T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR STURM-LIOUVILLE TİPİNDE PROBLEMİN ÇÖZÜM FONKSİYONLARININ ASİMPTOTİĞİ VE GREEN FONKSİYONU

Okan KUZU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2011

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR STURM-LIOUVILLE TİPİNDE PROBLEMİN ÇÖZÜM FONKSİYONLARININ ASİMPTOTİĞİ VE GREEN FONKSİYONU

Okan KUZU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Doç. Dr. Mahir KADAKAL

KIRŞEHİR 2011

ONAY

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Doç. Dr. Mahir KADAKAL

Üye
Yrd. Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Üye
Yrd. Doç. Dr. Muharrem AKTÜMEN

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

…/…/2011
Enstitü Müdürü
Doç. Dr. Mustafa KURT

ÖZET

Bu çalışmada, sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville problemi incelenmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın "Giriş" bölümünde, Sturm-Liouville denklemi, matematiksel fizik, Sturm and Liouville ile ilgili bilgiler verilmiştir.

"Literatür özeti" bölümünde özdeğer parametresi içeren lineer diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin genel tarihine ve diğer çalışmalardan elde edilmiş sonuçların kısa bir özetine değinilmiştir.

"Genel Bilgiler" bölümünde tez konumuzla ilgili olan genel bilgilere ve tanımlara yer verilmiştir.

"Bulgular ve Tartışma" bölümünde Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri incelenmiş, asimptotik ifadeler ve Green Fonksiyonu bulunmuştur.

Çalışmamızın sonuncu bölümü olan "Sonuç ve Öneriler" bölümünde ise araştırmamızdan elde edilen sonuçlara ve bu sonuçların önemine yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sınır değer problemi, Sturm-Liouville teorisi, diferansiyel operatör, özdeğer, özfonksiyon, asimptotik davranış, Green Fonksiyonu

ABSTRACT

In this study we have examined Sturm-Liouville Problem which has eigenvalue parameter in the boundary conditions.

This study has arranged in 5 chapters, in “The Introduction” chapter, informations related to Sturm-Liouville equation, mathematical physics, Sturm and Liouville has been given.

In “The Literatur” chapter, we have mentioned the general history of boundary value problems for linear differential equations which has eigenvalue parameter and a brief summary of the results obtained from other studies.

In “The General Knowledge” chapter, we have mentioned the general knowledge and definitions about the subject of our thesis.

In “Finding and Discussion” chapter, we have examined eigenvalue of Sturm-Liouville Problem and obtained asymptotic formulas and Green’s function.

In “Conclusions and Recommendations” chapter, we have mentioned possible solutions obtained from the study and important of these solutions.

Key Words: Boundary value problem, Sturm-Liouville Theory, Differential operator, eigenvalue, eigenfunction, asymptotic behavior, Green’s Function.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmamın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Mahir KADAKAL' a minnettarlığımı sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen bölümümüzün değerli hocalarına şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan kıymetli anne ve babama, beni bu tarz çalışmalara teşvik eden değerli kardeşlerime ve sonsuz desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$E=(E,K,+,\cdot)$	: Lineer veya Vektör uzayı
$X=(X,d)$	: Metrik uzay
$(E,\lVert\cdot\rVert)$	: Lineer normlu uzay
$\langle x,y\rangle$	: x ve y elemanlarının iç çarpımı
$E=(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$	: İç çarpım uzayı
$L_2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$W(f,g)$	: Wronskian determinantı
λ	: Özdeğer
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyonu
H	: Hilbert Uzayı
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı
$W_2^2(0,\pi)$	: Sobolev Uzayı
O, o, $\sim$	: Asimptotik davranışları tarif etmek için kullanılan simgeler
SDP	: Sınır Değer Problemi
BDP	: Başlangıç Değer Problemi

1. GİRİŞ

Isının bir nesne üzerinde, belli bir konumda ve zamanda, nasıl dağılacağını tanımlayan parçalı diferansiyel denkleme ısı denklemi denir. Kartezyen koordinat sisteminde, (x, y, z) konumu ve t zamanı göstermek üzere, ısı denkleminin genel ifadesi

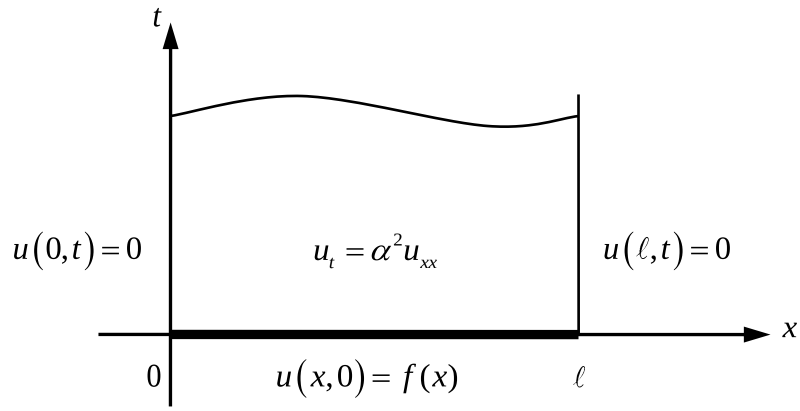
$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

şeklindedir. Burada k bir sabit ve $u = u(x, y, z, t)$ dir. Isı denklemi bir boyutta ise

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

şeklindedir. Fourier yöntemi; matematik fiziğin birçok problemlerinin çözümünde kullanılan en etkili yöntemlerden biridir. Değişkenlerine ayırma yöntemi olarak da bilinen bu yöntemin uygulanması sonucunda, birçok problem adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemine dönüştürülür. Ancak, Fourier yönteminin esaslandırılması için elde edilen sınır değer probleminin, özfonksiyonlarının baz oluşturması veya hiç olmazsa, özfonksiyonların ve bu fonksiyonlara bağlanmış fonksiyonların tam olması gösterilmelidir. Bu ise, Lineer Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin başlıca konusudur.

Sonlu ℓ uzunluğunda, ısı geçirici ince bir telde ısı iletimi problemini ele alalım. Koordinat eksenini öyle seçelim ki, bu tel apsis ekseninin $[0, \ell]$ aralığında olsun. Zamanı ise ordinat ekseni ile gösterelim. Bu halde telin her noktasında ki u ısısı x'e ve t zamanına bağlı olacaktır. Yani $u = u(x, t)$ şeklindedir.



Matematik fizikten biliniyor ki, $u(x,t)$ fonksiyonu

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \tag{1.1}$$

denklemini sağlar. Burada α, telin yapıldığı maddeye uygun fiziksel sabittir. ($\alpha^2 = \dfrac{K}{\rho c}$; K -dahili ısı iletme katsayısı, ρ - yoğunluk, c - ısı tutumudur.)

Başlangıç anında telin her noktasındaki ısının değeri $f(x)$ ile gösterilirse,

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \ell \tag{1.2}$$

başlangıç şartını almış oluruz. (1.1) denkleminin

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad t > 0 \tag{1.3}$$

çözümünü bulacağız. Fourier yöntemine göre (1.1) denkleminin herhangi çözümünü

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1.4}$$

şeklinde arayalım. (1.4)' ü (1.1) de yerine yazarsak,

$$u_t = XT', \quad u_x = TX', \quad u_{xx} = TX''$$

olduğundan

$$XT' = \alpha^2 X''T \tag{1.5}$$

elde edilir. (1.5) denklemini

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} \tag{1.6}$$

şeklinde yazarak değişkenlerine ayırmış oluruz. Sol taraf sadece x değişkenine, sağ taraf ise sadece t değişkenine bağlı olduğundan, (1.6) eşitliğinin her iki tarafı x'e ve t'ye bağlı olmayan herhangi σ sabitine eşittir. Bu sabite, ayırma sabiti denir. Dolayısıyla (1.6) eşitliğini

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \sigma$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece $X(x)$ ve $T(t)$ fonksiyonları için

$$X'' - \sigma X = 0$$

$$T' - \sigma\alpha^2 T = 0 \tag{1.7}$$

şeklinde iki adi diferansiyel denklem elde edilmiş olur. (1.3) sınır şartları ise (1.4) denkleminden yararlanılarak

$$u(0,t) = X(0)T(t) \quad \Rightarrow \quad 0 = X(0)T(t) \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0$$

ve ($T(t)=0$ olursa $u(x,t)=0$ çözümüne götürür.)

$$u(\ell,t)=X(\ell)T(t) \quad \Rightarrow \quad 0=X(\ell)T(t) \quad \Rightarrow \quad X(\ell)=0$$

şekline dönüşür. Böylece $X(x)$ fonksiyonu için

$$X''=\sigma X \tag{1.8}$$

$$X(0)=X(\ell)=0 \tag{1.9}$$

sınır değer problemi elde edilmiş olur. Şimdi elde edilen bu sınır değer problemini çözelim. Kolaylık olması için $\sigma=-\lambda^2$ ile gösterelim. O halde (1.8) denklemi

$$X''+\lambda^2 X=0 \tag{1.10}$$

şeklinde yazılır. $\lambda=0$ olduğunda bu denklemin genel çözümü $X(x)=k_1x+k_2$ şeklindedir. Bunu (1.9) sınır şartlarında yerine yazarsak $k_1=k_2=0$, yani $u(x,t)\equiv 0$ trivial (aşikar) çözümü elde edildiğinden $\lambda\neq 0$ hali incelenmelidir. O halde (1.10) denkleminin genel çözümü;

$$X(x)=k_1\cos\lambda x+k_2\sin\lambda x \tag{1.11}$$

şeklinde olur. Bu çözümü (1.9) sınır şartlarında yerine yazarsak

$$X(0)=0 \quad \Rightarrow \quad k_1\cos 0+k_2\sin 0=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$X(\ell)=0 \;\Rightarrow\; k_1\cos\lambda\ell+k_2\sin\lambda\ell=0 \;\Rightarrow\; 0\cdot\cos\lambda\ell+k_2\sin\lambda\ell=0 \;\Rightarrow\; k_2\sin\lambda\ell=0$$

olur. $k_2=0$ olduğunda (1.11) denkleminden $X(x)=0$ olduğu görülür. Bu ise bizi $u(x,t)=0$ aşikar çözüme götürür. O halde $k_2\neq 0,\ \sin\lambda\ell=0$ durumu incelenmelidir. $X(\ell)=0$ iken $\sin\lambda\ell=0$ ifadesinden

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{\ell}, \quad n=\pm1,\pm2,...$$

elde edilir. $\sigma=-\lambda^2$ olduğundan $\sigma=-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ yazılabilir. Bu sayılara (1.8), (1.9) sınır değer probleminin özdeğerleri denir. Bu değerlere uygun gelen çözümler ise

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n=1,\ 2,\ ...$$

fonksiyonları ve bunların keyfi sabitle çarpımlarıdır. Bu fonksiyonlara ise (1.8), (1.9) sınır değer problemlerinin özfonksiyonları denir. (1.7) denkleminin çözümleri ise

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t}$$

şeklinde bulunur. O halde

$$U_n(x,t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

fonksiyonları (1.1) denklemini ve (1.3) sınır şartlarını sağlar. Bu durumda (1.2) başlangıç şartı aşağıdaki şekilde karşımıza çıkar.

$$f_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell} \tag{1.12}$$

O halde $f(x)$, (1.12) şeklinde değilse (1.1), (1.3) probleminin (1.12) şeklinde çözümü bulunmaz. (1.1) denklemi ve (1.3) sınır şartları homojen olduklarından

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{m} C_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{m} C_n\, e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)} \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

şeklindeki lineer birleşimlerde (1.1) denklemini ve (1.3) sınır şartlarını sağlar. (1.2) başlangıç şartını sağlaması için $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{m} \sin\frac{n\pi x}{\ell} C_n \tag{1.13}$$

şeklinde olmalıdır. (1.13) şartı ise (1.1) ve (1.3) problemi için hem fiziksel, hem de matematiksel açıdan çok ağır olan sınırlayıcı şarttır. Bunu aradan kaldırabilmek için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$$

serisine açıldığını kabul edelim. Bu halde belli şartlar altında

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

fonksiyonu (1.1), (1.3) probleminin çözümü oluyor.

Görüldüğü gibi birçok matematiksel fizik probleminin çözümü uygun özdeğer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları kullanılarak inşa edilebilir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri teorisi ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında İsveçli matematikçi Jacques Sturm (1803-1855) ve Fransız matematikçi Joseph Liouville (1809-1882) nin çalışmalarına dayanmaktadır.

Jacques François Sturm Charles (29 Eylül 1803 – 15 Aralık 1855)

Sturm, 1803 yılında İsviçre'nin Cenevre kentinde dünyaya geldi. Cenevre akademisinde okuduğu yıllarda matematik öğretmeni olan babasını kaybetti. Bunun üzerine ailesini desteklemek için zengin çocuklara özel ders vermeye başladı.

Akademi yıllarında en iyi arkadaşı olan Daniel Collodan ile 1824 yılında Paris Akademisi ödülünü kazanmak için suyun sıkıştırılması üzerinde çalışma yaptılar. Ancak bu ödülü kazanamadılar. 1825 yılında Fourier'in tavsiyeleri üzerine düzeltmeler yapsalar da ödülü yine kazanamadılar. Ertesi yıl Sturm ve Colladan, Fourier için asistan olarak çalışmaya başladılar. Bu süre içinde suyun sıkıştırılması çalışmalarına devam ettiler ve ödülü kazandılar.

Sturm, 1829 yılında verilen limit değerleri arasında nümerik denklemlerin reel köklerinin sayısını belirlemede çalışmalar yaptı. Poisson ısı teorisiyle ilişkilendirerek diferansiyel denklemlere çok büyük katkı sağladı. Bu çalışma Liouville form ile birleştirilerek Sturm-Liouville teoremine dönüştü. Ayrıca Sturm'un "Sonsuz Geometriye, Projektif Geometriye ve Diferansiyel Geometriye" katkıları oldu.

Joseph Liouville (24 Mart 1809 – 8 Eylül 1882)

Liouville, 1809 yılında Fransa'da Sanit Omer kentinde dünyaya geldi. 1833 yılında Ecole Polytechnique'e profesör olarak atandı. 1836 yılında "Joural des Mathematiques Pure et Appliquees" adlı dergiyi kurdu. 1839 yılında ise, hem College de Sorbonne hem de College de France'a profesör olarak atandı.

Liouville, matematiğin birçok dalında eser verdi. Özellikle sınır değer problemleri ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler üzerine çok sayıda çalışmaları vardır. Sayılar kuramı üzerinde yaptığı yüksek düzeydeki çalışmaları ilginçtir. İki yüzün üzerinde yayımlanmış makalesi vardır. Analizde Liouville teoremi ünlüdür.

Liouville, Galois öldükten sonra onun ölmek üzere hastanede kaleme aldığı ünlü Galois kuramını ilk anlayan ve bu ünlü çalışmayı yayımlayan biri olduğu için de çok değerlidir. "Tüm düzlemde analitik fonksiyon sınırlı ise sabittir." diye bilinen Liouville teoremi, analizde birçok teoremin ispatında kullanılır.

Adi diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin genel hali

$$\ell(y,\lambda) = y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x,\lambda)y = 0 \tag{2.1}$$

$$V_j(y,\lambda) = \sum_{K=0}^{n-1}\left(a_{jK}(\lambda)\, y^{(K)}(0) + b_{jK} y^{(K)}(1)\right) = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $p_s(x,\lambda) = \sum_{\Upsilon=0} p_{\Upsilon s}(x)\lambda^{\Upsilon}$, $p_{ss}(x) = const$, $s = 1,\ldots,n$ ve $p_{mn} \neq 0$, $a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ fonksiyonları ise λ'nın polinomlarıdır. (2.1), (2.2) tipinde problemlerin araştırılması G.D. Birkhoff'un [3] ve [4] çalışmalarıyla başlamıştır. Birkhoff'un bu çalışmalarında özdeğer parametresine bağlı lineer diferansiyel operatörler için temel çözüm sistemini oluşturan çözümlerin asimptotik davranışları incelenmiş ve bazı asimptotik eşitlikler bulunmuştur. Ayrıca Birkhoff'un bu çalışmalarında adi diferansiyel operatörler için regüler sınır şartları kavramı tanımlanmış ve uygun sınır değer probleminin kök fonksiyonlarının (yani özfonksiyonlarının) tamlığı hakkında teorem ispatlanmıştır.

Bu tip problemler ilerleyen yıllarda, J.D.Tamarkin'in [22] çalışmasında araştırılmıştır, (2.1) denkleminin temel çözüm sistemini oluşturan fonksiyonların asimptotik davranışları incelenmiş, regüler ve güçlü regüler sınır değer problemi kavramı tanımlanmıştır. Güçlü regüler sınır değer probleminin özdeğerleri için asimptotik formüller bulunmuştur. Regüler problemler için ise Green fonksiyonu değerlendirilmiş ve kök fonksiyonları üzerine açılım teoremleri ispatlanmıştır. Daha sonraki yıllarda bu ve benzer problemler birçok matematikçi tarafından yoğun şekilde araştırılmıştır. Son yıllarda adi diferansiyel operatörler teorisi ile ilgili farklı problemler de yoğun bir biçimde incelenmiş ve sadece denkleminde değil, aynı zamanda sınır şartlarında da özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville tipinde problemler özel ilgi çekmeye başlamıştır. Bu konuda çok sayıda makale ve kitaplar yazılmıştır. Bu konudaki önemli çalışmalar hakkında [7], [8], [9], [14], [15], [17], [18], [21], [25], [28], [30] kaynaklarında yeteri kadar bilgi verilmiştir.

İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için bazı kendine eşlenik sınır değer problemleri [2], [10], [11], [12], [19], [20], [27], [29] çalışmalarında incelenmiştir. Örneğin;

J. Walter'ın [27] çalışmasında

$$\frac{1}{r}\left\{-\left(pu'\right)'+qu\right\}=\lambda u, \qquad x\in\left[a_1,a_2\right] \tag{2.3}$$

$$-\left(\beta_{11}u(a_1)-\beta_{12}u'(a_1)\right)=\lambda\left(\alpha_{11}u(a_1)-\alpha_{12}u'(a_1)\right) \tag{2.4}$$

$$-\left(\beta_{21}u(a_2)-\beta_{22}u'(a_2)\right)=\lambda\left(\alpha_{21}u(a_2)-\alpha_{22}u'(a_2)\right) \tag{2.5}$$

biçiminde Sturm-Liouville problemi için yeni bir μ ölçümü tanımlanmış (problemin katsayı fonksiyonları olan $p(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonlarından bağımlı olan ölçüm) ve uygun $L_2\left((a,b];\mu\right)$ Hilbert uzayında (2.3)-(2.5) problemine uygun $A: L_2\left((a,b];\mu\right)\to L_2\left((a,b];\mu\right)$ operatörü tanımlayarak (2.3)-(2.5) probleminin operatör-teorik yorumlamasını vermiştir. Daha sonra A operatörünün kendine eşlenikliğini ispatlayarak, kendine eşlenik operatörlerin fonksiyonel analizinden bilinen özelliklerinden yararlanarak açılım teoremi ispatlanmıştır.

Schneider'in [20] çalışmasında ise

$$\begin{cases} -\left(pu'\right)'+qu=\lambda ru \\ u(a)=0 \\ -\left(\beta_1 u(b)-\beta_2 u'(b)\right)=\lambda\left(\alpha_1 u(b)-\alpha_2 u'(b)\right) \end{cases}$$

sınır şartlarının sadece bir tanesinde özdeğer parametresi içeren uygun problem için S-hermityen sınır değer problemleri yöntemiyle araştırılabileceğini göstermiş ve özfonksiyonlar sistemi üzerine açılımın düzgün ve mutlak yakınsaklığı için yeter şartlar bulmuştur.

Fulton’un [8] çalışmasında,

$$\begin{cases} \tau := -u'' + qu = \lambda u \\ \cos\alpha u(a) + \sin\alpha u'(a) = 0 \\ -\left(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)\right) = \lambda\left(\beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b)\right) \end{cases}$$

şeklinde bir problem ele almış ve problemde sadece fonksiyonel analizin yöntemlerini değil, Titcmarsh’ın [25] çalışmasının klasik yöntemlerinden de faydalanarak özdeğer parametresinin sınır şartlarının sadece bir tanesinde bulunduğu durum için çalışmalar yapmıştır. Çalışmalarında uygun problem için özdeğer ve özfonksiyonların asimptotiğini bulmuş ve farklı açılım teoremleri ispatlamıştır.

Russakovskiy’nin [19] çalışmasında, sınır şartları polinom biçiminde özdeğer parametresi içeren problemlerin operatör-teorik yorumunu vermiştir.

Kerimov ve Mamedov’un [12] çalışmasında

$$-u'' + q(x)u = \lambda^2 u, \qquad 0 < x < 1 \tag{2.6}$$

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2\right)u(0) + u'(0) = 0 \tag{2.7}$$

$$\left(\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2\right)u(1) + u'(1) = 0 \tag{2.8}$$

problemine uygun

$$A(\lambda)\lambda^2 + B(\lambda)\lambda + C(\lambda) = 0$$

biçiminde operatörler demetini kurarak (2.6)-(2.8) problemine farklı bir yaklaşımla operatör-teorik yorum getirmişlerdir. Bu çalışmada özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik davranışları incelenmiş ve ayrıca özfonksiyonların sıfır yerleri hakkında klasik sorulara benzer sonuçlar bulmuşlardır.

Tez çalışmamızda ise sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville tipindeki bir probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiştir.

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmamızda yararlandığımız temel tanım, kavram, teorem ve sonuçlar hakkında kısa ve öz bilgilere yer verilmiştir.

3.1. Lineer Operatörler

E kümesi ve bu kümenin elemanları arasında aşağıdaki şartları sağlayan “$+$” işlemi $+ : E \to E$ şeklinde tanımlansın;

1. $x+y=y+x$ (Değişme özelliği)

2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (Birleşme özelliği)

3. "Θ" ile gösterilen ve $\forall x \in E$ için $x+\Theta=x$ şartını sağlayan bir tek $\Theta \in E$ elemanı mevcuttur.

4. Her $x \in E$ için $-x$ ile gösterilen ve $x+(-x)$ şartını sağlayan bir tek $-x \in E$ elemanı mevcuttur. Yani her $x \in E$ için $x+y=0$ olacak şekilde bir tek $y \in E$ vardır. Bu durumda y elemanı $-x$ ile gösterilir.

Ayrıca bir K cismi (genel olarak $K=\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olarak düşünülür, sayı cismi olarak da adlandırılır) için K ile E’nin elemanları arasında “$\cdot$” ile gösterilen $\cdot : K \times E \to E$ işlemi tanımlansın ve bu işlem için aşağıdaki özellikler sağlansın;

5. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ ($\forall \alpha, \beta \in K$ ve $\forall x \in E$ için)

6. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

8. $1 \cdot x = x$ (“1” K cisminin birim elemanı)

Bu şartları (aksiyomları) sağlayan $E=(E,K,+,\cdot)$ kümesi K cismi üzerinde lineer veya vektör uzay olarak adlandırılır. Kısaca E lineer uzaydır denir. E lineer uzayının herhangi D alt kümesinin elemanları E lineer uzayında tanımlı “$+$” ve “$\cdot$” işlemlerine göre bir lineer uzay oluşturuyorsa, D’ye E lineer uzayının lineer alt uzayı denir. E lineer uzayı, bu uzayın bir D lineer alt uzayı ve bir $A : D \to E$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in D$ ve her $\lambda \in K$ için

$$A(x+y)=Ax+Ay, \quad A(\lambda x)=\lambda Ax$$

şartları sağlanıyorsa, A dönüşümü lineer operatör olarak adlandırılır. D'ye A lineer operatörünün tanım bölgesi denir [17].

3.2. Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları

$p_i(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(i=0,1,2,...,n)$, sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\ell(y):=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y,\quad x\in(a,b)$$

biçiminde verilen bir ifadeye $n\cdot$mertebeden lineer diferansiyel ifade denir. Genel olarak her x için $p_0(x)\neq 0$ olduğu kabul edilir.

$$U(y):=\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)+...+a_{n-1}y^{(n-1)}(a)+\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)+...+\beta_{n-1}y^{(n-1)}(b)$$

biçimindeki ifadeye ise sınır değer ifadesi denir. $U_i(y),\, i=1,2,...,m$ ifadeleri sınır değer ifadeleri olduğunda $U_i(y)=0,\quad i=1,2,...,m$ biçimindeki eşitlikler sınır şartları olarak adlandırılır.

$C[a,b]$ ile, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı gösterilir. Ayrıca

$$\left\{f\in C[a,b]\;\middle|\; f',f'',...,f^{(n)}\in C[a,b]\right\}$$

lineer uzayı ise $C^{(n)}[a,b]$ biçiminde gösterilir.

$$L:C[a,b]\to C[a,b]$$

$$D(L)=D=\left\{y\in C[a,b]\;\middle|\; y\in C^{(n)}[a,b],\, U_i(y)=0,\quad i=1,2,...,m\right\}$$
$$L(y)=\ell(y)=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y$$

eşitlikleri ile tanımlanan $L-$lineer operatörüne lineer diferansiyel operatör veya $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile $U_i(y)=0,\, i=1,2,...,m$ sınır şartlarının ürettiği lineer diferansiyel operatör denir [17].

3.3. Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

E lineer uzayında tanım bölgesi $D(A)$ olan $A:E\to E$ lineer operatörü verilsin. Eğer herhangi $\lambda=\lambda_0$ ve herhangi $u_0\in H,\, u_0\neq 0$ için $Au_0=\lambda_0 u_0$ eşitliği sağlanırsa, λ_0 sayısına A operatörünün özdeğeri, $u_0\in H,\, u_0\neq 0$ elamanına ise λ_0 özdeğerine uygun özelementi (özfonksiyonu) denir [17].

3.4. Metrik Uzaylar, Normlu Uzaylar ve Banach Uzayları

X kümesi ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to d(x,y)$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanırsa $X = (X,d)$ uzayı metrik uzay olarak adlandırılır.

1. $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$

2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in X$

$X = (X,d)$ metrik uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi ve bir x_0 noktası verilsin. Eğer $d(x_n, x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ise, $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir. $\{x_n\}$ dizisi için eğer $d(x_n, x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ olacak biçimde $x_0 \in X$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisine yakınsak dizi denir.

3.4.1. Tanım: $X = (X,d)$ metrik uzayı ve bu uzayda $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Eğer $d(x_n, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$ ise bu durumda $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

3.4.2. Tanım: $X = (X,d)$ metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Tam Metrik Uzay denir [28].

3.4.3. Tanım: E lineer uzayı $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi üzerinde ve $\|\cdot\| : \underset{x\in E \to \|x\| \in \mathbb{R}}{E \to \mathbb{R}}$ dönüşümü için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

1. $\forall x \in E$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

2. $\forall x \in E$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3. $\forall x, y \in E$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bu durumda E lineer uzayında bir norm tanımlanmıştır denir. $\|x\|$'e x elemanının normu, üzerinde norm tanımlanmış E lineer uzayına lineer normlu uzay denir ve $(E, \|\cdot\|)$ şeklinde gösterilir. Lineer normlu uzayda $d(x,y) = \|x - y\|$ eşitliği bir metrik tanımlar. Bu nedenle her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzay olarak kabul edilir. Eğer lineer normlu uzay tam ise (lineer normlu uzay $d(x,y) = \|x - y\|$ metriğine göre metrik uzay olarak kabul edildiği için metrik uzaylardaki bütün kavramlar lineer normlu uzaylar için de tanımlanmış olur.) bu uzay Banach Uzayı olarak adlandırılır [28].

3.5. İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları

Kompleks sayılar cismi üzerinde bir E lineer uzayı verilsin. Bu uzayda her $x, y \in E$ eleman çiftine $\langle x, y\rangle$ ile gösterilen bir tek kompleks sayı karşılık gelmişse ve de bu durumda her $x, y, z \in E$ ve her α kompleks sayısı için

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

3. $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

4. $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

şartları sağlanırsa, E'de bir iç çarpım tanımlanmıştır. $\langle x, y\rangle$ sayısına x ve y elemanlarının iç çarpımı denir. $E = \left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ ise iç çarpım uzayı olarak adlandırılır.

$E = \left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ iç çarpım uzayında $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eşitliği ile bir norm tanımlar. Bu nedenle her iç çarpım uzayı bir normlu uzay, dolayısıyla bir metrik uzay olarak kabul edilir. Eğer E iç çarpım uzayı tam ve de sonsuz boyutlu ise (yani sonlu boyutlu değilse) Hilbert uzayı olarak adlandırılır [28].

3.6. Hilbert Uzayında Simetrik Operatörler

$H-$Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ lineer uzayı verilsin.

$$\langle Ax, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle_H$$

eşitliği her $x, y \in D(A)$ için sağlanıyorsa A operatörüne simetrik operatör denir. Simetrik operatörlerin bütün özdeğerleri reel ve farklı özdeğerlere uygun özfonksiyonları ortogonaldır [22].

3.7. $L_2(a,b)$ Uzayı ve Sobolev Uzayı

$[a,b]$ aralığında tanımlı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan $f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilirse $f(x)$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir. Karesi integrallenebilir fonksiyonların lineer uzayında

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

ile gösterilen bu formül bir iç çarpım tanımlar. Bu şekilde tanımlanan iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğu bilinmektedir. Bu uzay $L_2(a,b)$ ile gösterilir. $[a,b]$ aralığı sonlu olduğu durumda $L_2(a,b)$'den olan her bir fonksiyonun (a,b) aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olacağı açıktır [17].

3.7.1. Tanım: (a,b) aralığında tanımlı ve lokal integrallenebilir olan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları verilsin. Eğer sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir ve $Supp\varphi = \left\{\overline{x|\varphi(x)\neq 0}\right\} \subset (a,b)$ şartını sağlayan her $\varphi(x)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b u(x)\varphi^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_a^b v(x)\varphi(x)dx$$

eşitliği sağlanıyorsa $v(x)$ fonksiyonu $u(x)$ fonksiyonunun $n(n\in\mathbb{N})$ mertebeden genelleştirilmiş türevi denir.

$(a,b)\subset\mathbb{R}$ aralığı $q>1$ reel sayısı ve $m>0$ tamsayısı verildiğinde $W_q^m(a,b)$ ile (a,b) aralığında Lebesque anlamında ölçülebilir ve $u(x),u''(x),...,u^{(m)}(x)$ genelleştirilmiş türevleri bulunan ve her $k=1,2,...,m$ için $u^{(k)}(x)\in L_2(a,b)$ olan fonksiyonların lineer uzayını göstereceğiz. Bu uzayda

$$\langle u,v\rangle_{W_2^m(a,b)} = \left(\sum_{k=0}^{m}\left\langle u^{(k)},v^{(k)}\right\rangle_{L_2(a,b)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü bir iç çarpım tanımlıyor. Bu uzaylara Sobolev uzayları denir. Bu uzayların Hilbert uzayları olduğu bilinmektedir. [26]

3.8. Mutlak ve Düzgün Yakınsaklık

$\mathrm{a}_k = (a_{k1},a_{k2},...,a_{kn})\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere (a_k) dizisi verilmiş olsun.

$$a_1 + a_2 + ... + a_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{a}_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{k1},a_{k2},...,a_{kn})$$

ifadesine $\mathbb{R}^n$ 'de seri denir. $S_k = \mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_2 + ... + \mathsf{a}_k$ 'ya serinin kısmi toplamı ve (S_k) dizisine ise serinin kısmı toplamlar dizisi denir ($k = 1, 2, ...$)

(S_k) kısmi toplamlar dizisi $\mathsf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ 'ye yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{a}_k$ serisi a 'ya yakınsaktır denir ve $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{a}_k = \mathsf{a}$ yazılır. (S_k) ıraksak ise seriye ıraksak denir (Burada $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{a}_k$ simgesinin yerine göre seriyi, yerine göre ise serinin toplamını gösterdiğine dikkat ediniz) [1].

3.8.1. Tanım: $\mathbb{R}^n$ **'de** $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{a}_k$ serisi verilmiş olsun. Eğer $\sum_{k=!}^{\infty} \|\mathsf{a}_k\|$ reel serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{a}_k$ serisine mutlak yakınsak denir [1].

3.8.2. Tanım: $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere (f_k) fonksiyon dizisi ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. Bütün x ve $k > k_0 = k_0(\varepsilon)$ için S 'de

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde, sadece ε 'a bağlı fakat x 'e bağlı olmayan bir k_0 sayısı varsa (f_k), S 'de düzgün yakınsaktır denir [1].

3.8.3. Teorem (Diziler için Cauchy Kriteri) : $f_k : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere (f_k) dizisi ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (f_k) 'nın düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $k \geq p > k_0$ için S 'de

$$|f_k(x) - f_p(x)| < \varepsilon \tag{3.8.1}$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ 'nin olmasıdır [1].

İspat: $(f_k(x))$ dizisi S 'de f 'ye düzgün yakınsak ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu takdirde her $x \in S$ ve her $k > k_0$ için

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $x \in S$ ve $k > p > k_0$ için

$$\left|f_k(x)-f_p(x)\right|=\left|f_k(x)-f(x)+f(x)-f_p(x)\right|\le\left|f_k(x)-f(x)\right|+\left|f_p(x)-f(x)\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

olur. Tersine olarak, verilmiş $\varepsilon>0$ sayısı ve $k>p>k_0$ için S'de $\left|f_k(x)-f_p(x)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde k_0 pozitif tam sayısının olduğu yani (3.8.1) Cauchy şartının sağlandığını farz edelim. Bu demektir ki her bir $x\in S$ için $\left(f_k(x)\right)$ dizisi bir Cauchy dizisi ve dolayısıyla yakınsaktır. $\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$ olsun. Şimdi bu yakınsamanın düzgün olduğunu gösterelim. Eğer $\varepsilon>0$ verilmişse bu halle ilgili kabulden dolayı her $x\in S$ ve $k>p>k_0$ için $\left|f_k(x)-f_p(x)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde $k_0\in\mathbb{N}$ vardır. Bu takdirde her $x\in S$ için

$$\lim_{p\to\infty}\left|f_k(x)-f_p(x)\right|=\left|f_k(x)-f(x)\right|\le\varepsilon,\quad k>k_0$$

ve böylece $f_k\to f$ dir.

3.8.4. Teorem (Weierstrass M-Kriteri): $f_k : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere her $x\in A$ için $\left|f_k(x)\right|<M_k$ olacak şekilde M_k reel sayılar mevcut ve $\sum_{k=1}^{\infty}M_k$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ serisi düzgün ve mutlak yakınsaktır [1].

İspat: İspat için (3.8.1) Cauchy şartının sağlandığını göstermek yeterlidir. Hipotezden $\sum_{k=1}^{\infty}M_k$ yakınsak olduğu için $\varepsilon>0$ ve $k>p>k_0$ için $\sum_{n=p+1}^{k}M_n<\varepsilon$ olacak şekilde k_0 sayısı vardır. Böylece genelleştirilmiş üçgen eşitsizliğinden

$$\left|S_k(x)-S_p(x)\right|=\left|\sum_{n=p+1}^{k}f_n(x)\right|\le\sum_{n=p+1}^{k}\left|f_n(x)\right|\le\sum_{n=p+1}^{k}M_n<\varepsilon$$

yazılabilir. Demek ki her $x\in A$ için $\left|S_k(x)-S_p(x)\right|<\varepsilon$ ve böylece $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ serisi A'da düzgün yakınsaktır. Ayrıca son eşitsizlikten $\sum_{k=1}^{\infty}\left|f(x)\right|$ serisi de yakınsaktır.

3.9. SDP'nin Çözümünün Varlığı, Tekliği ve Parametreye Göre Tamlık Teoremi

Kabul edelim ki $q:[a,b]\to\mathbb{R}$ ile tanımlı $q(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. O halde $-u''+q(x)u=\lambda u,\ \ x\in[a,b]$ diferansiyel denkleminin

$$u(a)=\sin\alpha,\qquad u'(a)=-\cos\alpha,\qquad \alpha\in[0,\pi)$$

sınır şartlarını sağlayan bir tek $u(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her $x\in[a,b]$ için $\lambda\in\mathbb{C}$ parametresinin tam fonksiyonudur [25].

3.10. Asimptotik Davranışlar

Verilmiş $f(x)$ fonksiyonunun $x\to\infty$ için davranışı bazı durumlarda bilinen "basit" $g(x)$ fonksiyonunun $x\to\infty$ için davranışından yararlanılarak ifade edilebilir. Böyle durumlarda $f(x)$ ve $g(x)$ in $x\to\infty$ için davranış "yakınlığı" incelenirken "o", "O", "$\sim$" gibi simgelerden yararlanılmaktadır. Ayrıca, $x\to\infty$ için $g(x)$ üzerine önceden hiçbir şart konulmamaktadır.

Kompleks düzlemin herhangi $G\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı olan $f(z), g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları verilsin. Eğer $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ fonksiyonu bu bölgede sınırlı ise, yani;

$$|f(z)|\le M|g(z)|,\qquad z\in G\cap\{z:|z|>R\}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $R>0,\ M>0$ sayıları mevcutsa

$$f(z)=O(g(z)),\qquad z\in G,\qquad z\to\infty \tag{3.10.1}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeye asimptotik eşitlik denir. Eğer,

$$f(z)-h(z)=O(g(z)),\qquad z\in G,\qquad z\to\infty$$

ise

$$f(z)=h(z)+O(g(z)),\qquad z\in G,\qquad z\to\infty \tag{3.10.2}$$

yazılır. $z_0\in G$ verilsin. Bu takdirde

$$\lim_{z\to z_0,\, z\in G}\frac{f(z)}{g(z)}=0$$

$$f(z)=o\big(g(z)\big),\quad z\in G,\quad z\to\infty \tag{3.10.3}$$

yazılır ve $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının yakın komşuluğunda $g(z)$'ye göre sonsuz küçüktür denir. $\dfrac{f(z)}{g(z)}$, $z(0)$ noktasının herhangi komşuluğunda sınırlı ise

$$f(z)=O\big(g(z)\big),\quad z\in G,\quad z\to z_0 \tag{3.10.4}$$

yazılır. Eğer

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=1 \text{ ise}$$

$$f(z)\sim g(z),\quad z\in G,\quad z\to z_0 \tag{3.10.5}$$

yazılır. Hangi G bölgesinden bahsedildiği açık şekilde bilinirse $z\in G$ yazısı atılır.

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ reel veya kompleks sayı dizileri verildiğinde $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ dizisi sınırlı olduğunda

$$a_n=O(b_n) \tag{3.10.6}$$

yazılır. $a_n-c_n=O(b_n)$ olduğunda ise bu eşitlik

$$a_n=c_n+O(b_n) \tag{3.10.7}$$

şeklinde gösterilir. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$ olduğunda bu eşitlik

$$a_n=o(b_n) \tag{3.10.8}$$

şeklinde ve $a_n-c_n=o(b_n)$ olduğunda ise bu eşitlik aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$a_n=c_n+o(b_n) \tag{3.10.9}$$

(3.10.1)-(3.10.9) şeklindeki formüllere asimptotik formüller denir [25].

3.11. Wronskian Determinantı

$f,g\in C^1$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere

$$W_x(f,g)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$$

şeklinde tanımlanan determinanta Wronskian determinantı denir [13].

3.11.1. Teorem: $a_0, a_1, ..., a_n$ fonksiyonları bir I açık aralığında sürekli ve bu aralıktaki x için $a_0(x) \neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (3.11.1)$$

homojen lineer diferansiyel denkleminin $y_1, y_2, ..., y_n$ çözümlerinin I da lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul, I aralığındaki her x için

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0$$

olmasıdır [6].

İspat: Önce koşulun, yeter bir koşul olduğunu ispat edelim. Bunun için (3.11.1) homojen lineer denkleminin $y_1, y_2, ..., y_n$ çözümlerinin Wronkskianının I aralığındaki her x için sıfırdan farklı, fakat bu çözümlerin I da lineer bağımlı olduğunu varsayalım. Bu takdirde hepsi birden sıfır olmayan $b_1, b_2, ..., b_n$ sabitleri ve I aralığındaki her x için

$$b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + ... + b_n y_n(x) = 0 \qquad (3.11.2)$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} b_1 y_1'(x) + b_2 y_2'(x) + ... + b_n y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ b_1 y_1^{(n-1)}(x) + b_2 y_2^{(n-1)}(x) + ... + b_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned} \qquad (3.11.3)$$

bağıntıları sağlanır. I aralığındaki her x için (3.11.2) ve (3.11.3) bağıntılarına, $b_1, b_2, ..., b_n$ bilinmeyenlerine göre bir homojen cebirsel denklem sistemi olarak bakılabilir. Bu sistemin katsayılar determinantı, açıkça $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x)$ dir. $y_1, y_2, ..., y_n$ çözümleri I 'da lineer bağımlı varsayıldığından, söz konusu homojen cebirsel denklem sistemi aşikar olmayan bir çözüm takımına sahip olmalıdır. Bunun için, homojen cebirsel denklem sistemleri teorisinden bilindiği üzere, I aralığındaki her x için sistemin katsayılar determinantı sıfır, yani

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) = 0$$

olmalıdır. Bu I aralığındaki her x için $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0$ kabulüyle çelişir. Demek ki, her $x \in I$ için $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0$ ise, (3.11.1) homojen lineer diferansiyel denkleminin $y_1, y_2, ..., y_n$ çözümleri I 'da lineer bağımsızdır.

Şimdi koşulun, gerek bir koşul olduğunu ispat edelim. Bunun için,

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

homojen lineer denkleminin $y_1, y_2, ..., y_n$ çözümlerinin I da lineer bağımsız, fakat I nın hiç olmazsa bir x_0 noktasında $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x_0)=0$ olduğunu varsayalım. $x=x_0$ için (3.14.2) ve (3.14.3) cebirsel denklem sistemini tekrar göz önüne alalım.

$$\begin{gathered} b_1y_1(x_0)+b_2y_2(x_0)+...+b_ny_n(x_0)=0 \\ \vdots \\ b_1y_1^{(n-1)}(x_0)+b_2y_2^{(n-1)}(x_0)+...+b_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{gathered} \qquad (3.11.4)$$

sistemi, $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x)=0$ olduğundan, en az bir $b_1, b_2, ..., b_n$ çözüm takımına sahiptir ve b_i lerin hepsi birden sıfır değildir.

Şimdi (3.11.2) nin bir çözümü olan bu $b_1, b_2, ..., b_n$ sabitleriyle

$$\chi(x)=b_1y_1(x)+b_2y_2(x)+...+b_ny_n(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

homojen denkleminin bir çözümüdür ve (3.14.4) gereğince

$$\chi(x_0)=0,\ \ \chi'(x_0)=0,\ \ ...\ ,\ \chi^{(n-1)}(x_0)=0$$

Başlangıç koşullarını sağlar. Böylece I aralığındaki her x için

$$\chi(x)=0$$

dır. Buradan, I aralığındaki her x ve hepsi birden sıfır olmayan $b_1, b_2, ..., b_n$ sabitleri için

$$b_1y_1(x)+b_2y_2(x)+...+b_ny_n(x)=0$$

elde edilir. Bu $y_1, y_2, ..., y_n$ lerin I da lineer bağımsız olduğu varsayımıyla çelişir. Demek ki

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

homojen lineer diferansiyel denkleminin $y_1, y_2, ..., y_n$ çözümleri I da lineer bağımsız ise, I daki tüm x ler için $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x)\neq 0$ dır.

3.12. Sturm-Liouville Problemleri

$H-$ herhangi Hilbert uzayı $L:H\to H$ ise bu uzayda tanımlı olan lineer operatör olsun. Eğer H uzayının cisminden alınmış herhangi λ_0 skaleri için $Ly_0=\lambda_0 y_0$ olacak biçimde $y_0\in H$, $y_0\neq 0$ elemanı bulunursa, λ_0 sayısına L operatörünün özdeğeri, y_0 elemanına ise bu özdeğere uygun olan özeleman (veya özvektör) denir. Uygulamalarda sık sık rastlanan diferansiyel operatörlerden biri de

$$L\equiv -\frac{d}{dx^2}+q(x)$$

biçiminde ifade edilen operatördür (bu operatör genelde $H=L_2(a,b)$ biçimindeki Hilbert uzaylarında incelenmektedir). $L-$ operatörü için en önemli sınır şartları

$$\left.\begin{aligned} y(a)\cos\alpha+y'(a)\sin\alpha=0\\ y(b)\cos\beta+y'(b)\sin\beta=0\end{aligned}\right\} \tag{3.12.1}$$

$(\alpha,\beta\in[0,\pi))$ biçiminde veya

$$\left.\begin{aligned} y(a)=y(b)\\ y'(a)=y'(b)\end{aligned}\right\} \tag{3.12.2}$$

biçiminde verilmiş sınır şartlarıdır.

$$Ly(x)=-y''+q(x)y=\lambda y$$

denkleminin (3.12.1) veya (3.12.2) tipindeki sınır şartlarını sağlayan çözümlerinin bulunması problemi klasik Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır.

Eğer $[a,b]$ aralığı sınırlı, $g(x)$ fonksiyonu ise integrallenebilir ise o halde böyle problemlere Regüler Sturm-Liouville problemleri denir. Daha genel olan

$$y''+p(x)y'+\{\ell(x)+\lambda r(x)\}y=0 \tag{3.12.3}$$

biçimindeki diferansiyel denklemlerde (x,y) değişkenlerinden (t,u) değişkenlerine

$$t=\frac{\int_a^x\sqrt{r(s)}ds}{\int_a^b\sqrt{r(s)}ds},\quad u(t)=\sqrt[4]{r(x)}e^{\frac{1}{2}\int_a^x p(s)ds}y(x)$$

Laplace dönüşümü ile geçersek, (3.15.3) denklemi

$$u''+q(t)u=-\lambda u$$

denklemine dönüşür. Burada $r(x)>0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon; $p(x)$ ise 1. mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyondur. Ayrıca bu durumda $[a,b]$ aralığı da $[0,1]$ aralığına dönüşmüş olur [14].

3.13. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Paramatrelerin Değişimi Yöntemi

Parametrelerin değişimi yöntemi

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=Q(x) \tag{3.13.1}$$

denklemine ait

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

homojen lineer denkleminin n lineer bağımsız çözümünün (dolayısıyla genel çözümünün) bilinmesi halinde (3.13.1) denkleminin bir özel çözümünün bulunmasında etkilidir. Yöntemi, ikinci mertebeden

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=Q(x) \tag{3.13.2}$$

denklemi için açıklayalım. (3.16.2)'ye ait

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{3.13.3}$$

homojen lineer denkleminin

$$y_h=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{3.13.4}$$

genel çözümünün bilindiğini varsayalım. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir. (3.13.4) de C_1 ve C_2 yerine sırasıyla $v_1(x)$, $v_2(x)$ fonksiyonlarını alarak

$$y_p=v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x) \tag{3.13.5}$$

fonksiyonunu teşkil edelim. Acaba $v_1(x)$ ve $v_2(x)$, (3.13.5) ifadesi (3.13.2) denkleminin bir çözümü olacak şekilde belirtilebilinir mi? Soruyu cevaplandırmak için (3.16.5)'deki y_p'yi ve bunun

$$y_p'=v_1y_1'+v_2y_2'+v_1'y_1+v_2'y_2$$

$$y_p''=v_1y_1''+2v_1'y_1'+v_2y_2''+2v_2'y_2'+v_1''y_1+v_2''y_2$$

türevlerini (3.13.2) denkleminde yerlerine koyalım. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$Q(x)=\left(a_0y_1''+a_1y_1'+a_2y_1\right)v_1+\left(a_0y_2''+a_1y_2'+a_2y_2\right)v_2$$
$$+a_0\left(v_1'y_1+v_2'y_2\right)'+a_0\left(v_1'y_1'+v_2'y_2'\right)+a_1\left(v_1'y_1+v_2'y_2\right) \tag{3.13.6}$$

elde edilir. y_1 ve y_2 (3.13.3) homojen lineer denkleminin çözümleri olduğundan v_1 ve v_2 nin katsayıları sıfırdır. Böylece (3.16.6)

$$a_0\left(v_1'y_1+v_2'y_2\right)'+a_0\left(v_1'y_1'+v_2'y_2'\right)+a_1\left(v_1'y_1+v_2'y_2\right)=Q(x) \tag{3.13.7}$$

olur. v_1 ve v_2 fonksiyonlarını belirtmek için, bunlar arasında iki bağıntı bulmak yeterlidir. I aralığındaki her x için $v_1'y_1+v_2'y_2=0$ seçilirse, (3.13.7) ifadesinden I aralığındaki her x için

$$a_0\left(v_1'y_1'+v_2'y_2'\right)=Q(x)$$

bulunur. Yani v_1' ve v_2' için

$$v_1'(x)y_1(x)+v_2'(x)y_2(x)=0$$
$$v_1'(x)y_1'(x)+v_2'(x)y_2'(x)=\frac{Q(x)}{a_0(x)} \tag{3.13.8}$$

denklemleri elde edilir. (3.13.8), her $x\in I$ için v_1' , v_2' bilinmeyenlerine göre homojen olmayan bir lineer cebirsel denklem sistemi olarak düşünülebilir. Bu sistemin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

dir. Bu, (3.16.3) homojen lineer diferensiyel denkleminin lineer bağımsız y_1 , y_2 çözümlerinin Wronskianıdır ve Teorem 3.14.1 gereğince sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla (3.16.8) sistemi bir ve yalnız bir $\left(v_1(x)\ ,\ v_2(x)\right)$ çözüm takımına sahiptir. v_1' ve v_2' x'in fonksiyonları olup bunların integralleri $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonlarını verir. Demek ki, $v_1(x)$, $v_2(x)$ fonksiyonları (3.13.5) fonksiyonu (3.16.2) denkleminin bir çözümü olacak şekilde belirtilebilir.

Şimdi varsayalım ki, $\left(v_1'(x)\ ,\ v_2'(x)\right)$ (3.13.8) sisteminin (tek) çözümüdür. Bu takdirde, aşikar olarak, her $x \in I$ için (3.13.7) sağlanır. Yani $y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ fonksiyonu (3.13.2) denkleminin bir çözümüdür [6].

Sonucu bir teorem olarak ifade edelim.

Teorem 3.16.1. a_0, a_1, a_2 ve Q fonksiyonları bir I açık aralığında sürekli ve I'da $a_0(x) \neq 0$ olsun. y_1 ve y_2 I'da (3.13.3) homojen lineer diferensiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olsun. Eğer v_1 ve v_2 fonksiyonları

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = \frac{Q(x)}{a_0(x)}$$

sistemini sağlıyorsa,

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

fonksiyonu (3.13.2) denkleminin bir çözümüdür [6].

3.14. Green Fonksiyonu

Aşağıdaki şartları sağlayan

$$G(x,\xi):[a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna L operatörünün Green Fonksiyonu denir.

1. $G(x,\xi)$ fonksiyonu süreklidir ve x'e göre $(n-2)$. mertebeye kadar (bu mertebe dahil) bütün sürekli türevleri vardır.

2. Her $\xi \in (a,b)$ için $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarının her birinde $G(x,\xi)$ fonksiyonunun $(n-2)$. ve n. mertebeden türevleri var ve x'e göre $(n-1)$. mertebeden türev fonksiyonu

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}$$

özelliğine sahiptir.

3. Her bir $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralığında $G(x,\xi)$ fonksiyonu x değişkeninin fonksiyonu gibi

$$\ell(G) = 0$$

$$U_v(G) = 0, \quad v = \overline{1, n}$$

Sınır değer probleminin çözümüdür [17].

4. MATERYAL ve METOD

Bu tez çalışmasında kaynaklar kısmında belirtilmiş olan kitap ve makalelerden yararlanılmıştır. Bu kaynaklarda belirtilen ve uygulanan yöntemler incelenerek tez konumuzda ele alınan probleme uygulanabilir hale dönüştürülmüştür. Adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin özdeğerlerinin asimptotik davranışlarının incelenmesi için uygulanan karakteristik fonksiyonun kurulması yönteminden, fonksiyonel analizden bazı temel tanımlar ve simetrik operatörlerin bazı temel özelliklerden, kompleks analizdeki tam fonksiyonların sıfır yerleri ile ilgili olan teoremlerden ve özellikle son yıllardaki çalışmalarda uygulanan bazı yöntemlerden ve asimptotik yöntemlerden yararlanılmıştır.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi

Bu bölümde

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u \qquad (5.1.1)$$

Sturm-Liouville denkleminden ve

$$u'(0) = -\lambda u(0) \qquad (5.1.2)$$

$$-\left[\beta_1 u(\pi) - \beta_2 u'(\pi)\right] = \lambda\left[\tilde{\beta}_1 u(\pi) - \tilde{\beta}_2 u'(\pi)\right] \qquad (5.1.3)$$

sınır şartlarından oluşan sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları incelenmiştir. Burada $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli ve λ kompleks özdeğer parametresidir.

5.2. Sınır Değer Problemi İle Aynı Özdeğere Sahip Olan Lineer Operatörün Kurulması

Üç bileşenli $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$, $f(x) \in L_2[0,\pi]$, $F_1, F_2 \in \mathbb{C}$ biçimindeki

elemanların lineer uzayını $H = L_2(0,\pi) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ ile gösterelim. Eğer

$$\rho = \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_1 & \beta_1 \\ \tilde{\beta}_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \tilde{\beta}_1\beta_2 - \beta_1\tilde{\beta}_2$$

olmak üzere $\rho > 0$ kabul edersek

$$F = \begin{pmatrix} f(x) \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in H, \quad G = \begin{pmatrix} g(x) \\ G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \in H$$

için

$$\langle F, G\rangle = \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}dx + F_1\overline{G_1} + \frac{1}{\rho}F_2\overline{G_2} \qquad (5.2.1)$$

iç çarpımına göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı tanımlar. Bu Hilbert uzayı (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer problemine uygun Hilbert uzayıdır. İşlemlerin kolaylığı için

$$N_1(u)=u'(0), \qquad \tilde{N}_1(u)=-u(0)$$
$$N_2(u)=\beta_1 u(\pi)-\beta_2 u'(\pi), \qquad \tilde{N}_2(u)=\tilde{\beta}_1 u(\pi)-\tilde{\beta}_2 u'(\pi)$$

ifadelerini tanımlayalım. Diğer taraftan $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Wronskian determinantını $W(f,g;x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$ şeklinde gösterirsek,

$$\begin{cases} N_1(f)\tilde{N}_1(g)-\tilde{N}_1(f)N_1(g)=W(f,g;0) \\ N_2(f)\tilde{N}_2(g)-\tilde{N}_2(f)N_2(g)=\rho W(f,g;\pi) \end{cases} \tag{5.2.2}$$

ifadelerini elde ederiz. Gerçekten;

$$N_1(f)\tilde{N}_1(g)-\tilde{N}_1(f)N_1(g)=f(0)g'(0)-f'(0)g(0)=W(f,g;0)$$

ve benzer şekilde de

$$\begin{aligned} N_2(f)\tilde{N}_2(g)-\tilde{N}_2(f)N_2(g) &= \left(\beta_1 f(\pi)-\beta_2 f'(\pi)\right)\left(\tilde{\beta}_1 g(\pi)-\tilde{\beta}_2 g'(\pi)\right) \\ &\quad -\left(\tilde{\beta}_1 f(\pi)-\tilde{\beta}_2 f'(\pi)\right)\left(\beta_1 g(\pi)-\beta_2 g'(\pi)\right) \\ &= \beta_1\tilde{\beta}_1 f(\pi)g(\pi)-\beta_1\tilde{\beta}_2 f(\pi)g'(\pi) \\ &\quad -\tilde{\beta}_1\beta_2 f'(\pi)g(\pi)+\beta_2\tilde{\beta}_2 f'(\pi)g'(\pi) \\ &\quad -\beta_1\tilde{\beta}_1 f(\pi)g(\pi)+\tilde{\beta}_1\beta_2 f(\pi)g'(\pi)+\beta_1\tilde{\beta}_2 f'(\pi)g(\pi) \\ &\quad -\beta_2\tilde{\beta}_2 f'(\pi)g'(\pi) \\ &= \left(\tilde{\beta}_1\beta_2-\beta_1\tilde{\beta}_2\right)\left(f(\pi)g'(\pi)-f'(\pi)g(\pi)\right) \\ &= \rho W(f,g;\pi) \end{aligned}$$

dir. Buna göre (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer problemine uygun $A:H\to H$ operatörünü

$$D(A)=\left\{\begin{pmatrix} f(x) \\ \tilde{N}_1(f) \\ \tilde{N}_2(f) \end{pmatrix}\in H \,\middle|\, f(x)\in W_2^2(0,\pi)\right\} \tag{5.2.3}$$

$$A(F)=\begin{pmatrix} -f''+q(x)f \\ N_1(f) \\ -N_2(f) \end{pmatrix} \tag{5.2.4}$$

eşitlikleri ile tanımlayım. Burada $F\in D(A)$ ve $F=\begin{pmatrix} f(x) \\ \tilde{N}_1(f) \\ \tilde{N}_2(f) \end{pmatrix}$ dır. Yani A operatörü

$$A\begin{pmatrix} f(x) \\ \tilde{N}_1(f) \\ \tilde{N}_2(f) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f''+q(x)f \\ N_1(f) \\ -N_2(f) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır. O halde,

$$AF = \lambda F \tag{5.2.5}$$

eşitliği,

$$\begin{pmatrix} -f''+q(x)f \\ N_1(f) \\ -N_2(f) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f(x) \\ \tilde{N}_1(f) \\ \tilde{N}_2(f) \end{pmatrix} \tag{5.2.6}$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlikten yararlanarak

$$-f''+q(x)f = \lambda f$$
$$-\left[\beta_1 f(\pi) - \beta_2 f(\pi)\right] = \lambda\left[\tilde{\beta}_1 f(\pi) - \tilde{\beta}_2 f'(\pi)\right]$$
$$-N_2(f) = \lambda \tilde{N}_2(f)$$

elde edilir. Ayrıca $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in D(A)$ olduğu için $F_1 = \tilde{N}_1(f)$ ve $F_2 = \tilde{N}_2(f)$ eşitlikleri sağlanır. O halde, (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer problemi

$$U = \begin{pmatrix} u(x) \\ \tilde{N}_1(u) \\ \tilde{N}_2(u) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $AU = \lambda U$ biçiminde yazılabilir.

5.2.1.Teorem: $H = L_2(0,\pi) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında (5.2.3)-(5.2.4) eşitlikleriyle tanımlı A operatörü simetriktir.

İspat: Her $F, G \in D(A)$ için $\langle AF, G\rangle = \langle F, AG\rangle$ olduğunu göstermemiz gerekir. Gerçekten H daki iç çarpımın tanımı gereği

$$\langle AF, G\rangle = \int_0^\pi \left(-f''(x) + q(x) f(x)\right)\overline{g(x)}dx + N_1(f)\overline{\tilde{N}_1(g)} - \frac{1}{\rho} N_2(f)\overline{\tilde{N}_2(g)}$$
$$= -\int_0^\pi f''(x)\overline{g(x)}dx + \int_0^\pi q(x) f(x)\overline{g(x)}dx + N_1(f)\overline{\tilde{N}_1(g)} - \frac{1}{\rho} N_2(f)\overline{\tilde{N}_2(g)}$$

dir. Son eşitliğin birinci integraline

$$f''(x)dx = dv \;,\; f'(x) = v \qquad \overline{g(x)} = u \;,\; \overline{g'(x)}dx = du$$

şeklinde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$-\int_0^\pi f''(x)\overline{g(x)}d(x)=-\overline{g(x)}f'(x)\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\overline{g'(x)}dx \tag{5.2.7}$$

olur. Bulunan bu eşitliğin sağ tarafındaki integrale

$$f'(x)dx=dt\ ,\ f(x)=t \quad \overline{g'(x)}=z\ ,\ \overline{g''(x)}dx=dz$$

şeklinde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\int_0^\pi f'(x)\overline{g'(x)}d(x)=\overline{g'(x)}f(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}dx \tag{5.2.8}$$

elde edilir. (5.2.7) ve (5.2.8) eşitliklerinden yararlanılarak $\langle AF,G\rangle$ ifadesi

$$\begin{aligned}\langle AF,G\rangle&=-\int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}dx+\int_0^\pi q(x)f(x)\overline{g(x)}dx-\overline{g(x)}f'(x)\Big|_0^\pi\\&+\overline{g'(x)}f(x)\Big|_0^\pi+N_1(f)\overline{\tilde{N}_1(g)}-\frac{1}{\rho}N_2(f)\overline{\tilde{N}_2(g)}\\&=-\int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}dx+\int_0^\pi q(x)f(x)\overline{g(x)}dx-\overline{g(\pi)}f'(\pi)+\overline{g(0)}f'(0)\\&+\overline{g'(\pi)}f(\pi)-\overline{g'(0)}f(0)+N_1(f)\overline{\tilde{N}_1(g)}-\frac{1}{\rho}N_2(f)\overline{\tilde{N}_2(g)}\\&=-\int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}dx+\int_0^\pi q(x)f(x)\overline{g(x)}dx+W(f,\bar{g};\pi)-W(f,\bar{g};0)\\&+N_1(f)\overline{\tilde{N}_1(g)}-\frac{1}{\rho}N_2(f)\overline{\tilde{N}_2(g)}\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan H uzayındaki iç çarpımın tanımı gereği

$$\begin{aligned}\langle F,AG\rangle&=\int_0^\pi f(x)\overline{(-g''(x)+q(x)g(x))}dx+\tilde{N}_1(f)\overline{N_1(g)}-\frac{1}{\rho}\tilde{N}_2(f)\overline{N_2(g)}\\&=-\int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}dx+\int_0^\pi f(x)q(x)\overline{g(x)}dx+\tilde{N}_1(f)\overline{N_1(g)}-\frac{1}{\rho}\tilde{N}_2(f)\overline{N_2(g)}\end{aligned}$$

dir. Üstteki iki eşitlik taraf taraf çıkarılırsa ve (5.2.2) ifadelerinden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned}\langle AF,G\rangle-\langle F,AG\rangle&=W(f,\bar{g};\pi)-W(f,\bar{g};0)+N_1(f)\overline{\tilde{N}_1(g)}\\&-\frac{1}{\rho}N_2(f)\overline{\tilde{N}_2(g)}-\tilde{N}_1(f)\overline{N_1(g)}+\frac{1}{\rho}\tilde{N}_2(f)\overline{N_2(g)}\\&=W(f,\bar{g};\pi)-W(f,\bar{g};0)+W(f,\bar{g};0)-W(f,\bar{g};\pi)=0\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her $F,G\in D(A)$ için, $\langle AF,G\rangle=\langle F,AG\rangle$ elde edilir.

5.2.2. Sonuç: Eğer $\rho=\tilde{\beta}_1\beta_2-\beta_1\tilde{\beta}_2>0$ şartı sağlanıyorsa (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat: λ sayısının (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin özdeğeri olduğunu kabul edelim. Bu durumda λ sayısı (5.2.3)-(5.2.5) eşitlikleri ile tanımlı A operatörünün özdeğeri olacaktır. Dolayısıyla U_0, A operatörünün λ özdeğerine uygun herhangi bir öz elementi olmak üzere

$$\lambda\langle U_0,U_0\rangle_H = \langle \lambda U_0,U_0\rangle_H = \langle AU_0,U_0\rangle_H = \langle U_0,AU_0\rangle_H = \langle U_0,\lambda U_0\rangle_H = \bar{\lambda}\langle U_0,U_0\rangle_H$$

elde ederiz. Buradan $(\lambda-\bar{\lambda})\langle U_0,U_0\rangle_H = 0$ yazabiliriz. $\langle U_0,U_0\rangle_H \neq 0$ olduğundan $\lambda-\bar{\lambda}=0$ dolayısıyla $\lambda=\bar{\lambda}$ bulunur. Bunun anlamı bütün özdeğerler reeldir.

5.2.3. Sonuç: Eğer $\rho>0$ şartı sağlanıyorsa (5.1.1)-(5.1.3) probleminin iki farklı λ ve μ özdeğerlerine karşılık gelen $u_\lambda(x)$ ve $u_\mu(x)$ özfonksiyonları için

$$\int_0^\pi u_\lambda(x)u_\mu(x)\,dx = -\tilde{N}_1(u_\lambda(x))\tilde{N}_1(u_\mu(x)) - \frac{1}{\rho}\tilde{N}_2(u_\lambda(x))\tilde{N}_2(u_\mu(x)) \tag{5.2.9}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: H - Hilbert uzayında (5.2.4) ile tanımlı A operatörü için

$$U_\lambda := \begin{bmatrix} u_\lambda(x) \\ \tilde{N}_1(u_\lambda(x)) \\ \tilde{N}_2(u_\lambda(x)) \end{bmatrix}, \quad U_\mu := \begin{bmatrix} u_\mu(x) \\ \tilde{N}_1(u_\mu(x)) \\ \tilde{N}_2(u_\mu(x)) \end{bmatrix}$$

elemanlarının λ ve μ özdeğerlerine karşılık gelen öz elementleri olduğu açıktır. λ ve μ özdeğerleri reel ve A operatörü H -Hilbert uzayında simetrik olduğundan

$$\lambda\langle U_\lambda,U_\mu\rangle_H = \langle \lambda U_\lambda,U_\mu\rangle_H = \langle AU_\lambda,U_\mu\rangle_H = \langle U_\lambda,AU_\mu\rangle_H = \langle U_\lambda,\mu U_\mu\rangle_H = \mu\langle U_\lambda,U_\mu\rangle_H$$

bulmuş oluruz. Buradan $\lambda\langle U_\lambda,U_\mu\rangle_H = \mu\langle U_\lambda,U_\mu\rangle_H \Rightarrow (\lambda-\mu)\langle U_\lambda,U_\mu\rangle_H = 0$ yazılabilir. $\lambda\neq\mu$ olduğundan

$$\langle U_\lambda,U_\mu\rangle_H = 0 \tag{5.2.10}$$

dır. O halde H'da tanımlamış olduğumuz (5.2.1) iç çarpım formülünü dikkate alırsak, (5.2.9) ile (5.2.10) ifadelerinin eşdeğer olduğu görülür.

5.3. SDP ile İlgili Yardımcı BDP'lerinin Çözümleri ve Özdeğer Parametresine Göre Analitikliği

Bu bölümde verilen

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x\in[0,\pi] \tag{5.3.1}$$

denkleminin

$$u'(0) = -\lambda u(0) \tag{5.3.2}$$

$$-\left[\beta_1 u(\pi) - \beta_2 u'(\pi)\right] = \lambda\left[\tilde{\beta}_1 u(\pi) - \tilde{\beta}_2 u'(\pi)\right] \tag{5.3.3}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünü araştırmak için bazı yardımcı başlangıç-değer problemlerinin çözümlerinin mevcutluğu ve bu çözümlerin λ özdeğer parametresine göre bütün kompleks düzlemde analitikliği gösterilecektir. Daha sonra (5.3.1) denkleminin (5.3.1)-(5.3.3) problemi için temel olacak çözümleri tanımlanacaktır.

5.3.1. Teorem: Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [0,\pi] \tag{5.3.4}$$

$$u(0) = -1 \tag{5.3.5}$$

$$u'(0) = \lambda \tag{5.3.6}$$

probleminin, bir tek $u = \phi_\lambda(x)$ çözümü mevcuttur ve ayrıca $x \in [0,\pi]$ değişkeninin her bir değerinde $\phi_\lambda(x)$ fonksiyonu λ parametresinin tam fonksiyonundur.

İspat: Diferansiyel denklemler teorisinden çok iyi bilinen Cauchy-Picard teoremi gereği verilmiş (5.3.4)-(5.3.6) Cauchy probleminin her $\lambda \in \mathbb{C}$ için bir tek $\phi_\lambda(x)$ çözümü mevcuttur. Bu teoremin esas ve önemli olan kısmını, yani $\phi_\lambda(x)$ çözümünün, değişkeninin her bir $x \in [0,\pi]$ değeri için $\lambda \in \mathbb{C}$ değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitik olduğunu ispat edelim.

$\phi_\lambda(x)$ fonksiyonu her $x \in [0,\pi]$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için (5.3.4)'ü sağladığından

$$\phi''_\lambda(x) = \left[-\lambda + q(x)\right]\phi_\lambda(x)$$

denklemini sağlayacaktır. Burada her iki tarafın $[0,x]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\phi'_\lambda(x) = \int_0^x \left[-\lambda + q(t)\right]\phi_\lambda(t)\,dt + C_1(\lambda) \tag{5.3.7}$$

elde edilir. λ'ya bağlı olan $C_1(\lambda)$ ifadesini bulmak için (5.3.7) de $x = 0$ yazarsak

$$\phi'_\lambda(x) = C_1(\lambda) \tag{5.3.8}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan ϕ_λ fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\phi'_\lambda(0) = \lambda \tag{5.3.9}$$

eşitliği sağlanır. (5.3.8) ve (5.3.9) ifadelerinden

$$C_1(\lambda)=\lambda \tag{5.3.10}$$

olur. (5.3.10) ifadesi (5.3.7)'de yerine yazılırsa her $x\in[0,\pi]$ ve her $\lambda\in\mathbb{C}$ için

$$\phi_\lambda'(x)=\int_0^x[-\lambda+q(t)]\phi_\lambda(t)\,dt+\lambda \tag{5.3.11}$$

eşitliği elde edilir. (5.3.11) eşitliği $[0,x]$ aralığında integrallenirse,

$$\phi_\lambda(x)=\int_0^x ds\int_0^s[-\lambda+q(t)]\phi_\lambda(t)\,dt+\lambda x+C_2(\lambda) \tag{5.3.12}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği $x=0$ için yazarsak $\phi_\lambda(x)$ fonksiyonunun (5.3.5) başlangıç şartını sağladığını da dikkate alırsak,

$$C_2(\lambda)=\phi_\lambda(0) \tag{5.3.13}$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan ϕ_λ fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\phi_\lambda(0)=-1 \tag{5.3.14}$$

yazılabilir. (5.3.13) ve (5.3.14) ifadelerinden

$$C_2(\lambda)=-1 \tag{5.3.15}$$

elde edilir. (5.3.15) ifadesi (5.3.12) de yerine yazılırsa,

$$\phi_\lambda(x)=\int_0^x ds\int_0^s[-\lambda+q(t)]\phi_\lambda(t)\,dt+\lambda x-1 \tag{5.3.16}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağındaki integralde integralleme sırası değiştirilirse,

$$\int_0^x ds\int_0^s[-\lambda+q(t)]\phi_\lambda(t)\,dt=\int_0^x dt\left\{\int_t^x[-\lambda+q(t)]\phi_\lambda(t)\,ds\right\}=\int_0^x[-\lambda+q(t)]\phi_\lambda(t)(x-t)\,dt$$

eşitliği bulunur. Son eşitliği (5.3.16)'da yerine yazarsak her $x\in[0,\pi]$ ve her $\lambda\in\mathbb{C}$ için geçerli olan

$$\phi_\lambda(x)=\int_0^x[-\lambda+q(t)]\phi_\lambda(t)(x-t)\,dt+\lambda x-1 \tag{5.3.17}$$

özdeşliği elde edilir. Böylece $\phi_\lambda(x)$ çözüm fonksiyonu için (5.3.17) biçiminde verilmiş integral denklem elde edildi. Bu integral denklemin çözümüne (yani $\phi_\lambda(x)$ fonksiyonuna) yakınsayan fonksiyon dizisinin inşa edilmesi için, integral denklemler teorisinden iyi bilinen ardışık yaklaşımlar yönteminden yararlanılacaktır. Bu yöntem gereği aşağıdaki ard-arda birbirini üreten fonksiyonlar dizisi inşa edilecektir.

$$\phi_{0\lambda}(x) = \lambda x - 1 \tag{5.3.18}$$

$$\phi_{n\lambda}(x) = \phi_{0\lambda}(x) + \int_0^x \left[-\lambda + q(t)\right]\phi_{n-1\lambda}(t)(x-t)\,dt, \quad n = 1,2,... \tag{5.3.19}$$

İlk önce $M := \max_{t\in[0,\pi]}|q(t)|$ ve $K(\lambda) = \max_{t\in[0,\pi]}|\phi_{0\lambda}(t)|$ gösterimlerinden yararlanılarak $R > 0$ keyfi sayı olmak üzere $\{\phi_{n\lambda}(x)\}$ fonksiyonlar dizisinin herhangi kapalı ve sınırlı $|\lambda| \le R$ yuvarında

$$\phi_{0\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\{\phi_{n\lambda}(x) - \phi_{n-1\lambda}(x)\} \tag{5.3.20}$$

fonksiyonlar dizisinin yakınsaklık durumu incelenecektir. Bu dizi ile $\{\phi_{n\lambda}(x)\}$ fonksiyonlar dizisinin ya her ikisinin yakınsak ya da her ikisinin ıraksak oldukları ve de yakınsak olduklarında verilmiş (5.3.20) serisinin toplamı ile $\{\phi_{n\lambda}(x)\}$ dizisinin limitinin aynı olduğu açıktır. Bu nedenle $\{\phi_{n\lambda}(x)\}$ dizisi yerine (5.3.20) serisi incelenecektir. Bu serinin terimleri ard arda değerlendirilecektir. O halde ilk olarak

$$\left|\phi_{1\lambda}(x) - \phi_{0\lambda}(x)\right| = \left|\int_0^x \left[\lambda - q(t)\right]\phi_{0\lambda}(t)(x-t)\,dt\right| \le \int_0^x (R+M)K(\lambda)(x-t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(R+M)K(\lambda)x^2 \tag{5.3.21}$$

eşitsizliği bulunur. Daha sonra

$$\phi_{n\lambda}(x) = \phi_{0\lambda}(x) + \int_0^x \left[-\lambda + q(t)\right]\phi_{n-1\lambda}(t)(x-t)\,dt$$

$$\phi_{n-1\lambda}(x) = \phi_{0\lambda}(x) + \int_0^x \left[-\lambda + q(t)\right]\phi_{n-2\lambda}(t)(x-t)\,dt$$

ifadelerinden yararlanılarak $n \ge 2$ için geçerli olan

$$\phi_{n\lambda}(x) - \phi_{n-1\lambda}(x) = \int_0^x \left[-\lambda + q(t)\right]\left[\phi_{n-1\lambda}(t) - \phi_{n-2\lambda}(t)\right](x-t)\,dt \tag{5.3.22}$$

eşitliği elde edilir. (5.3.21) eşitsizliğinden ve (5.3.22) eşitliğinden yararlanılarak (5.3.20) serisinin diğer terimleri değerlendirilecektir. $n = 2$ için

$$\left|\phi_{2\lambda}(x)-\phi_{1\lambda}(x)\right| \le \int_0^x \left[-\lambda+q(t)\right]\left[\phi_{1\lambda}(t)-\phi_{0\lambda}(t)\right](x-t)\,dt$$

$$\le \frac{1}{2}(R+M)^2 K(\lambda)\int_0^x t^2(x-t)\,dt = (R+M)^2 K(\lambda)\frac{x^4}{4!}$$

bulunur. Böyle devam ederek tümevarım yöntemi ile

$$\left|\phi_{n\lambda}(x)-\phi_{n-1\lambda}(x)\right| \le (R+M)^n K(\lambda)\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad n=1,2,... \tag{5.3.23}$$

eşitsizliğinin her $n \ge 1$ için sağlandığı kolayca bulunur. $x \in [0,\pi]$ olduğu için $0 \le x^{2n} \le \pi^{2n}$ olur. O halde (5.3.23) ifadesinden

$$\left|\phi_{n\lambda}(x)-\phi_{n-1\lambda}(x)\right| \le \frac{\left[(R+M)\pi^2\right]^n K(\lambda)}{(2n)!}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(R+M)\pi^2\right]^n K(\lambda)}{(2n)!}$$

sayısal serisi yakınsak olduğundan Weierstrass M-Kriteri gereği (5.3.20) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır. $\{\phi_{n\lambda}(x)\}$ fonksiyonlarının (5.3.18) ve (5.3.19) eşitlikleri ile verilmiş tanımları gereği bu fonksiyonların her biri her $x \in [0,\pi]$ için $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le R\}$ bölgesinde analitik olduğundan ve her $x \in [0,\pi]$ için $\{\phi_{n\lambda}(x)\}$ dizisi $\phi_\lambda(x)$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsak olduğundan $\phi_\lambda(x)$ fonksiyonu da her $x \in [0,\pi]$ için λ değişkeninin tam fonksiyonudur.

5.3.2. Sonuç: $\phi_\lambda(x)$, (5.3.1) diferansiyel denklemini ve (5.3.2) sınır şartını sağlayan ve her $x \in [0,\pi]$ için λ parametresinin tam fonksiyonu olan çözümüdür.

5.3.3. Teorem: Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''+q(x)u=\lambda u, \quad x \in [0,\pi] \tag{5.3.24}$$

$$u(\pi)=\beta_2+\lambda\tilde{\beta}_2 \tag{5.3.25}$$

$$u'(\pi)=\beta_1+\lambda\tilde{\beta}_1 \tag{5.3.26}$$

probleminin, bir tek $u=\chi_\lambda(x)$ çözümü mevcuttur ve ayrıca $x\in[0,\pi]$ değişkeninin her bir değerinde $\chi_\lambda(x)$ fonksiyonu λ parametresinin tam fonksiyonundur.

İspat: (5.3.1) Teoremine benzer olarak ispatlanır.

5.3.4. Sonuç: $\chi_\lambda(x)$, (5.3.1) diferansiyel denklemini ve (5.3.3) sınır şartını sağlayan ve her $x\in[0,\pi]$ için λ parametresinin tam fonksiyonu olan çözümüdür.

5.4. Temel Çözümler ve Karakteristik Fonksiyon

Bu kesimde,

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u \quad , \quad x\in[0,\pi] \tag{5.4.1}$$

$$\tau_1 := u'(0) + \lambda u(0) = 0 \tag{5.4.2}$$

$$\tau_2 := \left[\beta_1 u(\pi) - \beta_2 u'(\pi)\right] + \lambda\left[\tilde{\beta}_1 u(\pi) - \tilde{\beta}_2 u'(\pi)\right] = 0 \tag{5.4.3}$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonları arasındaki bazı temel bağıntıları incelenecektir.

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x\in[0,\pi]$$

$$\begin{cases} u(0) = -1 \\ u'(0) = \lambda \end{cases} \tag{5.4.4}$$

başlangıç-değer probleminin çözümünü $\phi_\lambda(x)$ ile,

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x\in[0,\pi]$$

$$\begin{cases} u(\pi) = \beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_2 \\ u'(\pi) = \beta_1 + \lambda\tilde{\beta}_1 \end{cases} \tag{5.4.5}$$

başlangıç-değer probleminin çözümünü $\chi_\lambda(x)$ ile gösterelim. Bu $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ çözüm fonksiyonları λ 'tam analitik fonksiyonlarıdır [14]. Bundan dolayı

$$W(x,\lambda) = W(\phi_\lambda, \chi_\lambda; x) = \phi_\lambda(x)\chi'_\lambda(x) - \phi'_\lambda(x)\chi_\lambda(x) \tag{5.4.6}$$

Wronskian determinantı $[0,\pi]$ aralığında x-değişkeninden bağımsız olup [5], λ 'nın tam analitik fonksiyonudur. $W(\phi_\lambda, \chi_\lambda; x)$ Wronskian determinantının x değişkeninden bağımsız olduğu açıktır. Bu nedenle $W(x,\lambda)$ yerine sadece $W(\lambda)$ yazacağız. Burada özel olarak $x=0$ yazarsak, bu fonksiyon için

$$
\begin{aligned}
W(\lambda) &= \phi_\lambda(x)\chi'_\lambda(x) - \phi'_\lambda(x)\chi_\lambda(x) \\
&= \phi_\lambda(0)\chi'_\lambda(0) - \phi'_\lambda(0)\chi_\lambda(0) \\
&= -\chi'_\lambda(0) - \lambda\chi_\lambda(0) \\
&= -N_1(\chi_\lambda) + \lambda\tilde{N}_1(\chi_\lambda)
\end{aligned}
$$

ifadesini, özel olarak $x = \pi$ yazarsak, bu fonksiyon için

$$
\begin{aligned}
W(\lambda) &= \phi_\lambda(x)\chi'_\lambda(x) - \phi'_\lambda(x)\chi_\lambda(x) \\
&= \phi_\lambda(\pi)\chi'_\lambda(\pi) - \phi'_\lambda(\pi)\chi_\lambda(\pi) \\
&= \phi_\lambda(\pi)\left(\beta_1 + \lambda\tilde{\beta}_1\right) - \phi'_\lambda(\pi)\left(\beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_2\right) \\
&= \phi_\lambda(\pi)\beta_1 + \lambda\phi_\lambda(\pi)\tilde{\beta}_1 - \phi'_\lambda(\pi)\beta_2 - \lambda\phi'_\lambda(\pi)\tilde{\beta}_2 \\
&= N_2(\phi_\lambda) + \lambda\tilde{N}_2(\phi_\lambda)
\end{aligned}
$$

ifadesini elde ederiz. Benzer olarak

$$
\begin{aligned}
\tilde{N}_2(\chi_\lambda) &= \tilde{\beta}_1\chi_\lambda(\pi) - \tilde{\beta}_2\chi'_\lambda(\pi) \\
&= \tilde{\beta}_1\left(\beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_2\right) - \tilde{\beta}_2\left(\beta_1 + \lambda\tilde{\beta}_1\right) \\
&= \tilde{\beta}_1\beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 - \beta_1\tilde{\beta}_2 - \lambda\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \\
&= \tilde{\beta}_1\beta_2 - \beta_1\tilde{\beta}_2 \\
&= \rho
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur.

5.4.1. Teorem: (5.4.1)-(5.4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $W(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinden ibarettir.

İspat: $W(\lambda)$'nın bir sıfırı λ_0 olsun. O halde,

$$W(\lambda_0) = \phi_{\lambda_0}(x)\chi'_{\lambda_0}(x) - \phi'_{\lambda_0}(x)\chi_{\lambda_0}(x) = 0$$

olacaktır. Bu durumda $\phi_{\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{\lambda_0}(x)$ fonksiyonları, diferansiyel denklemler teorisinde bilinen "$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ fonksiyonları $n.$ mertebeden diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri ise, bu fonksiyonların Wronskian determinantı bütün noktalarda sıfırdan farklıdır." teoreminin sonucu olarak lineer bağımlıdır. Yani

$$\phi_{\lambda_0}(x) = k\chi_{\lambda_0}(x), \quad x \in [0, \pi] \tag{5.4.7}$$

olacak şekilde bir $k \neq 0$ sabiti mevcuttur.

$\phi_{\lambda_0}(x)$'in (5.4.1) denklemini ve (5.4.2) şartını, $\chi_{\lambda_0}(x)$'in ise (5.4.1) denklemini ve (5.4.3) şartını sağladığı açıktır. Dolayısıyla (5.4.7) gereği bu fonksiyonların her biri iki sınır şartını da sağlar. O halde bu fonksiyonlar (5.4.1)-(5.4.3) probleminin çözümü olur. Bu ise $\lambda = \lambda_0$ sayısının özdeğer olduğunu gösterir.

Şimdi ise $\lambda = \lambda_0$ sayısının, (5.4.1)-(5.4.3) probleminin özdeğeri olduğunu kabul ederek, $W(\lambda_0) = 0$ eşitliğinin doğruluğunu ispatlayalım. Herhangi $\lambda = \lambda_0$ özdeğeri için, $W(\lambda_0) \neq 0$ olduğu kabul edilsin. O halde $\phi_{\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{\lambda_0}(x)$ çözüm fonksiyonları lineer bağımsız olur [5]. (5.4.1) denkleminin genel çözümü

$$u(x,\lambda) = C_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(x)$$

olarak yazılabilir. O halde λ_0 özdeğerine uygun olan her bir $u_0(x)$ fonksiyonu için,

$$u_0(x) = C_1(\lambda_0)\phi_{\lambda_0}(x) + C_2(\lambda_0)\chi_{\lambda_0}(x)$$

olacak şekilde en az biri sıfırdan farklı olan C_1, C_2 sayıları bulunur. (5.4.1) eşitliği ile verilen $u_0(x)$ özfonksiyonu (5.4.2)-(5.4.3) sınır şartlarını sağladığından

$$\tau_1\left(\phi_{\lambda_0}(x)\right)C_1 + \tau_1\left(\chi_{\lambda_0}(x)\right)C_2 = 0$$
$$\tau_2\left(\phi_{\lambda_0}(x)\right)C_1 + \tau_2\left(\chi_{\lambda_0}(x)\right)C_2 = 0$$

eşitlikleri geçerlidir. C_i katsayılarının en az biri sıfırdan farklı olduğu için buradan

$$\Delta\lambda_0 = \begin{vmatrix} \tau_1\left(\phi_{\lambda_0}(x)\right) & \tau_1\left(\chi_{\lambda_0}(x)\right) \\ \tau_2\left(\phi_{\lambda_0}(x)\right) & \tau_2\left(\chi_{\lambda_0}(x)\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.4.8)$$

elde edilir. $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının tanımı gereği,

$$\tau_1\left(\phi_{\lambda_0}(x)\right) = \phi'_{\lambda_0}(0) + \lambda\phi_{\lambda_0}(0) = \lambda - \lambda = 0$$

$$\tau_1\left(\chi_{\lambda_0}(x)\right) = \chi'_{\lambda_0}(0) + \lambda\chi_{\lambda_0}(0) = N_1(\chi_\lambda) - \lambda\tilde{N}_1(\chi_\lambda) = -W(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \tau_2\left(\phi_{\lambda_0}(x)\right) &= \left[\beta_1\phi_{\lambda_0}(\pi) - \beta_2\phi'_{\lambda_0}(\pi)\right] + \lambda\left[\tilde{\beta}_1\phi_{\lambda_0}(\pi) - \tilde{\beta}_2\phi'_{\lambda_0}(\pi)\right] \\ &= \beta_1\phi_{\lambda_0}(\pi) - \beta_2\phi'_{\lambda_0}(\pi) + \lambda\tilde{\beta}_1\phi_{\lambda_0}(\pi) - \lambda\tilde{\beta}_2\phi'_{\lambda_0}(\pi) \\ &= N_2(\phi) + \lambda\tilde{N}_2(\phi) \\ &= W(\lambda) \end{aligned}$$

$$\tau_2\left(\chi_{\lambda_0}(x)\right) = -\left[\beta_1\chi_{\lambda_0}(\pi) - \beta_2\chi'_{\lambda_0}(\pi)\right] - \lambda\left[\tilde{\beta}_1\chi_{\lambda_0}(\pi) - \tilde{\beta}_2\chi'_{\lambda_0}(\pi)\right]$$
$$= -\beta_1\left(\beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_2\right) + \beta_2\left(\beta_1 + \lambda\tilde{\beta}_1\right) - \lambda\tilde{\beta}_1\left(\beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_2\right) + \lambda\tilde{\beta}_2\left(\beta_1 + \lambda\tilde{\beta}_1\right)$$
$$= 0$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (5.4.8) determinantında yerlerine yazılırsa,

$$\Delta\lambda_0 = \begin{vmatrix} 0 & -W(\lambda) \\ W(\lambda) & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 0 - \left(-W(\lambda)\right)\left(W(\lambda)\right) = 0 \;\Rightarrow\; W(\lambda) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bcu ise $W(\lambda_0) \neq 0$ kabulüyle çelişir ve teoremin ispatı tamamlanır.

5.5. $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ Çözüm Fonksiyonlarının Asimptotiği

5.5.1. Lemma: $\lambda = s^2$ olmak üzere (5.1.1) diferansiyel denkleminin (5.4.4) şartını sağlayan çözümü aşağıdaki integral denklemi sağlar.

$$\phi_\lambda(x) = -\cos sx + s\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\phi_\lambda(y)\,dy$$

İspat: (5.1.1) diferansiyel denklemini

$$u'' + \lambda u = qu \tag{5.5.3}$$

biçiminde yazdıktan sonra bu denklemi homojen olmayan diferansiyel denklem gibi düşünerek sabitin değişimi yöntemiyle çözelim. Probleme uygun homojen $u'' + \lambda u = 0$ denkleminin genel çözümü

$$u(x,s) = C_1\cos sx + C_2\sin sx$$

biçiminde olduğu için (5.5.3) denkleminin genel çözümünü

$$u(x,s) = C_1(x,s)\cos sx + C_2(x,s)\sin sx \tag{5.5.4}$$

biçiminde arayacağız. Sabitin değişimi yöntemi gereği, $C_1(x,s)$ ve $C_2(x,s)$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki

$$\begin{cases} C_1'(x,s)\cos sx + C_2'(x,s)\sin sx = 0 \\ -C_1'(x,s)s\sin sx + C_2'(x,s)s\cos sx = q(x)u(x,s) \end{cases}$$

denklem sistemini sağlasınlar. Bu sistemi $C_1(x,s)$ ve $C_2(x,s)$ değişkenlerine göre lineer denklem sistemi gibi çözersek,

$$
\begin{cases}
C_1'(x,s) = \dfrac{-q(x)u(x,s)\sin sx}{s} \\
C_2'(x,s) = \dfrac{q(x)u(x,s)\cos sx}{s}
\end{cases}
\tag{5.5.5}
$$

bulunur. (5.5.5)'den bulduğumuz

$$
C_1(x,s) = -\frac{1}{s}\int_0^x \sin sy\; q(y)u(y,s)\,dy + C_1
$$

$$
C_2(x,s) = \frac{1}{s}\int_0^x \cos sy\; q(y)u(y,s)\,dy + C_2
$$

ifadelerini (5.5.4)'de yerine koyarsak,

$$
\begin{aligned}
u(x,s) &= -\frac{1}{s}\cos sx\int_0^x \sin sy\; q(y)u(y,s)\,dy + \frac{1}{s}\sin sx\int_0^x \cos sy\; q(y)u(y,s)\,dy \\
&\quad + C_1\cos sx + C_2\sin sx \\
&= \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y)\; q(y)u(y,s)\,dy \; + C_1\cos sx + C_2\sin sx
\end{aligned}
\tag{5.5.6}
$$

eşitliğini elde ederiz. (5.1.1) denkleminin (5.4.4) şartını sağlayan çözümünü aradığımızdan bu şartları kullanırsak

$$
-1 = \frac{1}{s}\int_0^0 \sin s(0-y)\; q(y)u(y,s)\,dy + C_1\cos 0 + C_2\sin 0
$$

ifadesi elde edilir. Buradan $C_1 = -1$ bulunur. (5.5.6) ifadesinin türevini alırsak,

$$
\begin{aligned}
u'(x,s) &= \sin sx\int_0^x \sin sy\; q(y)u(y,s)\,dy \\
&-\frac{1}{s}\cos sx\left[\sin sx\; q(x)u(x,s)x' - \sin s0\; q(0)u(0,s)0'\right] + \cos sx\int_0^x \cos sy\; q(y)u(y,s)\,dy \\
&+\frac{1}{s}\sin sx\left[\cos sx\; q(x)u(x,s)x' - \cos s0\; q(0)u(0,s)0'\right] - sC_1\sin sx + sC_2\cos sx \\
&= \sin sx\int_0^x \sin sy\; q(y)u(y,s)\,dy + \cos sx\int_0^x \cos sy\; q(y)u(y,s)\,dy - sC_1\sin sx + sC_2\cos sx
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
u'(x,s) = \int_0^x \cos s(x-y)q(y)u(y,s)\,dy - sC_1\sin sx + sC_2\cos sx \tag{5.5.7}
$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifadede (5.4.4) şartını kullanırsak

$$s^2 = \int_0^0 \cos s(0-y)q(y)u(y,s)dy - sC_1\sin 0 + sC_2\cos 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan $C_2 = s$ bulunur. Bulunan C_1, C_2 değerlerini (5.5.6) ve (5.5.7) ifadelerinde yerlerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$u(x,s) = -\cos sx + s\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y)q(y)u(y,s)dy$$

$$u'(x,s) = s\sin sx + s^2\cos sx + \int_0^x \cos s(x-y)q(y)u(y,s)dy$$

integral denklemleri elde edilir. Buradan

$$\phi_\lambda(x) = -\cos sx + s\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\phi_\lambda(y)dy$$

yazılabilir ve ispat tamamlanır.

5.5.2. Sonuç: $\phi_\lambda(x)$ çözüm fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\phi_\lambda(x) = -\cos sx + s\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\phi_\lambda(y)dy$$

$$\phi'_\lambda(x) = s\sin sx + s^2\cos sx + \int_0^x \cos s(x-y)q(y)\phi_\lambda(y)dy$$

5.5.3. Lemma: $\lambda = s^2$ olmak üzere (5.1.1) diferansiyel denkleminin (5.4.5) şartını sağlayan çözümü

$$\chi_\lambda(x) = \left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\cos s(x-\pi) + \frac{1}{s}\left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)\sin s(x-\pi)$$
$$-\frac{1}{s}\int_x^\pi \sin s(x-y)q(y)\chi_\lambda(y)dy$$

integral denklemini sağlar.

İspat: Benzer şekilde ispat edelim. O halde (5.5.5)'den bulduğumuz

$$C_1(x,s) = \frac{1}{s}\int_x^\pi \sin sy\, q(y)u(y,s)dy + C_1$$

$$C_2(x,s) = -\frac{1}{s}\int_x^\pi \cos sy\, q(y)u(y,s)dy + C_2$$

ifadelerini (5.5.4) de yerine koyarsak,

$$u(x,s)=\frac{1}{s}\cos sx\int_x^\pi \sin sy\ q(y)u(y,s)dy-\frac{1}{s}\sin sx\int_x^\pi \cos sy\ q(y)u(y,s)dy$$
$$+C_1\cos sx+C_2\sin sx$$
$$=-\frac{1}{s}\int_x^\pi \sin s(x-y)\ q(y)u(y,s)dy+C_1\cos sx+C_2\sin sx \qquad (5.5.8)$$

formülünü elde ederiz. (5.1.1) denkleminin (5.4.5) şartını sağlayan çözümünü aradığımızdan bu şartları kullanırsak

$$\beta_2+s^2\tilde{\beta}_2=-\frac{1}{s}\int_\pi^\pi \sin s(\pi-y)\ q(y)u(y,s)dy+C_1\cos s\pi+C_2\sin s\pi$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\beta_2+s^2\tilde{\beta}_2=C_1\cos s\pi+C_2\sin s\pi \qquad (5.5.9)$$

bulunur. (5.5.8) ifadesinin türevini alırsak,

$$u'(x,s)=-\sin sx\int_x^\pi \sin sy\ q(y)u(y,s)dy$$
$$+\frac{1}{s}\cos sx\left[\sin s\pi\ q(\pi)u(\pi,s)\pi'-\sin sx\ q(x)u(x,s)x'\right]-\cos sx\int_x^\pi \cos sy\ q(y)u(y,s)dy$$
$$-\frac{1}{s}\sin sx\left[\cos s\pi\ q(\pi)u(\pi,s)\pi'-\cos sx\ q(x)u(x,s)x'\right]-sC_1\sin sx+sC_2\cos sx$$
$$=-\sin sx\int_x^\pi \sin sy\ q(y)u(y,s)dy-\cos sx\int_x^\pi \cos sy\ q(y)u(y,s)dy-sC_1\sin sx+sC_2\cos sx$$

elde edilir. Buradan

$$u'(x,s)=-\int_x^\pi \cos s(x-y)q(y)u(y,s)dy-sC_1\sin sx+sC_2\cos sx \qquad (5.5.10)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifadede (5.4.5) şartını kullanırsak

$$\beta_1+s^2\tilde{\beta}_1=-\int_\pi^\pi \cos s(\pi-y)q(y)u(y,s)dy-sC_1\sin s\pi+sC_2\cos s\pi$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\beta_1+s^2\tilde{\beta}_1=-sC_1\sin s\pi+sC_2\cos s\pi \qquad (5.5.11)$$

olur. (5.5.9)'u $-s\cos s\pi$ ile (5.5.11)'u $\sin s\pi$ ile çarpıp, taraf tarafa toplarsak,

$$-sC_1\cos^2 s\pi - sC_1\sin^2 s\pi = -s\cos s\pi\left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right) + \sin s\pi\left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)$$

$$-sC_1 = -s\left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\cos s\pi + \left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)\sin s\pi$$

$$C_1 = \left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\cos s\pi - \frac{1}{s}\left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)\sin s\pi$$

bulunur. Öte yandan, (5.5.9) ifadesi $s\sin s\pi$ ile, (5.5.11) ifadesi $\cos s\pi$ ile çarpılıp, taraf tarafa toplanırsa,

$$sC_2\sin^2 s\pi + sC_2\cos^2 s\pi = s\sin s\pi\left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right) + \cos s\pi\left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)$$

$$sC_2 = s\left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\sin s\pi + \left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)\cos s\pi$$

$$C_2 = \left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\sin s\pi + \frac{1}{s}\left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)\cos s\pi$$

bulunur. Bulunan C_1, C_2 değerlerini (5.5.8) ve (5.5.10) ifadelerinde yerlerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$u(x,s) = \left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\cos s(x-\pi) + \frac{1}{s}\left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)\sin s(x-\pi)$$

$$-\frac{1}{s}\int_x^{\pi}\sin s(x-y)q(y)u(y,s)\,dy$$

$$u'(x,s) = -s\left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\sin s(x-\pi) + \left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)\cos s(x-\pi)$$

$$-\int_x^{\pi}\cos s(x-y)q(y)u(y,s)\,dy$$

integral denklemleri elde edilir. Buradan

$$\chi_\lambda(x) = \left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\cos s(x-\pi) + \frac{\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1}{s}\sin s(x-\pi) - \frac{1}{s}\int_x^{\pi}\sin s(x-y)q(y)\chi_\lambda(y)dy$$

yazılabilir ve ispat tamamlanır.

5.5.4. Sonuç: $\chi_\lambda(x)$ çözüm fonksiyonu için

$$\chi_\lambda(x) = \left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\cos s(x-\pi) + \frac{\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1}{s}\sin s(x-\pi) - \frac{1}{s}\int_x^{\pi}\sin s(x-y)q(y)\chi_\lambda(y)dy$$

$$\chi'_\lambda(x) = -s\left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)\sin s(x-\pi) + \left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)\cos s(x-\pi) - \int_x^{\pi}\cos s(x-y)q(y)\chi_\lambda(y)dy$$

eşitlikleri sağlanır.

5.5.5. Teorem: $\rho > 0$ kabul edelim ve $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ ile gösterelim. O halde öyle $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$|\phi_\lambda(x)| = O\left(|s| e^{|t|x}\right) \tag{5.5.12}$$

$$|\phi'_\lambda(x)| = O\left(|s|^2 e^{|t|x}\right) \tag{5.5.13}$$

İspat:

$$F_{1\lambda}(x) := e^{-|t|x}\phi_\lambda(x) \tag{5.5.14}$$

ile gösterelim. O halde $F_{1\lambda}(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{1\lambda}(x) &= e^{-|t|x}\left[-\cos sx + s\sin sx\right] + \frac{1}{s}e^{-|t|x}\left[\int_0^x \sin s(x-y) q(y)\phi_\lambda(y)\,dy\right] \\ &= e^{-|t|x}\left[-\cos sx + s\sin sx\right] + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y) q(y) F_{1\lambda}(y) e^{|t|y} e^{-|t|x}\,dy \\ &= e^{-|t|x}\left[-\cos sx + s\sin sx\right] + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y) q(y) F_{1\lambda}(y) e^{-|t|(x-y)}\,dy \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

integral denklemini sağlar. (5.5.15)'in her iki tarafının mutlak değerini alırsak,

$$\begin{aligned} |F_{1\lambda}(x)| &\le e^{-|t|x}\left[|\cos sx| + |s||\sin sx|\right] + \frac{1}{|s|}\int_0^x |\sin s(x-y)||q(y)||F_{1\lambda}(y)| e^{-|t|(x-y)}\,dy \\ &\le e^{-|t|x}\left[e^{|t|x} + |s| e^{|t|x}\right] + \frac{1}{|s|}\int_0^x e^{|t|(x-y)}|q(y)||F_{1\lambda}(y)| e^{-|t|(x-y)}\,dy \\ &\le 1 + |s| + \frac{1}{|s|}\int_0^x |q(y)||F_{1\lambda}(y)|\,dy \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada

$$M_1(\lambda) := \max_{x\in[0,\pi]} |F_{1\lambda}(x)| \tag{5.5.16}$$

ile gösterirsek, sonuncu eşitsizlikten

$$M_1(\lambda) \le 1 + |s| + \frac{1}{|s|}M_1(\lambda)\int_0^\pi |q(y)|\,dy$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$M_1(\lambda)\left(1 - \frac{1}{|s|}\int_0^\pi |q(y)|\,dy\right) \le |s|\left(1 + \frac{1}{|s|}\right)$$

eşitsizliği bulunur. O halde

$$|s| > 2\int_0^\pi |q(y)|\,dy := r_0 \tag{5.5.17}$$

için

$$M_1(\lambda) < 2|s|\left(1+\frac{1}{r_0}\right)$$

$$M_1(\lambda) < M_0|s| \qquad (5.5.18)$$

bulunur. Burada

$$M_0 = 2\left(1+\frac{1}{r_0}\right)$$

dır. Dolayısıyla $r_0 > 0$ sayısı (5.5.17) ile tanımlanmak üzere $|s| > r_0$ için (5.5.14), (5.5.16) ve (5.5.18)'den

$$|\phi_\lambda(x)| \le M_0|s|e^{|t|x} \qquad (5.5.19)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$|\phi_\lambda(x)| = O\left(|s|e^{|t|x}\right)$$

yazılır ve (5.5.12) eşitliği ispatlanmış olur. Şimdi (5.5.13) eşitliğinin doğruluğunu ispatlayalım. (5.5.19) eşitsizliği ve Sonuç 5.5.2. gereğince $|s| > r_0$ için

$$|\phi'_\lambda(x)| \le |s|e^{|t|x} + |s^2|e^{|t|x} + \int_0^\pi e^{|t|(x-y)}q(y)\phi_\lambda(y)\,dy \le \left(|s|+|s^2|\right)e^{|t|x} + \int_0^\pi e^{|t|(x-y)}q(y)M_0|s|e^{|t|y}dy$$

$$\le \left(1+\frac{1}{|s|}\right)|s|^2 e^{|t|x} + |s|e^{|t|x}M_0\int_0^\pi q(y)\,dy \le \left(1+\frac{1}{r_0}+\frac{M_0}{r_0}\int_0^\pi q(y)\,dy\right)|s|^2 e^{|t|x}$$

$$\le \left(\frac{M_0}{2}+\frac{M_0}{r_0}\frac{r_0}{2}\right)|s|^2 e^{|t|x}$$

ifadesinden

$$|\phi'_\lambda(x)| \le M_0|s|^2 e^{|t|x}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$|\phi'_\lambda(x)| = O\left(|s|^2 e^{|t|x}\right)$$

yazılır ve (5.5.13) eşitliği ispatlanmış olur.

5.5.6. Teorem: $\rho > 0$ kabul edelim ve $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ ile gösterelim. O halde öyle $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1) $\tilde{\beta}_2 \ne 0$ ise

$$|\chi_\lambda(x)| = O\left(|s|^2 e^{|t|(x-\pi)}\right) \tag{5.5.20}$$

$$|\chi_\lambda'(x)| = O\left(|s|^3 e^{|t|(x-\pi)}\right) \tag{5.5.21}$$

2) $\tilde{\beta}_2 = 0$ ise

$$|\chi_\lambda(x)| = O\left(|s| e^{|t|(x-\pi)}\right) \tag{5.5.22}$$

$$|\chi_\lambda'(x)| = O\left(|s|^2 e^{|t|(x-\pi)}\right) \tag{5.5.23}$$

İspat: Önce $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ için $\chi_\lambda(x)$ çözüm fonksiyonunun asimptotiğini bulalım.

$$F_{2\lambda}(x) := e^{-|t|(x-\pi)} \chi_\lambda(x) \tag{5.5.24}$$

ile gösterelim. O halde $F_\lambda(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}
F_{2\lambda}(x) &= e^{-|t|(x-\pi)} \left[\left(\beta_2 + s^2 \tilde{\beta}_2\right) \cos s(x-\pi) + \frac{1}{s}\left(\beta_1 + s^2 \tilde{\beta}_1\right) \sin s(x-\pi) \right] \\
&\quad - \frac{1}{s} e^{-|t|(x-\pi)} \left[\int_x^\pi \sin s(x-y) q(y) \chi_\lambda(y) dy \right] \\
&= e^{-|t|(x-\pi)} \left[\left(\beta_2 + s^2 \tilde{\beta}_2\right) \cos s(x-\pi) + \frac{1}{s}\left(\beta_1 + s^2 \tilde{\beta}_1\right) \sin s(x-\pi) \right] \\
&\quad - \frac{1}{s} \int_0^\pi \sin s(x-y) q(y) F_{2\lambda}(y) e^{|t|(y-\pi)} e^{-|t|(x-\pi)} dy \\
&= e^{-|t|(x-\pi)} \left[\left(\beta_2 + s^2 \tilde{\beta}_2\right) \cos s(x-\pi) + \frac{1}{s}\left(\beta_1 + s^2 \tilde{\beta}_1\right) \sin s(x-\pi) \right] \\
&\quad - \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) F_{2\lambda}(y) e^{-|t|(x-y)} dy
\end{aligned} \tag{5.5.25}$$

integral denklemini sağlar. (5.5.25)'in her iki tarafının mutlak değerini alırsak,

$$\begin{aligned}
|F_{2\lambda}(x)| &\le e^{-|t|(x-\pi)} \left[\left|\beta_2 + s^2 \tilde{\beta}_2\right| \left|\cos s(x-\pi)\right| + \frac{1}{|s|}\left|\beta_1 + s^2 \tilde{\beta}_1\right| \left|\sin s(x-\pi)\right| \right] \\
&\quad + \frac{1}{|s|} \int_x^\pi \left|\sin s(x-y)\right| |q(y)| |F_{2\lambda}(y)| e^{-|t|(x-y)} dy \\
&\le \left|\beta_2 + s^2 \tilde{\beta}_2\right| + \frac{1}{|s|}\left|\beta_1 + s^2 \tilde{\beta}_1\right| + \frac{1}{|s|} \int_x^\pi |q(y)| |F_{2\lambda}(y)| dy
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada

$$Y_1(\lambda) := \max_{x \in [0,\pi]} |F_{2\lambda}(x)| \tag{5.5.26}$$

ile gösterirsek, sonuncu eşitsizlikten

$$Y_1(\lambda) \le \left|\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right| + \frac{1}{|s|}\left|\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right| + \frac{1}{|s|} Y_1(\lambda)\int_0^{\pi} |q(y)| dy$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$Y_1(\lambda)\left(1 - \frac{1}{|s|}\int_0^{\pi} |q(y)| dy\right) \le |s|^2 \left(\left|\tilde{\beta}_2\right| + \frac{1}{|s|}\left|\tilde{\beta}_1\right| + \frac{1}{|s|^2}|\beta_2| + \frac{1}{|s|^3}|\beta_1|\right)$$

eşitsizliği bulunur. O halde

$$|s| > 2\int_0^{\pi} |q(y)| dy := r_0 \tag{5.5.27}$$

için

$$Y_1(\lambda) < 2|s|^2 \left(\left|\tilde{\beta}_2\right| + \frac{1}{r_0}\left|\tilde{\beta}_1\right| + \frac{1}{r_0^{\,2}}|\beta_2| + \frac{1}{r_0^{\,3}}|\beta_1|\right)$$

$$Y_1(\lambda) < Y_0 |s|^2 \tag{5.5.28}$$

bulunur. Burada

$$Y_0 = 2\left(\left|\tilde{\beta}_2\right| + \frac{1}{r_0}\left|\tilde{\beta}_1\right| + \frac{1}{r_0^{\,2}}|\beta_2| + \frac{1}{r_0^{\,3}}|\beta_1|\right)$$

dir. Dolayısıyla $r_0 > 0$ sayısı (5.5.27) ile tanımlanmak üzere $|s| > r_0$ için (5.5.24), (5.5.26) ve (5.5.28)'den

$$|\chi_\lambda(x)| \le Y_0 |s|^2 e^{|t|(x-\pi)} \tag{5.5.29}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$|\chi_\lambda(x)| = O\left(|s|^2 e^{|t|(x-\pi)}\right)$$

yazılır ve (5.5.20) eşitliği ispatlanmış olur. Şimdi (5.5.21) eşitliğinin doğruluğunu ispatlayalım. (5.5.29) eşitsizliği ve Sonuç 5.5.4. gereğince $|s| > r_0$ için

$$|\chi_\lambda'(x)| \le |s|\left|\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right| e^{|t|(x-\pi)} + \left|\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right| e^{|t|(x-\pi)} + \int_0^{\pi} e^{|t|(x-y)} q(y)\chi_\lambda(y) dy$$

$$\le \left(|s|\left|\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right| + \left|\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right|\right) e^{|t|(x-\pi)} + \int_0^{\pi} e^{|t|(x-y)} q(y) Y_0 |s|^2 e^{|t|(y-\pi)} dy$$

$$\le\left(\left|\tilde{\beta}_2\right|+\frac{1}{|s|}\left|\tilde{\beta}_1\right|+\frac{1}{|s|^2}\left|\beta_2\right|+\frac{1}{|s|^3}\left|\beta_1\right|\right)|s|^3 e^{|t|(x-\pi)}+|s|^2 e^{|t|(x-\pi)}Y_0\int_0^{\pi} q(y)\,dy$$

$$\le\left(\left|\tilde{\beta}_2\right|+\frac{1}{r_0}\left|\tilde{\beta}_1\right|+\frac{1}{r_0^{\,2}}\left|\beta_2\right|+\frac{1}{r_0^{\,3}}\left|\beta_1\right|+\frac{Y_0}{r_0}\int_0^{\pi} q(y)\,dy\right)|s|^3 e^{|t|(x-\pi)}$$

$$\le\left(\frac{Y_0}{2}+\frac{Y_0}{r_0}\frac{r_0}{2}\right)|s|^3 e^{|t|(x-\pi)}$$

ifadesinden

$$\left|\chi_\lambda'(x)\right|\le Y_0\,|s|^3 e^{|t|(x-\pi)}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise

$$\left|\chi_\lambda'(x)\right|=O\left(|s|^3 e^{|t|(x-\pi)}\right)$$

yazılır ve (5.5.21) eşitliği ispatlanmış olur. $\tilde{\beta}_2=0$ durumu için, (5.5.22) ve (5.5.23) eşitlikleri de benzer şekilde ispatlanır.

5.5.7. Teorem: $\rho>0$ kabul edelim ve $\lambda=s^2$, $s=\sigma+it$ ile gösterelim. O halde öyle $s_0>0$ vardır ki $|s|>s_0$ için aşağıdaki asimptotik eşitliği sağlanır.

$$\phi_\lambda(x)=s\sin sx+O\left(e^{|t|x}\right)\tag{5.5.30}$$

$$\phi_\lambda'(x)=s^2\cos sx+O\left(|s|e^{|t|x}\right)\tag{5.5.31}$$

İspat: (5.5.19) ifadesini, Sonuç 5.5.2. deki $\phi_\lambda(x)$ çözüm fonksiyonunun integral kısmında dikkate alırsak, yeteri kadar büyük $|s|$ 'ler için

$$\left|\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\phi_\lambda(y)\,dy\right|\le\int_0^x\left|\sin s(x-y)\right|\left|q(y)\right|\left|\phi_\lambda(y)\right|dy\le M_0|s|\int_0^x e^{|t|(x-y)}\left|q(y)\right|e^{|t|y}dy$$

$$\le M_0|s|e^{|t|x}\int_0^{\pi}\left|q(y)\right|$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre

$$\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\phi_\lambda(y)\,dy=O\left(|s|e^{|t|x}\right)$$

asimptotik eşitliği sağlanır. Bunu Sonuç 5.5.2. deki $\phi_\lambda(x)$ ifadesinde dikkate alırsak, (5.5.32) ifadesini elde ederiz. (5.5.33) ifadesi (5.5.32)'ye benzer şekilde ispatlanır.

5.5.8. Teorem: $\rho > 0$ kabul edelim ve $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ ile gösterelim. O halde öyle $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1) $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ ise

$$\chi_\lambda(x) = s^2 \tilde{\beta}_2 \cos s(x-\pi) + O\left(|s| e^{|t|(x-\pi)}\right) \tag{5.5.32}$$

$$\chi'_\lambda(x) = -s^3 \tilde{\beta}_2 \sin s(x-\pi) + O\left(|s|^2 e^{|t|(x-\pi)}\right) \tag{5.5.33}$$

2) $\tilde{\beta}_2 = 0$ ise

$$\chi_\lambda(x) = s\tilde{\beta}_1 \sin s(x-\pi) + O\left(e^{|t|(x-\pi)}\right) \tag{5.5.34}$$

$$\chi'_\lambda(x) = s^2 \tilde{\beta}_1 \cos s(x-\pi) + O\left(|s| e^{|t|(x-\pi)}\right) \tag{5.5.35}$$

İspat: $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ olsun. O halde (5.5.29) ifadesini, Sonuç 5.5.4. deki $\chi_\lambda(x)$ fonksiyonunun integral kısmında dikkate alırsak, yeteri kadar büyük $|s|$'ler için

$$\begin{aligned}\left|\int_x^\pi \sin s(x-y) q(y) \chi_\lambda(y) dy\right| &\leq \int_x^\pi |\sin s(x-y)| |q(y)| |\chi_\lambda(y)| dy \\ &\leq Y_0 |s|^2 \int_0^x e^{|t|(x-y)} |q(y)| e^{|t|(y-\pi)} dy \\ &\leq Y_0 |s|^2 e^{|t|(x-\pi)} \int_0^\pi |q(y)|\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buna göre

$$\int_0^x \sin s(x-y) q(y) \phi_\lambda(y) dy = O\left(|s|^2 e^{|t|(x-\pi)}\right)$$

asimptotik eşitliği sağlanır. Bunu Sonuç 5.5.4. deki $\phi_\lambda(x)$ ifadesinde dikkate alırsak, (5.5.32) ifadesini elde ederiz. (5.5.33) ifadesi (5.5.32)'ye benzer şekilde ispatlanır.

$\tilde{\beta}_2 = 0$ için, (5.5.34) ve (5.5.35) eşitlikleri, $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ durumuna benzer şekilde ispatlanır.

5.6. $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ Fonksiyonlarının Wronskianının Asimptotiği

5.6.1. Teorem: $W(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir:

1) $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ ise $W(\lambda) = -s^4 \tilde{\beta}_2 \cos s\pi + O\left(|s|^3 e^{|t|\pi}\right)$

2) $\tilde{\beta}_2 = 0$ ise $W(\lambda) = s^3 \tilde{\beta}_1 \sin s\pi + O\left(|s|^2 e^{|t|\pi}\right)$

İspat:

$$W(\lambda) = \lambda\phi_\lambda(\pi)\tilde{\beta}_1 - \lambda\phi'_\lambda(\pi)\tilde{\beta}_2 + \phi_\lambda(\pi)\beta_1 - \phi'_\lambda(\pi)\beta_2 \qquad (5.6.1)$$

olduğunu daha önceden biliyoruz.

1) $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ durumunu araştıralım. $\lambda = s^2$ olduğunu dikkate alarak (5.5.30) ve (5.5.31) asimptotik eşitliklerini (5.6.1) eşitliğinde yerine yazarsak

$$W(\lambda) = s^2\left(s\sin s\pi + O\left(e^{|t|\pi}\right)\right)\tilde{\beta}_1 - s^2\left(s^2\cos s\pi + O\left(|s|e^{|t|\pi}\right)\right)\tilde{\beta}_2$$
$$+\left(s\sin s\pi + O\left(e^{|t|\pi}\right)\right)\beta_1 - \left(s^2\cos s\pi + O\left(|s|e^{|t|\pi}\right)\right)\beta_2$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$W(\lambda) = s^3\tilde{\beta}_1\sin s\pi + O\left(|s|^2 e^{|t|\pi}\right) - s^4\tilde{\beta}_2\cos s\pi + O\left(|s|^3 e^{|t|\pi}\right)$$
$$+ s\beta_1\sin s\pi + O\left(e^{|t|\pi}\right) - s^2\beta_2\cos s\pi + O\left(|s|e^{|t|\pi}\right)$$
$$= -s^4\tilde{\beta}_2\cos s\pi + O\left(|s|^3 e^{|t|\pi}\right)$$

bulunur.

2) $\tilde{\beta}_2 = 0$ durumunu araştıralım. Bu durumda $W(\lambda)$ fonksiyonu

$$W(\lambda) = s^3\tilde{\beta}_1\sin s\pi + O\left(|s|^2 e^{|t|\pi}\right) + s\beta_1\sin s\pi + O\left(e^{|t|\pi}\right) - s^2\beta_2\cos s\pi + O\left(|s|e^{|t|\pi}\right)$$
$$= s^3\tilde{\beta}_1\sin s\pi + O\left(|s|^2 e^{|t|\pi}\right)$$

şeklinde ifade edilir.

5.7. Green Fonksiyonunun Kurulması

Öncelikle ele aldığımız problemdeki sınır şartlarını

$$\lambda u(0) = -u'(0) \qquad (5.7.1)$$

$$\left(\beta_1 + \lambda\tilde{\beta}_1\right)u(\pi) = \left(\beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_2\right)u'(\pi) \qquad (5.7.2)$$

şeklinde yazalım. Özdeğerlerden farklı her $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı için (5.5.3) diferansiyel denkleminin $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ çözümleri lineer bağımsız olduklarından bu denklemin genel çözümünü

$$u(x,\lambda) = C_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(x)$$

şeklinde yazabiliriz. Sabitin değişimi yöntemini kullanarak

$$-u''(x)+q(x)u(x)=\lambda u-f(x) \qquad (5.7.3)$$

denkleminin genel çözümünü

$$u(x,\lambda)=C_1(x,\lambda)\phi_\lambda(x)+C_2(x,\lambda)\chi_\lambda(x) \qquad (5.7.4)$$

şeklinde arayalım. Sabitin değişimi yöntemi gereği $C_1(x,\lambda)$ ve $C_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki

$$\begin{cases} C_1'(x,\lambda)\phi_\lambda(x)+C_2'(x,\lambda)\chi_\lambda(x)=0 \\ C_1'(x,\lambda)\phi_\lambda'(x)+C_2'(x,\lambda)\chi_\lambda(x)=f(x) \end{cases}$$

denklem sistemini sağlasınlar. Bu sistemden

$$C_1'(x,\lambda)=\frac{-\chi_\lambda(x)f(x)}{W(\lambda)}$$

$$C_2'(x,\lambda)=\frac{\phi_\lambda(x)f(x)}{W(\lambda)}$$

elde edilir. Bu ifadelerden bulduğumuz

$$C_1(x,\lambda)=-\frac{1}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy+C_1(\lambda)$$

$$C_2(x,\lambda)=\frac{1}{W(\lambda)}\int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy+C_2(\lambda)$$

ifadelerini (5.7.4)'de yerlerine koyarsak,

$$\begin{aligned} u(x,\lambda)=\phi_\lambda(x)&\left[\frac{1}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy+C_1(\lambda)\right] \\ +\chi_\lambda(x)&\left[\frac{1}{W(\lambda)}\int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy+C_2(\lambda)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,\lambda)=&\frac{\phi_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy+\frac{\chi_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy \\ &+C_1(\lambda)\phi_\lambda(x)+C_2(\lambda)\chi_\lambda(x) \end{aligned} \qquad (5.7.5)$$

$$
\begin{aligned}
u'(x,\lambda) &= \frac{1}{W(\lambda)}\left[\phi_\lambda'(x)\int_x^\pi \chi_\lambda(y) f(y)\,dy - \phi_\lambda(x)\chi_\lambda(x) f(x)\right] \\
&+ \frac{1}{W(\lambda)}\left[\chi_\lambda'(x)\int_0^x \phi_\lambda(y) f(y)\,dy + \phi_\lambda(x)\chi_\lambda(x) f(x)\right] \\
&+ C_1(\lambda)\phi_\lambda'(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda'(x) \\
&= \frac{\phi_\lambda'(x)}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y) f(y)\,dy + \frac{\chi_\lambda'(x)}{W(\lambda)}\int_0^x \phi_\lambda(y) f(y)\,dy \\
&+ C_1(\lambda)\phi_\lambda'(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda'(x)
\end{aligned}
\tag{5.7.6}
$$

elde edilir. Bulunan (5.7.5) ve (5.7.6) ifadeleri (5.7.1) şartında yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\lambda\left[\frac{\phi_\lambda(0)}{W(\lambda)}\int_0^\pi \chi_\lambda(y) f(y)\,dy + C_1(\lambda)\phi_\lambda(0) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(0)\right] \\
&= -\left[\frac{\phi_\lambda'(0)}{W(\lambda)}\int_0^\pi \chi_\lambda(y) f(y)\,dy + C_1(\lambda)\phi_\lambda'(0) + C_2(\lambda)\chi_\lambda'(0)\right]
\end{aligned}
$$

olur. (5.4.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\lambda\left[-\frac{1}{W(\lambda)}\int_0^\pi \chi_\lambda(y) f(y)\,dy - C_1(\lambda) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(0)\right] \\
&= -\left[\frac{\lambda}{W(\lambda)}\int_0^\pi \chi_\lambda(y) f(y)\,dy + \lambda C_1(\lambda) + C_2(\lambda)\chi_\lambda'(0)\right]
\end{aligned}
$$

yazılır. Buradan

$$
-\lambda C_1(\lambda) + \lambda\chi_\lambda(0) C_2(\lambda) = -\lambda C_1(\lambda) - \chi_\lambda'(0) C_2(\lambda)
$$

$$
[\lambda\chi_\lambda(0) + \chi_\lambda'(0)]C_2(\lambda) = 0
$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$
\lambda\chi_\lambda(0) + \chi_\lambda'(0) = -W(\lambda) \neq 0
$$

olduğundan

$$
C_2(\lambda) = 0
$$

olur. Benzer şekilde (5.7.5) ve (5.7.6) ifadeleri (5.7.2) şartında yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left(\beta_1 + \lambda\tilde{\beta}_1\right)\left[\frac{\chi_\lambda(\pi)}{W(\lambda)}\int_0^\pi \phi_\lambda(y) f(y)\,dy + C_1(\lambda)\phi_\lambda(\pi) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(\pi)\right] \\
&= \left(\beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_2\right)\left[\frac{\chi_\lambda'(\pi)}{W(\lambda)}\int_0^\pi \phi_\lambda(y) f(y)\,dy + C_1(\lambda)\phi_\lambda'(\pi) + C_2(\lambda)\chi_\lambda'(\pi)\right]
\end{aligned}
$$

olur. (5.4.5) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left(\beta_1+\lambda\tilde{\beta}_1\right)\left[\frac{\beta_2+\lambda\tilde{\beta}_2}{W(\lambda)}\int_0^\pi \phi_\lambda(y)f(y)dy+C_1(\lambda)\phi_\lambda(\pi)+C_2(\lambda)\left(\beta_2+\lambda\tilde{\beta}_2\right)\right]$$
$$=\left(\beta_2+\lambda\tilde{\beta}_2\right)\left[\frac{\beta_1+\lambda\tilde{\beta}_1}{W(\lambda)}\int_0^\pi \phi_\lambda(y)f(y)dy+C_1(\lambda)\phi'_\lambda(\pi)+C_2(\lambda)\left(\beta_1+\lambda\tilde{\beta}_1\right)\right]$$

yazılır. Buradan

$$\left(\beta_1+\lambda\tilde{\beta}_1\right)\phi_\lambda(\pi)C_1(\lambda)+\left(\beta_1+\lambda\tilde{\beta}_1\right)\left(\beta_2+\lambda\tilde{\beta}_2\right)C_2(\lambda)$$
$$=\left(\beta_2+\lambda\tilde{\beta}_2\right)\phi'_\lambda(\pi)C_1(\lambda)+\left(\beta_2+\lambda\tilde{\beta}_2\right)\left(\beta_1+\lambda\tilde{\beta}_1\right)C_2(\lambda)$$
$$\left[\left(\beta_1+\lambda\tilde{\beta}_1\right)\phi_\lambda(\pi)-\left(\beta_2+\lambda\tilde{\beta}_2\right)\phi'_\lambda(\pi)\right]C_1(\lambda)=0$$

bulunur. Bu son eşitlikte

$$\left(\beta_1+\lambda\tilde{\beta}_1\right)\phi_\lambda(\pi)-\left(\beta_2+\lambda\tilde{\beta}_2\right)\phi'_\lambda(\pi)=W(\lambda)\neq 0$$

olduğundan

$$C_1(\lambda)=0$$

olur. O halde (5.7.3) denkleminin (5.7.1), (5.7.2) şartlarını sağlayan çözümü için

$$u(x,\lambda)=\frac{\phi_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy+\frac{\chi_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy \qquad (5.7.7)$$

formülü bulunur. Burada

$$G(x,y,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\chi_\lambda(x)\phi_\lambda(y)}{W(\lambda)} & , \quad 0\le y\le x\le\pi \\[2ex] \dfrac{\phi_\lambda(x)\chi_\lambda(y)}{W(\lambda)} & , \quad 0\le x\le y\le\pi\end{cases} \qquad (5.7.8)$$

olarak alırsak, (5.7.7) eşitliği

$$u(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,y,\lambda)f(y)dy$$

şeklinde yazılır. Bu şekilde (5.1.1)-(5.1.3) sınır değer probleminin Green fonksiyonu (5.7.8) şeklinde olur.

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Yüksek lisans tez çalışmamızda

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u$$

Sturm-Liouville denkleminden ve

$$u'(0) = -\lambda u(0)$$

$$-\left[\beta_1 u(\pi) - \beta_2 u'(\pi)\right] = \lambda\left[\tilde{\beta}_1 u(\pi) - \tilde{\beta}_2 u'(\pi)\right]$$

sınır şartlarından oluşan sınır değer problemine ait Hilbert uzayı oluşturulmuş, probleme uygun operatörün simetrikliği gösterilmiş, çözüm fonksiyonlarının asimptotiği ve bunlardan yararlanark karakteristik fonksiyonun asimptotiği bulunmuştur. Ayrıca son bölümde Green fonksiyonu elde edilmiştir. Burada $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur.

Bu çalışmada dikkat çeken özellik ise hem denklemde hem de sınır şartlarında λ özdeğer parametresinin bulunmasıdır. Ayrıca tezde bulunan sonuçlar orijinal olup, giriş bölümünde de belirttiğimiz gibi fiziğin birçok somut problemlerinin analitik ve yaklaşık çözümlerinin bulunmasında da uygulanabilir.

İleriye dönük çalışmalar olarak bu tip problemlerin çalışıldığı aralıkta bir ya da daha fazla noktada süreksiz olması durumuna göre yeni çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Bayraktar, M. *Analiz***,** Nobel Yayın No: 1601, 1. Basım, Ankara, **2010.**

2. Binding, P. A.; Browne P. J.; Watson, B. A. *Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on The Eigenparameter II*, Journal of Computational and Applied Matematics, 148, **2002**, 147-169.

3. Birkhoff, G. D. *On The Asymptotic Character of The Solution of The Certain Linear Differential Equations Containing Parameter,* Trans. Amer. Math. Soc., Vol.9 **1908,** pp. 219 – 231.

4. Birkhoff, G. D. *Boundary Value and Expantion Problems of Ordinary Linear Differential Equations*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 9 **1908**, pp. 373 – 395.

5. Boyce, W. E.; Diprima, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Willey and Sons, New York, **1977,** pp. 544-554.

6. Çağlıyan M.; Çelik N.; Doğan S. *Adi Diferansiyel Denklemler,* Dora Yayın No:6, 2. Baskı, Bursa. **2008.**

7. Dunford, N.; Schwartz, J. T. *Linear Operators II, Spectral Theory,* Interscience, New York, **1963.**

8. Fulton, C. T. *Two-point Poundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in The Boundary Condition,* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A 77, **1977,** p. 293-308.

9. Gohberg, I. C.; Krein, M. G. *Introduction to The Theory of Linear Non-Selfadjoint Operator*, Amer, Math. Soc., Providence, **1969.**

10. Hinton, D. B. *An Expansion Theorem for Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in The Boundary Condition,* Quart. J. Math. Oxford, vol. 30, No: 2, **1979,** 33-42.

11. Kapustin, N. YU.; Moiseev E. I. *On Spectral Problem in The Theory of Parabolohyoperbolic Heat-transfer Equation*, Doklady Akademi Nauk SSSR 352, no. 4 **1997,** 451-454 (in Russian).

12. Kerimov, N. B.; Mamedov, Kh. K. *On a Boundary Value Problem with a Spectral Parameter in The Boundary Conditions*, Sibirsk. Math. J. 40, No:2, **1999,** 281-290.

13. Kreyszing, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, **1978.**

14. Levitan, B. M.; Sarqsyan, I.S. *Sturm-Liouville ve Direkt Operatörler*, Moskova, Nauka, (Rusca), **1988.**

15. Marçenko, V. A. *Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Teorisi,* Kiev, Naukova Dumka, (Rusca), **1972.**

16. Markushevich, A. I. *Introduction to Analytic Functions Theory I, II,* Moskow, **1977.**

17. Naimark, M. A. *Linear Differantial Operators*, Ungar, New York, **1967.**

18. Rasulov, M. L. *Methods of Contour Integration*, Amsterdam: North Holland Publishing Company, **1967.**

19. Russakovskiy, E. M. *Sınır Şartları Polinom Biçiminde Özdeğer Parametresi İçeren Sınr Değer Probleminin Operatör Yorumu*, Funk. Analizi eko priloj. 9 No:4, **1975,** 91-92 (Rusca).

20. Schneider, A. *A Note Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in The Boundary Conditions*, Math. Z. 136, **1974,** 163-167.

21. Shkalikov, A. A. *Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Conditions*, Trudy., Sem., Imeny, I.G.Petrovsgo, 9, **1983,** 190-229

22. Smirnov, V. I. *A Course of Higher Mathematics, Part 5*, Pergaman Pres, Oxford, **1964.**

23. Tamarkin, J. D. *Some General Problems of The Theory of Ordinary Linear Differantial Equations and Expansions of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions,* Math. Z. 27, **1928,** 1 – 54.

24. Uluçay, C. *Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri*, A.Ü. Fen Fakültesi, Ankara, **1971.**

25. Titchmarsh, E. C. *Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations,* 2nd end, Oxford Univ. Pres, London, **1962.**

26. Triebel, H. *Interpolation Theory ve Riemann Yüzeyleri*, A.Ü., Fen Fakültesi, Ankara, **1978.**

27. Walter, J. *Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in The Boundary Conditions*, Math. Z., 133, **1973,** 301-312.

28. Yakubov, S. *Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators*, Longman, Scientific, Technical, **1994.**

29. Yakubov, S.; Yakubov, Y. *Abel Basis of Root Functions of Regular Boundary Value Problems,* Math. Nachr. 197, **1999,** 157-187

30. Yakubov, S.; Yakubov, Y. *Differential Operator Equations (Ordinary and Partial Differantial Equations),* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, **2000.**

31. Yosida, K. *Functional Analisis,* Springer-Varlag. Berlin, **1965.**

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Kırşehir'de doğan Okan KUZU, ilk ve orta öğrenimini sırasıyla Cacabey İlköğretim Okulunda ve Kırşehir Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 2004 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Anabilim Dalı'nı 2009 yılında başarıyla bitirdi. Lisansla Birleştirilmiş Tezsiz yüksek lisans öğreniminin ardından 2009 yılında tezli yüksek lisans öğrenimine Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Tezli yüksek lisans eğitimi sırasında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.