

**T.C.**  
**AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİR STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI**  
**ÖZELLİKLERİ VE GREEN FONKSİYONU**

**Yasemin KUZU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KIRŞEHİR**  
**HAZİRAN 2012**

**T.C.**  
**AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİR STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN BAZI**  
**ÖZELLİKLERİ VE GREEN FONKSİYONU**

**Yasemin KUZU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN:**  
**Prof. Dr. Mahir KADAKAL**

**KIRŞEHİR**  
**HAZİRAN 2012**

## ONAY

### Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. Mahir KADAKAL

Üye

Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

Üye

Yrd. Doç. Dr. Muharrem AKTÜMEN

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../06/2012

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ

## ÖZET

Bu çalışmada, sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville problemi incelenmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın “Giriş” bölümünde, Sturm-Liouville denklemi, matematiksel fizik, Sturm and Liouville ile ilgili bilgiler verilmiştir.

“Literatür özeti” bölümünde özdeğer parametresi içeren lineer diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin genel tarihine ve diğer çalışmalardan elde edilmiş sonuçların kısa bir özetine değinilmiştir.

“Genel Bilgiler” bölümünde tez konumuzla ilgili olan genel bilgilere ve tanımlara yer verilmiştir.

“Bulgular ve Tartışma” bölümünde Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri incelenmiş, asimptotik ifadeler ve Green Fonksiyonu bulunmuştur.

Çalışmamızın sonuncu bölümü olan “Sonuç ve Öneriler” bölümünde ise araştırmamızdan elde edilen sonuçlara ve bu sonuçların önemine yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Sınır değer problemi, Sturm-Liouville teorisi, diferansiyel operatör, özdeğer, özfonksiyon, asimptotik davranış, Green Fonksiyonu

## ABSTRACT

In this study we have examined Sturm-Liouville Problem which has eigenvalue parameter in the boundary conditions.

This study has arranged in 5 chapters, in “The Introduction” chapter, informations related to Sturm-Liouville equation, mathematical physics, Sturm and Liouville has been given.

In “The Literatur” chapter, we have mentioned the general history of boundary value problems for linear differential equations which has eigenvalue parameter and a brief summary of the results obtained from other studies.

In “The General Knowledge” chapter, we have mentioned the general knowledge and definitions about the subject of our thesis.

In “Finding and Discussion” chapter, we have examined eigenvalue of Sturm-Liouville Problem and obtained asymptotic formulas and Green’s function.

In “Conclusions and Recommendations” chapter, we have mentioned possible solutions obtained from the study and important of these solutions.

**Key Words:** Boundary value problem, Sturm-Liouville Theory, Differential operator, eigenvalue, eigenfunction, asymptotic behavior, Green’s Function.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmamın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Mahir KADAKAL' a minnettarlığımı sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen bölümümüzün değerli hocalarına şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan kıymetli anne ve babama, beni bu tarz çalışmalara teşvik eden değerli kardeşlerime ve sonsuz desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşime teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

<b>ONAY</b> .....	<b>i</b>
<b>ÖZET</b> .....	<b>ii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>iii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>iv</b>
<b>İÇİNDEKİLER DİZİNİ</b> .....	<b>v</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b> .....	<b>vi</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. LİTERATÜR ÖZETİ</b> .....	<b>5</b>
<b>3. GENEL BİLGİLER</b> .....	<b>9</b>
3.1. Lineer Operatörler.....	9
3.2. Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları.....	10
3.3. Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları.....	11
3.4. Metrik Uzayları.....	11
3.5. Normlu Uzaylar ve Banach Uzayları.....	11
3.6. İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları.....	12
3.7. Hilbert Uzayında Simetrik Operatörler.....	13
3.8. $L_2(a, b)$ Uzayı ve Sobolev Uzayı.....	13
3.9. Kompleks Fonksiyonların Sıfır Yerlerinin Sayısı.....	14
3.10. Mutlak ve Düzgün Yakınsaklık.....	14
3.11. SDP'nin Çözümünün Varlığı, Tekliği ve Parametreye Göre Tamlık Teoremi.....	17
3.12. Asimptotik Davranışlar.....	17
3.13. Sturm-Liouville Problemleri.....	19
3.14. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Parametrelerin Değişimi Yöntemi.....	22
3.15. Green Fonksiyonu.....	24
<b>4. MATERYAL VE METOD</b> .....	<b>26</b>
<b>5. BULGULAR VE TARTIŞMA</b> .....	<b>27</b>
5.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi.....	27
5.2. Sınır Değer Problemi ile Aynı Özdeğere Sahip Olan Lineer Operatörün Kurulması.....	27
5.3. SDP ile İlgili Yardımcı BDP'lerinin Çözümleri ve Özdeğer Parametresine Göre Analitikliği... ..	32
5.4. Temel Çözümler ve Karakteristik Fonksiyon.....	40
5.5. $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ Çözüm Fonksiyonlarının Asimptotiği.....	44
5.6. $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ Fonksiyonlarının Wronskianının Asimptotiği.....	56
5.7. Green Fonksiyonunun Kurulması.....	58
5.8. Özdeğerler İçin Asimptotik Formlar.....	61
<b>6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER</b> .....	<b>70</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>71</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>74</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

$E = (E, K, +, \cdot)$	: Lineer veya Vektör uzayı
$X = (X, d)$	: Metrik uzay
$(E, \ \cdot\ )$	: Lineer normlu uzay
$\langle x, y \rangle$	: $x$ ve $y$ elemanlarının iç çarpımı
$E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	: İç çarpım uzayı
$L_2[a, b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$W(f, g)$	: Wronskian determinanı
$\lambda$	: Özdeğer
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyonu
$H$	: Hilbert Uzayı
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı
$W_2^2(0, \pi)$	: Sobolev Uzayı
$O, o, \square$	: Asimptotik davranışları tarif etmek için kullanılan simgeler
SDP	: Sınır Değer Problemi
BDP	: Başlangıç Değer Problemi



## 1. GİRİŞ

Isının bir nesne üzerinde, belli bir konumda ve zamanda, nasıl dağılacığını tanımlayan parçalı diferansiyel denkleme ısı denklemi denir. Kartezyen koordinat sisteminde,  $(x, y, z)$  konumu ve  $t$  zamanı göstermek üzere, ısı denkleminin genel ifadesi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

şeklindedir. Burada  $k$  bir sabit ve  $u = u(x, y, z, t)$  dir. Isı denklemi bir boyutta ise

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

şeklindedir.

Matematik fiziğin birçok problemlerinin çözümünde en etkili ve klasik yöntemlerden biri, Fourier yöntemidir. Değişkenlerine ayırma yöntemi de denilen bu yöntemin uygulanması sonucunda, birçok problem, adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemine dönüştürülür. Ancak, Fourier yönteminin esaslandırılması için elde edilen sınır değer probleminin, özfonksiyonlarının baz oluşturması veya hiç olmazsa, özfonksiyonların ve bu fonksiyonlara bağlanmış fonksiyonların tam olması gösterilmelidir. Bu ise, Lineer Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin başlıca konusudur.

Matematik fizikte biliniyor ki,  $u(x, t)$  fonksiyonu

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

denklemini sağlar. Burada  $\alpha$ , telin yapıldığı maddeye uygun fiziksel sabittir.

( $\alpha^2 = \frac{K}{\rho c}$ ;  $K$  -dahili ısı iletme katsayısı,  $\rho$  - yoğunluk,  $c$  - ısı tutumudur.)

Başlangıç anında telin her noktasındaki ısının değeri  $f(x)$  ile gösterilirse,

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \ell \quad (1.2)$$

başlangıç şartını almış oluruz. (1.1) denkleminin

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

çözümünü bulacağız. Fourier yöntemine göre (1.1) denkleminin herhangi çözümünü

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (1.4)$$

şeklinde arayalım. (1.4)'ü (1.1) de yerine yazarsak,

$$u_t = XT', \quad u_x = TX', \quad u_{xx} = TX''$$

olduğundan

$$XT' = \alpha^2 X''T \quad (1.5)$$

elde edilir. (1.5) denklemini

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} \quad (1.6)$$

şeklinde yazarak değişkenlerine ayırmış oluruz. Sol taraf sadece  $x$  değişkenine, sağ taraf ise sadece  $t$  değişkenine bağlı olduğundan, (1.6) eşitliğinin her iki tarafı  $x$ 'e ve  $t$ 'ye bağlı olmayan herhangi  $\sigma$  sabitine eşittir (Bu sabite, ayırma sabiti denir.).

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} = \sigma$$

Böylece  $X(x)$  ve  $T(t)$  fonksiyonları için iki adi diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} X'' - \sigma X &= 0 \\ T' - \sigma \alpha^2 T &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

(1.3) sınır şartları ise (1.4) denkleminde yararlanılarak

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$u(0,t) = X(0)T(t) \Rightarrow 0 = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

ve

$$u(\ell,t) = X(\ell)T(t) \Rightarrow 0 = X(\ell)T(t) \Rightarrow X(\ell) = 0$$

şekline dönüşür. Böylece  $X(x)$  fonksiyonu için

$$X'' = \sigma X \quad (1.8)$$

$$X(0) = X(\ell) = 0 \quad (1.9)$$

sınır değer problemi elde edilmiş olur. Şimdi elde edilen bu sınır değer problemini çözelim. Kolaylık olması için  $\sigma = -\lambda^2$  ile gösterelim. O halde (1.8) denklemini

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (1.10)$$

şeklinde yazılır.  $\lambda = 0$  olduğunda bu denklemin genel çözümü  $X(x) = k_1 x + k_2$  şeklindedir. (1.9) sınır şartlarında yerine yazarsak  $k_1 = k_2 = 0$ , yani  $u(x, t) \equiv 0$  trivial (aşıkâr) çözümü elde edildiğinden  $\lambda \neq 0$  hali incelenmelidir. O halde (1.10) denkleminin genel çözümü;

$$X(x) = k_1 e^{i\lambda x} + k_2 e^{-i\lambda x} = k_1 \cos \lambda x + k_2 \sin \lambda x \quad (1.11)$$

şeklinde olur. (1.9) sınır şartlarında yerine yazarsak  $X(0) = 0$  için

$$X(0) = k_1 \cos \lambda 0 + k_2 \sin \lambda 0 \Rightarrow k_1 = 0$$

bulunur. Benzer şekilde  $X(\ell) = 0$  için

$$X(\ell) = k_1 \cos \lambda \ell + k_2 \sin \lambda \ell \Rightarrow k_2 \sin \lambda \ell = 0$$

olur.  $k_2 = 0$  için (1.11) denklemi

$$X(x) = 0 \cos \lambda x + 0 \sin \lambda x = 0$$

olduğu görülür. Bu ise bizi  $u(x, t) = 0$  aşıkâr çözüme götürür. O halde  $k_2 \neq 0$ ,  $\sin \lambda \ell = 0$  durumu incelenmelidir.

$X(\ell) = 0$  iken  $\sin \lambda \ell = 0$  ifadesinden  $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  olduğu görülür.  $\sigma = -\lambda^2$  olduğundan

$$\sigma = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

elde edilir. Bu sayılara (1.8), (1.9) sınır değer probleminin özdeğerleri denir. Bu değerlere uygun gelen çözümler ise

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad n = 1, 2, \dots$$

fonksiyonlarıdır ve bunların keyfi sabitle çarpımlarıdır. Bu fonksiyonlara ise (1.8), (1.9) sınır değer problemlerinin özfonksiyonları denir. (1.7)'nin çözümleri ise

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t}$$

şeklinde bulunur. O halde

$$U_n(x, t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

fonksiyonu (1.1) denklemini ve (1.3) sınır şartlarını sağlar. Bu durumda (1.2) başlangıç şartı

$$f_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (1.12)$$

şartına dönüşür. O halde  $f(x)$ , (1.12) şeklinde değilse (1.1), (1.3) sınır değer probleminin (1.12) şeklinde çözümü bulunmaz. (1.1) denklemini ve (1.3) sınır şartları homojen olduklarından

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^m u_n(x,t) C_n = \sum_{n=1}^m e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)t} \sin \frac{n\pi x}{\ell} C_n$$

şeklindeki lineer birleşimlerde (1.1) denklemini ve (1.3) sınır şartlarını sağlar. (1.2) başlangıç şartını sağlaması için  $f(x)$  fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^m \sin \frac{n\pi x}{\ell} C_n \quad (1.13)$$

şeklinde olmalıdır. (1.13) şartı ise (1.1) ve (1.3) problemi için hem fiziksel, hem de matematiksel açıdan çok ağır olan sınırlayıcı şarttır. Bunu aradan kaldırmak için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) C_n$$

serisine açıldığını kabul edelim. Bu halde belli şartlar altında

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) C_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell} C_n$$

fonksiyonu (1.1), (1.3) probleminin çözümü oluyor.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi birçok matematiksel fizik probleminin çözümü uygun özdeğer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları kullanılarak inşa edilebilir.

## 2. LİTERATÜR ÖZETİ

Son yıllarda oldukça çok önem arz eden ve üzerine bir çok çalışma yapılan Sturm-Liouville problemleri ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında araştırılmaya başlanmıştır. C. Sturm ve J. Liouville isimli iki bilim adamı ısı iletimi problemini Fourier yöntemi ile araştırdıklarında karşılıklı özdeğer parametresi içeren adi diferansiyel denklemin bazı sınır şartlarını sağlayan çözümlerinin araştırılması problemi çıkmıştır. Adi diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin genel hali

$$\ell(y, \lambda) = y^{(n)} + p_1(x, \lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x, \lambda)y = 0 \quad (2.1)$$

$$V_j(y, \lambda) = \sum_{K=0}^{n-1} (a_{jK}(\lambda)y^{(K)}(0) + b_{jK}y^{(K)}(1)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada

$$p_s(x, \lambda) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} p_{\gamma s}(x)\lambda^\gamma, \quad p_{ss}(x) = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n$$

$p_{mn} \neq 0$ ,  $a_{jk}(\lambda)$ ,  $b_{jk}(\lambda)$  fonksiyonları ise  $\lambda$  nın polinomlarıdır.

(2.1), (2.2) tipinde problemlerin araştırılması G.D.Birkhoff'un [3] ve [4] çalışmalarıyla başlamıştır. G.D.Birkhoff'ın bu çalışmalarında özdeğer parametresine bağlı lineer diferansiyel operatörler için temel çözüm sistemini oluşturan çözümlerin asimptotik davranışları incelenmiş ve bazı asimptotik eşitlikler bulunmuştur. Ayrıca G.D.Birkhoff'un bu çalışmalarında adi diferansiyel operatörler için regular sınır şartları kavramı tanımlanmış ve uygun sınır değer probleminin kök fonksiyonlarının (yani, özfonksiyonlarının ve şerik fonksiyonlarının (eigen functions and associated functions)) tamlığı hakkında teorem ispatlanmıştır.

Bu tip problemler ilerleyen yıllarda, J.D.Tamarkin'in [22] çalışmasında (2.1) denkleminin temel çözüm sistemini oluşturan fonksiyonların asimptotik davranışları incelenmiş regular ve güçlü regular sınır değer problemi kavramı tanımlanmıştır. Güçlü regular sınır değer probleminin özdeğerleri için asimptotik formüller bulunmuştur. Regular problemler için ise Green fonksiyonu değerlendirilmiştir ve kök fonksiyonları üzerine açılım teoremleri ispatlanmıştır. Daha sonraki yıllarda bu ve benzer problemler birçok matematikçi tarafından yoğun şekilde araştırılmıştır.

Son yıllarda adi diferansiyel operatörler teorisi ile ilgili farklı problemler de yoğun bir biçimde incelenmiş ve sadece denklemde değil, sınır şartlarında da özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville tipinde problemler özel ilgi çekmeye başlamıştır. Bu konuda çok sayıda çalışma yapılmış, makale ve kitaplar yazılmıştır.

Bu konudaki önemli çalışmalar hakkında [7], [8], [9], [14], [15], [17], [18], [21], [25], [28], [30] kaynaklarında yeteri kadar bilgi verilmiştir.

İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için bazı kendine eşlenik sınır değer problemleri [2], [10], [11], [12], [19], [20], [27], [29] çalışmalarında incelenmiştir. Örneğin;

J. Walter'ın [27] çalışmasında

$$\frac{1}{r} \left\{ -(pu')' + qu \right\} = \lambda u, \quad x \in [a_1, a_2] \quad (2.3)$$

$$-(\beta_{11}u(a_1) - \beta_{12}u'(a_1)) = \lambda(\alpha_{11}u(a_1) - \alpha_{12}u'(a_1)) \quad (2.4)$$

$$-(\beta_{21}u(a_2) - \beta_{22}u'(a_2)) = \lambda(\alpha_{21}u(a_2) - \alpha_{22}u'(a_2)) \quad (2.5)$$

biçiminde Sturm-Liouville problemi için yeni bir  $\mu$  ölçümü tanımlanmış (problemin katsayı fonksiyonları olan  $p(x)$  ve  $r(x)$  fonksiyonlarından bağımlı olan ölçüm) ve uygun  $L_2((a, b]; \mu)$  Hilbert uzayında (2.3)-(2.5) problemine uygun  $A: L_2((a, b]; \mu) \rightarrow L_2((a, b]; \mu)$  operatörü tanımlayarak (2.3)-(2.5) probleminin operatör-teorik yorumlamasını vermiştir. Daha sonra  $A$  operatörünün kendine eşlenikliğini ispatlayarak, kendine eşlenik operatörlerin fonksiyonel analizinden bilinen özelliklerinden yararlanmakla açılım teoremi ispatlanmıştır.

Schneider'in [20] çalışmasında ise

$$-(pu')' + qu = \lambda ru$$

$$u(a) = 0$$

$$-(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) = \lambda(\alpha_1 u(b) - \alpha_2 u'(b))$$

sınır şartlarının sadece bir tanesinde özdeğer parametresi içeren uygun problem için S-hermityen sınır değer problemleri yöntemiyle araştırılabileceğini göstermiş ve özfonksiyonlar sistemi üzerine açılımın düzgün ve mutlak yakınsaklığı için yeter şartlar bulmuştur.

Fulton'un [8] çalışmasında,

$$\tau := -u'' + qu = \lambda u$$

$$\cos \alpha u(a) + \sin \alpha u'(a) = 0$$

$$-(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) = \lambda (\beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b))$$

şeklinde bir problem ele almış ve problemde sadece fonksiyonel analizin yöntemlerini değil, Titmarsh'ın [25] çalışmasının klasik yöntemlerinden de faydalanarak özdeğer parametresinin sınır şartlarından sadece bir tanesinde bulunduğu durum için çalışmalar yapmıştır. Çalışmalarında uygun problem için özdeğer ve özfonksiyonların asimptotiğini bulmuş ve farklı açılım teoremleri ispatlanmıştır.

Russakovskiy'nin [19] çalışmasında, sınır şartları polinom biçiminde özdeğer parametresi içeren problemlerin operatör-teorik yorumunu vermiştir.

Kerimov ve Mamedov'un [12] çalışmasında

$$-u'' + q(x)u = \lambda^2 u, \quad 0 < x < 1 \quad (2.6)$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2)u(0) + u'(0) = 0 \quad (2.7)$$

$$(\beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2)u(1) + u'(1) = 0 \quad (2.8)$$

problemine uygun

$$A(\lambda)\lambda^2 + B(\lambda)\lambda + C(\lambda) = 0$$

biçiminde operatörler demetini kurarak (2.6)-(2.8) problemine farklı bir yaklaşımla operatör-teorik yorum getirmişlerdir. Bu çalışmada özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik davranışları incelenmiş ve ayrıca özfonksiyonların sıfır yerleri hakkında klasik sorulara benzer sonuçlar bulmuşlardır.

Tez çalışmamızda ise sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville tipindeki bir probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiştir.

### 3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmamızda yararlandığımız temel kavram ve sonuçlar hakkında kısa ve öz bilgilere yer verilmiştir.

#### 3.1. Lineer Operatörler

$E$  kümesi ve bu kümenin elemanları arasında aşağıdaki şartları sağlayan “+” işlemi ( $+: E \rightarrow E$ ) tanımlansın;

1.  $x + y = y + x$  (Değişme özelliği)
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (Birleşme özelliği)
3. “ $\Theta$ ” ile gösterilen ve  $\forall x \in E$  için  $x + \Theta = x$  şartını sağlayan bir tek  $\Theta \in E$  elemanı mevcuttur.
4. Her  $x \in E$  için  $-x$  ile gösterilen ve  $x + (-x)$  şartını sağlayan bir tek  $-x \in E$  elemanı mevcuttur. Yani her  $x \in E$  için  $x + y = 0$  olacak şekilde bir tek  $y \in E$  vardır. Bu durumda  $y$  elemanı  $-x$  ile gösterilir.

Ayrıca bir  $K$  cismi (genel olarak  $K = \mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  olarak düşünülür, sayı cismi olarak da adlandırılır) için  $K$  ile  $E$  nin elemanları arasında “ $\cdot$ ” ile gösterilen  $\cdot : K \times E \rightarrow E$  işlemi tanımlansın ve bu işlem için aşağıdaki özellikler sağlansın;

5.  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$  ( $\forall \alpha, \beta \in K$  ve  $\forall x \in E$  için)
6.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
7.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8.  $1 \cdot x = x$  (“1”  $K$  cisminin birim elemanı)

Bu şartları (aksiyomları) sağlayan  $E = (E, K, +, \cdot)$  kümesi  $K$  cismi üzerinde lineer veya vektör uzay olarak adlandırılır. Kısaca  $E$  lineer uzaydır denir.

$E$  lineer uzayının herhangi  $D$  alt kümesinin elemanları  $E$  lineer uzayında tanımlı “+” ve “ $\cdot$ ” işlemlerine göre bir lineer uzay oluşturuyorsa,  $D$ ’ye  $E$  lineer uzayının lineer alt uzayı denir.

$E$  lineer uzayı, bu uzayın bir  $D$  lineer alt uzayı ve bir  $A: D \rightarrow E$  dönüşümü verilsin. Eğer her  $x, y \in D$  ve her  $\lambda \in K$  için



$$A(x+y) = Ax + Ay, \quad A(\lambda x) = \lambda Ax$$

şartları sağlanıyorsa,  $A$  dönüşümü lineer operatör olarak adlandırılır.  $D$ 'ye  $A$  lineer operatörünün tanım bölgesi denir [17].

### 3.2. Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları

$p_i(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\ell(y) := p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad x \in (a, b)$$

biçiminde ifadeye  $n$ -mertebeden lineer diferansiyel ifade denir. Genel olarak her  $x$  için  $p_0(x) \neq 0$  olduğu kabul edilir.

$$U(y) := \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \dots + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(a) + \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) + \dots + \beta_{n-1} y^{(n-1)}(b)$$

biçimindeki ifadeye ise sınır değer ifadesi denir.  $U_i(y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  ifadeleri sınır değer ifadeleri olduğunda

$$U_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

biçimindeki eşitlikler sınır şartları olarak adlandırılır.

Bilindiği gibi  $C[a, b]$  ile,  $[a, b]$  aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı gösterilir.

$$\{f \in C[a, b] \mid f', f'', \dots, f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

lineer uzayı ise  $C^{(n)}[a, b]$  biçiminde gösterilir.

$$L: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

$$D(L) = D = \{y \in C[a, b] \mid y \in C^{(n)}[a, b], U_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$L(y) = \ell(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

eşitlikleri ile tanımlanan  $L$ -lineer operatörüne lineer diferansiyel operatör veya  $\ell(y)$  diferansiyel ifadesi ile  $U_i(y) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  sınır şartlarının ürettiği lineer diferansiyel operatör denir [17].

### 3.3. Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

$E$  lineer uzayında tanım bölgesi  $D(A)$  olan  $A: E \rightarrow E$  lineer operatörü verilsin. Eğer herhangi  $\lambda = \lambda_0$  ve herhangi  $u_0 \in H, u_0 \neq 0$  için

$$Au_0 = \lambda_0 u_0$$

eşitliği sağlanırsa,  $\lambda_0$  sayısına  $A$  operatörünün özdeğeri,  $u_0 \in H, u_0 \neq 0$  elamanına ise  $\lambda_0$  özdeğerine uygun özelementi (özfonksiyonu) denir [17].

### 3.4. Metrik Uzaylar

$X$  kümesi ve  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü için

1.  $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
2.  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

özellikleri sağlanırsa  $X = (X, d)$  uzayı metrik uzay olarak adlandırılır.

$X = (X, d)$  metrik uzayında bir  $\{x_n\}$  dizisi ve bir  $x_0$  noktası verilsin. Eğer  $d(x_n, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ise,  $\{x_n\}$  dizisi  $x_0$  noktasına yakınsıyor denir.

$\{x_n\}$  dizisi verilsin. Eğer  $d(x_n, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  olacak biçimde  $x_0 \in X$  mevcutsa  $\{x_n\}$  dizisine yakınsak dizi denir.

**3.4.1. Tanım:**  $X = (X, d)$  metrik uzayı ve bu uzayda  $\{x_n\}$  dizisi verilsin. Eğer  $d(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$  ise bu durumda  $\{x_n\}$  dizisi Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

**3.4.2. Tanım:**  $X = (X, d)$  metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Tam Metrik Uzay denir [28].

### 3.5. Normlu Uzaylar ve Banach Uzayları

$E$  lineer uzayı  $\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  cismi üzerinde ve  $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim;

1.  $\forall x \in E$  için  $\|x\| \geq 0$  ve  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$  ( $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ )
2.  $\forall x \in E$  ve  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$  için  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3.  $\forall x, y \in E$  için  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bu durumda  $E$  lineer uzayında bir norm tanımlanmıştır denir.  $\|x\|$  e  $x$  elemanın normu, üzerinde norm tanımlanmış  $E$  lineer uzayına lineer normlu uzay denir ve  $(E, \|\cdot\|)$  şeklinde gösterilir. Lineer normlu uzayda  $d(x, y) = \|x - y\|$  eşitliği bir metrik tanımlar. Bu nedenle her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzay kabul edilir. Eğer lineer normlu uzay tam ise (lineer normlu uzay  $d(x, y) = \|x - y\|$  metriğine göre metrik uzay olarak kabul edildiği için metrik uzaylardaki bütün kavramlar lineer normlu uzaylar için de tanımlanmış olur) bu uzay Banach Uzayı olarak adlandırılır [28].

### 3.6. İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları

Kompleks sayılar cismi üzerinde  $E$  lineer uzayı verilsin. Bu uzayda her  $x, y \in E$  eleman çiftine  $\langle x, y \rangle$  ile gösterilen bir tek kompleks sayı karşılık getirilmişse ve de bu durumda her  $x, y, z \in E$  ve her  $\alpha$  kompleks sayısı için

1.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

şartları sağlanırsa,  $E$ 'de bir iç çarpım tanımlanmıştır.  $\langle x, y \rangle$  sayısına  $x$  ve  $y$  elemanlarının iç çarpımı denir.  $E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ise iç çarpım uzayı olarak adlandırılır.

$E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  iç çarpım uzayında  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eşitliği ile bir norm tanımlar. Bu nedenle her iç çarpım uzayı bir normlu uzay, dolayısıyla bir metrik uzay olarak kabul edilir. Eğer  $E$  iç çarpım uzayı tam ve de sonsuz boyutlu ise (yani sonlu boyutlu değilse) Hilbert uzayı olarak adlandırılır [28].

### 3.7. Hilbert Uzayında Simetrik Operatörler

$H$  – Hilbert uzayı ve  $A: D(A) \subset H \rightarrow H$  lineer uzayı verilsin.  $\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H$  eşitliği her  $x, y \in D(A)$  için sağlanıyorsa  $A$  operatörüne simetrik operatör denir. Simetrik operatörlerin bütün özdeğerleri reel ve farklı özdeğerlere uygun özfonksiyonları ortogonaldır [22].

### 3.8. $L_2(a, b)$ Uzayı ve Sobolev Uzayı

Verilmiş  $[a, b]$  aralığında tanımlı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan  $f(x)$  fonksiyonu için  $|f(x)|^2$  fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilirse  $f(x)$  fonksiyonuna  $[a, b]$  aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir. Karesi integrallenebilir fonksiyonların lineer uzayında

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

ile gösterilen bu formül bir iç çarpım tanımlar. Bu şekilde tanımlanan iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğu bilinmektedir. Bu uzay  $L_2(a, b)$  ile gösterilir.  $[a, b]$  aralığı sonlu olduğu durumda  $L_2(a, b)$ 'den olan her bir fonksiyonun  $(a, b)$  aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olacağı açıktır [17].

**3.8.1. Tanım:**  $(a, b)$  aralığında tanımlı ve lokal integrallenebilir olan  $u(x)$  ve  $v(x)$  fonksiyonları verilsin. Eğer sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir ve  $Supp \varphi = \{x | \varphi(x) \neq 0\} \subset (a, b)$  şartını sağlayan her  $\varphi(x)$  fonksiyonu için

$$\int_a^b u(x) \varphi^{(n)}(x) dx = (-1)^n \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

eşitliği sağlanıyorsa  $v(x)$  fonksiyonu  $u(x)$  fonksiyonunun  $n(n \in \mathbb{N})$  mertebeden genelleştirilmiş türevi denir.

$(a, b) \subset \mathbb{R}$  aralığı  $q > 1$  reel sayısı ve  $m > 0$  tamsayısı verildiğinde  $W_q^m(a, b)$  ile  $(a, b)$  aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir ve  $u(x), u''(x), \dots, u^{(m)}(x)$

genelleştirilmiş türevleri bulunan ve her  $k=1,2,\dots,m$  için  $u^{(k)}(x) \in L_2(a,b)$  olan fonksiyonların lineer uzayını göstereceğiz. Bu uzayda

$$\langle u, v \rangle_{W_2^m(a,b)} = \left( \sum_{k=0}^m \langle u^{(k)}, v^{(k)} \rangle_{L_2(a,b)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü bir iç çarpım tanımlıyor. Bu uzaylara Sobolev uzayları denir. Bu uzayların Hilbert uzayları olduğu bilinmektedir. [26]

### 3.9. Kompleks Fonksiyonların Sıfır Yerlerinin Sayısı

**3.9.1. Tanım:** Bir  $f(z)$  kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir  $z_0$  noktasının  $\delta$  komşuluğunun tüm noktalarında diferansiyellenebiliyorsa  $f(z)$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında analitiktir denir [16].

**3.9.2. Tanım:** Bütün kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir. Tam fonksiyonların sıfır yerlerinin sonlu veya en fazla sayılabilir sayıda olduğu kompleks analizden bilinmektedir.  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ile tanımlı  $f(z)$  fonksiyonu ve  $z_0 \in \mathbb{C}$  noktası verildiğinde

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

ise bu durumda  $z = z_0$  noktasına  $f(z)$  fonksiyonunun  $k$  katlı sıfır yeri denir. Tam fonksiyonların (sıfır olmayan) bütün sıfır yerlerinin sonlu katlı olduğu açıktır [25].

**3.9.3. Rouché Teoremi:** Eğer  $f(z)$  ve  $\varphi(z)$  kompleks fonksiyonları kapalı düzlenebilir Jordan eğrisi olan  $\Gamma$  üzerinde ve içinde analitiklerse ve her  $z \in \Gamma$  için,  $|f(z)| > |\varphi(z)|$  şartı sağlanıyorsa; o halde  $\Gamma$  eğrisinin içinde  $f(z) + \varphi(z)$  fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı ile  $f(z)$  fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı (her sıfır yeri katı sayıda hesaplamak üzere) eşittir [24].

### 3.10. Mutlak ve Düzgün Yakınsaklık

$\mathbf{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \in \mathbb{C}^n$  olmak üzere  $(\mathbf{a}_k)$  dizisi verilmiş olsun.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$$

ifadesine  $\mathbb{R}^n$ 'de seri denir.  $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ 'ya serinin kısmi toplamı ve  $(S_k)$  dizisine ise serinin kısmi toplamlar dizisi denir ( $k = 1, 2, \dots$ )

$(S_k)$  kısmi toplamlar dizisi  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 'ye yakınsak ise  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

serisi  $a$ 'ya yakınsaktır denir ve  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$  yazılır.  $(S_k)$  ıraksak ise seriye ıraksak

denir (Burada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  simgesinin yerine göre seriyi, yerine göre ise serinin toplamını gösterdiğine dikkat ediniz) [1].

**3.10.3. Tanım:**  $\mathbb{R}^n$ 'de  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  serisi verilmiş olsun. Eğer  $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|$  reel serisi

yakınsak ise  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  serisine mutlak yakınsak denir [1].

**3.10.4. Tanım:**  $f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $(f_k)$  fonksiyon dizisi ve  $\varepsilon > 0$

sayısı verilmiş olsun. Bütün  $x$  ve  $k > k_0 = k_0(\varepsilon)$  için  $S$ 'de

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde, sadece  $\varepsilon$ 'a bağlı fakat  $x$ 'e bağlı olmayan bir  $k_0$  sayısı varsa  $(f_k)$ ,  $S$ 'de düzgün yakınsaktır denir [1].

**3.10.5. Teorem (Diziler için Cauchy Kriteri):**  $f_k : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$(f_k)$  dizisi ve  $\varepsilon > 0$  verilmiş olsun.  $(f_k)$ 'nın düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart  $k \geq p > k_0$  için  $S$ 'de

$$|f_k(x) - f_p(x)| < \varepsilon \quad (3.10.1)$$

olacak şekilde bir  $k_0 \in \mathbb{R}$ 'nin olmasıdır [1].

**İspat:**  $(f_k(x))$  dizisi  $S$ 'de  $f$ 'ye düzgün yakınsak ve  $\varepsilon > 0$  verilmiş olsun.

Bu takdirde her  $x \in S$  ve her  $k > k_0$  için

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde  $k_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Böylece her  $x \in S$  ve  $k > p > k_0$  için

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_p(x)| &= |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_p(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f_p(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Tersine olarak, verilmiş  $\varepsilon > 0$  sayısı ve  $k > p > k_0$  için  $S$ 'de

$$|f_k(x) - f_p(x)| < \varepsilon \text{ olacak şekilde } k_0 \text{ pozitif tam sayısının olduğu yani (3.10.1)}$$

Cauchy şartının sağlandığını farz edelim. Bu demektir ki her bir  $x \in S$  için  $(f_k(x))$  dizisi bir Cauchy dizisi ve dolayısıyla yakınsaktır.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$$

olsun. Şimdi bu yakınsamanın düzgün olduğunu gösterelim. Eğer  $\varepsilon > 0$  verilmişse bu halle ilgili kabulden dolayı her  $x \in S$  ve  $k > p > k_0$  için  $|f_k(x) - f_p(x)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $k_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Bu takdirde her  $x \in S$  için

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |f_k(x) - f_p(x)| = |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad k > k_0$$

yazabiliriz ve böylece  $f_k \rightarrow f$  dir.

**3.10.6. Teorem (Weierstrass M-Kriteri):**  $f_k : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere her

$x \in A$  için  $|f_k(x)| < M_k$  olacak şekilde  $M_k$  reel sayılar mevcut ve  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  serisi

yakınsak ise  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  serisi düzgün ve mutlak yakınsaktır [1].

**İspat:** Teoremi ispat etmek için (3.10.1) Cauchy şartının sağlandığını göstermek yeterlidir. Hipotezden dolayı  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  yakınsak olduğu için  $\varepsilon > 0$  ve

$k > p > k_0$  için  $\sum_{n=p+1}^k M_n < \varepsilon$  olacak şekilde  $k_0$  sayısı vardır. Böylece genelleştirilmiş

üçgen eşitsizliğinden

$$|S_k(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^k f_n(x) \right| \leq \sum_{n=p+1}^k |f_n(x)| \leq \sum_{n=p+1}^k M_n < \varepsilon$$

yazılabilir. Demek ki her  $x \in A$  için  $|S_k(x) - S_p(x)| < \varepsilon$  ve böylece  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  serisi  $A$  da düzgün yakınsaktır. Ayrıca son eşitsizlikten dolayı  $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$  serisi de yakınsaktır.

### 3.11. SDP'nin Çözümünün Varlığı, Tekliği ve Parametreye Göre Tamlık Teoremi

$q: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ile tanımlı  $q(x)$  fonksiyonun sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. O halde

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [a, b]$$

diferansiyel denkleminin

$$u(a) = \sin \alpha, \quad u'(a) = -\cos \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi)$$

sınır şartlarını sağlayan bir tek  $u(x, \lambda)$  çözümü bulunur ve bu çözüm her  $x \in [a, b]$  için  $\lambda \in \mathbb{R}$  parametresinin tam fonksiyonudur [25].

### 3.12. Asimptotik Davranışlar

Verilmiş  $f(x)$  fonksiyonunun  $x \rightarrow \infty$  için davranışı bazı durumlarda bilinen “basit”  $g(x)$  fonksiyonunun  $x \rightarrow \infty$  için davranışından yararlanılarak ifade edilebilir. Böyle durumlarda  $f(x)$  ve  $g(x)$  in  $x \rightarrow \infty$  için davranış “yakınlığı” incelenirken “ $o$ ”, “ $O$ ”, “ $\square$ ” gibi simgelerden yararlanılmaktadır. Ayrıca,  $x \rightarrow \infty$  için  $g(x)$  üzerine önceden hiçbir şart konulmamaktadır.

Kompleks düzlemin herhangi  $G \subset \mathbb{C}$  bölgesinde tanımlı olan  $f(z)$ ,  $g(z)$  ve  $h(z)$  fonksiyonları verilsin. Eğer  $\frac{f(z)}{g(z)}$  fonksiyonu bu bölgede sınırlı ise, yani;

$$|f(z)| \leq M |g(z)|, \quad z \in G \cap \{z : |z| > R\}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $R > 0$ ,  $M > 0$  sayıları mevcutsa

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \in G, \quad z \rightarrow \infty \quad (3.12.1)$$



şeklinde yazılır. Bu ifadeye asimptotik eşitlik denir. Eğer,

$$f(z) - h(z) = O(g(z)), \quad z \in G, \quad z \rightarrow \infty$$

ise

$$f(z) = h(z) + O(g(z)), \quad z \in G, \quad z \rightarrow \infty \quad (3.12.2)$$

yazılır.  $z_0 \in G$  verilsin. Bu takdirde

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in G} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

$$f(z) = o(g(z)), \quad z \in G, \quad z \rightarrow \infty \quad (3.12.3)$$

yazılır ve  $f(z)$  fonksiyonu  $z(0)$  noktasının yakın komşuluğunda  $g(z)$  ye göre

sonsuz küçüktür denir.  $\frac{f(z)}{g(z)}$  fonksiyonu  $z(0)$  noktasının herhangi komşuluğunda

sınırlı ise

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \in G, \quad z \rightarrow z_0 \quad (3.12.4)$$

yazılır. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$$

ise

$$f(z) \sim g(z), \quad z \in G, \quad z \rightarrow z_0 \quad (3.12.5)$$

yazılır. Hangi  $G$  bölgesinden bahsedildiği açık şekilde bilinirse  $z \in G$  yazısı atılır.

$\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  ve  $\{c_n\}$  reel veya kompleks sayı dizileri verildiğinde  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  dizisi sınırlı

olduğunda

$$a_n = O(b_n) \quad (3.12.6)$$

yazılır.  $a_n - c_n = O(b_n)$  olduğunda ise bu eşitlik

$$a_n = c_n + O(b_n) \quad (3.12.7)$$

şeklinde gösterilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

olduğunda bu eşitlik

$$a_n = o(b_n) \quad (3.12.8)$$

şeklinde gösterilir.  $a_n - c_n = o(b_n)$  olduğunda ise bu eşitlik

$$a_n = c_n + o(b_n) \quad (3.12.9)$$

şeklinde gösterilir. (3.12.1)-(3.12.9) şeklindeki formüllere asimptotik formüller denir [25].

### 3.13. Sturm-Liouville Problemleri

$H$  – herhangi Hilbert uzayı  $L: H \rightarrow H$  ise bu uzayda tanımlı olan lineer operatör olsun. Eğer herhangi  $\lambda_0$  skaleri için ( $H$  uzayının cisminden alınmış)  $Ly_0 = \lambda_0 y_0$  olacak biçimde  $y_0 \in H$ ,  $y_0 \neq 0$  elemanı bulunursa,  $\lambda_0$  sayısına  $L$  operatörünün özdeğeri,  $y_0$  elemanına ise bu özdeğere uygun olan özeleman (veya özvektör) denir. Uygulamalarda sık sık rastlanan diferansiyel operatörlerden biri de

$$L \equiv -\frac{d}{dx^2} + q(x)$$

biçiminde ifade edilen operatördür (bu operatör genelde  $H = L_2(a, b)$  biçimindeki Hilbert uzaylarında incelenmektedir).  $L$  – operatörü için en önemli sınır şartları

$$\left. \begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0 \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.13.1)$$

$(\alpha, \beta \in [0, \pi))$  biçiminde veya

$$\left. \begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned} \right\} \quad (3.13.2)$$

biçiminde verilmiş sınır şartlarıdır.

$$Ly(x) = -y'' + q(x)y = \lambda y$$

denkleminin (3.13.1) veya (3.13.2) tipindeki sınır şartlarını sağlayan çözümlerinin bulunması problemi klasik Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır.

Eğer  $[a, b]$  aralığı sınırlı,  $g(x)$  fonksiyonu ise integrallenebilir ise o halde böyle problemlere Regüler Sturm-Liouville problemleri denir. Daha genel olan

$$y'' + p(x)y' + \{\ell(x) + \lambda r(x)\}y = 0 \quad (3.13.3)$$

biçimindeki diferansiyel denklemlerde  $(x, y)$  değişkenlerinden  $(t, u)$  değişkenlerine

$$t = \frac{\int_a^x \sqrt{r(s)} ds}{\int_a^b \sqrt{r(s)} ds}, \quad u(t) = \sqrt[4]{r(x)} e^{\frac{1}{2} \int_a^x p(s) ds} y(x)$$

Laplace dönüşümü ile geçerse, (3.13.3) denklemi

$$u'' + q(t)u = -\lambda u$$

denkleme dönüşür. Burada  $r(x) > 0$  olmak üzere, ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon;  $p(x)$  ise 1. mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyondur. Ayrıca bu durumda  $[a, b]$  aralığı da  $[0, 1]$  aralığına dönüşmüş olur [14].

### 3.13.1. Wronskian Determinantı

$f, g \in C^1$  herhangi iki fonksiyon olmak üzere

$$W_x(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

şeklinde tanımlanan determinanta Wronskian determinantı denir [13].

**3.13.2. Teorem:**  $a_0, a_1, \dots, a_n$  fonksiyonları bir  $I$  açık aralığında sürekli ve bu aralıktaki  $x$  için  $a_0(x) \neq 0$  olsun. Bu takdirde

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (3.13.4)$$

homojen lineer diferansiyel denkleminin  $y_1, y_2, \dots, y_n$  çözümlerinin  $I$  da lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul,  $I$  aralığındaki her  $x$  için

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$$

olmasıdır [6].

**İspat:** Önce koşulun, yeter bir koşul olduğunu ispat edelim. Bunun için (3.13.1) homojen lineer denkleminin  $y_1, y_2, \dots, y_n$  çözümlerinin Wronskianının  $I$  aralığındaki her  $x$  için sıfırdan farklı, fakat bu çözümlerin  $I$  da lineer bağımlı

olduğunu varsayalım. Bu takdirde hepsi birden sıfır olmayan  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sabitleri ve  $I$  aralığındaki her  $x$  için

$$b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x) = 0 \quad (3.13.5)$$

$$\begin{aligned} b_1 y_1'(x) + b_2 y_2'(x) + \dots + b_n y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.13.6)$$

$$b_1 y_1^{(n-1)}(x) + b_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + b_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

bağıntıları sağlanır.  $I$  aralığındaki her  $x$  için (3.13.5) ve (3.13.6) bağıntılarına,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  bilinmeyenlerine göre bir homojen cebirsel denklem sistemi olarak bakılabilir. Bu sistemin katsayılar determinanı, açıkça  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$  dir.  $y_1, y_2, \dots, y_n$  çözümleri  $I$  da lineer bağımlı varsayıldığından, söz konusu homojen cebirsel denklem sistemi aşikar olmayan bir çözüm takımına sahip olmalıdır. Bunun için, homojen cebirsel denklem sistemleri teorisinden bilindiği üzere,  $I$  aralığındaki her  $x$  için sistemin katsayılar determinanı sıfır, yani

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = 0$$

olmalıdır. Bu  $I$  aralığındaki her  $x$  için  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$  kabulüyle çelişir. Demek ki, her  $x \in I$  için  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$  ise, (3.13.4) homojen lineer diferansiyel denkleminin  $y_1, y_2, \dots, y_n$  çözümleri  $I$  da lineer bağımsızdır.

Şimdi koşulun, gerek bir koşul olduğunu ispat edelim. Bunun için,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

homojen lineer denkleminin  $y_1, y_2, \dots, y_n$  çözümlerinin  $I$  da lineer bağımsız, fakat  $I$  nın hiç olmazsa bir  $x_0$  noktasında  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = 0$  olduğunu varsayalım.  $x = x_0$  için (3.13.5) ve (3.13.6) cebirsel denklem sistemini tekrar göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} b_1 y_1(x_0) + b_2 y_2(x_0) + \dots + b_n y_n(x_0) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.13.7)$$

$$b_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + b_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + b_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

sistemi,  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = 0$  olduğundan, en az bir  $b_1, b_2, \dots, b_n$  çözüm takımına sahiptir ve  $b_i$  lerin hepsi birden sıfır değildir.

Şimdi (3.13.5) nin bir çözümü olan bu  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sabitleriyle

$$\chi(x) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

homojen denkleminin bir çözümüdür ve (3.13.7) gereğince

$$\chi(x_0) = 0, \chi'(x_0) = 0, \dots, \chi^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Başlangıç koşullarını sağlar. Böylece  $I$  aralığındaki her  $x$  için  $\chi(x) = 0$  dır.

Buradan,  $I$  aralığındaki her  $x$  ve hepsi birden sıfır olmayan  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sabitleri için

$$b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x) = 0$$

elde edilir. Bu  $y_1, y_2, \dots, y_n$  lerin  $I$  da lineer bağımsız olduğu varsayımıyla çelişir.

Demek ki

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

homojen lineer diferansiyel denkleminin  $y_1, y_2, \dots, y_n$  çözümleri  $I$  da lineer bağımsız

ise,  $I$  daki tüm  $x$  ler için  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$  dır.

### 3.14. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Parametrelerin Değişimi Yöntemi:

Parametrelerin değişimi yöntemi

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x) \quad (3.14.1)$$

denklemine ait

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

homojen lineer denkleminin  $n$  lineer bağımsız çözümünün (dolayısıyla genel çözümünün) bilinmesi halinde (3.14.1) denkleminin bir özel çözümünün bulunmasında etkilidir. Yöntemi önce, ikinci mertebeden

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x) \quad (3.14.2)$$

denklemini için açıklayalım. (3.14.2) 'ye ait

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (3.14.3)$$

homojen lineer denkleminin

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (3.14.4)$$

genel çözümünün bilindiğini varsayalım. Burada  $C_1$  ve  $C_2$  keyfi sabitlerdir. (3.15.4)

de  $C_1$  ve  $C_2$  yerine sırasıyla  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  fonksiyonlarını alarak

$$y_p = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) \quad (3.14.5)$$

fonksiyonunu teşkil edelim. Acaba  $v_1(x)$  ve  $v_2(x)$ , (3.14.5) ifadesi (3.14.2)

denkleminin bir çözümü olacak şekilde belirtilebilir mi? Soruyu cevaplandırmak için (3.14.5) deki  $y_p$  yi ve bunun

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' + v_1' y_1 + v_2' y_2$$

$$y_p'' = v_1 y_1'' + 2v_1' y_1' + v_2 y_2'' + 2v_2' y_2' + v_1'' y_1 + v_2'' y_2$$

türevlerini (3.14.2) denkleminde yerlerine koyalım. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} Q(x) = & (a_0 y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) v_1 + (a_0 y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) v_2 \\ & + a_0 (v_1' y_1 + v_2' y_2)' + a_0 (v_1' y_1' + v_2' y_2') + a_1 (v_1' y_1 + v_2' y_2) \end{aligned} \quad (3.14.6)$$

elde edilir.  $y_1$  ve  $y_2$  (3.14.3) homojen lineer denkleminin çözümleri olduğundan  $v_1$  ve  $v_2$  nin katsayıları sıfırdır. Böylece (3.14.6)

$$a_0 (v_1' y_1 + v_2' y_2)' + a_0 (v_1' y_1' + v_2' y_2') + a_1 (v_1' y_1 + v_2' y_2) = Q(x) \quad (3.14.7)$$

olur.

$v_1$  ve  $v_2$  fonksiyonlarını belirtmek için, bunlar arasında iki bağıntı bulmak yeterlidir.  $I$  aralığındaki her  $x$  için  $v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$  seçilirse, (3.14.7) ifadesinden  $I$

aralığındaki her  $x$  için  $a_0 (v_1' y_1' + v_2' y_2') = Q(x)$  bulunur. Yani  $v_1'$  ve  $v_2'$  için

$$v_1'(x) y_1(x) + v_2'(x) y_2(x) = 0$$

$$v_1'(x) y_1'(x) + v_2'(x) y_2'(x) = \frac{Q(x)}{a_0(x)} \quad (3.14.8)$$

denklemleri elde edilir. (3.14.8), her  $x \in I$  için  $v_1'$ ,  $v_2'$  bilinmeyenlerine göre homojen olmayan bir lineer cebirsel denklem sistemi olarak düşünülebilir. Bu sistemin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

dir. Bu, (3.14.3) homojen lineer diferensiyel denkleminin lineer bağımsız  $y_1$ ,  $y_2$  çözümlerinin Wronskianıdır ve Teorem 3.13.2 gereğince sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla (3.14.8) sistemi bir ve yalnız bir  $(v_1(x), v_2(x))$  çözüm takımına sahiptir.  $v_1'$  ve  $v_2'$   $x$ 'in fonksiyonları olup bunların integralleri  $v_1(x)$  ve  $v_2(x)$  fonksiyonlarını verir. Demek ki,  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  fonksiyonları (3.14.5) fonksiyonu (3.14.2) denkleminin bir çözümü olacak şekilde belirtilebilir.

Şimdi varsayalım ki,  $(v_1'(x), v_2'(x))$  (3.14.8) sisteminin (tek) çözümüdür.

Bu takdirde, aşikar olarak, her  $x \in I$  için (3.14.7) sağlanır. Yani  $y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$  fonksiyonu (3.14.2) denkleminin bir çözümüdür [6].

Sonucu bir teorem olarak ifade edelim.

**Teorem 3.14.1.**  $a_0, a_1, a_2$  ve  $Q$  fonksiyonları bir  $I$  açık aralığında sürekli ve  $I$  da  $a_0(x) \neq 0$  olsun.  $y_1$  ve  $y_2$   $I$  da (3.14.3) homojen lineer diferensiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olsun. Eğer  $v_1$  ve  $v_2$  fonksiyonları

$$\begin{aligned} v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) &= \frac{Q(x)}{a_0(x)} \end{aligned}$$

sistemini sağlıyorsa,  $y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$  fonksiyonu (3.14.2) denkleminin bir çözümüdür [6].

### 3.15. Green Fonksiyonu

Aşağıdaki şartları sağlayan  $G(x, \xi): [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  fonksiyonuna  $L$  operatörünün Green Fonksiyonu denir.

1.  $G(x, \xi)$  fonksiyonu süreklidir ve  $x$ 'e göre  $(n-2)$ . mertebeye kadar (bu mertebe dahil) bütün sürekli türevleri vardır.

2. Her  $\xi \in (a, b)$  için  $[a, \xi)$  ve  $(\xi, b]$  aralıklarının her birinde  $G(x, \xi)$  fonksiyonunun  $(n-2)$ . ve  $n$ . mertebeden türevleri var ve  $x$ 'e göre  $(n-1)$ . mertebeden türev fonksiyonu

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi+0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi-0, \xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}$$

özelliğine sahiptir.

3. Her bir  $[a, \xi)$  ve  $(\xi, b]$  aralığında  $G(x, \xi)$  fonksiyonu  $x$  değişkeninin fonksiyonu gibi  $\ell(G) = 0$ ,  $U_\nu(G) = 0$ ,  $\nu = \overline{1, n}$  sınır değer probleminin çözümüdür [17].



#### 4. MATERYAL ve METOD

Bu tez çalışmasında materyal olarak kaynaklar kısmında verilen kitap ve makalelerden ve gerekirse çalıştığımız konu ile ilgili yeni kaynaklardan yararlanılmıştır. Bu kaynaklarda uygulanan yöntemler incelenerek tez konumuzdaki probleme uygulanabilir hale dönüştürülmüştür. Adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin özdeğerlerinin asimptotik davranışlarının incelenmesi için uygulanan karakteristik fonksiyonun kurulması yönteminden, klasik Sturm-Liouville teorisi yöntemlerinden, fonksiyonel analizden bazı temel tanımlar ve simetrik operatörlerin bazı temel özelliklerden, kompleks analizdeki tam fonksiyonların sıfır yerleri ile ilgili olan teoremlerden, son yıllardaki çalışmalarda uygulanan yöntemlerden ve asimptotik yöntemlerden yararlanılmıştır.

## 5. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 5.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi

Bu bölümde

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u \quad (5.1.1)$$

Sturm-Liouville denkleminde,

$$[\beta_1 u(0) - \beta_2 u'(0)] = \lambda [\tilde{\beta}_1 u(0) - \tilde{\beta}_2 u'(0)] \quad (5.1.2)$$

$$-[\beta_3 u(\pi) - \beta_4 u'(\pi)] = \lambda [\tilde{\beta}_3 u(\pi) - \tilde{\beta}_4 u'(\pi)] \quad (5.1.3)$$

sınır şartlarından oluşan sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları incelenmiştir. Burada  $q(x)$ ,  $[0, \pi]$  aralığında sürekli ve  $\lambda$  kompleks özdeğer parametresidir.

### 5.2. Verilen Sınır Değer Problemi İle Aynı Özdeğere Sahip Olan Lineer Operatörün Kurulması

Üç bileşenli  $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ ,  $f(x) \in L_2[0, \pi]$ ,  $F_1, F_2 \in \mathbb{C}$  biçimindeki

elemanların lineer uzayını  $H = L_2[0, \pi] \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  ile gösterelim. Eğer

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_1 & \beta_1 \\ \tilde{\beta}_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_3 & \beta_3 \\ \tilde{\beta}_4 & \beta_4 \end{vmatrix}$$

olmak üzere  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 > 0$  kabul edersek

$$F = \begin{pmatrix} f(x) \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in H, \quad G = \begin{pmatrix} g(x) \\ G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \in H$$

için

$$\langle F, G \rangle = \int_0^\pi f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\rho_1} F_1 \overline{G_1} + \frac{1}{\rho_2} F_2 \overline{G_2} \quad (5.2.1)$$

iç çarpımına göre  $H$  lineer uzayı bir Hilbert uzayı tanımlar. Bu Hilbert uzayı (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer problemine uygun Hilbert uzayıdır. İşlemlerin kolaylığı için

$$\begin{aligned} N_1(u) &= \beta_1 u(0) - \beta_2 u'(0), & \tilde{N}_1(u) &= \tilde{\beta}_1 u(0) - \tilde{\beta}_2 u'(0) \\ N_2(u) &= \beta_3 u(\pi) - \beta_4 u'(\pi), & \tilde{N}_2(u) &= \tilde{\beta}_3 u(\pi) - \tilde{\beta}_4 u'(\pi) \end{aligned}$$

ifadelerini tanımlayalım. Diğer taraftan  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonlarının Wronskian determinantını

$$W(f, g; x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

şeklinde gösterirsek,

$$\begin{aligned} N_1(f)\tilde{N}_1(g) - \tilde{N}_1(f)N_1(g) &= \rho_1 W(f, g; 0) \\ N_2(f)\tilde{N}_2(g) - \tilde{N}_2(f)N_2(g) &= \rho_2 W(f, g; \pi) \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

ifadelerini elde ederiz. Gerçekten;

$$\begin{aligned} N_1(f)\tilde{N}_1(g) - \tilde{N}_1(f)N_1(g) &= (\beta_1 f(0) - \beta_2 f'(0))(\tilde{\beta}_1 g(0) - \tilde{\beta}_2 g'(0)) \\ &\quad - (\tilde{\beta}_1 f(0) - \tilde{\beta}_2 f'(0))(\beta_1 g(0) - \beta_2 g'(0)) \\ &= \beta_1 \tilde{\beta}_1 f(0)g(0) - \beta_1 \tilde{\beta}_2 f(0)g'(0) \\ &\quad - \tilde{\beta}_1 \beta_2 f'(0)g(0) + \beta_2 \tilde{\beta}_2 f'(0)g'(0) \\ &\quad - \beta_1 \tilde{\beta}_1 f(0)g(0) + \tilde{\beta}_1 \beta_2 f(0)g'(0) \\ &\quad + \beta_1 \tilde{\beta}_2 f'(0)g(0) - \beta_2 \tilde{\beta}_2 f'(0)g'(0) \\ &= (\tilde{\beta}_1 \beta_2 - \beta_1 \tilde{\beta}_2)(f(0)g'(0) - f'(0)g(0)) \\ &= \rho_1 W(f, g; 0) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} N_2(f)\tilde{N}_2(g) - \tilde{N}_2(f)N_2(g) &= (\beta_3 f(\pi) - \beta_4 f'(\pi))(\tilde{\beta}_3 g(\pi) - \tilde{\beta}_4 g'(\pi)) \\ &\quad - (\tilde{\beta}_3 f(\pi) - \tilde{\beta}_4 f'(\pi))(\beta_3 g(\pi) - \beta_4 g'(\pi)) \\ &= \beta_3 \tilde{\beta}_3 f(\pi)g(\pi) - \beta_3 \tilde{\beta}_4 f(\pi)g'(\pi) \\ &\quad - \tilde{\beta}_3 \beta_4 f'(\pi)g(\pi) + \beta_4 \tilde{\beta}_4 f'(\pi)g'(\pi) \\ &\quad - \beta_3 \tilde{\beta}_3 f(\pi)g(\pi) + \tilde{\beta}_3 \beta_4 f(\pi)g'(\pi) \\ &\quad + \beta_3 \tilde{\beta}_4 f'(\pi)g(\pi) - \beta_4 \tilde{\beta}_4 f'(\pi)g'(\pi) \\ &= (\tilde{\beta}_3 \beta_4 - \beta_3 \tilde{\beta}_4)(f(\pi)g'(\pi) - f'(\pi)g(\pi)) \\ &= \rho_2 W(f, g; \pi) \end{aligned}$$

eşitliği gösterilebilir. Buna göre (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer problemine uygun  $A: H \rightarrow H$  operatörünü

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f(x) \\ \tilde{N}_1(f) \\ \tilde{N}_2(f) \end{pmatrix} \in H \mid f(x) \in W_2^2(0, \pi) \right\} \quad (5.2.3)$$

$$A(F) = \begin{pmatrix} -f'' + q(x)f \\ N_1(f) \\ -N_2(f) \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

eşitlikleri ile tanımlayım. Burada  $F \in D(A)$  ve  $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ \tilde{N}_1(f) \\ \tilde{N}_2(f) \end{pmatrix}$  dır. Yani  $A$  operatörü

$$A \begin{pmatrix} f(x) \\ \tilde{N}_1(f) \\ \tilde{N}_2(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'' + q(x)f \\ N_1(f) \\ -N_2(f) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır. O halde,

$$AF = \lambda F \quad (5.2.5)$$

eşitliği,

$$\begin{pmatrix} -f'' + q(x)f \\ N_1(f) \\ -N_2(f) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f(x) \\ \tilde{N}_1(f) \\ \tilde{N}_2(f) \end{pmatrix} \quad (5.2.6)$$

biçiminde yazılır. (5.2.6) eşitliğinden

$$-f'' + q(x)f = \lambda f$$

$$[\beta_1 f(0) - \beta_2 f'(0)] = \lambda [\tilde{\beta}_1 f(0) - \tilde{\beta}_2 f'(0)]$$

$$N_1(f) = \lambda \tilde{N}_1(f)$$

$$-[\beta_3 f(\pi) - \beta_4 f'(\pi)] = \lambda [\tilde{\beta}_3 f(\pi) - \tilde{\beta}_4 f'(\pi)]$$

$$-N_2(f) = \lambda \tilde{N}_2(f)$$

elde edilir. Ayrıca  $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in D(A)$  olduğu için  $F_1 = \tilde{N}_1(f)$  ve  $F_2 = \tilde{N}_2(f)$

eşitlikleri sağlanır. O halde, (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer problemi

$$U = \begin{pmatrix} u(x) \\ \tilde{N}_1(u) \\ \tilde{N}_2(u) \end{pmatrix}$$

olmak üzere  $AU = \lambda U$  biçiminde yazılabilir. Tanımladığımız bu A operatörün simetrik olduğu (5.2.2) ifadeleri gereği açıktır.

**5.2.1. Teorem:**  $H = L_2(0, \pi) \oplus \square \oplus \square$  Hilbert uzayında (5.2.3)-(5.2.4)

eşitlikleriyle tanımlı A operatörü simetriktir.

**İspat:** Her  $F, G \in D(A)$  için  $\langle AF, G \rangle = \langle F, AG \rangle$  olduğunu göstermemiz gerekir. Gerçekten H Hilbert Uzayındaki iç çarpımın tanımı gereği

$$\begin{aligned} \langle A(F), G \rangle &= \int_0^\pi (-f''(x) + q(x)f(x))\bar{g}(x)dx + \frac{1}{\rho_1} N_1(f)\tilde{N}_1(g) - \frac{1}{\rho_2} N_2(f)\tilde{N}_2(g) \\ &= -\int_0^\pi f''(x)\bar{g}(x)dx + \int_0^\pi q(x)f(x)\bar{g}(x)dx + \frac{1}{\rho_1} N_1(f)\tilde{N}_1(g) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_2} N_2(f)\tilde{N}_2(g) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Son eşitliğin birinci integraline

$$\begin{cases} f''(x)dx = dv, & f'(x) = v \\ \bar{g}(x) = u, & \bar{g}'(x)dx = du \end{cases}$$

şeklinde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$-\int_0^\pi f''(x)\bar{g}(x)dx = -\bar{g}(x)f'(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\bar{g}'(x)dx \quad (5.2.7)$$

olur. Bulunan bu eşitliğin sağ tarafındaki integrale

$$\begin{cases} f'(x)dx = dt, & f(x) = t \\ \bar{g}'(x) = z, & \bar{g}''(x)dx = dz \end{cases}$$

şeklinde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\int_0^\pi f'(x)\bar{g}'(x)dx = \bar{g}'(x)f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x)\bar{g}''(x)dx \quad (5.2.8)$$

elde edilir. (5.2.7) ve (5.2.8) eşitliklerinden yararlanılarak  $\langle AF, G \rangle$  ifadesi

$$\begin{aligned}
\langle AF, G \rangle &= -\int_0^\pi f(x) \overline{g''(x)} dx + \int_0^\pi q(x) f(x) \overline{g(x)} dx - \overline{g(x)} f'(x) \Big|_0^\pi \\
&\quad + \overline{g'(x)} f(x) \Big|_0^\pi + \frac{1}{\rho_1} N_1(f) \overline{\tilde{N}_1(g)} - \frac{1}{\rho_2} N_2(f) \overline{\tilde{N}_2(g)} \\
&= -\int_0^\pi f(x) \overline{g''(x)} dx + \int_0^\pi q(x) f(x) \overline{g(x)} dx - \overline{g(\pi)} f'(\pi) + \overline{g(0)} f'(0) \\
&\quad + \overline{g'(\pi)} f(\pi) - \overline{g'(0)} f(0) + \frac{1}{\rho_1} N_1(f) \overline{\tilde{N}_1(g)} - \frac{1}{\rho_2} N_2(f) \overline{\tilde{N}_2(g)} \\
&= -\int_0^\pi f(x) \overline{g''(x)} dx + \int_0^\pi q(x) f(x) \overline{g(x)} dx + W(f, \bar{g}; \pi) - W(f, \bar{g}; 0) \\
&\quad + \frac{1}{\rho_1} N_1(f) \overline{\tilde{N}_1(g)} - \frac{1}{\rho_2} N_2(f) \overline{\tilde{N}_2(g)}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan  $H$  uzayındaki iç çarpımın tanımı gereği

$$\begin{aligned}
\langle F, AG \rangle &= \int_0^\pi f(x) \overline{(-\bar{g}''(x) + q(x)g(x))} dx + \frac{1}{\rho_1} \tilde{N}_1(f) \overline{N_1(g)} - \frac{1}{\rho_2} \tilde{N}_2(f) \overline{N_2(g)} \\
&= -\int_0^\pi f(x) \overline{g''(x)} dx + \int_0^\pi f(x) q(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\rho_1} \tilde{N}_1(f) \overline{N_1(g)} - \frac{1}{\rho_2} \tilde{N}_2(f) \overline{N_2(g)}
\end{aligned}$$

dir. Üstteki iki eşitlik taraf taraf çıkarılırsa ve (5.2.2) ifadelerinden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned}
\langle AF, G \rangle - \langle F, AG \rangle &= W(f, \bar{g}; \pi) - W(f, \bar{g}; 0) + \frac{1}{\rho_1} N_1(f) \overline{\tilde{N}_1(g)} - \frac{1}{\rho_2} N_2(f) \overline{\tilde{N}_2(g)} \\
&\quad - \frac{1}{\rho_1} \tilde{N}_1(f) \overline{N_1(g)} + \frac{1}{\rho_2} \tilde{N}_2(f) \overline{N_2(g)} \\
&= W(f, \bar{g}; \pi) - W(f, \bar{g}; 0) + W(f, \bar{g}; 0) - W(f, \bar{g}; \pi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her  $F, G \in D(A)$  için,  $\langle AF, G \rangle = \langle F, AG \rangle$  eşitliği bulunur.

**5.2.2. Sonuç:** Eğer  $\rho_1 = \tilde{\beta}_1 \beta_2 - \beta_1 \tilde{\beta}_2 > 0$  ve  $\rho_2 = \tilde{\beta}_3 \beta_4 - \beta_3 \tilde{\beta}_4 > 0$  şartları sağlanıyorsa (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

**İspat:**  $\lambda$  sayısının (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin özdeğeri olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $\lambda$  sayısı (5.2.3)-(5.2.5) eşitlikleri ile tanımlı  $A$  operatörünün özdeğeri olacaktır. Dolayısıyla  $U_0$ ,  $A$  operatörünün  $\lambda$  özdeğerine uygun herhangi bir öz elementi olmak üzere

$$\lambda \langle U_0, U_0 \rangle_H = \langle \lambda U_0, U_0 \rangle_H = \langle AU_0, U_0 \rangle_H = \langle U_0, AU_0 \rangle_H = \langle U_0, \lambda U_0 \rangle_H = \bar{\lambda} \langle U_0, U_0 \rangle_H$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle U_0, U_0 \rangle_H = 0$$

yazabiliriz.  $\langle U_0, U_0 \rangle_H \neq 0$  olduğundan  $\lambda - \bar{\lambda} = 0$  dolayısıyla  $\lambda = \bar{\lambda}$  bulunur. Bunun anlamı bütün özdeğerler reeldir.

**5.2.3. Sonuç:** Eğer  $\rho_1 = \tilde{\beta}_1\beta_2 - \beta_1\tilde{\beta}_2 > 0$  ve  $\rho_2 = \tilde{\beta}_3\beta_4 - \beta_3\tilde{\beta}_4 > 0$  şartları sağlanıyorsa (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin iki farklı  $\lambda$  ve  $\mu$  özdeğerlerine karşılık gelen  $u_\lambda(x)$  ve  $u_\mu(x)$  özfonksiyonları için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\int_0^\pi u_\lambda(x) u_\mu(x) dx = -\frac{1}{\rho_1} \tilde{N}_1(u_\lambda(x)) \tilde{N}_1(u_\mu(x)) - \frac{1}{\rho_2} \tilde{N}_2(u_\lambda(x)) \tilde{N}_2(u_\mu(x)) \quad (5.2.9)$$

**İspat:**  $H$  - Hilbert uzayında (5.2.4) ile tanımlı  $A$  operatörü için

$$U_\lambda := \begin{bmatrix} u_\lambda(x) \\ \tilde{N}_1(u_\lambda(x)) \\ \tilde{N}_2(u_\lambda(x)) \end{bmatrix}, \quad U_\mu := \begin{bmatrix} u_\mu(x) \\ \tilde{N}_1(u_\mu(x)) \\ \tilde{N}_2(u_\mu(x)) \end{bmatrix}$$

elemanlarının  $\lambda$  ve  $\mu$  özdeğerlerine karşılık gelen öz elementleri olduğu açıktır.  $\lambda$  ve  $\mu$  özdeğerlerinin reel ve  $A$  operatörünün  $H$  -Hilbert uzayında simetrik olduğunu dikkate alırsak,

$$\lambda \langle U_\lambda, U_\mu \rangle_H = \langle \lambda U_\lambda, U_\mu \rangle_H = \langle A U_\lambda, U_\mu \rangle_H = \langle U_\lambda, A U_\mu \rangle_H = \langle U_\lambda, \mu U_\mu \rangle_H = \mu \langle U_\lambda, U_\mu \rangle_H$$

bulmuş oluruz. Buradan

$$\lambda \langle U_\lambda, U_\mu \rangle_H = \mu \langle U_\lambda, U_\mu \rangle_H \Rightarrow (\lambda - \mu) \langle U_\lambda, U_\mu \rangle_H = 0$$

yazılabilir.  $\lambda \neq \mu$  olduğundan

$$\langle U_\lambda, U_\mu \rangle_H = 0 \quad (5.2.10)$$

dır. O halde  $H$ -Hilbert Uzayında tanımlanmış olduğumuz (5.2.1) iç çarpım formülünü dikkate alırsak (5.2.9) ile (5.2.10) ifadelerinin eşdeğer olduğu görülür.

### 5.3. Sınır Değer Problemi İle İlgili Bazı Yardımcı Başlangıç- Değer Problemlerinin Çözümleri ve Bu Çözümlerin Özdeğer Parametresine Göre Analitikliği

Bu bölümde verilen

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [0, \pi] \quad (5.3.1)$$

denkleminin

$$[\beta_1 u(0) - \beta_2 u'(0)] = \lambda [\tilde{\beta}_1 u(0) - \tilde{\beta}_2 u'(0)] \quad (5.3.2)$$

$$-[\beta_3 u(\pi) - \beta_4 u'(\pi)] = \lambda [\tilde{\beta}_3 u(\pi) - \tilde{\beta}_4 u'(\pi)] \quad (5.3.3)$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünü araştırmak için bazı yardımcı başlangıç-değer problemlerinin çözümlerinin mevcudluğu ve bu çözümlerin  $\lambda$  kompleks özdeğer parametresine göre bütün kompleks düzlemde analitikliği gösterilecektir. Daha sonra (5.3.1) denkleminin (5.3.1)-(5.3.3) problemi için temel olacak çözümleri tanımlanacaktır.

**5.3.1. Teorem:** Her  $\lambda \in \square$  için

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [0, \pi] \quad (5.3.4)$$

$$u(0) = \beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2 \quad (5.3.5)$$

$$u'(0) = \beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1 \quad (5.3.6)$$

başlangıç değer probleminin, bir tek  $u = \phi_\lambda(x)$  çözümü mevcuttur ve ayrıca  $x \in [0, \pi]$  değişkeninin her bir değerinde  $\phi_\lambda(x)$  fonksiyonu  $\lambda$  parametresinin tam fonksiyonudur.

**İspat:** Adi diferansiyel denklem teorisinden çok iyi bilinen ve bu teoremin en temel teoremlerinden biri olan Cauchy-Picard teoremi gereği (5.3.4)-(5.3.6) başlangıç-değer probleminin (Cauchy probleminin) her  $\lambda \in \square$  için bir tek  $\phi_\lambda(x)$  çözümü mevcuttur. Bu teoremin esas ve önemli olan kısmını, yani  $\phi_\lambda(x)$  çözümünün, değişkenin her bir  $x \in [0, \pi]$  değeri için  $\lambda \in \square$  değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitik olduğunu ispat edelim.  $\phi_\lambda(x)$  fonksiyonu her  $x \in [0, \pi]$  ve her  $\lambda \in \square$  için (5.3.4) denklemini sağladığından

$$\phi_\lambda''(x) = [-\lambda + q(x)]\phi_\lambda(x)$$

denklemini sağlayacaktır. Burada her iki tarafının  $[0, x]$  aralığında integrali alınırsa,

$$\phi_\lambda'(x) = \int_0^x [-\lambda + q(t)]\phi_\lambda(t) dt + C_1(\lambda) \quad (5.3.7)$$

biçiminde eşitlik elde edilir.  $\lambda$ 'ya bağlı olan  $C_1(\lambda)$  ifadesini bulmak için (5.3.7) de  $x = 0$  yazarsak



$$\phi'_\lambda(x) = C_1(\lambda) \quad (5.3.8)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan  $\phi_\lambda$  fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\phi'_\lambda(0) = \beta_1 - \lambda\tilde{\beta}_1 \quad (5.3.9)$$

eşitliği sağlanır. (5.3.8) ve (5.3.9) ifadelerinden

$$C_1(\lambda) = \beta_1 - \lambda\tilde{\beta}_1 \quad (5.3.10)$$

eşitliği elde edilir. (5.3.10) ifadesi (5.3.7) de yerine yazılırsa her  $x \in [0, \pi]$  ve her

$\lambda \in \square$  için geçerli olan

$$\phi'_\lambda(x) = \int_0^x [-\lambda + q(t)] \phi_\lambda(t) dt + \beta_1 - \lambda\tilde{\beta}_1 \quad (5.3.11)$$

eşitliği elde edilir. (5.3.11) eşitliği  $[0, x]$  aralığında integrallenirse,

$$\phi_\lambda(x) = \int_0^x ds \int_0^s [-\lambda + q(t)] \phi_\lambda(t) dt + x(\beta_1 - \lambda\tilde{\beta}_1) + C_2(\lambda) \quad (5.3.12)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği  $x=0$  için yazarsak  $\phi_\lambda(x)$  fonksiyonunun (5.3.5)

başlangıç şartını sağladığını da dikkate alırsak,

$$C_2(\lambda) = \phi_\lambda(0) \quad (5.3.13)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan  $\phi_\lambda$  fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\phi_\lambda(0) = \beta_2 - \lambda\tilde{\beta}_2 \quad (5.3.14)$$

eşitliği sağlanır. (5.3.13) ve (5.3.14) ifadelerinden

$$C_2(\lambda) = \beta_2 - \lambda\tilde{\beta}_2 \quad (5.3.15)$$

eşitliği elde edilir. (5.3.15) ifadesi (5.3.12) de yerine yazılırsa,

$$\phi_\lambda(x) = \int_0^x ds \int_0^s [-\lambda + q(t)] \phi_\lambda(t) dt + x(\beta_1 - \lambda\tilde{\beta}_1) + \beta_2 - \lambda\tilde{\beta}_2 \quad (5.3.16)$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki integral ifadede integralleme sırası değiştirilirse,

$$\int_0^x ds \int_0^s [-\lambda + q(t)] \phi_\lambda(t) dt = \int_0^x dt \left\{ \int_t^x [-\lambda + q(t)] \phi_\lambda(t) ds \right\} = \int_0^x [-\lambda + q(t)] \phi_\lambda(t) (x-t) dt$$

eşitliği bulunur. Son eşitliği (5.3.16) de yerine yazarsak her  $x \in [0, \pi]$  ve her  $\lambda \in \square$

için geçerli olan

$$\phi_\lambda(x) = \int_0^x [-\lambda + q(t)] \phi_\lambda(t) (x-t) dt + x(\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) + \beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2 \quad (5.3.17)$$

eşitliği (özdeşliği) elde edilir. Böylece  $\phi_\lambda(x)$  çözüm fonksiyonu için (5.3.17) biçiminde verilmiş integral denklem elde edildi. Bu integral denklemin çözümüne (yani  $\phi_\lambda(x)$  fonksiyonuna) yakınsayan fonksiyon dizisinin inşa edilmesi için, integral denklemler teorisinden iyi bilinen ardışık yaklaşma yönteminden yararlanılacaktır. Bu yöntem gereği aşağıdaki rekurrent (ard-arda birbirini üreten) fonksiyonlar dizisi inşa edilecektir.

$$\phi_{0,\lambda}(x) = x(\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) + \beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2 \quad (5.3.18)$$

$$\phi_{n,\lambda}(x) = \phi_{0,\lambda}(x) + \int_0^x [-\lambda + q(t)] \phi_{n-1,\lambda}(t) (x-t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.19)$$

$$M := \max_{t \in [0, \pi]} |q(t)| \quad \text{ve} \quad K(\lambda) = \max_{t \in [0, \pi]} |\phi_{0,\lambda}(t)| \quad \text{gösterimlerinden yararlanılarak}$$

$R > 0$  keyfi sayı olmak üzere  $\{\phi_{n,\lambda}(x)\}$  fonksiyonlar dizisinin herhangi kapalı ve sınırlı  $|\lambda| \leq R$  yuvarında

$$\phi_{0,\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\phi_{n,\lambda}(x) - \phi_{n-1,\lambda}(x)\} \quad (5.3.20)$$

fonksiyonlar dizisinin yakınsaklık durumu incelenecektir. Bu fonksiyonlar dizisi ile  $\{\phi_{n,\lambda}(x)\}$  fonksiyonlar dizisinin ya her ikisinin yakınsak ya da her ikisinin ıraksak oldukları ve de yakınsak oldukları durumda verilmiş (5.3.20) serisinin toplamı ile  $\{\phi_{n,\lambda}(x)\}$  dizisinin limitinin aynı olduğu açıktır. Bu nedenle  $\{\phi_{n,\lambda}(x)\}$  dizisi yerine (5.3.20) serisi incelenecektir. Bu serinin terimleri ard arda değerlendirilecektir.

$$\begin{aligned} |\phi_{1,\lambda}(x) - \phi_{0,\lambda}(x)| &= \left| \int_0^x [\lambda - q(t)] \phi_{0,\lambda}(t) (x-t) dt \right| \leq \int_0^x (R+M) K(\lambda) (x-t) dt \\ &= \frac{1}{2} (R+M) K(\lambda) x^2 \quad (5.3.21) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

$$\phi_{n,\lambda}(x) = \phi_{0,\lambda}(x) + \int_0^x [-\lambda + q(t)] \phi_{n-1,\lambda}(t) (x-t) dt$$

$$\phi_{n-1,\lambda}(x) = \phi_{0,\lambda}(x) + \int_0^x [-\lambda + q(t)] \phi_{n-2,\lambda}(t)(x-t) dt$$

ifadelerinden yararlanılarak  $n \geq 2$  için geçerli olan

$$\phi_{n,\lambda}(x) - \phi_{n-1,\lambda}(x) = \int_0^x [-\lambda + q(t)] [\phi_{n-1,\lambda}(t) - \phi_{n-2,\lambda}(t)](x-t) dt \quad (5.3.22)$$

eşitliği elde edilir. (5.3.21) eşitsizliğinden ve (5.3.22) eşitliğinden yararlanılarak (5.3.20) serisinin diğer terimleri değerlendirilecektir.  $n = 2$  için

$$\begin{aligned} |\phi_{2,\lambda}(x) - \phi_{1,\lambda}(x)| &\leq \int_0^x [-\lambda + q(t)] [\phi_{1,\lambda}(t) - \phi_{0,\lambda}(t)](x-t) dt \\ &\leq \frac{1}{2} (R+M)^2 K(\lambda) \int_0^x t^2 (x-t) dt \\ &= (R+M)^2 K(\lambda) \frac{x^4}{4!} \end{aligned}$$

bulunur. Böyle devam ederek tümevarım yöntemi ile

$$|\phi_{n,\lambda}(x) - \phi_{n-1,\lambda}(x)| \leq (R+M)^n K(\lambda) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad n=1,2,\dots \quad (5.3.23)$$

eşitsizliğinin her  $n \geq 1$  için sağlandığı kolayca bulunur.  $x \in [0, \pi]$  olduğu için  $0 \leq x^{2n} \leq \pi^{2n}$  olur. Dolayısıyla (5.3.23) ifadesinden

$$|\phi_{n,\lambda}(x) - \phi_{n-1,\lambda}(x)| \leq \frac{[(R+M)\pi^2]^n K(\lambda)}{(2n)!}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$K(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(R+M)\pi^2]^n K(\lambda)}{(2n)!}$$

sayısal serisi yakınsak olduğundan Weierstrass M-Kriteri gereği (5.3.20) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.  $\{\phi_{n,\lambda}(x)\}$  fonksiyonlarının (5.3.18) ve (5.3.19) eşitlikleri ile verilmiş tanımları gereği bu fonksiyonların her biri her  $x \in [0, \pi]$  için  $\{\lambda \in \square : |\lambda| \leq R\}$  bölgesinde analitik olduğundan ve her  $x \in [0, \pi]$  için  $\{\phi_{n,\lambda}(x)\}$  dizisi  $\phi_{\lambda}(x)$  fonksiyonuna düzgün olarak yakınsak olduğundan  $\phi_{\lambda}(x)$  fonksiyonu da her  $x \in [0, \pi]$  için  $\lambda$  değişkeninin tam fonksiyonudur.

**5.3.2. Sonuç:**  $\phi_\lambda(x)$  fonksiyonu (5.3.1) denklemini ve (5.3.2) sınır şartını sağlayan ve her  $x \in [0, \pi]$  için  $\lambda$  parametresinin tam fonksiyonu olan çözümdür.

**5.3.3. Teorem:** Her  $\lambda \in \mathbb{C}$  için

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [0, \pi] \quad (5.3.24)$$

$$u(\pi) = \beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4 \quad (5.3.25)$$

$$u'(\pi) = \beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3 \quad (5.3.26)$$

başlangıç değer probleminin, bir tek  $u = \chi_\lambda(x)$  çözümü mevcuttur ve ayrıca  $x \in [0, \pi]$  değişkeninin her bir değerinde  $\chi_\lambda(x)$  fonksiyonu  $\lambda$  parametresinin tam fonksiyonudur.

**İspat:** Adi diferansiyel denklem teorisinden çok iyi bilinen ve bu teorinin en temel teoremlerinden biri olan Cauchy-Pikard teoremi gereği verilmiş (5.3.24)-(5.3.26) başlangıç-değer probleminin (Cauchy probleminin) her  $\lambda \in \mathbb{C}$  için bir tek  $\chi_\lambda(x)$  çözümü mevcuttur. Bu teoremin esas ve önemli olan kısmını, yani  $\chi_\lambda(x)$  çözümünün, değişkeninin her bir  $x \in [0, \pi]$  değeri için  $\lambda \in \mathbb{C}$  değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitik olduğunu ispat edelim.  $\chi_\lambda(x)$  fonksiyonu her  $x \in [0, \pi]$  ve her  $\lambda \in \mathbb{C}$  için (5.3.24) denklemini sağladığından

$$\chi_\lambda''(x) = [-\lambda + q(x)]\chi_\lambda(x)$$

denklemini sağlayacaktır. Burada her iki tarafının  $[x, \pi]$  aralığında integrali alınırsa,

$$\chi_\lambda'(x) = \int_x^\pi [-\lambda + q(t)]\chi_\lambda(t)dt + C_1(\lambda) \quad (5.3.27)$$

biçiminde eşitlik elde edilir.  $\lambda$ 'ya bağlı olan  $C_1(\lambda)$  ifadesini bulmak için (5.3.27) ifadesinde  $x = \pi$  yazarsak

$$\chi_\lambda'(\pi) = C_1(\lambda) \quad (5.3.28)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan  $\chi_\lambda$  fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\chi_\lambda'(\pi) = \beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3 \quad (5.3.29)$$

eşitliği sağlanır. (5.3.28) ve (5.3.29) ifadelerinden

$$C_1(\lambda) = \beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3 \quad (5.3.30)$$

Eşitliği elde edilir. (5.3.30) ifadesi (5.3.27) de yerine yazılırsa her  $x \in [0, \pi]$  ve her  $\lambda \in \square$  için geçerli olan

$$\chi'_\lambda(x) = \int_x^\pi [-\lambda + q(t)] \chi_\lambda(t) dt + \beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3 \quad (5.3.31)$$

eşitliği elde edilir. (5.3.31) eşitliği  $[x, \pi]$  aralığında integrallenirse,

$$\chi_\lambda(x) = \int_x^\pi ds \int_s^\pi [-\lambda + q(t)] \chi_\lambda(t) dt + x(\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) + C_2 \quad (5.3.32)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği  $x = \pi$  için yazarsak  $\chi_\lambda(x)$  fonksiyonunun (5.3.25) başlangıç şartını sağladığını da dikkate alırsak,

$$C_2(\lambda) = \chi_\lambda(\pi) - \pi(\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) \quad (5.3.33)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan  $\chi_\lambda$  fonksiyonunun tanım gereği,

$$\chi_\lambda(\pi) = \beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4 \quad (5.3.34)$$

eşitliği sağlanır. (5.3.33) ve (5.3.34) ifadelerinden

$$C_2(\lambda) = \beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4 - \pi(\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) \quad (5.3.35)$$

eşitliği elde edilir. (5.3.35) ifadesi (5.3.32) de yerine yazılırsa,

$$\chi_\lambda(x) = \int_x^\pi ds \int_s^\pi [-\lambda + q(t)] \chi_\lambda(t) dt + x(\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) + \beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4 \quad (5.3.36)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte integralleme sırası değiştirilirse,

$$\int_x^\pi ds \int_s^\pi [-\lambda + q(t)] \chi_\lambda(t) dt = \int_x^\pi dt \left\{ \int_x^t [-\lambda + q(t)] \chi_\lambda(t) ds \right\} = \int_x^\pi [-\lambda + q(t)] \chi_\lambda(t) (x-t) dt$$

eşitliği bulunur. Son eşitliği (5.3.36) de yerine yazarsak her  $x \in [0, \pi]$  ve her  $\lambda \in \square$

için geçerli olan

$$\chi_\lambda(x) = \int_x^\pi [-\lambda + q(t)] \chi_\lambda(t) (x-t) dt + x(\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) + \beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4 - \pi(\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) \quad (5.3.37)$$

eşitliği (özdeşliği) elde edilir. Böylece  $\chi_\lambda(x)$  çözüm fonksiyonu için (5.3.37) biçiminde verilmiş integral denklem elde edildi. Bu integral denklemin çözümüne (yani  $\chi_\lambda(x)$  fonksiyonuna) yakınsayan fonksiyon dizisinin inşa edilmesi için, integral denklemler teorisinden iyi bilinen ardışık yaklaşma yönteminden

yararlanılacaktır. Bu yöntem gereği aşağıdaki rekurrent (ard-arda birbirini üreten) fonksiyonlar dizisi inşa edilecektir.

$$\chi_{0,\lambda}(x) = x(\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3) + \beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_4 + \pi(\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3) \quad (5.3.38)$$

$$\chi_{n,\lambda}(x) = \chi_{0,\lambda}(x) + \int_x^\pi [-\lambda + q(t)] \chi_{n-1,\lambda}(t)(x-t) dt, \quad n=1,2,\dots \quad (5.3.39)$$

İlk önce  $M := \max_{t \in [0,\pi]} |q(t)|$  ve  $K(\lambda) = \max_{t \in [0,\pi]} |\chi_{0,\lambda}(t)|$  gösterimlerinden

yararlanılarak  $R > 0$  keyfi sayı olmak üzere  $\{\chi_{n,\lambda}(x)\}$  fonksiyonlar dizisinin herhangi kapalı ve sınırlı  $|\lambda| \leq R$  yuvarında

$$\chi_{0,\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\chi_{n,\lambda}(x) - \chi_{n-1,\lambda}(x)\} \quad (5.3.40)$$

fonksiyonlar dizisinin yakınsaklık durumu incelenecektir. Bu fonksiyonlar dizisi ile  $\{\chi_{n,\lambda}(x)\}$  fonksiyonlar dizisinin ya her ikisinin yakınsak ya da her ikisinin ıraksak oldukları ve de yakınsak oldukları durumda verilmiş (5.3.40) serisinin toplamı ile  $\{\chi_{n,\lambda}(x)\}$  dizisinin limitinin aynı olduğu açıktır. Bu nedenle  $\{\chi_{n,\lambda}(x)\}$  dizisi yerine (5.3.40) serisi incelenecektir. Bu serinin terimleri ard arda değerlendirilecektir.

$$\begin{aligned} |\chi_{1,\lambda}(x) - \chi_{0,\lambda}(x)| &= \left| \int_\pi^x [\lambda - q(t)] \chi_{0,\lambda}(t)(x-t) dt \right| \leq \int_\pi^x (R+M) K(\lambda)(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2} (R+M) K(\lambda) (x-\pi)^2 \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

eşitsizliği bulunur.

$$\chi_{n,\lambda}(x) = \chi_{0,\lambda}(x) + \int_\pi^x [-\lambda + q(t)] \chi_{n-1,\lambda}(t)(x-t) dt$$

$$\chi_{n-1,\lambda}(x) = \chi_{0,\lambda}(x) + \int_\pi^x [-\lambda + q(t)] \chi_{n-2,\lambda}(t)(x-t) dt$$

ifadelerinden yararlanılarak  $n \geq 2$  için geçerli olan

$$\chi_{n,\lambda}(x) - \chi_{n-1,\lambda}(x) = \int_\pi^x [-\lambda + q(t)] [\chi_{n-1,\lambda}(t) - \chi_{n-2,\lambda}(t)] (x-t) dt \quad (5.3.42)$$

eşitliği elde edilir. (5.3.41) eşitsizliğinden ve (5.3.42) eşitliğinden yararlanılarak (5.3.40) serisinin diğer terimleri değerlendirilecektir.  $n=2$  için

$$\begin{aligned}
|\chi_{2,\lambda}(x) - \chi_{1,\lambda}(x)| &\leq \int_{\pi}^x [-\lambda + q(t)] [\chi_{1,\lambda}(t) - \chi_{0,\lambda}(t)] (x-t) dt \\
&\leq \frac{1}{2} (R+M)^2 K(\lambda) \int_{\pi}^x (t-\pi)^2 (x-t) dt \\
&= (R+M)^2 K(\lambda) \frac{(x-\pi)^4}{4!}
\end{aligned}$$

bulunur. Böyle devam ederek tümevarım yöntemi ile

$$|\chi_{n,\lambda}(x) - \chi_{n-1,\lambda}(x)| \leq (R+M)^n K(\lambda) \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}, \quad n=1,2,\dots \quad (5.3.43)$$

eşitsizliğinin her  $n \geq 1$  için sağlandığı kolayca bulunur.  $x \in [0, \pi]$  olduğu için  $0 \leq (x-\pi)^{2n} \leq \pi^{2n}$  olur. Dolayısıyla (5.3.43) ifadesinden

$$|\chi_{n,\lambda}(x) - \chi_{n-1,\lambda}(x)| \leq \frac{[(R+M)\pi^2]^n K(\lambda)}{(2n)!}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$K(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(R+M)\pi^2]^n K(\lambda)}{(2n)!}$$

sayısal serisi yakınsak olduğundan Weierstrass M-Kriteri gereği (5.3.40) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.  $\{\chi_{n,\lambda}(x)\}$  fonksiyonlarının (5.3.38) ve (5.3.39) eşitlikleri ile verilmiş tanımları gereği bu fonksiyonların her biri her  $x \in [0, \pi]$  için  $\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq R\}$  bölgesinde analitik olduğundan ve her  $x \in [0, \pi]$  için  $\{\chi_{n,\lambda}(x)\}$  dizisi  $\chi_{\lambda}(x)$  fonksiyonuna düzgün olarak yakınsak olduğundan  $\chi_{\lambda}(x)$  fonksiyonu da her  $x \in [0, \pi]$  için  $\lambda$  değişkeninin tam fonksiyonudur.

**5.3.4. Sonuç:**  $\chi_{\lambda}(x)$  fonksiyonu (5.3.1) denklemini ve (5.3.3) sınır şartını sağlayan ve her  $x \in [0, \pi]$  için  $\lambda$  parametresinin tam fonksiyonu olan çözümdür.

#### 5.4. Temel Çözümler ve Karakteristik Fonksiyon

Bu kesimde

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [0, \pi] \quad (5.4.1)$$

$$\tau_1 := [\beta_1 u(0) - \beta_2 u'(0)] - \lambda [\tilde{\beta}_1 u(0) - \tilde{\beta}_2 u'(0)] = 0 \quad (5.4.2)$$

$$\tau_2 := [\beta_3 u(\pi) - \beta_4 u'(\pi)] + \lambda [\tilde{\beta}_3 u(\pi) - \tilde{\beta}_4 u'(\pi)] = 0 \quad (5.4.3)$$

sınır değer probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları arasındaki bazı temel bağıntıları incelenecektir.

$$\begin{aligned} -u'' + q(x)u &= \lambda u, \quad x \in [0, \pi] \\ \begin{cases} u(0) = \beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2 \\ u'(0) = \beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

şartlarından oluşan başlangıç-değer probleminin çözümünü  $\phi_\lambda(x)$  ile,

$$\begin{aligned} -u'' + q(x)u &= \lambda u, \quad x \in [0, \pi] \\ \begin{cases} u(\pi) = \beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4 \\ u'(\pi) = \beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

şartlarını sağlayan çözümünü  $\chi_\lambda(x)$  ile gösterelim. Bu  $\phi_\lambda(x)$  ve  $\chi_\lambda(x)$  çözüm fonksiyonları  $\lambda$  parametresinin tam analitik fonksiyonlarıdır [14]. Bundan dolayı

$$W(x, \lambda) = W(\phi_\lambda, \chi_\lambda; x) = \phi_\lambda(x) \chi'_\lambda(x) - \phi'_\lambda(x) \chi_\lambda(x) \quad (5.4.6)$$

Wronskian determinanı  $[0, \pi]$  aralığında  $x$  - değişkeninden bağımsız olup [5],  $\lambda$ 'nın tam analitik fonksiyonudur.  $W(\phi_\lambda, \chi_\lambda; x)$  Wronskian determinantının  $x$  değişkeninden bağımsız olduğu açıktır. Bu nedenle bundan sonra  $W(x, \lambda)$  yerine sadece  $W(\lambda)$  yazacağız. Burada özel olarak  $x=0$  yazarsak, bu fonksiyon için

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \phi_\lambda(x) \chi'_\lambda(x) - \phi'_\lambda(x) \chi_\lambda(x) = \phi_\lambda(0) \chi'_\lambda(0) - \phi'_\lambda(0) \chi_\lambda(0) \\ &= (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2) \chi'_\lambda(0) - (\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) \chi_\lambda(0) = \beta_2 \chi'_\lambda(0) - \lambda \tilde{\beta}_2 \chi'_\lambda(0) - \beta_1 \chi_\lambda(0) + \lambda \tilde{\beta}_1 \chi_\lambda(0) \\ &= -N_1(\chi_\lambda) + \lambda \tilde{N}_1(\chi_\lambda) \end{aligned}$$

ifadesini, özel olarak  $x=\pi$  yazarsak, bu fonksiyon için

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \phi_\lambda(x) \chi'_\lambda(x) - \phi'_\lambda(x) \chi_\lambda(x) = \phi_\lambda(\pi) \chi'_\lambda(\pi) - \phi'_\lambda(\pi) \chi_\lambda(\pi) \\ &= \phi_\lambda(\pi) (\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) - \phi'_\lambda(\pi) (\beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4) = \phi_\lambda(\pi) \beta_3 + \lambda \phi_\lambda(\pi) \tilde{\beta}_3 - \phi'_\lambda(\pi) \beta_4 - \lambda \phi'_\lambda(\pi) \tilde{\beta}_4 \\ &= N_2(\phi_\lambda) + \lambda \tilde{N}_2(\phi_\lambda) \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Benzer olarak



$$\begin{aligned}
\tilde{N}_1(\phi_\lambda) &= \tilde{\beta}_1\phi_\lambda(0) - \tilde{\beta}_2\phi'_\lambda(0) = \tilde{\beta}_1(\beta_2 - \lambda\tilde{\beta}_2) - \tilde{\beta}_2(\beta_1 - \lambda\tilde{\beta}_1) \\
&= \tilde{\beta}_1\beta_2 - \lambda\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 - \beta_1\tilde{\beta}_2 + \lambda\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_1\beta_2 - \beta_1\tilde{\beta}_2 \\
&= \rho_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_2(\chi_\lambda) &= \tilde{\beta}_3\chi_\lambda(\pi) - \tilde{\beta}_4\chi'_\lambda(\pi) = \tilde{\beta}_3(\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_4) - \tilde{\beta}_4(\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3) \\
&= \tilde{\beta}_3\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_3\tilde{\beta}_4 - \beta_3\tilde{\beta}_4 - \lambda\tilde{\beta}_3\tilde{\beta}_4 = \tilde{\beta}_3\beta_4 - \beta_3\tilde{\beta}_4 \\
&= \rho_2
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

**5.4.1. Teorem:** (5.4.1)-(5.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak  $W(\lambda)$  fonksiyonunun sıfır yerlerinden ibarettir.

**İspat:**  $W(\lambda)$  nın bir sıfırı  $\lambda_0$  olsun. O halde,

$$W(\lambda_0) = \phi_{\lambda_0}(x)\chi'_{\lambda_0}(x) - \phi'_{\lambda_0}(x)\chi_{\lambda_0}(x) = 0$$

olacaktır. Bu durumda  $\phi_{\lambda_0}(x)$  ve  $\chi_{\lambda_0}(x)$  fonksiyonları, diferansiyel denklemler teorisinde bilinen “ $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  fonksiyonları  $n$ . mertebeden diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri ise, bu fonksiyonların Wronskian determinantı bütün noktalarda sıfırdan farklıdır.” teoreminin sonucu olarak lineer bağımlıdır. Yani

$$\phi_{\lambda_0}(x) = k\chi_{\lambda_0}(x), \quad x \in [0, \pi] \quad (5.4.7)$$

olacak şekilde bir  $k \neq 0$  sabiti mevcuttur.

$\phi_{\lambda_0}(x)$  fonksiyonu (5.4.1) denklemini ve (5.4.2) sınır şartını,  $\chi_{\lambda_0}(x)$  fonksiyonu ise (5.4.1) denklemini ve (5.4.3) sınır şartını sağladığı açıktır. Dolayısıyla (5.4.7) gereği bu fonksiyonların her biri iki sınır şartını da sağlar. O halde bu fonksiyonlar (5.4.1)-(5.4.3) sınır değer probleminin çözümü olur. Bu ise  $\lambda = \lambda_0$  sayısının özdeğer olduğunu gösterir.

Şimdi ise  $\lambda = \lambda_0$  sayısının, (5.4.1)-(5.4.3) probleminin özdeğeri olduğunu kabul ederek,  $W(\lambda_0) = 0$  eşitliğinin doğruluğunu ispatlayalım. Herhangi  $\lambda = \lambda_0$  özdeğeri için,  $W(\lambda_0) \neq 0$  olduğu kabul edilsin. O halde  $\phi_{\lambda_0}(x)$  ve  $\chi_{\lambda_0}(x)$  çözüm fonksiyonları lineer bağımsız olur [5]. (5.4.1) denkleminin genel çözümü için

$$u(x, \lambda) = C_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(x)$$

yazılabilir. Dolayısıyla  $\lambda_0$  özdeğerine uygun olan her bir  $u_0(x)$  fonksiyonu için,

$$u_0(x) = C_1(\lambda_0)\phi_{\lambda_0}(x) + C_2(\lambda_0)\chi_{\lambda_0}(x)$$

olacak şekilde en az biri sıfırdan farklı olan  $C_1, C_2$  sayıları bulunur. (5.4.1) eşitliği

ile verilen  $u_0(x)$  özfonksiyonu (5.4.2)-(5.4.3) sınır şartlarını sağladığından

$$\tau_1(\phi_{\lambda_0}(x))C_1 + \tau_1(\chi_{\lambda_0}(x))C_2 = 0$$

$$\tau_2(\phi_{\lambda_0}(x))C_1 + \tau_2(\chi_{\lambda_0}(x))C_2 = 0$$

eşitlikleri geçerlidir.  $C_i$  katsayılarının en az biri sıfırdan farklı olduğu için buradan

$$\Delta\lambda_0 = \begin{vmatrix} \tau_1(\phi_{\lambda_0}(x)) & \tau_1(\chi_{\lambda_0}(x)) \\ \tau_2(\phi_{\lambda_0}(x)) & \tau_2(\chi_{\lambda_0}(x)) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4.8)$$

elde edilir. Şimdi bu determinantın elemanları hesaplanırsa  $\phi(x, \lambda)$  ve  $\chi(x, \lambda)$

fonksiyonlarının tanımı gereği,

$$\begin{aligned} \tau_1(\phi_{\lambda_0}(x)) &= [\beta_1\phi_{\lambda_0}(0) - \beta_2\phi'_{\lambda_0}(0)] - \lambda[\tilde{\beta}_1\phi_{\lambda_0}(0) - \tilde{\beta}_2\phi'_{\lambda_0}(0)] \\ &= \beta_1(\beta_2 - \lambda\tilde{\beta}_2) - \beta_2(\beta_1 - \lambda\tilde{\beta}_1) - \lambda\tilde{\beta}_1(\beta_2 - \lambda\tilde{\beta}_2) + \lambda\tilde{\beta}_2(\beta_1 - \lambda\tilde{\beta}_1) \\ &= \beta_1\beta_2 - \lambda\beta_1\tilde{\beta}_2 - \beta_1\beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_1\beta_2 - \lambda\tilde{\beta}_1\beta_2 + \lambda\lambda\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 + \lambda\beta_1\tilde{\beta}_2 - \lambda\lambda\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_1(\chi_{\lambda_0}(x)) &= [\beta_1\chi_{\lambda_0}(0) - \beta_2\chi'_{\lambda_0}(0)] - \lambda[\tilde{\beta}_1\chi_{\lambda_0}(0) - \tilde{\beta}_2\chi'_{\lambda_0}(0)] \\ &= \beta_1\chi_{\lambda_0}(0) - \beta_2\chi'_{\lambda_0}(0) - \lambda\tilde{\beta}_1\chi_{\lambda_0}(0) + \lambda\tilde{\beta}_2\chi'_{\lambda_0}(0) \\ &= N_1(\chi_{\lambda_0}) - \lambda\tilde{N}_1(\chi_{\lambda_0}) \\ &= -W(\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2(\phi_{\lambda_0}(x)) &= [\beta_3\phi_{\lambda_0}(\pi) - \beta_4\phi'_{\lambda_0}(\pi)] + \lambda[\tilde{\beta}_3\phi_{\lambda_0}(\pi) - \tilde{\beta}_4\phi'_{\lambda_0}(\pi)] \\ &= \beta_3\phi_{\lambda_0}(\pi) - \beta_4\phi'_{\lambda_0}(\pi) + \lambda\tilde{\beta}_3\phi_{\lambda_0}(\pi) - \lambda\tilde{\beta}_4\phi'_{\lambda_0}(\pi) \\ &= N_2(\phi) + \lambda\tilde{N}_2(\phi) \\ &= W(\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2(\chi_{\lambda_0}(x)) &= -[\beta_3\chi_{\lambda_0}(\pi) - \beta_4\chi'_{\lambda_0}(\pi)] - \lambda[\tilde{\beta}_3\chi_{\lambda_0}(\pi) - \tilde{\beta}_4\chi'_{\lambda_0}(\pi)] \\ &= -\beta_3(\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_4) + \beta_4(\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3) - \lambda\tilde{\beta}_3(\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_4) + \lambda\tilde{\beta}_4(\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3) \\ &= -\beta_3\beta_4 - \lambda\beta_3\tilde{\beta}_4 + \beta_3\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_3\beta_4 - \lambda\tilde{\beta}_3\beta_4 - \lambda\lambda\tilde{\beta}_3\tilde{\beta}_4 + \lambda\beta_3\tilde{\beta}_4 + \lambda\lambda\tilde{\beta}_3\tilde{\beta}_4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (5.4.8) determinantında yerlerine yazılırsa,

$$\Delta\lambda_0 = \begin{vmatrix} 0 & -W(\lambda) \\ W(\lambda) & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 - (-W(\lambda))(W(\lambda)) = 0 \Rightarrow W(\lambda) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu ise  $W(\lambda_0) \neq 0$  kabulüyle çelişir ve teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi ise normalleştirilmiş özelementleri bulalım.  $W(\lambda)$  fonksiyonunun sıfırlarını  $n = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere  $\lambda_n$  ile gösterirsek

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{\lambda_n}(x) \\ \tilde{N}_1(\phi_{\lambda_n}) \\ \tilde{N}_2(\phi_{\lambda_n}) \end{pmatrix} \in D(A)$$

eşitliği ile tanımladığımız  $\Phi_n$  elementleri

$$A\Phi_n = \lambda_n \Phi_n$$

denklemini sağlar. Dolayısıyla  $\Phi_n$ 'ler  $A$  operatörünün özelementleri olur.

$W(\lambda)$  fonksiyonunun her  $\lambda_n$  sıfırı için (5.4.6) gereği  $\phi_{\lambda_n}(x)$  ile  $\chi_{\lambda_n}(x)$  lineer bağımlı olurlar. O halde her  $n = 0, 1, 2, \dots$  için

$$\chi_{\lambda_n}(x) = k_n \phi_{\lambda_n}(x), \quad x \in [0, \pi]$$

olacak şekilde  $k_n \neq 0$  sabiti vardır.  $A$  operatörü simetrik olduğu için  $\lambda_n \neq \lambda_m$  iken bu özdeğerlere uygun olan  $\Phi_n$  ve  $\Phi_m$  özelementleri ortogonal olur [31]. Yani  $\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = 0$  dir. O halde  $A$  operatörünün  $\Phi_n$  özelementlerinin normalleştirilmiş halini

$$\Psi_n = \frac{\Phi_n}{\|\Phi_n\|} = \begin{pmatrix} \psi_{\lambda_n}(x) \\ \tilde{N}_1(\psi_{\lambda_n}) \\ \tilde{N}_2(\psi_{\lambda_n}) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

## 5.5. $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ Çözüm Fonksiyonlarının Asimptotiği

**5.5.1. Lemma:**  $\lambda = s^2$  olmak üzere (5.1.1) diferansiyel denkleminin (5.4.4) şartını sağlayan çözümü

$$\phi_\lambda(x) = (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{1}{s} (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \phi_\lambda(y) dy$$

integral denklemini sağlar.

**İspat:** (5.1.1) diferansiyel denklemini

$$u'' + \lambda u = qu \quad (5.5.3)$$

biçiminde yazdıktan sonra bu denklemi homojen olmayan denklem gibi düşünerek sabitin değişimi yöntemiyle çözelim. Uygun  $u'' + \lambda u = 0$  denkleminin genel çözümü

$$u(x, s) = C_1 \cos sx + C_2 \sin sx$$

biçiminde olduğu için (5.5.3) denkleminin genel çözümünü

$$u(x, s) = C_1(x, s) \cos sx + C_2(x, s) \sin sx \quad (5.5.4)$$

biçiminde arayacağız. Sabitin değişimi yöntemi gereği,

$$C_1'(x, s) \cos sx + C_2'(x, s) \sin sx = 0$$

$$-C_1'(x, s) s \sin sx + C_2'(x, s) s \cos sx = q(x) u(x, s)$$

denklemlerini sağlasınlar. Bu sistemi  $C_1(x, s)$  ve  $C_2(x, s)$  değişkenlerine göre lineer denklem sistemi gibi çözersek,

$$\begin{cases} C_1'(x, s) = \frac{-q(x) u(x, s) \sin sx}{s} \\ C_2'(x, s) = \frac{q(x) u(x, s) \cos sx}{s} \end{cases} \quad (5.5.5)$$

bulunur. (5.5.5)'den bulduğumuz

$$C_1(x, s) = -\frac{1}{s} \int_0^x \sin sy q(y) u(y, s) dy + C_1$$

$$C_2(x, s) = \frac{1}{s} \int_0^x \cos sy q(y) u(y, s) dy + C_2$$

ifadelerini (5.5.4)'de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} u(x, s) &= -\frac{1}{s} \cos sx \int_0^x \sin sy q(y) u(y, s) dy + \frac{1}{s} \sin sx \int_0^x \cos sy q(y) u(y, s) dy \\ &\quad + C_1 \cos sx + C_2 \sin sx \\ &= \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) u(y, s) dy + C_1 \cos sx + C_2 \sin sx \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

eşitliğini elde ederiz. (5.1.1) denkleminin (5.4.4) şartını sağlayan çözümünü aradığımızdan bu şartları kullanırsak

$$\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2 = \frac{1}{s} \int_0^0 \sin s(0-y) q(y) u(y, s) dy + C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan  $C_1 = \beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2$  bulunur. (5.5.6) ifadesinin türevini alırsak,

$$\begin{aligned} u'(x, s) &= \sin sx \int_0^x \sin sy q(y) u(y, s) dy \\ &\quad - \frac{1}{s} \cos sx [\sin sx q(x) u(x, s) x' - \sin s0 q(0) u(0, s) 0'] \\ &\quad + \cos sx \int_0^x \cos sy q(y) u(y, s) dy \\ &\quad + \frac{1}{s} \sin sx [\cos sx q(x) u(x, s) x' - \cos s0 q(0) u(0, s) 0'] \\ &\quad - sC_1 \sin sx + sC_2 \cos sx \\ &= \sin sx \int_0^x \sin sy q(y) u(y, s) dy + \cos sx \int_0^x \cos sy q(y) u(y, s) dy \\ &\quad - sC_1 \sin sx + sC_2 \cos sx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$u'(x, s) = \int_0^x \cos s(x-y) q(y) u(y, s) dy - sC_1 \sin sx + sC_2 \cos sx \quad (5.5.7)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifadede (5.4.4) şartını kullanırsak

$$\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1 = \int_0^0 \cos s(0-y) q(y) u(y, s) dy - sC_1 \sin 0 + sC_2 \cos 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan  $C_2 = \frac{\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1}{s}$  bulunur. Bulunan  $C_1, C_2$  değerlerini

(5.5.6) ve (5.5.7) ifadelerinde yerlerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\begin{aligned} u(x, s) &= (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{1}{s} (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) u(y, s) dy \\ u'(x, s) &= -s(\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \sin sx + (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \cos sx + \int_0^x \cos s(x-y) q(y) u(y, s) dy \end{aligned}$$

integral denklemleri elde edilir. Buradan

$$\phi_\lambda(x) = (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{1}{s} (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \phi_\lambda(y) dy$$

yazılabilir ve ispat tamamlanır.

**5.5.2. Sonuç:**  $\phi_\lambda(x)$  çözüm fonksiyonu için

$$\phi_\lambda(x) = (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{1}{s} (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \phi_\lambda(y) dy$$

$$\phi'_\lambda(x) = -s (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \sin sx + (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \cos sx + \int_0^x \cos s(x-y) q(y) \phi_\lambda(y) dy$$

eşitlikleri sağlanır.

**5.5.3. Lemma:**  $\lambda = s^2$  olmak üzere (5.1.1) diferansiyel denkleminin (5.4.5) şartını sağlayan çözümü

$$\chi_\lambda(x) = (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \cos s(x-\pi) + \frac{(\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3)}{s} \sin s(x-\pi) - \frac{1}{s} \int_x^\pi \sin s(x-y) q(y) \chi_\lambda(y) dy$$

integral denklemini sağlar.

**İspat:** Benzer şekilde ispat edelim. O halde (5.5.5)'den bulduğumuz

$$C_1(x, s) = \frac{1}{s} \int_x^\pi \sin sy q(y) u(y, s) dy + C_1$$

$$C_2(x, s) = -\frac{1}{s} \int_x^\pi \cos sy q(y) u(y, s) dy + C_2$$

ifadelerini (5.5.4) de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} u(x, s) &= \frac{1}{s} \cos sx \int_x^\pi \sin sy q(y) u(y, s) dy - \frac{1}{s} \sin sx \int_x^\pi \cos sy q(y) u(y, s) dy \\ &\quad + C_1 \cos sx + C_2 \sin sx \\ &= -\frac{1}{s} \int_x^\pi \sin s(x-y) q(y) u(y, s) dy + C_1 \cos sx + C_2 \sin sx \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

formülünü elde ederiz. (5.1.1) denkleminin (5.4.5) şartını sağlayan çözümünü aradığımızdan bu şartları kullanırsak

$$\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4 = -\frac{1}{s} \int_\pi^\pi \sin s(\pi-y) q(y) u(y, s) dy + C_1 \cos s\pi + C_2 \sin s\pi$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4 = C_1 \cos s\pi + C_2 \sin s\pi \quad (5.5.9)$$

bulunur. (5.5.8) ifadesinin türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
u'(x, s) &= -\sin sx \int_x^\pi \sin sy q(y) u(y, s) dy \\
&\quad + \frac{1}{s} \cos sx \left[ \sin s\pi q(\pi) u(\pi, s) \pi' - \sin sx q(x) u(x, s) x' \right] \\
&\quad - \cos sx \int_x^\pi \cos sy q(y) u(y, s) dy \\
&\quad - \frac{1}{s} \sin sx \left[ \cos s\pi q(\pi) u(\pi, s) \pi' - \cos sx q(x) u(x, s) x' \right] \\
&\quad - sC_1 \sin sx + sC_2 \cos sx \\
&= -\sin sx \int_x^\pi \sin sy q(y) u(y, s) dy - \cos sx \int_x^\pi \cos sy q(y) u(y, s) dy \\
&\quad - sC_1 \sin sx + sC_2 \cos sx
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$u'(x, s) = -\int_x^\pi \cos s(x-y) q(y) u(y, s) dy - sC_1 \sin sx + sC_2 \cos sx \quad (5.5.10)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifadede (5.4.5) şartını kullanırsak

$$\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3 = -\int_\pi^\pi \cos s(\pi-y) q(y) u(y, s) dy - sC_1 \sin s\pi + sC_2 \cos s\pi$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3 = -sC_1 \sin s\pi + sC_2 \cos s\pi \quad (5.5.11)$$

bulunur. (5.5.9) ifadesi  $-s \cos s\pi$  ile, (5.5.11) ifadesi  $\sin s\pi$  ile çarpılıp, taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
-sC_1 \cos^2 s\pi - sC_1 \sin^2 s\pi &= -s \cos s\pi (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) + \sin s\pi (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \\
-sC_1 &= -s (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \cos s\pi + (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \sin s\pi \\
C_1 &= (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \cos s\pi - \frac{1}{s} (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \sin s\pi
\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan, (5.5.9) ifadesi  $s \sin s\pi$  ile, (5.5.11) ifadesi  $\cos s\pi$  ile çarpılıp, taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
sC_2 \sin^2 s\pi + sC_2 \cos^2 s\pi &= s \sin s\pi (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) + \cos s\pi (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \\
sC_2 &= s (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \sin s\pi + (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \cos s\pi \\
C_2 &= (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \sin s\pi + \frac{1}{s} (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \cos s\pi
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan  $C_1, C_2$  değerlerini (5.5.8) ve (5.5.10) ifadelerinde yerlerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$u(x, s) = (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \cos s(x - \pi) + \frac{1}{s} (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \sin s(x - \pi) - \frac{1}{s} \int_x^\pi \sin s(x - y) q(y) u(y, s) dy$$

$$u'(x, s) = -s (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \sin s(x - \pi) + (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \cos s(x - \pi) - \int_x^\pi \cos s(x - y) q(y) u(y, s) dy$$

integral denklemleri elde edilir. Buradan

$$\chi_\lambda(x) = (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \cos s(x - \pi) + \frac{1}{s} (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \sin s(x - \pi) - \frac{1}{s} \int_x^\pi \sin s(x - y) q(y) \chi_\lambda(y) dy$$

yazılabilir ve ispat tamamlanır.

**5.5.4. Sonuç:**  $\chi_\lambda(x)$  çözüm fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\chi_\lambda(x) = (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \cos s(x - \pi) + \frac{1}{s} (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \sin s(x - \pi) - \frac{1}{s} \int_x^\pi \sin s(x - y) q(y) \chi_\lambda(y) dy$$

$$\chi'_\lambda(x) = -s (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \sin s(x - \pi) + (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \cos s(x - \pi) - \int_x^\pi \cos s(x - y) q(y) \chi_\lambda(y) dy$$

**5.5.5. Teorem:**  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \beta_i \neq 0, \tilde{\beta}_i \neq 0$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) kabul edelim ve  $\lambda = s^2, s = \sigma + it$  ile gösterelim. O halde öyle  $s_0 > 0$  vardır ki  $|s| > s_0$  için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  ise

$$|\phi_\lambda(x)| = O(|s|^2 e^{|t|x}) \quad (5.5.12)$$

$$|\phi'_\lambda(x)| = O(|s|^3 e^{|t|x}) \quad (5.5.13)$$

2)  $\tilde{\beta}_2 = 0$  ise

$$|\phi_\lambda(x)| = O(|s| e^{|t|x}) \quad (5.5.14)$$

$$|\phi'_\lambda(x)| = O(|s|^2 e^{|t|x}) \quad (5.5.15)$$



**İspat:** Önce  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  için  $\phi_\lambda(x)$  çözüm fonksiyonunun asimptotiğini bulalım.

$$F_{1\lambda}(x) := e^{-|l|x} \phi_\lambda(x) \quad (5.5.16)$$

ile gösterelim. O halde  $F_{1\lambda}(x)$  fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{1\lambda}(x) &= e^{-|l|x} \left[ (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{(\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1)}{s} \sin sx \right] + \frac{1}{s} e^{-|l|x} \left[ \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \phi_\lambda(y) dy \right] \\ &= e^{-|l|x} \left[ (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{(\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1)}{s} \sin sx \right] + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) F_{1\lambda}(y) e^{|l|y} e^{-|l|x} dy \\ &= e^{-|l|x} \left[ (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{(\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1)}{s} \sin sx \right] + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) F_{1\lambda}(y) e^{-|l|(y-x)} dy \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

integral denklemini sağlar. (5.5.17) de her iki tarafının mutlak değerini alırsak,

$$\begin{aligned} |F_{1\lambda}(x)| &\leq e^{-|l|x} \left[ |\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2| |\cos sx| + \frac{1}{|s|} |\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1| |\sin sx| \right] \\ &\quad + \frac{1}{|s|} \int_0^x |\sin s(x-y)| |q(y)| |F_{1\lambda}(y)| e^{-|l|(y-x)} dy \\ &\leq e^{-|l|x} \left[ |\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2| e^{|l|x} + \frac{1}{|s|} |\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1| e^{|l|x} \right] + \frac{1}{|s|} \int_0^x e^{|l|(x-y)} |q(y)| |F_{1\lambda}(y)| e^{-|l|(y-x)} dy \\ &\leq |\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2| + \frac{1}{|s|} |\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1| + \frac{1}{|s|} \int_0^x |q(y)| |F_{1\lambda}(y)| dy \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada

$$M_1(\lambda) := \max_{x \in [0, \pi]} |F_{1\lambda}(x)| \quad (5.5.18)$$

ile gösterirsek, sonuncu eşitsizlikten

$$M_1(\lambda) \leq |\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2| + \frac{1}{|s|} |\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1| + \frac{1}{|s|} M_1(\lambda) \int_0^\pi |q(y)| dy$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$M_1(\lambda) \left( 1 - \frac{1}{|s|} \int_0^\pi |q(y)| dy \right) \leq |s|^2 \left( |\tilde{\beta}_2| + \frac{1}{|s|} |\tilde{\beta}_1| + \frac{1}{|s|^2} |\beta_2| + \frac{1}{|s|^3} |\beta_1| \right)$$

eşitsizliği bulunur. O halde

$$|s| > 2 \int_0^\pi |q(y)| dy := r_0 \quad (5.5.19)$$

için

$$M_1(\lambda) < 2|s|^2 \left( |\tilde{\beta}_2| + \frac{1}{r_0} |\tilde{\beta}_1| + \frac{1}{r_0^2} |\beta_2| + \frac{1}{r_0^3} |\beta_1| \right)$$

$$M_1(\lambda) < M_0 |s|^2 \quad (5.5.20)$$

bulunur. Burada

$$M_0 = 2 \left( |\tilde{\beta}_2| + \frac{1}{r_0} |\tilde{\beta}_1| + \frac{1}{r_0^2} |\beta_2| + \frac{1}{r_0^3} |\beta_1| \right)$$

dır. Dolayısıyla  $r_0 > 0$  sayısı (5.5.19) ile tanımlanmak üzere  $|s| > r_0$  için (5.5.16), (5.5.18) ve (5.5.20)'den

$$|\phi_\lambda(x)| \leq M_0 |s|^2 e^{l|x|} \quad (5.5.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$|\phi_\lambda(x)| = O(|s|^2 e^{l|x|})$$

yazılır ve (5.5.12) eşitliği ispatlanmış olur.

Şimdi (5.5.13) eşitliğinin doğruluğunu ispatlayalım. (5.5.21) eşitsizliği ve Sonuç 5.5.2. gereğince  $|s| > r_0$  için

$$\begin{aligned} |\phi'_\lambda(x)| &\leq |s| |\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2| e^{l|x|} + |\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1| e^{l|x|} + \int_0^\pi e^{l|(x-y)} q(y) \phi_\lambda(y) dy \\ &\leq (|s| |\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2| + |\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1|) e^{l|x|} + \int_0^\pi e^{l|(x-y)} q(y) M_0 |s|^2 e^{l|y|} dy \\ &\leq \left( |\tilde{\beta}_2| + \frac{1}{|s|} |\tilde{\beta}_1| + \frac{1}{|s|^2} |\beta_2| + \frac{1}{|s|^3} |\beta_1| \right) |s|^3 e^{l|x|} + |s|^2 e^{l|x|} M_0 \int_0^\pi q(y) dy \\ &\leq \left( |\tilde{\beta}_2| + \frac{1}{r_0} |\tilde{\beta}_1| + \frac{1}{r_0^2} |\beta_2| + \frac{1}{r_0^3} |\beta_1| + \frac{M_0}{r_0} \int_0^\pi q(y) dy \right) |s|^3 e^{l|x|} \\ &\leq \left( \frac{M_0}{2} + \frac{M_0 r_0}{r_0^2} \right) |s|^3 e^{l|x|} \end{aligned}$$

ifadesinden

$$|\phi'_\lambda(x)| \leq M_0 |s|^3 e^{l|x|}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$|\phi'_\lambda(x)| = O(|s|^3 e^{l|x|})$$

yazılır ve (5.5.13) eşitliği ispatlanmış olur.  $\tilde{\beta}_2 = 0$  durumu için, (5.5.14) ve (5.5.15) eşitlikleri de benzer şekilde ispatlanır.

**5.5.6. Teorem:**  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \beta_i \neq 0, \tilde{\beta}_i \neq 0$  ( $i = \overline{1,4}$ ) kabul edelim ve  $\lambda = s^2, s = \sigma + it$  ile gösterelim. O halde öyle  $s_0 > 0$  vardır ki  $|s| > s_0$  için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1)  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  ise

$$|\chi_\lambda(x)| = O(|s|^2 e^{t(x-\pi)}) \quad (5.5.22)$$

$$|\chi'_\lambda(x)| = O(|s|^3 e^{t(x-\pi)}) \quad (5.5.23)$$

2)  $\tilde{\beta}_4 = 0$  ise

$$|\chi_\lambda(x)| = O(|s| e^{t(x-\pi)}) \quad (5.5.24)$$

$$|\chi'_\lambda(x)| = O(|s|^2 e^{t(x-\pi)}) \quad (5.5.25)$$

**İspat:** Önce  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  için  $\chi_\lambda(x)$  çözüm fonksiyonunun asimptotiğini bulalım.

$$F_{2\lambda}(x) := e^{-t(x-\pi)} \chi_\lambda(x) \quad (5.5.26)$$

ile gösterelim. O halde  $F_\lambda(x)$  fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{2\lambda}(x) &= e^{-t(x-\pi)} \left[ (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \cos s(x-\pi) + \frac{1}{s} (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \sin s(x-\pi) \right] \\ &\quad - \frac{1}{s} e^{-t(x-\pi)} \left[ \int_x^\pi \sin s(x-y) q(y) \chi_\lambda(y) dy \right] \\ &= e^{-t(x-\pi)} \left[ (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \cos s(x-\pi) + \frac{1}{s} (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \sin s(x-\pi) \right] \\ &\quad - \frac{1}{s} \int_0^\pi \sin s(x-y) q(y) F_{2\lambda}(y) e^{t(y-\pi)} e^{-t(x-\pi)} dy \\ &= e^{-t(x-\pi)} \left[ (\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4) \cos s(x-\pi) + \frac{1}{s} (\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3) \sin s(x-\pi) \right] \\ &\quad - \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) F_{2\lambda}(y) e^{-t(x-y)} dy \end{aligned} \quad (5.5.27)$$

integral denklemini sağlar. Bu durumda (5.5.27) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değerini alırsak,

$$\begin{aligned}
|F_{2\lambda}(x)| &\leq e^{-|l|(x-\pi)} \left[ |\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4| |\cos s(x-\pi)| + \frac{1}{|s|} |\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3| |\sin s(x-\pi)| \right] \\
&\quad + \frac{1}{|s|} \int_x^\pi |\sin s(x-y)| |q(y)| |F_{2\lambda}(y)| e^{-|l|(x-y)} dy \\
&\leq e^{-|l|(x-\pi)} \left[ |\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4| e^{|l|(x-\pi)} + \frac{1}{|s|} |\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3| e^{|l|(x-\pi)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{|s|} \int_x^\pi e^{|l|(x-y)} |q(y)| |F_{2\lambda}(y)| e^{-|l|(x-y)} dy \\
&\leq |\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4| + \frac{1}{|s|} |\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3| + \frac{1}{|s|} \int_x^\pi |q(y)| |F_{2\lambda}(y)| dy
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada

$$Y_1(\lambda) := \max_{x \in [0, \pi]} |F_{2\lambda}(x)| \quad (5.5.28)$$

ile gösterirsek, sonuncu eşitsizlikten

$$Y_1(\lambda) \leq |\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4| + \frac{1}{|s|} |\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3| + \frac{1}{|s|} Y_1(\lambda) \int_0^\pi |q(y)| dy$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$Y_1(\lambda) \left( 1 - \frac{1}{|s|} \int_0^\pi |q(y)| dy \right) \leq |s|^2 \left( |\tilde{\beta}_4| + \frac{1}{|s|} |\tilde{\beta}_3| + \frac{1}{|s|^2} |\beta_4| + \frac{1}{|s|^3} |\beta_3| \right)$$

eşitsizliği bulunur. O halde

$$|s| > 2 \int_0^\pi |q(y)| dy := r_0 \quad (5.5.29)$$

için

$$\begin{aligned}
Y_1(\lambda) &< 2|s|^2 \left( |\tilde{\beta}_4| + \frac{1}{r_0} |\tilde{\beta}_3| + \frac{1}{r_0^2} |\beta_4| + \frac{1}{r_0^3} |\beta_3| \right) \\
Y_1(\lambda) &< Y_0 |s|^2 \quad (5.5.30)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$Y_0 = 2 \left( |\tilde{\beta}_4| + \frac{1}{r_0} |\tilde{\beta}_3| + \frac{1}{r_0^2} |\beta_4| + \frac{1}{r_0^3} |\beta_3| \right)$$

dır. Dolayısıyla  $r_0 > 0$  sayısı (5.5.29) ile tanımlanmak üzere  $|s| > r_0$  için (5.5.26), (5.5.28) ve (5.5.30)'den

$$|\chi_\lambda(x)| \leq Y_0 |s|^2 e^{t|(x-\pi)} \quad (5.5.31)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$|\chi_\lambda(x)| = O\left(|s|^2 e^{t|(x-\pi)}\right)$$

yazılır ve (5.5.22) eşitliği ispatlanmış olur.

Şimdi (5.5.23) eşitliğinin doğruluğunu ispatlayalım. (5.5.31) eşitsizliği ve Sonuç 5.5.4. gereğince  $|s| > r_0$  için

$$\begin{aligned} |\chi'_\lambda(x)| &\leq |s| |\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4| e^{t|(x-\pi)} + |\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3| e^{t|(x-\pi)} + \int_0^\pi e^{t|(x-y)} q(y) \chi_\lambda(y) dy \\ &\leq \left( |s| |\beta_4 + s^2 \tilde{\beta}_4| + |\beta_3 + s^2 \tilde{\beta}_3| \right) e^{t|(x-\pi)} + \int_0^\pi e^{t|(x-y)} q(y) Y_0 |s|^2 e^{t|(y-\pi)} dy \\ &\leq \left( |\tilde{\beta}_4| + \frac{1}{|s|} \tilde{\beta}_3 + \frac{1}{|s|^2} |\beta_4| + \frac{1}{|s|^3} |\beta_3| \right) |s|^3 e^{t|(x-\pi)} + |s|^2 e^{t|(x-\pi)} Y_0 \int_0^\pi q(y) dy \\ &\leq \left( |\tilde{\beta}_4| + \frac{1}{r_0} \tilde{\beta}_3 + \frac{1}{r_0^2} |\beta_4| + \frac{1}{r_0^3} |\beta_3| + \frac{Y_0}{r_0} \int_0^\pi q(y) dy \right) |s|^3 e^{t|(x-\pi)} \\ &\leq \left( \frac{Y_0}{2} + \frac{Y_0}{r_0} \frac{r_0}{2} \right) |s|^3 e^{t|(x-\pi)} \end{aligned}$$

ifadesinden

$$|\chi'_\lambda(x)| \leq Y_0 |s|^3 e^{t|(x-\pi)}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$|\chi'_\lambda(x)| = O\left(|s|^3 e^{t|(x-\pi)}\right)$$

yazılır ve (5.5.23) eşitliği ispatlanmış olur.  $\tilde{\beta}_4 = 0$  durumu için, (5.5.24) ve (5.5.25) eşitlikleri de benzer şekilde ispatlanır.

**5.5.7. Teorem:**  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 > 0$ ,  $\beta_i \neq 0$ ,  $\tilde{\beta}_i \neq 0$  ( $i = \overline{1,4}$ ) kabul edelim ve  $\lambda = s^2$ ,  $s = \sigma + it$  ile gösterelim. O halde öyle  $s_0 > 0$  vardır ki  $|s| > s_0$  için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  ise

$$\phi_\lambda(x) = -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sx + O\left(|s| e^{t|x}\right) \quad (5.5.32)$$

$$\phi'_\lambda(x) = s^3 \tilde{\beta}_2 \sin sx + O\left(|s|^2 e^{t|x}\right) \quad (5.5.33)$$

2)  $\tilde{\beta}_2 = 0$  ise

$$\phi_\lambda(x) = -s\tilde{\beta}_1 \sin sx + O\left(e^{|t|x}\right) \quad (5.5.34)$$

$$\phi'_\lambda(x) = -s^2\tilde{\beta}_1 \cos sx + O\left(|s|e^{|t|x}\right) \quad (5.5.35)$$

**İspat:**  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  olsun. (5.5.21) ifadesini, Sonuç 5.5.2. deki  $\phi_\lambda(x)$  çözüm fonksiyonunun integral kısmında dikkate alırsak, yeteri kadar büyük  $|s|$ 'ler için

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \sin s(x-y)q(y)\phi_\lambda(y)dy \right| &\leq \int_0^x |\sin s(x-y)||q(y)||\phi_\lambda(y)|dy \leq M_0 |s|^2 \int_0^x e^{|t|(x-y)} |q(y)|e^{|t|y} dy \\ &\leq M_0 |s|^2 e^{|t|x} \int_0^\pi |q(y)| \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre

$$\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\phi_\lambda(y)dy = O\left(|s|^2 e^{|t|x}\right)$$

asimptotik eşitliği sağlanır. Bunu Sonuç 5.5.2. deki  $\phi_\lambda(x)$  ifadesinde dikkate alırsak, (5.5.32) ifadesini elde ederiz. (5.5.33) ifadesi (5.5.32)'ye benzer şekilde ispatlanır.  $\tilde{\beta}_2 = 0$  için, (5.5.34) ve (5.5.35) eşitlikleri,  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  durumuna benzer şekilde ispatlanır.

**5.5.8. Teorem:**  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \beta_i \neq 0, \tilde{\beta}_i \neq 0$  ( $i = \overline{1,4}$ ) kabul edelim ve  $\lambda = s^2, s = \sigma + it$  ile gösterelim. O halde öyle  $s_0 > 0$  vardır ki  $|s| > s_0$  için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1)  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  ise

$$\chi_\lambda(x) = s^2\tilde{\beta}_4 \cos s(x-\pi) + O\left(|s|e^{|t|(x-\pi)}\right) \quad (5.5.36)$$

$$\chi'_\lambda(x) = -s^3\tilde{\beta}_4 \sin s(x-\pi) + O\left(|s|^2 e^{|t|(x-\pi)}\right) \quad (5.5.37)$$

2)  $\tilde{\beta}_4 = 0$  ise

$$\chi_\lambda(x) = s\tilde{\beta}_3 \sin s(x-\pi) + O\left(e^{|t|(x-\pi)}\right) \quad (5.5.38)$$

$$\chi'_\lambda(x) = s^2\tilde{\beta}_3 \cos s(x-\pi) + O\left(e^{|t|(x-\pi)}\right) \quad (5.5.39)$$

**İspat:**  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  olsun. (5.5.31) ifadesini, Sonuç 5.5.4. deki  $\chi_\lambda(x)$  çözüm fonksiyonunun integral kısmında dikkate alırsak, yeteri kadar büyük  $|s|$ 'ler için

$$\left| \int_x^\pi \sin s(x-y)q(y)\chi_\lambda(y)dy \right| \leq \int_x^\pi |\sin s(x-y)||q(y)||\chi_\lambda(y)|dy \leq Y_0 |s|^2 \int_0^x e^{l(x-y)} |q(y)|e^{l(y-\pi)} dy$$

$$\leq Y_0 |s|^2 e^{l(x-\pi)} \int_0^\pi |q(y)|$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre

$$\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\phi_\lambda(y)dy = O(|s|^2 e^{l(x-\pi)})$$

eşitliği sağlanır. Bunu Sonuç 5.5.4. deki  $\phi_\lambda(x)$  ifadesinde dikkate alırsak, (5.5.36) ifadesini elde ederiz. (5.5.37) ifadesi (5.5.36)'ye benzer şekilde ispatlanır.  $\tilde{\beta}_4 = 0$  için, (5.5.38) ve (5.5.39) eşitlikleri,  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  durumuna benzer şekilde ispatlanır.

## 5.6. $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ Fonksiyonlarının Wronskianının Asimptotiği

**5.6.1. Teorem:**  $W(\lambda)$  için aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir.

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  ,  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  ise

$$W(\lambda) = -s^5 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \sin s\pi + O(|s|^4 e^{l|\pi|})$$

2)  $\tilde{\beta}_2 = 0$  ,  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  ise

$$W(\lambda) = s^4 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_4 \cos s\pi + O(|s|^3 e^{l|\pi|})$$

3)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  ,  $\tilde{\beta}_4 = 0$  ise

$$W(\lambda) = -s^4 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \cos s\pi + O(|s|^3 e^{l|\pi|})$$

4)  $\tilde{\beta}_2 = 0$  ,  $\tilde{\beta}_4 = 0$  ise

$$W(\lambda) = -s^3 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_3 \sin s\pi + O(|s|^2 e^{l|\pi|})$$

**İspat:**

$$W(\lambda) = \lambda \phi_\lambda(\pi) \tilde{\beta}_3 - \lambda \phi'_\lambda(\pi) \tilde{\beta}_4 + \phi_\lambda(\pi) \beta_3 - \phi'_\lambda(\pi) \beta_4 \quad (5.6.1)$$

olduğunu daha önceden biliyoruz.

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  ,  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  olduğu durumu araştıralım.  $\lambda = s^2$  olduğunu dikkate alarak (5.5.32) ve (5.5.33) asimptotik eşitliklerini (5.6.1) eşitliğinde yerine yazarsak

$$W(\lambda) = s^2 \left( -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos s\pi + O(|s| e^{|\pi|}) \right) \tilde{\beta}_3 - s^2 \left( s^3 \tilde{\beta}_2 \sin s\pi + O(|s|^2 e^{|\pi|}) \right) \tilde{\beta}_4 \\ + \left( -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos s\pi + O(|s| e^{|\pi|}) \right) \beta_3 - \left( s^3 \tilde{\beta}_2 \sin s\pi + O(|s|^2 e^{|\pi|}) \right) \beta_4$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$W(\lambda) = -s^4 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \cos s\pi + O(|s^3| e^{|\pi|}) - s^5 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \sin s\pi + O(|s|^4 e^{|\pi|}) \\ - s^2 \tilde{\beta}_2 \beta_3 \cos s\pi + O(|s| e^{|\pi|}) - s^3 \tilde{\beta}_2 \beta_4 \sin s\pi + O(|s|^2 e^{|\pi|}) \\ = -s^5 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \sin s\pi + O(|s|^4 e^{|\pi|})$$

bulunur.

2)  $\tilde{\beta}_2 = 0$  ,  $\tilde{\beta}_4 \neq 0$  durumu araştıralım.  $\lambda = s^2$  olduğunu dikkate alarak (5.5.34) ve (5.5.35) asimptotik eşitliklerini (5.6.1) eşitliğinde yerine yazarsak

$$W(\lambda) = s^2 \left( -s \tilde{\beta}_1 \sin s\pi + O(|s|^{-1} e^{|\pi|}) \right) \tilde{\beta}_3 - s^2 \left( -s^2 \tilde{\beta}_1 \cos s\pi + O(|s| e^{|\pi|}) \right) \tilde{\beta}_4 \\ + \left( -s \tilde{\beta}_1 \sin s\pi + O(|s|^{-1} e^{|\pi|}) \right) \beta_3 - \left( -s^2 \tilde{\beta}_1 \cos s\pi + O(|s| e^{|\pi|}) \right) \beta_4$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$W(\lambda) = -s^3 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_3 \sin s\pi + O(|s| e^{|\pi|}) + s^4 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_4 \cos s\pi + O(|s|^3 e^{|\pi|}) \\ - s \tilde{\beta}_1 \beta_3 \sin s\pi + O(|s|^{-1} e^{|\pi|}) + s^2 \tilde{\beta}_1 \beta_4 \cos s\pi + O(|s| e^{|\pi|}) \\ = s^4 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_4 \cos s\pi + O(|s|^3 e^{|\pi|})$$

bulunur.

3)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  ,  $\tilde{\beta}_4 = 0$  durumu araştıralım. Bu durumda  $\tilde{\beta}_4 = 0$  olduğu için  $W(\lambda)$  fonksiyonu

$$W(\lambda) = \lambda \phi_\lambda(\pi) \tilde{\beta}_3 + \phi_\lambda(\pi) \beta_3 - \phi'_\lambda(\pi) \beta_4$$

şeklinde ifade edilir. Buradan



$$\begin{aligned}
W(\lambda) &= s^2 \left( -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos s\pi + O(|s| e^{|\lambda|\pi}) \right) \tilde{\beta}_3 + \left( -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos s\pi + O(|s| e^{|\lambda|\pi}) \right) \beta_3 \\
&\quad - \left( s^3 \tilde{\beta}_2 \sin s\pi + O(|s|^2 e^{|\lambda|\pi}) \right) \beta_4 \\
&= -s^4 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \cos s\pi + O(|s^3| e^{|\lambda|\pi}) - s^2 \tilde{\beta}_2 \beta_3 \cos s\pi + O(|s| e^{|\lambda|\pi}) \\
&\quad - s^3 \tilde{\beta}_2 \beta_4 \sin s\pi + O(|s|^2 e^{|\lambda|\pi}) \\
&= -s^4 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \cos s\pi + O(|s|^3 e^{|\lambda|\pi})
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

4)  $\tilde{\beta}_2 = 0$  ,  $\tilde{\beta}_4 = 0$  durumunu araştıralım. Bu durumda  $W(\lambda)$  fonksiyonu

$$\begin{aligned}
W(\lambda) &= -s^3 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_3 \sin s\pi + O(|s| e^{|\lambda|\pi}) - s \tilde{\beta}_1 \beta_3 \sin s\pi + O(|s|^{-1} e^{|\lambda|\pi}) \\
&\quad + s^2 \tilde{\beta}_1 \beta_4 \cos s\pi + O(|s| e^{|\lambda|\pi}) \\
&= -s^3 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_3 \sin s\pi + O(|s|^2 e^{|\lambda|\pi})
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

## 5.7. Green Fonksiyonunun Kurulması

Öncelikle ele aldığımız problemdeki sınır şartlarını

$$(\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1)u(0) = (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2)u'(0) \quad (5.7.1)$$

$$(\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3)u(\pi) = (\beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4)u'(\pi) \quad (5.7.2)$$

şeklinde yazalım. Özdeğerlerden farklı her  $\lambda \in \mathbb{C}$  kompleks sayısı için (5.5.3) diferansiyel denkleminin  $\phi_\lambda(x)$  ve  $\chi_\lambda(x)$  çözümleri lineer bağımsız olduklarından bu denklemin genel çözümünü

$$u(x, \lambda) = C_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(x)$$

şeklinde yazabiliriz. Sabitin değişimi yöntemini kullanarak

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u - f(x) \quad (5.7.3)$$

denkleminin genel çözümünü

$$u(x, \lambda) = C_1(x, \lambda)\phi_\lambda(x) + C_2(x, \lambda)\chi_\lambda(x) \quad (5.7.4)$$

şeklinde arayalım. Sabitin değişimi yöntemi gereği

$$C_1'(x, \lambda)\phi_\lambda(x) + C_2'(x, \lambda)\chi_\lambda(x) = 0$$

$$C_1'(x, \lambda)\phi_\lambda'(x) + C_2'(x, \lambda)\chi_\lambda(x) = f(x)$$

denklem sistemini sağlasınlar. Bu sistemden

$$C_1'(x, \lambda) = \frac{-\chi_\lambda(x)f(x)}{W(\lambda)}$$

$$C_2'(x, \lambda) = \frac{\phi_\lambda(x)f(x)}{W(\lambda)}$$

elde edilir. Bu ifadelerden bulduğumuz

$$C_1(x, \lambda) = -\frac{1}{W(\lambda)} \int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + C_1(\lambda)$$

$$C_2(x, \lambda) = \frac{1}{W(\lambda)} \int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy + C_2(\lambda)$$

ifadelerini (5.7.4)'de yerlerine koyarsak,

$$u(x, \lambda) = \phi_\lambda(x) \left[ \frac{1}{W(\lambda)} \int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + C_1(\lambda) \right] \\ + \chi_\lambda(x) \left[ \frac{1}{W(\lambda)} \int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy + C_2(\lambda) \right]$$

$$u(x, \lambda) = \frac{\phi_\lambda(x)}{W(\lambda)} \int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + \frac{\chi_\lambda(x)}{W(\lambda)} \int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy \\ + C_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(x) \quad (5.7.5)$$

$$u'(x, \lambda) = \frac{1}{W(\lambda)} \left[ \phi_\lambda'(x) \int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy - \phi_\lambda(x)\chi_\lambda(x)f(x) \right] \\ + \frac{1}{W(\lambda)} \left[ \chi_\lambda'(x) \int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy + \phi_\lambda(x)\chi_\lambda(x)f(x) \right] \\ + C_1(\lambda)\phi_\lambda'(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda'(x) \\ = \frac{\phi_\lambda'(x)}{W(\lambda)} \int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + \frac{\chi_\lambda'(x)}{W(\lambda)} \int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy \\ + C_1(\lambda)\phi_\lambda'(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda'(x) \quad (5.7.6)$$

elde edilir. Bulunan (5.7.5) ve (5.7.6) ifadeleri (5.7.1) sınır şartında yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& (\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) \left[ \frac{\phi_\lambda(0)}{W(\lambda)} \int_0^\pi \chi_\lambda(y) f(y) dy + C_1(\lambda) \phi_\lambda(0) + C_2(\lambda) \chi_\lambda(0) \right] \\
& = (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2) \left[ \frac{\phi'_\lambda(0)}{W(\lambda)} \int_0^\pi \chi_\lambda(y) f(y) dy + C_1(\lambda) \phi'_\lambda(0) + C_2(\lambda) \chi'_\lambda(0) \right]
\end{aligned}$$

olur. (5.4.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& (\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) \left[ \frac{(\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2)}{W(\lambda)} \int_0^\pi \chi_\lambda(y) f(y) dy + C_1(\lambda) (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2) + C_2(\lambda) \chi_\lambda(0) \right] \\
& = (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2) \left[ \frac{(\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1)}{W(\lambda)} \int_0^\pi \chi_\lambda(y) f(y) dy + C_1(\lambda) (\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) + C_2(\lambda) \chi'_\lambda(0) \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
& (\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2) C_1(\lambda) + (\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) \chi_\lambda(0) C_2(\lambda) \\
& = (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2) (\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) C_1(\lambda) + (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2) \chi'_\lambda(0) C_2(\lambda) \\
& \left[ (\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) \chi_\lambda(0) - (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2) \chi'_\lambda(0) \right] C_2(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$(\beta_1 - \lambda \tilde{\beta}_1) \chi_\lambda(0) - (\beta_2 - \lambda \tilde{\beta}_2) \chi'_\lambda(0) = -W(\lambda) \neq 0$$

olduğundan

$$C_2(\lambda) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.7.5) ve (5.7.6) ifadeleri (5.7.2) sınır şartında yazılırsa

$$\begin{aligned}
& (\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) \left[ \frac{\chi_\lambda(\pi)}{W(\lambda)} \int_0^\pi \phi_\lambda(y) f(y) dy + C_1(\lambda) \phi_\lambda(\pi) + C_2(\lambda) \chi_\lambda(\pi) \right] \\
& = (\beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4) \left[ \frac{\chi'_\lambda(\pi)}{W(\lambda)} \int_0^\pi \phi_\lambda(y) f(y) dy + C_1(\lambda) \phi'_\lambda(\pi) + C_2(\lambda) \chi'_\lambda(\pi) \right]
\end{aligned}$$

olur. (5.4.5) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& (\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) \left[ \frac{\beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4}{W(\lambda)} \int_0^\pi \phi_\lambda(y) f(y) dy + C_1(\lambda) \phi_\lambda(\pi) + C_2(\lambda) (\beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4) \right] \\
& = (\beta_4 + \lambda \tilde{\beta}_4) \left[ \frac{\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3}{W(\lambda)} \int_0^\pi \phi_\lambda(y) f(y) dy + C_1(\lambda) \phi'_\lambda(\pi) + C_2(\lambda) (\beta_3 + \lambda \tilde{\beta}_3) \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
& (\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3)\phi_\lambda(\pi)C_1(\lambda) + (\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3)(\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_4)C_2(\lambda) \\
& = (\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_4)\phi'_\lambda(\pi)C_1(\lambda) + (\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_4)(\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3)C_2(\lambda) \\
& \left[ (\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3)\phi_\lambda(\pi) - (\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_4)\phi'_\lambda(\pi) \right] C_1(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$(\beta_3 + \lambda\tilde{\beta}_3)\phi_\lambda(\pi) - (\beta_4 + \lambda\tilde{\beta}_4)\phi'_\lambda(\pi) = W(\lambda) \neq 0$$

olduğundan

$$C_1(\lambda) = 0$$

elde edilir. O halde (5.7.3) denkleminin (5.7.1), (5.7.2) sınır şartlarını sağlayan çözümü için

$$u(x, \lambda) = \frac{\phi_\lambda(x)}{W(\lambda)} \int_x^\pi \chi_\lambda(y) f(y) dy + \frac{\chi_\lambda(x)}{W(\lambda)} \int_0^x \phi_\lambda(y) f(y) dy \quad (5.7.7)$$

formülü bulunur. Burada

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{\chi_\lambda(x)\phi_\lambda(y)}{W(\lambda)}, & 0 \leq y \leq x \leq \pi \\ \frac{\phi_\lambda(x)\chi_\lambda(y)}{W(\lambda)}, & 0 \leq x \leq y \leq \pi \end{cases} \quad (5.7.8)$$

olarak alırsak, (5.7.7) eşitliği

$$u(x, \lambda) = \int_0^\pi G(x, y, \lambda) f(y) dy$$

şeklinde yazılır. Bu şekilde (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin Green fonksiyonu (5.7.8) şeklinde olur.

## 5.8. Özdeğerler İçin Asimptotik Formlar

Bu bölümde özdeğerlerin asimptotik açılımının ilk iki terimini bulacağız. Bunun için ilk olarak  $W(\lambda)$  fonksiyonunun sıfır yerlerinin asimptotik davranışlarını inceleyeceğiz. Daha sonra Teorem 5.6.1 de olduğu gibi dört durum için ayrı ayrı araştıracağız.

**Teorem 5.8.1.** (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri için aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir.

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0, \tilde{\beta}_4 \neq 0$  durumu için

$$s_n = (n-2) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

2)  $\tilde{\beta}_2 = 0, \tilde{\beta}_4 \neq 0$  durumu için

$$s_n = \left(n - \frac{3}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

3)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0, \tilde{\beta}_4 = 0$  durumu için

$$s_n = \left(n - \frac{3}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

4)  $\tilde{\beta}_2 = 0, \tilde{\beta}_4 = 0$  durumu için

$$s_n = (n-1) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

**İspat:**

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0, \tilde{\beta}_4 \neq 0$  ise

$$W(\lambda) = -s^5 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \sin s\pi + O(|s|^4 e^{t|\pi|})$$

asimptotik ifadesini

$$W_1(\lambda) = -s^5 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \sin s\pi \quad \text{ve} \quad W_2(\lambda) = O(|s|^4 e^{t|\pi|})$$

olmak üzere

$$W(\lambda) = W_1(\lambda) + W_2(\lambda)$$

şeklinde gösterebiliriz. Kompleks  $s$ -düzleminde  $s = \sigma + it$  olmak üzere

$$\left\{ s \mid \sigma \leq \left(n + \frac{1}{2}\right), |t| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

bölgesinin sınırını  $\Gamma_n$  ile gösterelim.

$$|W_1(\lambda)| \approx \frac{1}{2} |\tilde{\beta}_2| |\tilde{\beta}_4| |s|^5 e^{t|\pi|}, \quad t \rightarrow \infty$$

$$|W_2(\lambda)| \approx O(|s|^4 e^{t|\pi|}), \quad s \rightarrow \infty$$

olduğundan, yeteri kadar büyük  $n$  sayıları için  $\Gamma_n$  üzerinde  $|W_1(\lambda)| > |W_2(\lambda)|$  olduğu görülür. O halde Rouché Teoremi gereği  $\Gamma_n$  eğrisi içinde  $W(\lambda)$  fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı  $n \geq 2$  olmak üzere,  $2(n-1)+6$  olduğu açıktır  $(0,0,0,0,0,0,-1,1,-2,2,\dots,-(n-2),(n-2),\dots)$ .

$W_1(\lambda) = W_1(s^2)$  fonksiyonu çift fonksiyon olduğu için sadece pozitif reel eksen üzerindeki sıfır yerlerini incelemek yeterli olacaktır. Bu sıfır yerlerini

$$\tilde{s}_0 = \tilde{s}_1 = \tilde{s}_2 = 0, \quad \tilde{s}_3 = 1, \quad \tilde{s}_4 = 2, \quad \dots, \quad \tilde{s}_n = n-2, \quad \dots \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

şeklinde sıralayabiliriz.  $\Gamma_{n-1}$  eğrisi ile  $\Gamma_n$  eğrisi arasında kalan bölgede 2 tane sıfır yeri mevcuttur. Rouché Teoremini uygulayarak,  $n \geq n_0$  için pozitif reel eksenin bu bölgede kalan

$$n - \frac{3}{2} < s < n - \frac{1}{2}$$

aralığında tek bir tane  $s_n$  sıfır yeri bulunur. Buradan

$$|s_n - (n-2)| < \frac{1}{2}$$

elde edilir.

$$|\delta_n| = s_n - (n-2)$$

şeklinde ifade edersek

$$|\delta_n| < \frac{1}{2} \tag{5.8.1}$$

olur. Böylece

$$s_n = (n-2) + \delta_n$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.  $s_n$  sayılarının  $W_1(\lambda)$  fonksiyonunun sıfır yerleri olduğunu dikkate alarak  $W(\lambda) = 0$  eşitliğinde  $s$  yerine  $s_n$  yazarsak,

$$-[(n-2) + \delta_n]^5 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \sin[(n-2)\pi + \delta_n \pi] = O(n^4)$$

asimptotik eşitliği bulunur. Buradan

$$\sin[(n-2)\pi + \delta_n \pi] = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin \delta_n \pi = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten ve (5.8.1) gereği,

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

bulunur. Buradan

$$s_n = (n-2) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik eşitliğini elde ederiz. Benzer ispat diğer durumlar için de yapılabilir.

**Lemma 5.8.2.** (5.1.1) diferansiyel denkleminin (5.3.5) ve (5.3.6) şartlarını sağlayan  $\phi_\lambda(x)$  çözümü için

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  ise

$$\phi_\lambda(x) = -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sx - s \tilde{\beta}_1 \sin sx - \frac{s}{2} \tilde{\beta}_2 \sin sx \int_0^x q(y) dy + O(1)$$

$$\phi'_\lambda(x) = s^3 \tilde{\beta}_2 \sin sx - s^2 \tilde{\beta}_1 \cos sx - \frac{s^2}{2} \tilde{\beta}_2 \cos sx \int_0^x q(y) dy + O(|s|)$$

2)  $\tilde{\beta}_2 = 0$  ise

$$\phi_\lambda(x) = -s \tilde{\beta}_1 \sin sx + \beta_2 \cos sx + \frac{1}{2} \tilde{\beta}_1 \cos sx \int_0^x q(y) dy + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\phi'_\lambda(x) = -s^2 \tilde{\beta}_1 \cos sx - s \beta_2 \sin sx - \frac{s}{2} \tilde{\beta}_1 \sin sx \int_0^x q(y) dy + O(1)$$

asimptotik ifadeleri sağlanır.

**İspat:**

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0$  ise

(5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri reel sayı olduğundan  $lms = t = 0$  olur. Böylece (5.5.32) asimptotik formülünden

$$\phi_\lambda(x) = -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sx + O(|s|) \quad (5.8.2)$$

yazılır. 5.7.2 asimptotik ifadesini Lemma 5.5.1 de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\phi_\lambda(x) &= (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{1}{s} (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sy \sin(sx - sy) q(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{s} \int_0^x \sin(sx - sy) q(y) O(|s|) dy \\
&= (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{1}{s} (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \sin sx - \frac{1}{s} \int_0^x s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sy \sin sx \cos sy q(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{s} \int_0^x s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sy \sin sy \cos sx q(y) dy + \frac{1}{s} \int_0^x \sin sx \cos sy q(y) O(|s|) dy \\
&\quad - \frac{1}{s} \int_0^x \sin sy \cos sx q(y) O(|s|) dy \\
&= (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \cos sx + \frac{1}{s} (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \sin sx - s \tilde{\beta}_2 \sin sx \int_0^x \cos sy \cos sy q(y) dy \\
&\quad + s \tilde{\beta}_2 \cos sx \int_0^x \cos sy \sin sy q(y) dy + O\left(\frac{1}{s}\right) \\
&= \beta_2 \cos sx - s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sx - s \tilde{\beta}_1 \sin sx - s \tilde{\beta}_2 \sin sx \int_0^x \cos sy \cos sy q(y) dy \\
&\quad + s \tilde{\beta}_2 \cos sx \int_0^x \cos sy \sin sy q(y) dy + O\left(\frac{1}{s}\right)
\end{aligned}$$

buluruz.

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin sy \cos sy q(y) dy &= \frac{1}{2} \int_0^x \sin 2sy q(y) dy = O\left(\frac{1}{s}\right) \\
\int_0^x \cos^2 sy q(y) dy &= \frac{1}{2} \int_0^x (1 + \cos 2sy) q(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^x q(y) dy + O\left(\frac{1}{s}\right)
\end{aligned}$$

ifadelerini son bulduğumuz  $\phi_\lambda(x)$  ifadesinde yerine yazarsak

$$\phi_\lambda(x) = -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sx - s \tilde{\beta}_1 \sin sx - \frac{s}{2} \tilde{\beta}_2 \sin sx \int_0^2 q(y) dy + O(1)$$

asimtotiğini elde ederiz. (5.8.2) ifadesini Sonuç 5.5.2 deki  $\phi'_\lambda(x)$  de yerine yazarsak

$$\phi'_\lambda(x) = -s (\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \sin sx + (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \cos sx + \int_0^x \cos s(x-y) q(y) \phi_\lambda(y) dy$$



$$\begin{aligned}
&= -s(\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \sin sx + (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \cos sx + \int_0^x -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sy \cos (sx - sy) q(y) dy \\
&\quad + \int_0^x \cos (sx - sy) q(y) O(|s|) dy \\
&= -s(\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \sin sx + (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \cos sx - \int_0^x s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sy \cos sx \cos sy q(y) dy \\
&\quad - \int_0^x s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sy \sin sx \sin sy q(y) dy + \int_0^x \cos sx \cos sy q(y) O(|s|) dy \\
&\quad + \int_0^x \sin sx \sin sy q(y) O(|s|) dy \\
&= -s(\beta_2 - s^2 \tilde{\beta}_2) \sin sx + (\beta_1 - s^2 \tilde{\beta}_1) \cos sx - s^2 \tilde{\beta}_2 \cos sx \int_0^x \cos sy \cos sy q(y) dy \\
&\quad - s^2 \tilde{\beta}_2 \sin sx \int_0^x \cos sy \sin sy q(y) dy + \cos sx \int_0^x \cos sy q(y) O(|s|) dy \\
&\quad + \sin sx \int_0^x \sin sy q(y) O(|s|) dy \\
&= s^3 \tilde{\beta}_2 \sin sx - s^2 \tilde{\beta}_1 \cos sx - \frac{s^2}{2} \tilde{\beta}_2 \cos sx \int_0^x q(y) dy + O(|s|)
\end{aligned}$$

asimptotiğini elde ederiz.

2)  $\tilde{\beta}_2 = 0$  durumu için aynı yöntem takip edilerek

$$\phi_\lambda(x) = -s \tilde{\beta}_1 \sin sx + \beta_2 \cos sx + \frac{1}{2} \tilde{\beta}_1 \cos sx \int_0^x q(y) dy + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\phi'_\lambda(x) = -s^2 \tilde{\beta}_1 \cos sx - s \beta_2 \sin sx - \frac{s}{2} \tilde{\beta}_1 \sin sx \int_0^x q(y) dy + O(1)$$

asimptotik ifadelerini elde ederiz.

**Teorem 5.8.3.** (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri için aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir.

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0, \tilde{\beta}_4 \neq 0$  ise

$$s_n = (n-2) + \frac{C}{(n-2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad C = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(y) dy - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} \right)$$

2-  $\tilde{\beta}_2 = 0, \tilde{\beta}_4 \neq 0$  ise

$$s_n = \left( n - \frac{3}{2} \right) - \frac{D}{\left( n - \frac{3}{2} \right)} + O\left( \frac{1}{n^2} \right), \quad D = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(y) dy + \frac{\beta_2}{\tilde{\beta}_1} \right)$$

3)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0, \tilde{\beta}_4 = 0$  durumu için

$$s_n = \left( n - \frac{3}{2} \right) - \frac{E}{\left( n - \frac{3}{2} \right)} + O\left( \frac{1}{n^2} \right), \quad E = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(y) dy + \frac{\beta_4}{\tilde{\beta}_3} \right)$$

4)  $\tilde{\beta}_2 = 0, \tilde{\beta}_4 = 0$  durumu için

$$s_n = (n-1) - \frac{F}{(n-1)} + O\left( \frac{1}{n^2} \right), \quad F = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\tilde{\beta}_2}{\tilde{\beta}_1} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(y) dy + \frac{\beta_4}{\tilde{\beta}_3} \right)$$

**İspat:**

1)  $\tilde{\beta}_2 \neq 0, \tilde{\beta}_4 \neq 0$  ise

$$W(\lambda) = \lambda \phi_\lambda(\pi) \tilde{\beta}_3 - \lambda \phi'_\lambda(\pi) \tilde{\beta}_4 + \phi_\lambda(\pi) \beta_3 - \phi'_\lambda(\pi) \beta_4$$

eşitliğinde

$$\phi_\lambda(\pi) = -s^2 \tilde{\beta}_2 \cos s\pi - s \tilde{\beta}_1 \sin s\pi - \frac{s}{2} \tilde{\beta}_2 \sin s\pi \int_0^\pi q(y) dy + O(1)$$

$$\phi'_\lambda(\pi) = -s^3 \tilde{\beta}_2 \sin s\pi - s^2 \tilde{\beta}_1 \cos s\pi - \frac{s^2}{2} \tilde{\beta}_2 \cos s\pi \int_0^\pi q(y) dy + O(|s|)$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$W(\lambda) = -s^4 \tilde{\beta}_3 \tilde{\beta}_2 \cos s\pi - s^3 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_3 \sin s\pi - \frac{s^3}{2} \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \sin s\pi \int_0^\pi q(y) dy + O(|s|^2)$$

$$-s^5 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \sin s\pi + s^4 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_4 \cos s\pi + \frac{s^4}{2} \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \cos s\pi \int_0^\pi q(y) dy + O(|s^3|)$$

$$-s^2 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \cos s\pi - s \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_3 \sin s\pi - \frac{s}{2} \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \sin s\pi \int_0^\pi q(y) dy + O(1)$$

$$-s^3 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \sin s\pi - s^2 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_4 \cos s\pi + \frac{s^2}{2} \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \cos s\pi \int_0^\pi q(y) dy + O(|s|)$$

$$-s^4 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \cos s\pi - s^5 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \sin s\pi + s^4 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_4 \cos s\pi + \frac{s^4}{2} \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4 \cos s\pi \int_0^\pi q(y) dy + O(|s|^3)$$

elde edilir. Bu ifadeyi  $s^5 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_4$  ye bölersek

$$-\frac{1}{s} \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} \cos s\pi - \sin s\pi + \frac{1}{s} \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} \cos s\pi + \frac{1}{2s} \cos s\pi \int_0^\pi q(y) dy + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 = W(\lambda)$$

$$\sin s\pi = \frac{1}{s} \cos s\pi \left[ \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(y) dy \right] + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

bulunur.

$$S \rightarrow S_n, \quad S_n = (n-2) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğundan

$$0 = \sin \left[ \left\{ (n-2) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \pi \right] - \frac{1}{(n-2) + O\left(\frac{1}{n}\right)} \cos \left[ \left\{ (n-2) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \pi \right]$$

$$\left[ \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(y) dy \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \sin(n-2)\pi \cos O\left(\frac{1}{n}\right)\pi + \cos(n-2)\pi \sin O\left(\frac{1}{n}\right)\pi$$

$$- \frac{1}{(n-2)} \left[ \cos(n-2)\pi \cos O\left(\frac{1}{n}\right)\pi - \sin(n-2)\pi \sin O\left(\frac{1}{n}\right)\pi \right]$$

$$\left[ \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(y) dy \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left| \sin O\left(\frac{1}{n}\right)\pi \right| = \frac{1}{n-2} \left[ \cos O\left(\frac{1}{n}\right)\pi \right] \left[ \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(y) dy \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$|\sin \delta_n \pi| = \frac{1}{n-2} |\cos \delta_n \pi| \left[ \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(y) dy \right] + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$|\sin \delta_n \pi| = \frac{|\cos \delta_n \pi|}{n-2} \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{|\cos \delta_n \pi|}{n-2} \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{|\cos \delta_n \pi|}{2(n-2)} \int_0^\pi q(y) dy + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\left| \delta_n \pi + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| = \frac{\left| 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|}{n-2} \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{\left| 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|}{n-2} \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{\left| 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|}{2(n-2)} \int_0^\pi q dy + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$|\delta_n \pi| + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n-2} \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{1}{n-2} \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2(n-2)} \int_0^\pi q dy + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$|\delta_n \pi| = \frac{1}{n-2} \left[ \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q dy \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklinde bulunur.  $|\delta_n| = s_n - (n-2)$  olduğundan

$$S_n = \frac{1}{\pi} \left[ (n-2)\pi + \frac{1}{n-2} \left[ \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q dy \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$S_n = (n-2) + \frac{C}{(n-2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad C = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2} - \frac{\tilde{\beta}_3}{\tilde{\beta}_4} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q dy \right]$$

elde edilir. Teoremin 2., 3., ve 4. durumları için de aynı yöntem takip edilerek ispat yapılabilir.

## 6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Yüksek lisans tez çalışmamızda

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u$$

Sturm-Liouville denkleminde ve

$$\begin{aligned} [\beta_1 u(0) - \beta_2 u'(0)] &= \lambda [\tilde{\beta}_1 u(0) - \tilde{\beta}_2 u'(0)] \\ -[\beta_3 u(\pi) - \beta_4 u'(\pi)] &= \lambda [\tilde{\beta}_3 u(\pi) - \tilde{\beta}_4 u'(\pi)] \end{aligned}$$

sınır şartlarından oluşan sınır değer problemine ait Hilbert uzayı oluşturulmuş, probleme uygun operatörün simetrikliği gösterilmiş, çözüm fonksiyonlarının asimptotiği ve bunlardan yararlanarak karakteristik fonksiyonun asimptotiği bulunmuştur. Ayrıca Green fonksiyonu elde edilmiş ve son bölümde özdeğerlerin asimptotik açılımı incelenmiştir. Burada  $q(x)$ ,  $[0, \pi]$  aralığında sürekli bir fonksiyondur.

Bu çalışmada dikkat çeken özellik ise hem denkleminde hem de sınır şartlarında  $\lambda$  özdeğer parametresinin bulunmasıdır. Ayrıca tezde bulunan sonuçlar orijinal olup, giriş bölümünde de belirttiğimiz gibi fiziğin birçok somut problemlerinin analitik ve yaklaşık çözümlerinin bulunmasında da uygulanabilir.

İleriye dönük çalışmalar olarak bu tip problemlerin çalışıldığı aralıkta bir ya da daha fazla noktada süreksiz olması durumuna göre yeni çalışmalar yapılabilir.

## KAYNAKLAR

1. Bayraktar, M. *Analiz*, Nobel Yayın No: 1601, 1. Basım, Ankara, **2010**.
2. Binding, P. A.; Browne P. J.; Watson, B. A. *Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on The Eigenparameter II*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 148, **2002**, 147-169.
3. Birkhoff, G. D. *On The Asymptotic Character of The Solution of The Certain Linear Differential Equations Containing Parameter*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.9 **1908**, pp. 219 – 231.
4. Birkhoff, G. D. *Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 9 **1908**, pp. 373 – 395.
5. Boyce, W. E.; Diprima, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Willey and Sons, New York, **1977**, pp. 544-554.
6. Çağlıyan M.; Çelik N.; Doğan S. *Adi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayın No:6, 2. Baskı, Bursa. **2008**.
7. Dunford, N.; Schwartz, J. T. *Linear Operators II, Spectral Theory*, Interscience, New York, **1963**.
8. Fulton, C. T. *Two-point Poundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in The Boundary Condition*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A 77, **1977**, p. 293-308.
9. Gohberg, I. C.; Krein, M. G. *Introduction to The Theory of Linear Non-Selfadjoint Operator*, Amer, Math. Soc., Providence, **1969**.
10. Hinton, D. B. *An Expansion Theorem for Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in The Boundary Condition*, Quart. J. Math. Oxford, vol. 30, No: 2, **1979**, 33-42.

11. Kapustin, N. YU.; Moiseev E. I. *On Spectral Problem in The Theory of Parabolohyperbolic Heat-transfer Equation*, Doklady Akademi Nauk SSSR 352, no. 4 **1997**, 451-454 (in Russian).
12. Kerimov, N. B.; Mamedov, Kh. K. *On a Boundary Value Problem with a Spectral Parameter in The Boundary Conditions*, Sibirsk. Math. J. 40, No:2, **1999**, 281-290.
13. Kreyszing, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, **1978**.
14. Levitan, B. M.; Sarqsyanyan, I.S. *Sturm-Liouville ve Direkt Operatörler*, Moskova, Nauka, (Rusca), **1988**.
15. Marçenko, V. A. *Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Teorisi*, Kiev, Naukova Dumka, (Rusca), **1972**.
16. Markushevich, A. I. *Introduction to Analytic Functions Theory I, II*, Moskow, **1977**.
17. Naimark, M. A. *Linear Differential Operators*, Ungar, New York, **1967**.
18. Rasulov, M. L. *Methods of Contour Integration*, Amsterdam: North Holland Publishing Company, **1967**.
19. Russakovskiy, E. M. *Sınır Şartları Polinom Biçiminde Özdeğer Parametresi İçeren Sınır Değer Probleminin Operatör Yorumu*, Funk. Analizi eko priloj. 9 No:4, **1975**, 91-92 (Rusca).
20. Schneider, A. *A Note Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in The Boundary Conditions*, Math. Z. 136, **1974**, 163-167.
21. Shkalikov, A. A. *Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Conditions*, Trudy., Sem., Imeny, I.G.Petrovsgo, 9, **1983**, 190-229

22. Smirnov, V. I. *A Course of Higher Mathematics, Part 5*, Pergaman Pres, Oxford, **1964**.
23. Tamarkin, J. D. *Some General Problems of The Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansions of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions*, Math. Z. 27, **1928**, 1 – 54.
24. Uluçay, C. *Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri*, A.Ü. Fen Fakültesi, Ankara, **1971**.
25. Titchmarsh, E. C. *Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations*, 2nd end, Oxford Univ. Pres, London, **1962**.
26. Triebel, H. *Interpolation Theory ve Riemann Yüzeyleri*, A.Ü., Fen Fakültesi, Ankara, **1978**.
27. Walter, J. *Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in The Boundary Conditions*, Math. Z., 133, **1973**, 301-312.
28. Yakubov, S. *Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators*, Longman, Scientific, Technical, **1994**.
29. Yakubov, S.; Yakubov, Y. *Abel Basis of Root Functions of Regular Boundary Value Problems*, Math. Nachr. 197, **1999**, 157-187
30. Yakubov, S.; Yakubov, Y. *Differential Operator Equations (Ordinary and Partial Differential Equations)*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, **2000**.
31. Yosida, K. *Functional Analisis*, Springer-Varlag. Berlin, **1965**.



## ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Kahramanmaraş'ta doğan Yasemin KUZU, ilk ve orta öğrenimini sırasıyla Kadirli İlköğretim Okulu'nda ve Kadirli Gülten-Ali Zıyan Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2004 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Anabilim Dalı'nı 2009 yılında başarıyla bitirdi. Lisansla Birleştirilmiş Tezsiz yüksek lisans öğreniminin ardından 2009 yılında tezli yüksek lisans öğrenimine Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Tezli yüksek lisans eğitimi sırasında matematik öğretmeni olarak Gaziantep'in Nizip ilçesi Hüseyin Yalçın Çapan Lisesi'ne atandı. Daha sonra Kırşehir Ticaret Meslek Lisesi'nde göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.