alpha) \\ &= \frac{p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{(in)^{q(\alpha)}} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $i^{-q(\alpha)} = \exp\left(-\frac{iq(\alpha)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right)$ formülü kullanılırsa

$${}_p\mathfrak{M}_q\Big[\cos(nt) - i\sin(nt)\Big](\alpha) = \frac{p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{n^{q(\alpha)}}\left(\cos\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right)\right)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\cos(nt)\Big](\alpha) &= \frac{p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\cos\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right)}{n^{q(\alpha)}}, \\ {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\sin(nt)\Big](\alpha) &= \frac{p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\sin\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right)}{n^{q(\alpha)}} \end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır.

4.3.3. Dönüşümün Kesirli Operatörlere Uygulanması

Teorem 4.89. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integralin ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$${}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](\alpha) = \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)-\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)+\varepsilon\big), \quad (\Re(q(\alpha)+\varepsilon) < 1)$$

şeklindedir.

İspat. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integral kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_0^t (t-\tau)^{\varepsilon-1}u(\tau)d\tau, \quad (\tau = t\xi \text{ dönüşümü ile}) \\ &= \frac{t^{\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon)}\int_0^1 (1-\xi)^{\varepsilon-1}u(t\xi)d\xi \\ &= \frac{t^{\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon)}\int_0^{\infty} u(t\xi)v(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{4.84}$$

bulunur.

Burada v fonksiyonu

$$v(t)=\begin{cases}(1-t)^{\varepsilon-1}, & 0\leq t<1\\ 0 & , \ t\geq 1\end{cases}$$

biçiminde olup bu fonksiyona ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\widehat{v}\big(q(\alpha)\big) &= p(\alpha)\int_0^\infty t^{q(\alpha)-1}v(t)dt\\ &= p(\alpha)\int_0^1 t^{q(\alpha)-1}(1-t)^{\varepsilon-1}dt\\ &= p(\alpha)B\big(q(\alpha),\varepsilon\big)\\ &= p(\alpha)\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)\Gamma\big(\varepsilon\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)+\varepsilon\big)}\end{aligned} \tag{4.85}$$

elde edilir. Ardından (4.79), (4.84) ve (4.85) eşitlikleri kullanılarak pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integralin ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$\begin{aligned}{}_p\mathfrak{M}_q\Big[\big(I_{0+}^{\varepsilon}u\big)(t)\Big](\alpha) &= {}_p\mathfrak{M}_q\left[\frac{t^{\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon)}\int_0^\infty u(t\xi)v(\xi)d\xi\right](\alpha)\\ &= \frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)+\varepsilon\big)\widehat{v}\big(1-q(\alpha)-\varepsilon\big)}{p(\alpha)\Gamma(\varepsilon)}\\ &= \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)-\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)+\varepsilon\big)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.90. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli türevin ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$${}_p\mathfrak{M}_q\Big[\big(D_{0+}^{\varepsilon}u\big)(t)\Big](\alpha)=\frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)+\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-\varepsilon\big), \quad (\Re(q(\alpha))<1)$$

$$(m-1<\Re(\varepsilon)<m,\ m\in\mathbb{N})$$

biçimindedir.

İspat. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integral ve türev sırasıyla

$$\big(I_{0+}^{\varepsilon}u\big)(t)=\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_0^t (t-\tau)^{\varepsilon-1}u(\tau)d\tau,$$

$$\big(D_{0+}^{\varepsilon}u\big)(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\frac{d^m}{dt^m}\int_0^t (t-\tau)^{m-\varepsilon-1}u(\tau)d\tau$$

şeklindedir.

Bu iki kesirli operatör arasında

$$\begin{aligned}\left(D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) &= \frac{d^m}{dt^m}\frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{m-\varepsilon-1}u(\tau)d\tau \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left(I_{0+}^{m-\varepsilon}u\right)(t)\end{aligned}$$

biçiminde ilişki vardır. Burada

$$v(t) := \left(I_{0+}^{m-\varepsilon}u\right)(t) \tag{4.86}$$

denirse

$$\left(D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) = v^{(m)}(t)$$

elde edilir ve ardından eşitliğin her iki yanına ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}{}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left(D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](\alpha) &= {}_p\mathfrak{M}_q\Big[v^{(m)}(t)\Big](\alpha) \\ &= (-1)^m\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)-m\big)}\widehat{v}\big(q(\alpha)-m\big) \\ &= \frac{\Gamma\big(m+1-q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{v}\big(q(\alpha)-m\big)\end{aligned} \tag{4.87}$$

bulunur. (4.86) eşitliğine ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\widehat{v}\big(q(\alpha)\big) &= {}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left(I_{0+}^{m-\varepsilon}u\right)(t)\Big](\alpha) \\ &= \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)-m+\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)+m-\varepsilon\big)\end{aligned} \tag{4.88}$$

elde edilir. (4.88) eşitliğinde $q(\alpha)$ yerine $q(\alpha)-m$ yazılır ve (4.87) eşitliğinde kullanılırsa

$${}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left(D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](\alpha) = \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)+\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-\varepsilon\big)$$

sonucuna ulaşılır. ∎

Teorem 4.91. Pozitif reel eksen üzerinde sol Caputo kesirli türevin ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$${}_p\mathfrak{M}_q\Big[\left({}^cD_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](\alpha) = \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)+\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-\varepsilon\big), \quad (\Re(q(\alpha))<1) \tag{4.89}$$

$$(m-1<\Re(\varepsilon)<m,\ m\in\mathbb{N})$$

biçimindedir.

İspat. Pozitif reel eksen üzerinde sol R-L kesirli integral ve Caputo kesirli türev sırasıyla

$$\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\varepsilon-1}u(\tau)d\tau,$$

$$\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{m-\varepsilon-1}u^{(m)}(\tau)d\tau$$

şeklindedir. Burada

$$v(t) := u^{(m)}(t) \tag{4.90}$$

denirse bu iki kesirli operatör arasında

$$\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\varepsilon)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{m-\varepsilon-1}v(\tau)d\tau = \left(I_{0+}^{m-\varepsilon}v\right)(t)$$

biçiminde ilişki olup eşitliğin her iki yanına ${}_{p}\mathfrak{M}_{q}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} {}_{p}\mathfrak{M}_{q}\Big[\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](\alpha) &= {}_{p}\mathfrak{M}_{q}\Big[\left(I_{0+}^{m-\varepsilon}v\right)(t)\Big](\alpha) \\ &= \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)-m+\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{v}\big(q(\alpha)+m-\varepsilon\big) \end{aligned} \tag{4.91}$$

bulunur. (4.90) eşitliğine ${}_{p}\mathfrak{M}_{q}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \widehat{v}\big(q(\alpha)\big) &= {}_{p}\mathfrak{M}_{q}\Big[u^{(m)}(t)\Big](\alpha) \\ &= (-1)^{m}\frac{\Gamma\big(q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)-m\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-m\big) \\ &= \frac{\Gamma\big(m+1-q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-m\big) \end{aligned} \tag{4.92}$$

elde edilir. (4.92) eşitliğinde $q(\alpha)$ yerine $q(\alpha)+m-\varepsilon$ yazılır ve (4.91) eşitliğinde kullanılırsa

$${}_{p}\mathfrak{M}_{q}\Big[\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](\alpha) = \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)+\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-\varepsilon\big)$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.92. ${}_{p}\mathfrak{M}_{q}$ dönüşümü

$${}_{p}\mathfrak{M}_{q}\Big[t^{\varepsilon}\left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)\Big](\alpha) = \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)-\varepsilon\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)\big) \tag{4.93}$$

$$\big(m-1<\Re(\varepsilon)<m,\ m\in\mathbb{N}\big)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. (4.74) ve (4.89) eşitlikleri birlikte değerlendirilerek istenilen sonuca ulaşılır. ■

4.3.4. Çeşitli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Örnek 4.93. $k = 0, 1, \dots, m$ için $A_k \in \mathbb{R}$ ve $\Re(\varepsilon) > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \, t^{\varepsilon+k} \left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon+k} y\right)(t) = u(t)$$

kesirli diferansiyel denklemine ${}_{p}\mathfrak{M}_{q}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \, {}_{p}\mathfrak{M}_{q}\Big[t^{\varepsilon+k} \left({}^{c}D_{0+}^{\varepsilon+k} y\right)(t)\Big](\alpha) = {}_{p}\mathfrak{M}_{q}\Big[u(t)\Big](\alpha)$$

elde edilir. (4.93) formülü göz önünde bulundurulursa

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \, \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)-\varepsilon-k\big)} \widehat{y}\big(q(\alpha)\big) = \widehat{u}\big(q(\alpha)\big)$$

bulunur. Burada

$$\widehat{h}_{\varepsilon}\big(1-q(\alpha)\big) := \sum_{k=0}^{m} A_k \, \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)-\varepsilon-k\big)}$$

denirse

$$\widehat{y}\big(q(\alpha)\big)\widehat{h}_{\varepsilon}\big(1-q(\alpha)\big) = \widehat{u}\big(q(\alpha)\big)$$

elde edilir. $\widehat{y}\big(q(\alpha)\big)$ yalnız bırakılırsa

$$\widehat{y}\big(q(\alpha)\big) = \frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)}{\widehat{h}_{\varepsilon}\big(1-q(\alpha)\big)}$$

bulunur. Burada

$$\widehat{v}_{\varepsilon}\big(1-q(\alpha)\big) := \frac{1}{\widehat{h}_{\varepsilon}\big(1-q(\alpha)\big)}$$

denirse

$$\widehat{y}\big(q(\alpha)\big) = \widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}_{\varepsilon}\big(1-q(\alpha)\big)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ yanı $p(\alpha)$ ile çarpılıp bölünür ve konvolüsyon teoremi (4.78) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widehat{y}\big(q(\alpha)\big) &= p(\alpha)\frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}_{\varepsilon}\big(1-q(\alpha)\big)}{p(\alpha)} \\
&= p(\alpha) \, {}_{p}\mathfrak{M}_{q}\Big[u(t) \circ v_{\varepsilon}(t)\Big](\alpha) \\
&= p(\alpha) \, {}_{p}\mathfrak{M}_{q}\left[\int_{0}^{\infty} u(t\tau)v_{\varepsilon}(\tau)d\tau\right](\alpha)
\end{aligned}$$

bulunur.

Ardından eşitliğin her iki yanına ${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = p(\alpha)\int\limits_0^\infty u(t\tau)v_\varepsilon(\tau)d\tau$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.94. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\Re(\varepsilon) > 0$ olmak üzere

$$t^{\varepsilon+1}\left({}^cD_{0+}^{\varepsilon+1}y\right)(t) + \lambda\, t^\varepsilon \left({}^cD_{0+}^{\varepsilon}y\right)(t) = u(t)$$

kesirli diferansiyel denklemine ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$${}_p\mathfrak{M}_q\Big[t^{\varepsilon+1}\left({}^cD_{0+}^{\varepsilon+1}y\right)(t)\Big](\alpha) + \lambda\, {}_p\mathfrak{M}_q\Big[t^{\varepsilon}\left({}^cD_{0+}^{\varepsilon}y\right)(t)\Big](\alpha) = {}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)\Big](\alpha)$$

elde edilir. (4.93) formülü göz önünde bulundurulursa

$$\frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)\big(1-q(\alpha)+\lambda-\varepsilon-1\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)-\varepsilon\big)}\widehat{y}\big(q(\alpha)\big) = \widehat{u}\big(q(\alpha)\big)$$

bulunur. Ardından $\widehat{y}\big(q(\alpha)\big)$ yalnız bırakılırsa

$$\widehat{y}\big(q(\alpha)\big) = \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)-\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)\big(1-q(\alpha)+\lambda-\varepsilon-1\big)}\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)$$

elde edilir. Burada

$$\widehat{v}_{\varepsilon,\lambda}\big(1-q(\alpha)\big) := \frac{\Gamma\big(1-q(\alpha)-\varepsilon\big)}{\Gamma\big(1-q(\alpha)\big)\big(1-q(\alpha)+\lambda-\varepsilon-1\big)} \tag{4.94}$$

denirse

$$\widehat{y}\big(q(\alpha)\big) = \widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}_{\varepsilon,\lambda}\big(1-q(\alpha)\big)$$

bulunur. Eşitliğin sağ yanı $p(\alpha)$ ile çarpılıp bölünür ve konvolüsyon teoremi (4.78) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widehat{y}\big(q(\alpha)\big) &= p(\alpha)\frac{\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}_{\varepsilon,\lambda}\big(1-q(\alpha)\big)}{p(\alpha)}\\ &= p(\alpha)\,{}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)\circ v_{\varepsilon,\lambda}(t)\Big](\alpha)\\ &= p(\alpha)\,{}_p\mathfrak{M}_q\left[\int\limits_0^\infty u(t\tau)v_{\varepsilon,\lambda}(\tau)d\tau\right](\alpha)\end{aligned}$$

elde edilir ve ardından ${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = p(\alpha)\int\limits_0^\infty u(t\tau)v_{\varepsilon,\lambda}(\tau)d\tau \tag{4.95}$$

bulunur.

Burada $t > 1$ için $v_{\varepsilon,\lambda}(t) = 0$ olduğu aşağıdaki adımlar ile gösterilir. (4.94) eşitliği

$$\widehat{v}_{\varepsilon,\lambda}\big(q(\alpha)\big) := \frac{\Gamma\big(q(\alpha)-\varepsilon\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)\big)\big(q(\alpha)+\lambda-\varepsilon-1\big)} \tag{4.96}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\widehat{v}_1\big(q(\alpha)\big) := \frac{\Gamma\big(q(\alpha)-\varepsilon\big)}{\Gamma\big(q(\alpha)\big)} \tag{4.97}$$

ve

$$\widehat{v}_2\big(q(\alpha)\big) := \frac{1}{\big(q(\alpha)+\lambda-\varepsilon-1\big)} \tag{4.98}$$

denirse

$$\widehat{v}_{\varepsilon,\lambda}\big(q(\alpha)\big) = \widehat{v}_1\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}_2\big(q(\alpha)\big) \tag{4.99}$$

elde edilir. (4.97) ve (4.98) eşitliklerine ${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$v_1(t) = \begin{cases} \frac{t^{-\varepsilon}(1-t)^{\varepsilon-1}}{p(\alpha)\Gamma(\varepsilon)}, & 0 < t < 1 \\ 0 & , \quad t > 1 \end{cases} \tag{4.100}$$

ve

$$v_2(t) = \begin{cases} \frac{t^{-\varepsilon-1+\lambda}}{p(\alpha)}, & 0 < t < 1 \\ 0 & , \quad t > 1 \end{cases} \tag{4.101}$$

bulunur. (4.99) eşitliği $p(\alpha)$ ile çarpılıp bölünür ve konvolüsyon teoremi (4.77) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widehat{v}_{\varepsilon,\lambda}\big(q(\alpha)\big) &= p(\alpha)\frac{\widehat{v}_1\big(q(\alpha)\big)\widehat{v}_2\big(q(\alpha)\big)}{p(\alpha)} \\ &= p(\alpha)\,{}_p\mathfrak{M}_q\Big[v_1(t) * v_2(t)\Big](\alpha) \\ &= p(\alpha)\,{}_p\mathfrak{M}_q\left[\int_0^\infty v_1\left(\frac{t}{\tau}\right) v_2(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right](\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir ve ardından ${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$v_{\varepsilon,\lambda}(t) = p(\alpha)\int_0^\infty v_1\left(\frac{t}{\tau}\right) v_2(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

bulunur ve (4.100), (4.101) eşitliklerinden $t > 1$ için $v_{\varepsilon,\lambda}(t) = 0$ olduğu görülür. Böylece (4.95) eşitliği

$$y(t) = p(\alpha)\int_0^1 u(t\tau)v_{\varepsilon,\lambda}(\tau)d\tau \tag{4.102}$$

olur.

(4.96) eşitliğine ${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$v_{\varepsilon,\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{q'(\alpha)}{p(\alpha)} \frac{\Gamma\big(q(\alpha)-\varepsilon\big)t^{-q(\alpha)}}{\Gamma\big(q(\alpha)\big)\big(q(\alpha)+\lambda-1-\varepsilon\big)} d\alpha$$

elde edilir. Burada $q(\alpha) = \varepsilon + 1 - \lambda$ ve $q_k(\alpha) = \varepsilon - k$, $k \in \mathbb{N}_0$ kutup noktalardır. Cauchy Rezidü Teoremi [66] kullanılırsa

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon,\lambda}(t) = &\operatorname{Res}\left[\frac{q'(\alpha)}{p(\alpha)} \frac{\Gamma\big(q(\alpha)-\varepsilon\big)t^{-q(\alpha)}}{\Gamma\big(q(\alpha)\big)\big(q(\alpha)+\lambda-1-\varepsilon\big)}, q(\alpha) = \varepsilon+1-\lambda\right] \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{Res}\left[\frac{q'(\alpha)}{p(\alpha)} \frac{\Gamma\big(q(\alpha)-\varepsilon\big)t^{-q(\alpha)}}{\Gamma\big(q(\alpha)\big)\big(q(\alpha)+\lambda-1-\varepsilon\big)}, q(\alpha) = \varepsilon-k\right] \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$v_{\varepsilon,\lambda}(t) = \frac{A(\varepsilon,\lambda)}{p(\alpha)} \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\varepsilon+1-\lambda)} t^{\lambda-\varepsilon-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B(\varepsilon,k)}{p(\alpha)} \frac{t^{k-\varepsilon}(-1)^k}{(\lambda-k-1)\Gamma(\varepsilon-k)k!} \tag{4.103}$$

elde edilir. Burada

$$A(\varepsilon,\lambda) := \lim_{q(\alpha)\to\varepsilon+1-\lambda} q'(\alpha)$$

ve

$$B(\varepsilon,k) := \lim_{q(\alpha)\to\varepsilon-k} q'(\alpha)$$

biçimindedir. Böylece (4.103) eşitliği (4.102) eşitliğinde kullanılırsa

$$y(t) = \int_0^1 u(t\tau)\left(\frac{A(\varepsilon,\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\varepsilon+1-\lambda)}\tau^{\lambda-\varepsilon-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B(\varepsilon,k)\tau^{k-\varepsilon}(-1)^k}{(\lambda-k-1)\Gamma(\varepsilon-k)k!}\right)d\tau \tag{4.104}$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 4.95. Eğer (4.104) eşitliğinde $A(\varepsilon,\lambda) = B(\varepsilon,k) = 1$ seçilirse

$$y(t) = \int_0^1 u(t\tau)\left(\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\varepsilon+1-\lambda)}\tau^{\lambda-\varepsilon-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau^{k-\varepsilon}(-1)^k}{(\lambda-k-1)\Gamma(\varepsilon-k)k!}\right)d\tau$$

sonucuna ulaşılır ki bu klasik Mellin dönüşümünün çözümü ile çakışır [35].

Örnek 4.96. λ sabit sayı olmak üzere kısmi diferansiyel denklem ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} &t^2u_{tt} + tu_t + u_{rr} = 0, \quad 0 \le t < \infty,\ 0 < r < 1, \\ &u(t,0) = 0,\ u(t,1) = \begin{cases} \lambda,\ 0 \le t \le 1 \\ 0,\ t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde verilsin.

Bir $u(t,r)$ fonksiyonunun t parametresine göre ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü

$$\widehat{u}\big(q(\alpha),r\big)=p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(t,r)dt$$

biçimindedir. ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü verilen kısmi diferansiyel denkleme uygulanırsa

$${}_p\mathfrak{M}_q\Big[t^2u_{tt}\Big](\alpha)+{}_p\mathfrak{M}_q\Big[tu_t\Big](\alpha)+{}_p\mathfrak{M}_q\Big[u_{rr}\Big](\alpha)=0$$

elde edilir. (4.75) formülü göz önünde bulundurulursa

$$\frac{d^2\,\widehat{u}\big(q(\alpha),r\big)}{dr^2}+\big(q(\alpha)\big)^2\,\widehat{u}\big(q(\alpha),r\big)=0 \tag{4.105}$$

bulunur ve ardından verilen sınır koşullarına ${}_p\mathfrak{M}_q$ dönüşümü uygulanırsa

$$\widehat{u}\big(q(\alpha),0\big)=0\quad \text{ve}\quad \widehat{u}\big(q(\alpha),1\big)=\lambda p(\alpha)\int\limits_0^1 t^{q(\alpha)-1}dt=\frac{\lambda p(\alpha)}{q(\alpha)} \tag{4.106}$$

elde edilir. Buradan (4.106) eşitlikleri göz önünde bulundurularak (4.105) diferansiyel denkleminin çözümü

$$\widehat{u}\big(q(\alpha),r\big)=\frac{\lambda p(\alpha)}{q(\alpha)\sin\big(q(\alpha)\big)}\sin\big(q(\alpha)r\big),\quad \big(0<\Re(q(\alpha))<1\big) \tag{4.107}$$

olarak bulunur. (4.107) eşitliğine ${}_p\mathfrak{M}_q^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa

$$u(t,r)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{t^{-q(\alpha)}q'(\alpha)}{q(\alpha)}\frac{\sin\big(q(\alpha)r\big)}{\sin\big(q(\alpha)\big)}d\alpha \tag{4.108}$$

elde edilir. Burada $0<\Re\big(q(\alpha)\big)=\gamma<\pi$ aralığında $\widehat{u}\big(q(\alpha),r\big)$ analitiktir. (4.108) eşitliği $q(\alpha)=n\pi$, $n\in\mathbb{N}$ değerlerinde basit kutuplara sahiptir ve bu kutup noktalar sağ yarı düzlemde yarım daire biçimli bir çevrenin içinde yer alır. Dolayısıyla $t>1$ için Cauchy Rezidü Teoremi [66] kullanılırsa

$$\begin{aligned}u(t,r)&=2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda}{2\pi i}\frac{t^{-n\pi}A(n)}{n\pi}\frac{\sin(n\pi r)}{\sin(n\pi)}\sin(n\pi)\\&=\frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A(n)}{n}(-1)^nt^{-n\pi}\sin(n\pi r)\end{aligned} \tag{4.109}$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$A(n):=\lim_{q(\alpha)\to n\pi}q'(\alpha)$$

biçimindedir.

Sonuç 4.97. Eğer (4.109) eşitliğinde $A(n)=1$ seçilirse

$$u(t,r)=\frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^nt^{-n\pi}\sin(n\pi r)$$

bulunur ki bu klasik Mellin dönüşümünün çözümü ile çakışır [18].

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Fourier, Fourier sinüs, Fourier kosinüs, Laplace ve Mellin integral dönüşümlerinin genelleştirilmiş formları tanıtılmış ve onların potansiyel özellikleri verilmiştir. Ayrıca, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli operatörlerin ve bazı elementer fonksiyonların genelleştirilmiş integral dönüşümleri hesaplanarak sunulmuştur. Son olarak bu integral dönüşümleri yardımıyla çeşitli adi, kısmi ve kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş Fourier, Fourier sinüs, Fourier kosinüs, Laplace ve Mellin integral dönüşümleri literatürde bulunan diğer bir çok integral dönüşümünden daha genel bir forma sahiptir. Bunu göstermek amacıyla bu çalışmada tanıtılan integral dönüşümleri ile literatürde bulunan diğer integral dönüşümleri arasındaki ilişkiler aşağıda sunulmuştur.

- ${}_p\mathfrak{F}_q$, ${}_p^s\mathfrak{F}_q$ ve ${}_p^c\mathfrak{F}_q$ dönüşümleri ile literatürde yer alan diğer dönüşümler arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur.

  (2.1) ile verilen α-mertebeden kesirli Fourier dönüşümü arasındaki ilişki:

$$ {}_1\mathfrak{F}_{\frac{1}{\alpha}}\Big[u(t)\Big](w) = \left(\mathcal{F}_\alpha u\right)(w). $$

  (2.2) ile verilen α-mertebeden kesirli Fourier dönüşümü arasındaki ilişki:

$$ {}_1\mathfrak{F}_1\Big[u(t)\Big](w) = F_1\left\{u(t)\right\}. $$

  (2.3) ile verilen α-mertebeden kesirli Fourier dönüşümü arasındaki ilişki:

$$ {}_1\mathfrak{F}_{\frac{1}{\alpha}}\Big[u(t)\Big](w) = \mathfrak{F}_\alpha[u](w). $$

  (2.4) ile verilen μ-mertebeden kesirli Fourier dönüşümü arasındaki ilişki:

$$ {}_1\mathfrak{F}_{\frac{\rho}{\mu}}\Big[u(t)\Big](w) = \Omega_\mu[u](w). $$

  (2.5) ve (2.6) ile verilen kesirli Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri arasındaki ilişkiler:

$$ {}_1^s\mathfrak{F}_1\Big[u(t)\Big](w) = \hat{f}_s^1(w), $$
$$ {}_1^c\mathfrak{F}_1\Big[u(t)\Big](w) = \hat{f}_c^1(w). $$

- $\mathfrak{L}_n$ dönüşümü ile literatürde yer alan diğer dönüşümler arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur.

  (2.7) ile verilen Sumudu dönüşümü arasındaki ilişki:

$$ s\mathfrak{L}_{-1}\Big[u(t)\Big](s) = \mathscr{S}\big[u(t)\big]. $$

(2.8) ile verilen N-dönüşümü arasındaki ilişki:

$$\mathfrak{L}_1\Big[u(\lambda t)\Big](s) = N\left(u\right).$$

(2.9) ile verilen Elzaki dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s^3\mathfrak{L}_{-1}\Big[u(t)\Big](s) = E\big[u(t)\big].$$

(2.10) ile verilen Aboodh dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s^{-1}\mathfrak{L}_1\Big[u(t)\Big](s) = A\big[u(t)\big].$$

(2.11) ile verilen Kashuri-Fundo dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s^2\mathfrak{L}_{-2}\Big[u(t)\Big](s) = \mathcal{K}\big[u(t)\big](s).$$

(2.12) ile verilen Atangana-Kilicman dönüşümü arasındaki ilişki:

$$\mathfrak{L}_1\Big[t^n u(t)\Big](s) = M_n\big[u(t)\big](s).$$

(2.13) ile verilen $\mathbb{M}$-dönüşümü arasındaki ilişki:

$$\mathfrak{L}_1\Big[\frac{u(\lambda t)}{(t^m+\lambda^m)^\rho}\Big](s) = \mathbb{M}_{\rho,m}\big[u(t)\big](s,\lambda).$$

(2.14) ile verilen α-integral Laplace dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\mathfrak{L}_{\frac{1}{\alpha}}\Big[u(t)\Big](s) = \mathfrak{L}_\alpha\big[u(t)\big](s).$$

(2.15) ile verilen Kamal dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s^2\mathfrak{L}_{-1}\Big[u(t)\Big](s) = K\big[u(t)\big].$$

(2.16) ile verilen ZZ dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s\mathfrak{L}_1\Big[u(\lambda t)\Big](s) = H\left\{u(t)\right\}.$$

(2.17) ile verilen Mahgoub dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s\mathfrak{L}_1\Big[u(t)\Big](s) = M\big[u(t)\big].$$

(2.18) ile verilen G-dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s^{2+\beta}\mathfrak{L}_{-1}\Big[u(t)\Big](s) = G\big(u\big).$$

(2.19) ile verilen Mohand dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s^2\mathfrak{L}_1\Big[u(t)\Big](s) = M\big[u(t)\big].$$

(2.20) ile verilen Sadik dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s^{1-\alpha-\beta}\mathfrak{L}_{\alpha}\Big[u(t)\Big](s) = S\big[u(t)\big].$$

(2.21) ile verilen HY dönüşümü arasındaki ilişki:

$$\mathfrak{L}_{2}\Big[u(t)\Big](s) = HY\left\{u(t)\right\}.$$

(2.22) ile verilen Sawi dönüşümü arasındaki ilişki:

$$\mathfrak{L}_{-1}\Big[u(t)\Big](s) = S\big[u(t)\big].$$

(2.23) ile verilen Shedu dönüşümü arasındaki ilişki:

$$\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{1-n}\mathfrak{L}_{1}\Big[u(t)\Big]\left(\frac{s}{\lambda}\right) = \mathbb{S}\big[u(t)\big].$$

(2.25) ile verilen ARA dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s\mathfrak{L}_{1}\Big[t^{n-1}u(t)\Big](s) = \mathcal{G}_{n}\big[u(t)\big](s).$$

(2.26) ile verilen Gupta dönüşümü arasındaki ilişki:

$$s^{-3}\mathfrak{L}_{1}\Big[u(t)\Big](s) = \dot{R}\left\{u(t)\right\}.$$

(2.27) ile verilen Jafari dönüşümü arasındaki ilişki:

$$p(s)\mathfrak{L}_{1}\Big[u(t)\Big](q(s)) = T\left\{u(t); s\right\}.$$

(2.24) ile verilen Upadhyaya dönüşümü arasındaki ilişki:

$$\kappa\mathfrak{L}_{1}\Big[u(\lambda t)\Big](s) = U\left\{u(t); \kappa, s, \lambda\right\}.$$

Burada $a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, f_j$ kompleks sabitler ve $j = 1, 2, \ldots, 6$ için m_j, r_j pozitif tamsayılar olmak üzere κ, s ve λ değerleri

$$\kappa = \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_1} a_j z_1^j\right)^{m_1}}{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_2} b_j z_2^j\right)^{m_2}}, \quad s = \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_3} c_j z_3^j\right)^{m_3}}{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_4} d_j z_4^j\right)^{m_4}}, \quad \lambda = \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_5} e_j z_5^j\right)^{m_5}}{\left(\sum\limits_{j=0}^{r_6} f_j z_6^j\right)^{m_6}}$$

biçimindedir.

- ${}_{p}\mathfrak{M}_{q}$ dönüşümü ile literatürde yer alan diğer dönüşümler arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur.

(2.28) ile verilen modifiye Mellin dönüşümü arasındaki ilişki:

$${}_{\alpha}\mathfrak{M}_{\alpha}\Big[u(t)\Big](\alpha) = M_{u}^{m}\left(\alpha\right).$$

(2.29) ile verilen genelleştirilmiş Mellin dönüşümü arasındaki ilişki:

$$ {}_1\mathfrak{M}_{s_\alpha}\Big[u(t)\Big](\alpha) = \mathcal{M}_\alpha\left(u(t), s_\alpha\right). $$

(2.30) ile verilen genelleştirilmiş Mellin dönüşümü arasındaki ilişki:

$$ {}_1\mathfrak{M}_{n\alpha}\Big[u(t)\Big](\alpha) = \mathscr{M}_n\left\{u(t);\alpha\right\}. $$

İlerleyen çalışmalarda, benzer tanımlamalarla çift katlı integral dönüşümleri için yeni genelleştirmeler verilebilir, bu genelleştirmelerin temel özellikleri incelenebilir ve bu dönüşümler çeşitli diferansiyel denklem içeren problemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Abel, N.H. (1881). Solution de Quelques Problemesa L'aide D'intégrales Définites, *Grondahl, Christiania, Norway*, 16-18.

[2] Aboodh, K.S. (2013). The new integral transform "Aboodh Transform", *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9(1), 35-43.

[3] Aggarwal, S., Gupta, A.R., Sharma, S.D., Chauhan, R. ve Sharma, N. (2019). Mahgoub transform (Laplace-Carson transform) of error function, *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science (IJLTEMAS)*, 8(4), 92-98.

[4] Ahmadi, S.A.P. ve Ahmadi, S.F.P. (2020). New integral transform "AF Transform" and system of integro-differential equations, *Tamap Journal of Mathematics and Statistics*. https://doi.org/10.29371/2020.16.SI-TAMAP-SAP002

[5] Ahmadi, S.A.P., Hosseinzadeh, H. ve Cherati, A.Y. (2019). A new integral transform for solving higher order linear ordinary Laguerre and Hermite differential equations, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 5(142), 1-7. https://doi.org/10.1007/s40819-019-0712-1

[6] Ali, I. ve Kalla, S. (1999). A generalized Hankel transform and its use for solving certain partial differential equations, *The ANZIAM Journal*, 41(1), 105-117. https://doi.org/10.1017/S0334270000011061

[7] Al-Omari, S. (2021). Estimates and properties of certain q-Mellin transform on generalized q-calculus theory, *Advances in Difference Equations*, 2021(1), 1-15. https://doi.org/10.1186/s13662-021-03391-z

[8] Al-Omari, S.K.Q. ve Kılıçman, A. (2013). On modified Mellin transform of generalized functions, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 1-6. https://doi.org/10.1155/2013/539240

[9] Altın, A. (2011). *Uygulamalı Matematik*, Gazi Kitapevi, Ankara.

[10] Andrews, G.E., Askey, R. ve Roy, R. (1999). *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Andrews, L.C. ve Shivamoggi, B.K. (1988). *Integral Transforms for Engineers*, SPIE Press, New York.

[12] Atangana, A. ve Kılıçman, A. (2013). A novel integral operator transform and its application to some FODE and FPDE with some kind of singularities, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1-7. https://doi.org/10.1155/2013/531984

[13] Balcı, M. (2008). *Analiz 1*, Balcı Yayınları, Ankara.

[14] Beyer, H. ve Kempfle, S. (1995). Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 75(8), 623-635. https://doi.org/10.1002/zamm.19950750820

[15] Bracewell, R.N. (2000). *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw Hill Education, Singapore.

[16] Dattu, K.U. (2018). New integral transform: fundamental properties, investigations and applications, *IAETSD Journal For Advanced Research In Applied Sciences*, 5(4), 534-539.

[17] Davies, B. (2002). *Integral Transforms and Their Applications*, Springer Science & Business Media, New York.

[18] Debnath, L. ve Bhatta, D. (2015). *Integral Transforms and Their Applications*, CRC Press, New York.

[19] Durakovic, N., Grbic, T., Rapajic, S., Medic, S. ve Buhmiler, S. (2018). g-Mellin transform, *IEEE 16th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics*, 000075–000080. https://doi.org/10.1109/SISY.2018.8524866

[20] Eldabe, N.T., El-Shahed, M. ve Shawkey, M. (2004). An extension of the finite Hankel transform, *Applied Mathematics and Computation*, 151(3), 713–717. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00372-2

[21] Elzaki, T.M. (2011). The new integral transform "Elzaki Transform", *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7(1), 57-64.

[22] Elzaki, T.M., Elzaki, S.M. ve Elnour, E.A. (2012). On the new integral transform "Elzaki Transform" fundamental properties investigations and applications, *Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical*, 4(1), 1-13.

[23] Erdoğan, E., Kocabaş, S. ve Dernek, A.N. (2019). Some results on the generalized Mellin transforms and applications, *Konuralp Journal of Mathematics*, 7(1), 175-181.

[24] Gaxiola, O.G. ve Santiago, J.A. (2012). An α-Mellin transform and some of its applications, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(48), 2353-2361.

[25] González-Gaxiola, O. ve Santiago, J.A. (2012). An α-Mellin transform and some of its applications, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(45-48), 2353-2361.

[26] Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F. ve Rogosin, S.V. (2020). *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer.

[27] Gupta, R., Gupta, R. ve Verma, D. (2020). Propounding a new integral transform: Gupta transform with applications in science and engineering, *International Journal of Scientific Research in Multidisciplinary Studies*, 6(3), 14-19.

[28] Jafari, H. (2021). A new general integral transform for solving integral equations, *Journal of Advanced Research*, 32, 133-138. https://doi.org/10.1016/j.jare.2020.08.016

[29] Jumarie, G. (2008). Fourier's transform of fractional order via Mittag-Leffler function and modified Riemann-Liouville derivative, *Journal Applied & Informatics*, 26(5), 1101-1121

[30] Kamal, A. ve Sedeeg, H. (2016). The new integral transform "Kamal Transform", *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 11(4), 451-458.

[31] Kashuri, A. ve Fundo, A. (2013). A new integral transform, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 8(1), 27-43.

[32] Kazem, S. (2013). Exact solution of some linear fractional differential equations by Laplace transform, *International Journal of Nonlinear Science*, 16(1), 3-11.

[33] Kempfle, S. ve Gaul, L. (1996). Global solutions of fractional linear differential equations, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 76, 571-572.

[34] Khan, Z.H. ve Khan, W.A. (2008). N-transform-properties and applications, *NUST Journal of Engineering Sciences*, 1(1), 127-133

[35] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. ve Trujillo, J.J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies.

[36] Kim, H. (2017). On the form and properties of an integral transform with strength in integral transforms, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 102(11), 2831-2844. https://doi.org/10.17654/MS102112831

[37] Kim, H. (2017). The intrinsic structure and properties of Laplace-typed integral transforms, *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 1-8. https://doi.org/10.1155/2017/1762729

[38] Kumar, V. (2020). On a generalized fractional Fourier transform, *Palestine Journal of Mathematics*, 9(2), 903-907.

[39] Lacroix, S.F. (1819). *Traité Du Calcul Différentiel Et Du Calcul Intégral*, Ve Courcier.

[40] Lin, S.D. ve Lu, C.H. (2013). Laplace transform for solving some families of fractional differential equations and its applications, *Advances in Difference Equations*, 137, 1-9. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-137

[41] Luchko, Y., Martinez, H. ve Trujillo, J. (2008). Fractional Fourier transform and some of its applications, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 11(4), 457-470.

[42] Mahgoub, M.A.M. (2016). The new integral transform Mahgoub transform, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 11(4), 391-398.

[43] Mahor, T.C., Mishra, R. ve Jain, R. (2020). Fractionalization of Fourier sine and Fourier cosine transforms and their applications, *International Journal of Scientific & Technology Research*, 9(4), 1720-1725.

[44] Maitama, S. ve Zhao, W. (2019). New integral transform: Shedu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations, *International Journal of Analysis and Applications*, 17(2), 167-190.

[45] Medina, G.D., Ojeda, N.R., Pereira, J.H. ve Romero, L.G. (2016). A new α-integral Laplace transform, *Asian Journal of Current Engineering and Maths*, 5(5), 59-62.

[46] Mohand, M. ve Mahgoub, M.A. (2017). The new integral transform "Mohand Transform", *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 12(2), 113-120.

[47] Mohand, M. ve Mahgoub, M.A. (2019). The new integral transform "Sawi Transform", *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 14(1), 81-87.

[48] Oldham, K., Myland, J. ve Spanier, J. (2009). *An Atlas of Functions*, Springer Science Business Media, New York.

[49] Patra, B. (2018). *An Introduction to Integral Transforms*, CRC Press, Sri Lanka.

[50] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic Press, New York.

[51] Poularikas, A.D. (2010). *Transforms and Applications*, CRC Press, New York. https://doi.org/10.1201/9781315218915

[52] Romero, L.G, Cerutti, R.A. ve Luque, L.L. (2011). A new fractional Fourier transform and convolution products, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 66(4), 397-408.

[53] Saadeh, R., Qazza, A. ve Burqan, A. (2020). A new integral transform: ARA transform and its properties and applications, *Symmetry*, 12(925), 397-408. https://doi.org/10.3390/sym12060925

[54] Shaikh, S.L. (2018). Introducing a new integral transform: Sadik Transform, *American International Journal of Research in Science, Technology, Engineering & Mathematics*, 22(1), 100-102.

[55] Saha, M. ve Singh, M.M.P. (2015). Generalized Laplace-Mellin integral transformation, *Mampi Saha International Journal of Engineering Research and Applications*, 5(5), 71-76.

[56] Samko, S.G., Kilbas, A.A. ve Marichev, O.I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publication, New York.

[57] Sastry, S.S. (2009). *Advanced Engineering Mathematics*, PHI Learning Pvt. Ltd., New Delhi.

[58] Srivastava, H.M. ve Manocha, H.L. (1984). *A Treatise On Generating Functions*, Halsted Press Wiley, New York.

[59] Srivastava, H.M., Luo, M. ve Raina, R.K. (2015). A new integral transform and its applications, *Acta Mathematica Scientia*, 35(6), 1386-1400. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(15)30061-8

[60] Stein, E.M. ve Shakarchi, R. (2007). *Fourier Analysis: An Introduction (Princeton Lectures in Analysis I)*, Princeton University Press, Princeton.

[61] Upadhyaya, L.M. (2019). Introducing the Upadhyaya integral transform, *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 38(1), 471-510. https://doi.org/10.5958/2320-3226.2019.00051.1

[62] Yang, X.J. (2016). A new integral transform method for solving steady heat-transfer problem, *Thermal Science*, 20(3), 639-642. https://doi.org/10.2298/TSCI16S3639Y

[63] Yang, J., Sarkar, T.K. ve Antonik, P. (2007). Applying the Fourier-modified Mellin transform (FMMT) to Doppler-distorted waveforms, *Digital Signal Processing*, 17(6), 1030-1039.

[64] Yürekli, O. (1992). A theorem on the generalized Stieltjes transform and its applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168(1), 63-71. https://doi.org/10.1016/0022-247X(92)90189-K

[65] Zafar, Z. (2016). ZZ transform method, *International Journal of Advanced Engineering and Global Technology*, 4(1), 1605-1611.

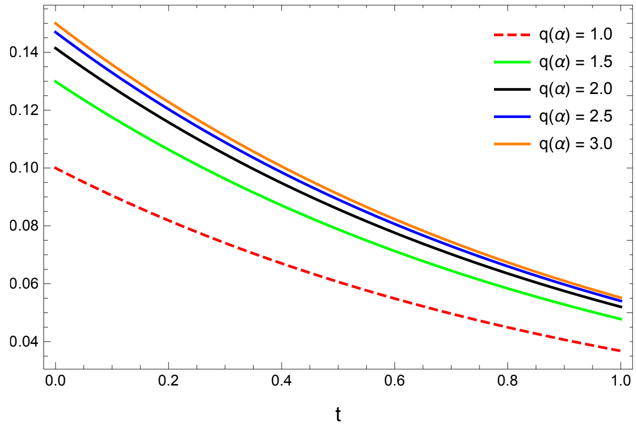
[66] Zill, D.G. ve Shanahan, P.D. (2003). *A First Course in Complex Analysis with Applications*, Jones and Bartlett Publishers, London.

[67] Zwicke, P.E. ve Kiss, I. (1983). A new implementation of the Mellin transform and its application to radar classification of ships, *IEEE Transactions On Pattern Analysis And Machine Intelligence*, Pami-5(2), 191-199. https://doi.org/10.1109/TPAMI.1983.4767371

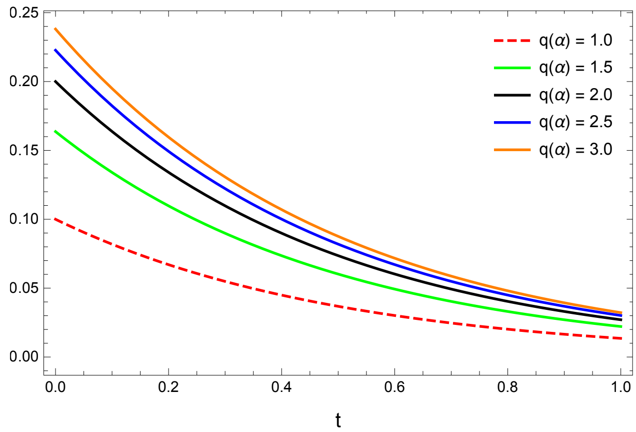
[68] Watugala, G.K. (1993). Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, *Integrated Education*, 24(1),35-43. https://doi.org/10.1080/0020739930240105

EKLER

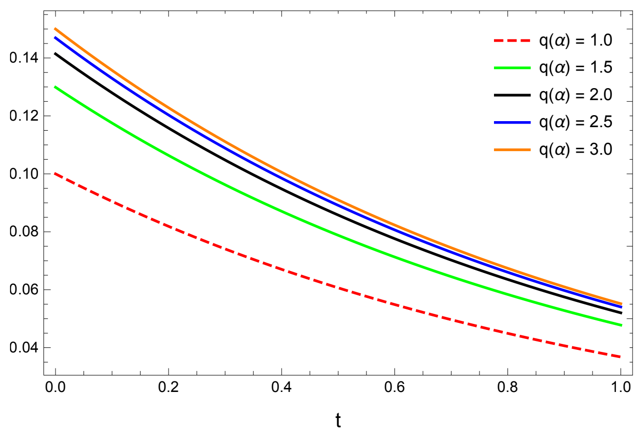
EK-1



(a) $L = 10$ ve $R = 10$ için yaklaşık davranışlar

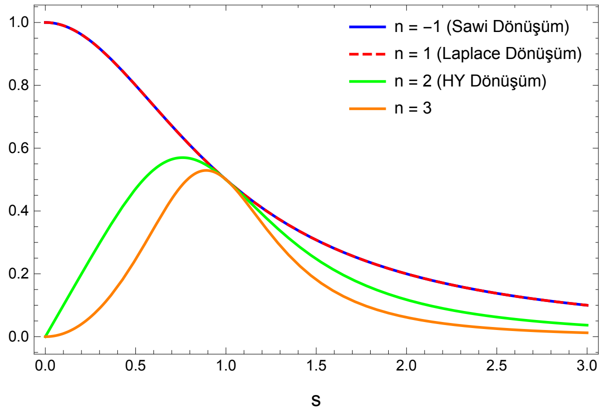


(b) $L = 10$ ve $R = 20$ için yaklaşık davranışlar

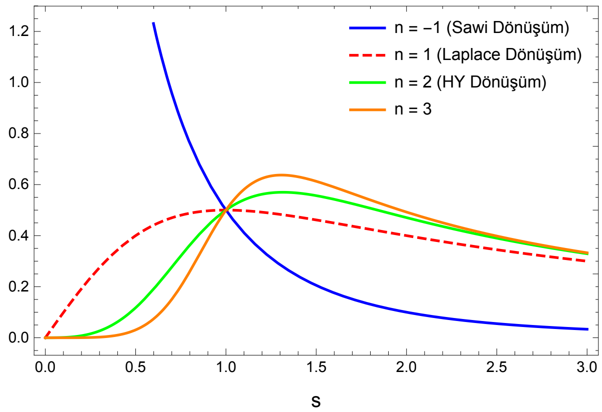


(c) $L = 10$ ve $R = 30$ için yaklaşık davranışlar

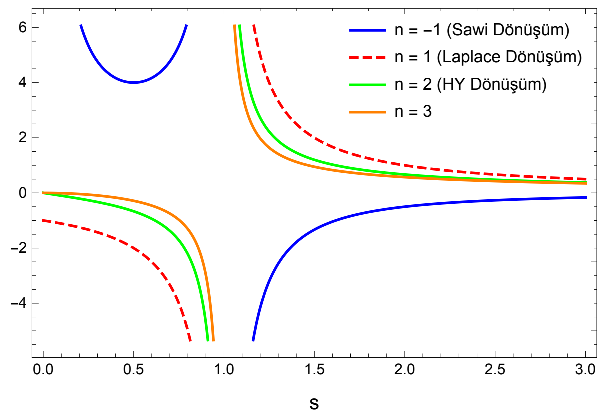
Şekil 6.1. ${}_p\mathfrak{F}_q$ Dönüşümü Yardımıyla Elde Edilen (4.39) ve (4.40) Çözümlerinin Farklı $q(\alpha)$ Değerlerine Karşılık Gelen Davranışları



(a) $\mathfrak{L}_n\Big[\sin(t)\Big](s)$ dönüşümü

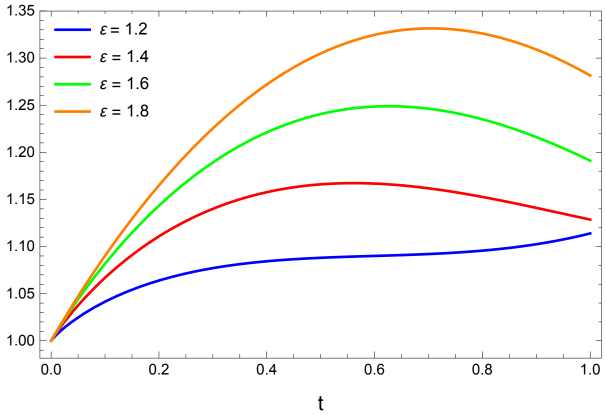


(b) $\mathfrak{L}_n\Big[\cos(t)\Big](s)$ dönüşümü

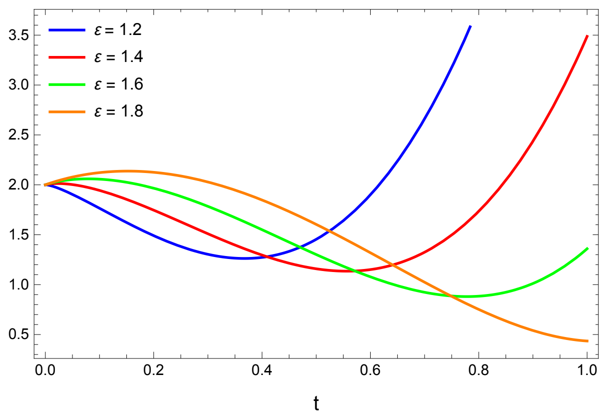


(c) $\mathfrak{L}_n\Big[\exp(t)\Big](s)$ dönüşümü

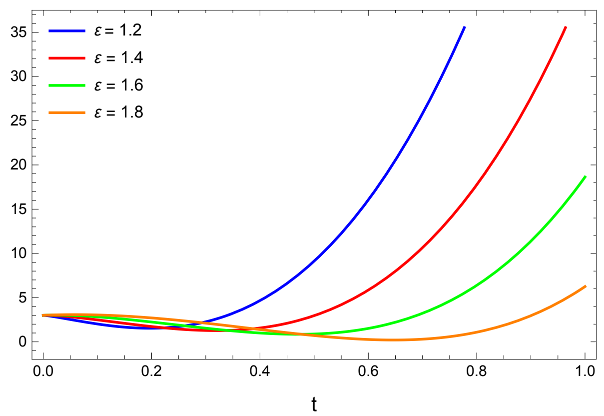
Şekil 6.2. Bazı Elementer Fonksiyonların $\mathfrak{L}_n$ Dönüşümlerinin Farklı n Değerlerine Karşılık Gelen Davranışları



(a) (4.64) için yaklaşık davranışlar



(b) (4.65) için yaklaşık davranışlar



(c) (4.66) için yaklaşık davranışlar

Şekil 6.3. $\mathfrak{L}_n$ Dönüşümü Yardımıyla Elde Edilen (4.64), (4.65) ve (4.66) Çözümlerinin Farklı ε Değerlerine Karşılık Gelen Davranışları

EK-2

Tablo 6.1. Genelleştirilmiş Fourier Dönüşümü Tablosu

$u(t)$	${}_p\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) = {}_p\widehat{u}_q(w) = p(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw^{q(\alpha)}t\right) u(t)dt$	Koşullar
$\exp\left(-at^2\right)$	$p(\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{-w^{2q(\alpha)}}{4a}\right)$	$a > 0$
$\exp\left(-a\lvert t\rvert\right)$	$p(\alpha)\left(\frac{2a}{a^2+w^{2q(\alpha)}}\right)$	$a > 0$
$H\left(a - \lvert t\rvert\right)$	$2p(\alpha)\left(\frac{\sin\left(aw^{q(\alpha)}\right)}{w^{q(\alpha)}}\right)$	
$\frac{H(t)}{\exp(at)}$	$\frac{p(\alpha)}{a-iw^{q(\alpha)}}$	$a > 0$
$\delta(t)$	$p(\alpha)$	
$\sin(at)$	$-p(\alpha)i\pi\Big(\delta\left(-w^{q(\alpha)} - a\right) - \delta\left(-w^{q(\alpha)} + a\right)\Big)$	
$\cos(at)$	$p(\alpha)\pi\Big(\delta\left(-w^{q(\alpha)} - a\right) + \delta\left(-w^{q(\alpha)} + a\right)\Big)$	
c : constant	$2p(\alpha)c\pi\delta\left(w^{q(\alpha)}\right)$	
$(u * v)(t)$	$\frac{{}_p\widehat{u}_q(w)\ {}_p\widehat{v}_q(w)}{p(\alpha)}$	
$u'(t)$	$\left(-iw^{q(\alpha)}\right)\ {}_p\widehat{u}_q(w)$	
$u''(t)$	$\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^2\ {}_p\widehat{u}_q(w)$	
$u^{(n)}(t)$	$\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^n\ {}_p\widehat{u}_q(w)$	$n \in \mathbb{N}$
$\left(I_+^\varepsilon u\right)(t)$	$\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{-\varepsilon}\ {}_p\widehat{u}_q(w)$	$0 < \Re(\varepsilon) < 1$
$\left(D_+^\varepsilon u\right)(t)$	$\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon}\ {}_p\widehat{u}_q(w)$	$\Re(\varepsilon) > 0$
$\left({}^cD_+^\varepsilon u\right)(t)$	$\left(-iw^{q(\alpha)}\right)^{\varepsilon}\ {}_p\widehat{u}_q(w)$	$\Re(\varepsilon) > 0$

Tablo 6.2. Genelleştirilmiş Fourier Sinüs Dönüşümü Tablosu

$u(t)$	${}_{p}^{s}\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) = {}_{p}^{s}\widehat{u}_q(w) = p(\alpha)\int\limits_0^\infty \sin\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt$	Koşullar
$\exp(-at)$	$p(\alpha)\left(\frac{w^{q(\alpha)}}{a^2+w^{2q(\alpha)}}\right)$	$a>0$
$t\exp(-at)$	$p(\alpha)\left(\frac{2aw^{q(\alpha)}}{\left(a^2+w^{2q(\alpha)}\right)^2}\right)$	$a>0$
$\frac{t}{a^2+t^2}$	$\frac{p(\alpha)\pi\exp\left(-aw^{q(\alpha)}\right)}{2}$	$a>0$
$H(a-t)$	$p(\alpha)\left(\frac{1-\cos\left(aw^{q(\alpha)}\right)}{w^{q(\alpha)}}\right)$	$a>0$
$u'(t)$	$-w^{q(\alpha)}\ {}_{p}^{c}\widehat{u}_q(w)$	
$u''(t)$	$-w^{2q(\alpha)}\ {}_{p}^{s}\widehat{u}_q(w)+w^{q(\alpha)}p(\alpha)u(0)$	

Tablo 6.3. Genelleştirilmiş Fourier Kosinüs Dönüşümü Tablosu

$u(t)$	${}_{p}^{c}\mathfrak{F}_q\Big[u(t)\Big](w) = {}_{p}^{c}\widehat{u}_q(w) = p(\alpha)\int\limits_0^\infty \cos\left(w^{q(\alpha)}t\right)u(t)dt$	Koşullar
$\exp(-at)$	$p(\alpha)\left(\frac{a}{a^2+w^{2q(\alpha)}}\right)$	$a>0$
$t\exp(-at)$	$p(\alpha)\left(\frac{a^2-w^{2q(\alpha)}}{\left(a^2+w^{2q(\alpha)}\right)^2}\right)$	$a>0$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{p(\alpha)\pi\exp\left(-aw^{q(\alpha)}\right)}{2a}$	$a>0$
$H(a-t)$	$p(\alpha)\left(\frac{\sin\left(aw^{q(\alpha)}\right)}{w^{q(\alpha)}}\right)$	$a>0$
$u'(t)$	$w^{q(\alpha)}\ {}_{p}^{s}\widehat{u}_q(w)-p(\alpha)u(0)$	
$u''(t)$	$-w^{2q(\alpha)}\ {}_{p}^{c}\widehat{u}_q(w)-p(\alpha)u'(0)$	

Tablo 6.4. Genelleştirilmiş Laplace Dönüşümü Tablosu

$u(t)$	$\mathfrak{L}_n\Big[u(t)\Big](s) = \widehat{u}_n(s) = s^{n-1}\int\limits_0^\infty \exp(-s^n t)u(t)dt$	Koşullar
1	$\frac{1}{s}$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
$\exp(at)$	$\frac{s^{n-1}}{s^n - a}$	$\Re\left(s^n\right) > a$
$\sin(at)$	$\frac{as^{n-1}}{s^{2n}+a^2}$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s^{2n-1}}{s^{2n}+a^2}$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{as^{n-1}}{s^{2n}-a^2}$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
$\cosh(at)$	$\frac{s^{2n-1}}{s^{2n}-a^2}$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
t	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
t^2	$\frac{2}{s^{2n+1}}$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
t^m	$\frac{m!}{s^{mn+1}}$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
$\exp(at)t^m$	$\frac{m!s^{n-1}}{(s^n-a)^{m+1}}$	$\Re\left(s^n\right) > a$
$\exp(at)\sin(bt)$	$\frac{bs^{n-1}}{(s^n-a^2)+b^2}$	$\Re\left(s^n\right) > a$
$\exp(at)\cos(bt)$	$\frac{s^{n-1}(s^n-a)}{(s^n-a)^2+b^2}$	$\Re\left(s^n\right) > a$
$u'(t)$	$s^n\,\widehat{u}_n(s) - s^{n-1}u(0)$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
$u''(t)$	$s^{2n}\,\widehat{u}_n(s) - s^{2n-1}u(0) - s^{n-1}u'(0)$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
$u^{(k)}(t)$	$s^{kn}\,\widehat{u}_n(s) - s^{n-1}\sum\limits_{m=0}^{k-1}(s^n)^{k-1-m}u^{(m)}(0)$	$\Re\left(s^n\right) > 0$
$\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)$	$s^{-\varepsilon n}\,\widehat{u}_n(s)$	$\Re(\varepsilon) > 0$
$\left(D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)$	$s^{\varepsilon n}\,\widehat{u}_n(s) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} s^{nk+n-1}\left[\left(D_{0+}^{\varepsilon-k-1}u\right)(t)\right]_{t=0}$	$\Re(\varepsilon) > 0$
$\left({}^cD_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)$	$s^{\varepsilon n}\,\widehat{u}_n(s) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} s^{\varepsilon n-nk-1}u^{(k)}(0)$	$\Re(\varepsilon) > 0$

Tablo 6.5. Genelleştirilmiş Mellin Dönüşümü Tablosu

$u(t)$	${}_p\mathfrak{M}_q\Big[u(t)\Big](\alpha)=\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)=p(\alpha)\int\limits_0^\infty t^{q(\alpha)-1}u(t)dt$	Koşullar
$\exp(-at)$	$\frac{p(\alpha)\Gamma(q(\alpha))}{a^{q(\alpha)}}$	$\Re(q(\alpha))>0$
$\frac{1}{\exp(t)-1}$	$p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\zeta\big(q(\alpha)\big)$	$\Re(q(\alpha))>1$
$\frac{2}{\exp(2t)-1}$	$2^{1-q(\alpha)}p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\zeta\big(q(\alpha)\big)$	$\Re(q(\alpha))>1$
$\frac{1}{\exp(t)+1}$	$\left(1-2^{1-q(\alpha)}\right)p(\alpha)\Gamma\big(q(\alpha)\big)\zeta\big(q(\alpha)\big)$	$\Re(q(\alpha))>1$
$\frac{1}{1+t}$	$\frac{p(\alpha)\Gamma(q(\alpha))\Gamma(1-q(\alpha))}{\Gamma(1)}$	$0<\Re(q(\alpha))<1$
$\frac{1}{(1+t)^n}$	$\frac{p(\alpha)\Gamma(q(\alpha))\Gamma(n-q(\alpha))}{\Gamma(n)}$	$0<\Re(q(\alpha))<n$
$\cos(kt)$	$\frac{p(\alpha)\Gamma(q(\alpha))}{k^{q(\alpha)}}\cos\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right)$	$\Re(q(\alpha))>0$
$\sin(kt)$	$\frac{p(\alpha)\Gamma(q(\alpha))}{k^{q(\alpha)}}\sin\left(\frac{q(\alpha)\pi}{2}\right)$	$\Re(q(\alpha))>0$
$u'(t)$	$-\frac{\Gamma\left(q(\alpha)\right)}{\Gamma\left(q(\alpha)-1\right)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-1\big)$	$\Re(q(\alpha))>1$
$u''(t)$	$\frac{\Gamma\left(q(\alpha)\right)}{\Gamma\left(q(\alpha)-2\right)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-2\big)$	$\Re(q(\alpha))>2$
$u^{(n)}(t)$	$(-1)^n\frac{\Gamma\left(q(\alpha)\right)}{\Gamma\left(q(\alpha)-n\right)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-n\big)$	$\Re(q(\alpha))>n$
$tu'(t)$	$-\frac{\Gamma(q(\alpha)+1)}{\Gamma(q(\alpha))}\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)$	$\Re(q(\alpha))>0$
$t^2u''(t)$	$\frac{\Gamma(q(\alpha)+2)}{\Gamma(q(\alpha))}\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)$	$\Re(q(\alpha))>0$
$t^nu^{(n)}(t)$	$(-1)^n\frac{\Gamma(q(\alpha)+n)}{\Gamma(q(\alpha))}\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)$	$\Re(q(\alpha))>0$
$\left(t\frac{d}{dt}\right)^2u(t)$	$(q(\alpha))^2\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)$	
$\left(t\frac{d}{dt}\right)^nu(t)$	$(-1)^n(q(\alpha))^n\widehat{u}\big(q(\alpha)\big)$	
$I_nu(t)$	$(-1)^n\frac{\Gamma\left(q(\alpha)\right)}{\Gamma\left(q(\alpha)+n\right)}\widehat{u}\big(q(\alpha)+n\big)$	$\Re(q(\alpha))>0$
$\left(I_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)$	$\frac{\Gamma\left(1-q(\alpha)-\varepsilon\right)}{\Gamma\left(1-q(\alpha)\right)}\widehat{u}\big(q(\alpha)+\varepsilon\big)$	$\Re(q(\alpha)+\varepsilon)<1$
$\left(D_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)$	$\frac{\Gamma\left(1-q(\alpha)+\varepsilon\right)}{\Gamma\left(1-q(\alpha)\right)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-\varepsilon\big)$	$\Re(q(\alpha))<1$
$\left({}^cD_{0+}^{\varepsilon}u\right)(t)$	$\frac{\Gamma\left(1-q(\alpha)+\varepsilon\right)}{\Gamma\left(1-q(\alpha)\right)}\widehat{u}\big(q(\alpha)-\varepsilon\big)$	$\Re(q(\alpha))<1$
$u(t)*v(t)$	$\frac{\widehat{u}\left(q(\alpha)\right)\widehat{v}\left(q(\alpha)\right)}{p(\alpha)}$	
$u(t)\circ v(t)$	$\frac{\widehat{u}\left(q(\alpha)\right)\widehat{v}\left(1-q(\alpha)\right)}{p(\alpha)}$	

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı	Enes ATA
Uyruğu	T.C.
Orcid Numarası	0000-0001-6893-8693

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2015
Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Yılı	2018
Doktora	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Yılı	2024

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler
1. Ata, E. ve Kıymaz, İ.O. (2023). A new generalized Laplace transform and its applications to fractional Bagley-Torvik and fractional harmonic vibration problems, *Miskolc Mathematical Notes*, 24(2), 597-610. https://doi.org/10.18514/MMN.2023.4099
2. Ata, E. ve Kıymaz, İ.O. (2023). New generalized Mellin transform and applications to partial and fractional differential equations, *International Journal of Mathematics and Computer in Engineering*, 1(1), 45-66. https://doi.org/10.2478/ijmce-2023-0004
3. Ata, E. ve Kıymaz, İ.O. New generalized Fourier transforms and their applications to ordinary, partial and fractional differential equations, *Miskolc Mathematical Notes* (Baskıda).