T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CATALAN SAYILARI VE CATALAN MATRİSLERİ

Hikmet Turan EKİCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

KIRŞEHİR 2013

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ’NE

Hikmet Turan EKİCİ tarafından hazırlanan CATALAN SAYILARI VE CATALAN MATRİSLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Üye : Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Üye : Yrd. Doç. Dr. Handan KÖSE

Üye : Yrd. Doç. Dr. Onur KIYMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yasemin KIYMAZ

Tarih : 28.01.2013

Bu tez, Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hikmet Turan EKİCİ

ÖZET

Bu çalışmada Binom katsayıları ile merkezi Binom katsayısının özelliklerinden faydalanılarak Catalan sayılarının özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Catalan sayıları kullanılarak oluşturulan Catalan matrisi ile bu matisin bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Binom katsayıları, Catalan sayıları, Catalan matrisi

ABSTRACT

In this study, the Catalan numbers have been analysed by making use of Binom factors and the features of central Binom factor. Together with the Catalan matrice made by using Catalan numbers, some features of this matrice has been analysed, as well.
Key Words : Binomial ceofficients, Catalan number, Catalan matrice

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE'ye ve manevi desteğiyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
Γ	Gamma fonksiyonu
${}_xF_n$	Genelleştirilmiş Hipergeometrik Polinomlar
${}_xP_n$	Pochhammer fonksiyonu
$(x)_n$	Pochhammer fonksiyonunun diğer gösterimi
C_n	n. Catalan sayısı
$\binom{2n}{n}$	Merkezi binom katsayısı
$\lfloor x \rfloor$	x ten küçük veya eşit olan en büyük tam sayı
$P_n[x]$	Genelleştirilmiş Pascal matrisi
$C_n[x]$	n. mertebeden Catalan matrisi
$\Xi(m)$	İlk m Catalan sayısının toplamı
$G(a_n;x)$	a_n dizisinin üreteç fonksiyonu
n!!	Çift faktöriyel

1. BÖLÜM

ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, çalışmamızda sıkça kullanacağımız Binom açılımını ve Binom katsayılarının bazı önemli özelliklerini vermek istiyoruz.

1.1. Binom Katsayısı :

n ve r negatif olmayan tamsayılar olsun. $0 \leq r \leq n$ olmak üzere

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ifadesine binom katsayısı denir.

Eğer n < r olursa $\binom{n}{r} = 0$ olarak tanımlanır. Ayrıca 0!=1 olarak tanımlandığından

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

dır.

Düzlemde herhangi üç tanesi aynı doğru üzerinde bulunmayan n tane noktadan $\binom{n}{2}$ tane doğru geçer. Ayrıca bu n tane nokta ile $\binom{n}{3}$ tane üçgen çizilebilir.

n kenarlı bir düzgün çokgenin köşegen sayısı:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - 2 = \frac{n(n-3)}{2}$$

tanedir.

Köşegenlerin ikişer ikişer kesişme noktalarının sayısı $\binom{n}{4}$ tanedir. Bu kesişme noktalarının farklı olmaları gerekmez. (Örneğin 3 tane köşegen aynı noktada kesişebilir, bu noktadaki ikişer ikişer kesişmelerin sayısı $\binom{3}{2}=3$ tanedir.)

n tane farklı noktadan geçen paralel çizgiler düzlemi en az

$$1+n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}$$

parçaya ayırır.

Doğrular paralel olmadığında parça sayısı artacağından, en çok parça sayısı,

$$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$$

tanedir. Üç boyutlu bir yaş pastayı n tane düzlemle bölersek parça sayısı en çok

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$$

tanedir. Genelleme yapılacak olursa, m boyutlu bir yaş pasta n tane düzlemle en fazla

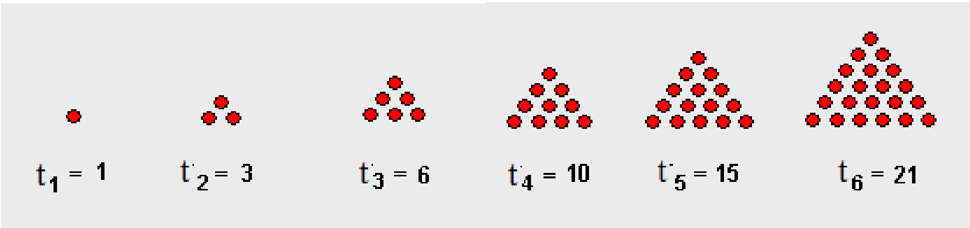
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+....+\binom{n}{m}$$

parçaya ayrılır. [15]

1.2. Üçgensel ve Dörtyüzlüsel Sayılar:

1'den *n*'e kadar olan *n* tane doğal sayının toplamına **üçgensel sayı** denir. Bu sayılara üçgensel denmesinin sebebi, bir üçgen şeklinde dizilebilecek eşit çaplı topların sayılarına karşılık gelmeleridir. *n*-inci üçgensel sayının formülü şöyledir:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ...(n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$



$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dörtyüzlüsel (**tetrahedral** veya **üçgen piramidal**) sayı, üçgen tabanlı ve bir piramidi temsil eden biçimli sayılardır. Yukarıdaki şekilde her bir üçgensel sayıyı temsil eden bilyeler, en küçüğü üstte olacak şekilde üst üste konulduğunda piramidal şekil elde edilir. Bu şekil dikkate alındığında *n.* dörtyüzlüsel sayı, ilk *n* üçgensel sayının toplamına eşittir. İlk on yedi dörtyüzlüsel sayı şunlardır:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969, …

n. dörtyüzlüsel sayı formülü 3. artan faktöriyelin 3. faktöriyele bölümü biçiminde gösterilir ve şöyledir;

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Üçgensel ve dörtyüzlüsel sayılar binom katsayısı olarak yazılabilir. [8-9]

$$t_n = \frac{n.(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$$

Buradan $t_n = t_{n-1} + n$ olduğundan

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + \text{n} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$$

şeklinde yazılabilir.

Bir problem üzerinde üçgensel ve dörtyüzlüsel sayıları inceleyelim: Yeni evli olan bir adam evliliğinin ilk günü eşine bir kırmızı gül alır. İkinci gün bir kırmızı gül ve 2 lale alır. Üçüncü gün 1 kırmızı gül, 2 lale ve 3 karanfil alır. Dördüncü gün 1 kırmızı gül, 2 lale, 3 karanfil ve 4 papatya alır. Bu hediye alma işlemi bu şekilde devam ederse akla iki ilginç soru gelir:

- Verilen düzen n gün devam ederse çiçeklerin sayısı g_n. günde kaç tane olur?
- n günde alınan toplam çiçeklerin sayısı S_n ise S_n kaçtır?

1. gün	2. gün	3. gün	….	n. gün ,
1	1+2	1+2+3		1+2+ … +n

İlk olarak n. günde gönderilen hediyelerin sayısı bir önceki gün gönderilen hediyelerin sayısından n fazla olduğuna dikkat edelim. $g_n = g_{n-1}+n$ olup $g_1=1$ olduğundan n. gündekilerin toplamı,

$$g_n = t_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

olur. İlk n gündekilerin toplamı ise,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} t_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$=\frac{n(n+1)}{12}\left[(2n+1)+3\right]$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$=\binom{n+2}{3}$$

olarak bulunur.

1.3. Kombinasyon Özellikleri:

Teorem 1.1:

n ve r negatif olmayan tamsayılar olsun. $0 \leq r \leq k \leq n$ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır:

1) $$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \qquad (1.1)$$

2) $$\binom{n}{r}=\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} \qquad (1.2)$$

3) $$\binom{n}{r}=\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r} \qquad (1.3)$$

4) $$\binom{n}{r}=\frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1} \qquad (1.4)$$

5) $$\binom{n}{k}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r} \qquad (1.5)$$

6) $$\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}=(n-1)^2 \qquad (1.6)$$

7) $$\frac{1}{n}\binom{nm}{m}=\binom{nm-1}{m-1} \qquad (1.7)$$

8) $$n\binom{n}{r}=(r+1)\binom{n}{r+1}+r\binom{n}{r} \qquad (1.8)$$

İspat:

(1.1) özdeşliğinin sağ tarafından sol tarafını elde edelim,

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\left[n-(n-r)\right]!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \binom{n}{r}$$

(1.2) özdeşliğinin sağ tarafından sol tarafını elde edelim,

$$\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} = \frac{n}{r}\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$= \binom{n}{r}$$

(1.3) özdeşliğinin sağ tarafından sol tarafını elde edelim,

$$\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r} = \frac{n}{n-r}\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$= \binom{n}{r}$$

(1.4) özdeşliğinin sağ tarafından sol tarafını elde edelim,

$$\frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}=\frac{n-r+1}{r}\frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$=\binom{n}{r}$$

(1.5) özdeşliğinin sağ tarafından sol tarafını elde edelim,

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}\frac{(n-r)!}{(n-k)!(k-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k!}{(k-r)!}$$

$$=\binom{n}{k}\binom{k}{r}$$

(1.6) özdeşliğinde soldan sağa doğru ispat yapılırsa,

$$\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}=\frac{n!}{(n-2)!2!}\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}$$

$$=\frac{n!+(n-1)!(n-2)}{(n-2)!2}$$

$$=\frac{(n-2)!(n^2-n+n^2-3n+2)}{(n-2)!2}$$

$$=(n-1)^2$$

(1.7) özdeşliğinde soldan sağa doğru ispat yapılırsa,

$$\frac{1}{n}\binom{nm}{m}=\frac{1}{n}\frac{(mn)!}{(mn-m)!m!}$$

$$=\frac{(mn-1)!mn}{nm(m-1)!(mn-m)!}$$

$$=\frac{(mn-1)!}{(m-1)!(mn-m)!}$$

$$=\binom{nm-1}{m-1}$$

(1.8) özdeşliğinin sağ tarafından sol tarafını elde edelim,

$$(r+1)\binom{n}{r+1}+r\binom{n}{r}=(r+1)\frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!}+r\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$=\frac{n!(n-r)}{(n-r)!r!}+\frac{n!r}{(n-r)!r!}$$

$$=\frac{n!n}{(n-r)!r!}$$

$$=n\binom{n}{r}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 1.2: (Pascal Özdeşliği)

r ile n pozitif tamsayılar ve $r \leq n$ olmak üzere

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$$

İspat:

Eşitliğin sağ tarafından yola çıkarak sol tarafını elde etmeye çalışalım,

$$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$$

$$=\frac{r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)(n-r-1)!}$$

$$=\frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-1)![r+(n-r)]}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-1)!n}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$=\binom{n}{r}$$

olduğundan ispat tamamlanır. [3]

Teorem 1.3.

Her $n \geq 0$ tamsayısı için $\binom{n}{r}$ binom katsayısı tamsayıdır.

İspat:

Tümevarımdan n=0 için $\binom{0}{r}=1$ tamsayı sonucu doğrudur. Şimdi negatif olmayan tüm k tamsayıları için doğru olduğunu varsayalım. $\binom{k-1}{r-1}$ ve $\binom{k-1}{r}$ sayıları da tümevarım hipotezinden tamsayıdır. O halde bu tamsayıların toplamı da tamsayıdır. Buna göre Pascal özdeşliğinden $\binom{n}{r}$ tamsayıdır. Böylece her binom katsayısının tamsayı olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 1.1:

Ardışık r tane tamsayının çarpımı r! ile tam bölünür.

İspat:

r tane ardışık pozitif tamsayının çarpımını incelemek yeterlidir. Bu sayıların en küçüğü n olsun.

$$\frac{n(n+1)....(n+r-1)}{r!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

Teorem 1.3 e göre $\binom{n+r-1}{r}$ ifadesi tamsayı dolayısıyla $\frac{n(n+1)....(n+r-1)}{r!}$ tamsayı olduğundan n.(n+1)….(n+r-1) çarpımı r! ile tam bölünür.

1.4. Hermite'in Bölme Prensibi:

m, n $\geq$ 0 olmak üzere

$$\frac{m}{(m,n)} \,\Bigg|\, \binom{m}{n}$$

$$\frac{m+n-1}{(m+1,n)} \,\Bigg|\, \binom{m}{n}$$

Burada m ile n pozitif tamsayılar olmak üzere (m,n) , m ile n sayılarının en büyük ortak bölenini gösterir.

İspat:

d = (m, n) olsun. Öklid algoritmasından, öyle A,B tamsayıları vardı ki;

$$d = Am + Bn$$

Her iki taraf $\binom{m}{n}$ ile çarpılırsa

$$d\binom{m}{n} = Am\binom{m}{n} + Bn\binom{m}{n}$$

$$= m\left[A\binom{m}{n} + B\binom{m-1}{n-1}\right]$$

olur. Teorem 1.3 e göre $\binom{m}{n}$ ile $\binom{m-1}{n-1}$ binom katsayıları tamsayı olduğundan

$$\left[A\binom{m}{n} + B\binom{m-1}{n-1}\right] = C$$

ifadesi de tamsayıdır. Buradan

$$d\binom{m}{n} = mC$$

şeklinde tamsayı olarak bulunur. O halde $\frac{m}{d} \mid \binom{m}{n}$ olur. Böylece $\frac{m}{(m,n)} \mid \binom{m}{n}$ elde edilir.

d=(m+1,n) olsun. Daha önce olduğu gibi P ve Q sayıları için

$$d = P(m+1) + Qn$$

$$= (m-n+1)P + n(P+Q)$$

$$d.\frac{m!}{n!(m-n+1)!}=\binom{m}{n}P+\binom{m}{n-1}(P+Q)$$

$$=R$$

$$d\binom{m}{n}=(m-n+1)R$$

$$\frac{m-n+1}{d}\;\Big|\;\binom{m}{n}$$

olur. Böylece $\frac{m-n+1}{(m+1,n)}\;\Big|\;\binom{m}{n}$ olur. [15]

Sonuç 1.2:

1) $\binom{2n}{n}$ binom katsayısı çift tamsayıdır. (n ≥ 1)

2) m = 2n , (2n+1, n) = 1 ise $n+1\;\Big|\;\binom{2n}{n}$

3) $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ ifadesi bir tamsayıdır.

Bu sonuçların ispatı sonraki bölümde yapılacaktır.

1.5. Özel Fonksiyonlar:

Negatif olmayan bir n tamsayısı için

$$(x)_n = {}_xP_n = P(x,\ n) = \underbrace{x(x+1)....(x+n-1)}_{n\ tane}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **Pochhammer fonksiyonu** denir. Pochhammer fonkiyonu artan faktöriyel olarak da tanımlanır. Bu fonksiyon ayrıca

$$(x)_n = {}_xP_n = \underbrace{x(x+1)....(x+n-1)}_{n\ tane} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

şeklinde de ifade edilir. Burada $\Gamma(n)$=(n-1)! olan Euler gama fonksiyonudur.[1-3]

α, β, γ ∈ C olmak üzere,

$$F(\alpha,\beta;\ \gamma;\ z) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{\gamma.1}z + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1).1.2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+1).1.2.3}z^3 + ...$$

genel şekliyle tanımlanan seriye hipergeometrik seri denir. Hipergeometrik seriler , α veya β negatif tamsayıya veya sıfıra eşit olduğunda sınırlı olur. $\gamma = -n$ (n = 0,1,2,…) için $\alpha = -m$ veya $\beta = -m$ (n < m ve m doğal sayı)'e eşit olmadığı sürece hipergeometrik seri sınırsızdır. [16]

${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,b_q\ ;x)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon** denir. Bu fonksiyonda p = 2 ve q = 1 yazılırsa;

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;\ c;\ z) &= 1 + \frac{a.b}{1!c}z + \frac{a(a+1).b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir.[10-12]

Örnek 1.1.

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1,1;\ 1;\ z) &= 1 + \frac{1.1}{1!1}z + \frac{1(1+1).1(1+1)}{2!1(1+1)}z^2 + ... \\ &= 1 + z + z^2 + z^3 + ... \\ &= \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

Örnek 1.2.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(1,2;\ 1;\ z) &= 1+\frac{1.2}{1!1}z+\frac{1(1+1).2(2+1)}{2!1(1+1)}z^2+\ldots.\\
&=1+\frac{1.2}{1!1}z+\frac{1.2.2.3}{2!1.2}z^2+\frac{1.2.3.2.3.4}{3!1.2.3}z^3+\ldots.\\
&=1+2z+3z^2+4z^3+\ldots.\\
&=\frac{1}{(1-z)^2}
\end{aligned}
$$

Örnek 1.3.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(1,2;\ 2;\ z) &= 1+\frac{1.2}{1!2}z+\frac{1(1+1).2(2+1)}{2!2(2+1)}z^2+\ldots.\\
&=1+\frac{1.2}{1!2}z+\frac{1.2.2.3}{2!2.3}z^2+\frac{1.2.3.2.3.4}{3!2.3.4}z^3+\ldots.\\
&=1+z+z^2+z^3+\ldots.\\
&=\frac{1}{1-z}
\end{aligned}
$$

1.6. İndirgeme Bağıntısı ve Üreteç Fonksiyonu:

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ bir sonsuz dizi, $k \in N$ sabit ve $f : NxZ^k \to R$ bir fonksiyon olsun. Başlangıç değerleri $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ve her $n \geq k$ için

$$a_n = f\left(n,\ a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}\right) \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona k. dereceden indirgeme bağıntısı denir. Dizinin bütün elemanları denklem (1.9) ve $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ değerleri ile belirlenir.

Örnek 1.4.

$a_0 = c$ ve $a_n = f(n, a_{n-1})$ birinci dereceden indirgeme bağıntısıdır.

$a_0 = c_0,\ a_1 = c_1\ ve\ a_n = f\left(n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}\right)$ ikinci dereceden indirgeme bağıntısıdır.

$a_0 = c_0,\ a_1 = c_1\ ve\ a_n = 4n^2 a_{n-1} + n.a_{n-2}$ ikinci dereceden homojen lineer indirgeme bağıntısıdır.

Tanım 1.1.

Bir a_n dizisi verilsin.

$$G(a_n; x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ifadesine a_n dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Örnek 1.5.

$\left(a_n\right) = \left(n^2\right)$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(n^2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + ... = x\underbrace{\left(1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + ...\right)}_{A'(x)}$$

$$A(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + ... = x\underbrace{\left(1 + 2x + 3x^2 + ...\right)}_{B'(x)}$$

$$B(x) = x + x^2 + x^3 + ... = \frac{x}{1-x} \Rightarrow B'(x) = \frac{1}{\left(1-x\right)^2}$$

$$A(x) = x\frac{1}{\left(1-x\right)^2} \Rightarrow A'(x) = \frac{x+1}{\left(1-x\right)^3}$$

$$G(n^2; x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

şeklindedir.

2. BÖLÜM

CATALAN SAYILARI VE ÖZELLİKLERİ

$C_n = \frac{1}{\text{n+1}}\binom{2n}{n}$ şeklinde tanımlanan tamsayılara Catalan Sayıları denir. Catalan sayıları kombinatorik matematikte birçok problemin çözümünde kullanılabilen özel bir sayı dizisidir. Dizinin terimleri 1, 2, 5, 14, 42,…. şeklindedir.[2]

2.1. Merkezi Binom Katsayısı:

Pascal üçgeninin merkez sütununda bulunan 1,2,6,20,… sayıları $\binom{2n}{n}$ şeklinde ifade edilir. Bu sayılar aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi Pascal üçgeninin çift numaralı satırlarında bulunur.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \boxed{1} & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \boxed{2} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & \boxed{20} & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Sonuç 1.2 de n ≥ 1 için $\binom{2n}{n}$ ifadesinin çift tamsayı olduğu belirtildi. Şimdi bu sonucun farklı ispatlarını inceleyelim:

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(2n-n)!.n!}$$

$$= \frac{(2n-2)!2n(2n-1)}{(n-1)!n.n!}$$

$$=2(2n-1)\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

$$=2(2n-1)\left[\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}\left(2n-(2n-1)\right)\right]$$

$$=2(2n-1)\left[2\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}\right]$$

$$=2(2n-1)\left[2\frac{(2n-2)!}{\left(2n-2-(n-1)\right)!(n-1)!}-\frac{(2n-1)!}{\left(2n-1-(n-1)\right)!(n-1)!}\right]$$

$$=2(2n-1)\left[2\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-1}{n-1}\right]$$

Her binom katsayısı bir tamsayı olduğu için $\binom{2n}{n}$ ifadesi bir çift tamsayıdır.[5] Bu ispatın dördüncü satırındaki hafif bir değişiklik ikinci ispatı verir;

$$=2(2n-1)\left[\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}\left(n-(n-1)\right)\right]$$

$$=2(2n-1)\left[\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n-2}\right]$$

yine çift tamsayı olduğu elde edilir.[13] Bir diğer ispat ise Pascal özdeşliğinden kolaylıkla yapılabilir;[6]

$$\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n}$$

$$=\binom{2n-1}{n}-\binom{2n-1}{n} \qquad \left((n-1)+n=2n-1 \text{ olduğundan}\right)$$

$$=2\binom{2n-1}{n}$$

Aşağıdaki kombinasyon özdeşlikleri de aynı sonucu verir:

$$\binom{n}{r}=\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}$$

Daha genel olarak $\dfrac{(nr)!}{(r!)^n}$ ifadesi bir tamsayıdır. Bu ifadenin doğruluğunu aşağıdaki örnekte göstereceğiz.

Örnek 2.1.

n ≥ 0 için $\dfrac{(nr)!}{n!(r!)^n}$ ifadesinin bir tamsayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Tümevarım yöntemine göre $n=0$ için $\dfrac{0!}{0!(r!)^0}=1$ ve $n=1$ için $\dfrac{(r)!}{1!r!}=1$ olup her ikisi de tamsayı olduğu için sonuç doğrudur. Şimdi bir k≥0 için doğru olduğunu varsayalım, yani $\dfrac{(k.r)!}{k!(r!)^k}$ tamsayıdır. (k+1) için ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

$$\frac{\dfrac{\left[(k+1).r\right]!}{(k+1)!(r!)^{k+1}}}{\dfrac{(kr)!}{k!(r!)^k}}=\frac{\left[(k+1).r\right]!}{(k+1)!(r!)^{k+1}}.\frac{k!(r!)^k}{(kr)!}$$

$$=\frac{(kr+r)(kr+r-1)....(kr+1)}{(k+1)r!}$$

$$=\frac{(kr+r-1)....(kr+1)}{(r-1)!}$$

$$=\binom{kr+r-1}{r-1}$$

Teorem 1.3 e göre her n ≥ 0 tamsayısı için $\binom{n}{r}$ binom katsayısı tamsayı olduğundan eşitliğin sağ tarafı tamsayıdır. Dolayısıyla $\dfrac{\left[(k+1)r\right]!}{(k+1)!(r!)^{k+1}}$ ifadesi bir tamsayıdır. [7]

Örnek 2.2.

n ≥ 0 için $(n+1)\,\Big|\,\binom{2n}{n}$ olduğunu gösteriniz.

İspat:

$$\binom{\binom{2n}{n}-2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$$

Teorem 1.3 e göre sol taraf tamsayıdır, bu yüzden $C_n=\frac{1}{\text{n+1}}\binom{2n}{n}$ sayısı bir tamsayıdır. Diğer bir deyişle $(n+1)\,\Big|\,\binom{2n}{n}$ olur.[14]

Alternatif İspatlar:

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$=\frac{(2n+1)(2n+2)(2n)!(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)n!n!(n+1)(n+1)}$$

$$=\frac{(2n+2)!(n+1)}{(2n+1)2(n+1)!(n+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1}$$

(n+1) ile (2n+1) aralarında asal olduğundan $(n+1)\left|\binom{2n}{n}\right.$ olur.

Diğer bir ispatta ise $C_n=\frac{1}{\text{n+1}}\binom{2n}{n}$ olsun.

$$C_n=(\text{2n+1})C_n-2nC_n=\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}-\frac{2n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$=\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}-\frac{2n(2n)!}{(n+1)n!n!}$$

$$=\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}-\frac{2(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

$$=\binom{2n+1}{n+1}-2\binom{2n}{n+1}$$

Eşitliğin sağ tarafı tamsayı olduğundan sol tarafı da tamsayı olacaktır. O halde $C_n=\frac{1}{\text{n+1}}\binom{2n}{n}$ tamsayı olup $(n+1)\left|\binom{2n}{n}\right.$ olur.[4]

Wahlins'in İspatı:

$$\frac{1}{\text{n+1}}\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}=\frac{2n(2n-1)....(n+1)}{(n+1)!}$$

Sonuç 1.1 den $N=\frac{2n(2n-1)....(n+1)}{n!}$ bir tamsayıdır. Aynı nedenle

$N'=\frac{(2n+1)2n(2n-1)....(n+1)}{(n+1)!}$ de bir tamsayıdır. Yani $N'=\frac{(2n+1)}{(n+1)}N$ olur.

(2n+1,n+1)=1 olduğunu biliyoruz. Buradan

$N=\dfrac{2n(2n-1)....(n+1)}{n!}$ olduğundan $\dfrac{N}{n+1}=\dfrac{2n(2n-1)....(n+1)}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

olur ki $\dfrac{1}{\text{n+1}}\binom{2n}{n}$ tamsayı olur.[15]

2.2. Merkezi Binom Katsayısının En Büyük Üslü Asal Çarpanı:

x reel sayısı bir taban olmak üzere x ten küçük veya eşit olan en büyük tamsayı $\lfloor x \rfloor$ şeklinde gösterilir. Örneğin $\lfloor -3,21 \rfloor = -4,\ \lfloor -2 \rfloor = -2,\ \lfloor 3,21 \rfloor = 3$ olur.

p asal sayı olmak üzere $p \le m$ olsun. Buna göre

m!=1.2.3…p…(2p)…(p.p)…m

şeklinde ifade edilirse m! çarpımındaki p asal çarpanını bulunduran sayıların sayısı $\left\lfloor \dfrac{m}{p} \right\rfloor$ tanedir. Benzer şekilde p^2 çarpanını bulunduran sayıların sayısı $\left\lfloor \dfrac{m}{p^2} \right\rfloor$ tanedir, p^3 çarpanını bulunduran sayıların sayısı $\left\lfloor \dfrac{m}{p^3} \right\rfloor$ tanedir. Bu şekilde devam edilirse m! çarpımındaki p asal çarpanlarının toplam sayısı:

$$\sum_{i \ge 1} \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor$$

tanedir. Örneğin 12! çarpımındaki 3 çarpanlarının sayısı ;

$$\left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{3^2} \right\rfloor = 4+1=5$$

tanedir. 2 çarpanlarının sayısı;

$$\left\lfloor \frac{12}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{2^3} \right\rfloor = 6+3+1=10$$

tanedir.

$$e=\sum_{i\geq 1}\left\lfloor \frac{m}{p^i}\right\rfloor \tag{2.1}$$

olsun. k, p nin en büyük üssü, yani $p^k \leq m$, $p^{k+1} > m$ olsun. Bu durumda $\left\lfloor \frac{m}{p^{k+1}}\right\rfloor=0$ olur. Sonuç olarak (2.1) deki denklem sonludur. Bu durumda

$$e=\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{m}{p^i}\right\rfloor \tag{2.2}$$

olur. Burada $k=\lfloor \log_p m \rfloor$ olur. Örneğin p=2, m=12 için $k=\lfloor \log_2 12\rfloor=\lfloor 3,...\rfloor=3$ olur.

Şimdi e en büyük üs olmak üzere $p^e \mid \binom{2n}{n}$ durumunu inceleyelim. Burada $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$ olup, (2n)! ifadesini bölen p sayısının en büyük kuvveti $\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{2n}{p^i}\right\rfloor$ ve (n)! ifadesini bölen p sayısının en büyük kuvveti $\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{n}{p^i}\right\rfloor$ olur. Burada $k=\lfloor \log_p 2n \rfloor$ olur. Sonuç olarak $\frac{(2n)!}{n!n!}$ ifadesini tam bölen p sayısının en büyük kuvveti

$$\begin{aligned} e&=\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{2n}{p^i}\right\rfloor-\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{n}{p^i}\right\rfloor-\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{n}{p^i}\right\rfloor \\ &=\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{2n}{p^i}\right\rfloor-2\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor \frac{n}{p^i}\right\rfloor \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.[1]

Örnek 2.3.

n=9 ve p=5 için,

$$\binom{2n}{n} = \binom{18}{9} = \frac{18!}{9!9!} = 48620$$

ve k=$\lfloor \log_5 18 \rfloor = 1$ bulunur. 5’in en büyük üssü e olmak üzere $5^e \,\Big|\, \binom{18}{9}$ olmalıdır. Gerçekten

$$e = \sum_{i=1}^{1} \left\lfloor \frac{18}{5^i} \right\rfloor - 2\sum_{i=1}^{1} \left\lfloor \frac{9}{5^i} \right\rfloor = 3 - 2 = 1$$

olmak üzere $5 \mid 48620$ olduğu görülür. 5^2 nin 48620 sayısını bölmediğine dikkat edelim. Benzer şekilde n=14 ve p=5 alınırsa

$$\binom{2n}{n} = \binom{28}{14} = 40116600$$

ve k=$\lfloor \log_5 28 \rfloor = 2$ bulunur. 5’in en büyük üssü e olmak üzere $5^e \,\Big|\, \binom{28}{14}$ olmalıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned} e &= \sum_{i=1}^{2} \left\lfloor \frac{28}{5^i} \right\rfloor - 2\sum_{i=1}^{2} \left\lfloor \frac{14}{5^i} \right\rfloor \\ &= (5+1) - 2(2+0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

olmak üzere $5^2 \mid 40116600$ olduğu görülür. 5^3 ün 40116600 sayısını bölmediğine dikkat edelim.

Lemma 2.1.

x≥0 reel sayı olmak üzere

$$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

Eşitliğin sağ tarafından başlayıp sol tarafını elde etmeye çalışalım. $0 \leq x < 1$ ve n pozitif tamsayı olmak üzere;

1. Durum: Eğer $0 \leq x < 1/3$ ise $0 \leq 3x < 1$ olduğundan eşitlik

$$0+0+0=0$$

2. Durum: Eğer $1/3 \leq x < 2/3$ ise $1 \leq 3x < 2$ olduğundan eşitlik

$$0+0+1=1$$

3. Durum: Eğer $2/3 \leq x < 1$ ise $2 \leq 3x < 3$ olduğundan eşitlik

$$0+1+1=2$$

O halde sonuç her $x \geq 0$ reel sayısı için geçerlidir.

Lemma 2.2.

p bir asal sayı ve m pozitif tamsayı olmak üzere $p^m \geq 3$ olsun. Bu durumda

$$\left\lfloor \frac{3n}{p^m} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{p^m} \right\rfloor$$

eşitsizliği vardır.

İspat:

Lemma 2.1 de $x = \frac{n}{p^m}$ alınırsa kolayca görülür.

Teorem 2.1.

$n \geq 3$ olmak üzere

$$R_n = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$$

ifadesi bir tamsayıdır.

İspat:

p keyfi bir asal sayı ve $p^e \mid R_n$ olacak şekilde e en büyük üs olsun.

$$e=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{3n}{p^m}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{p^m}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+1}{p^m}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+2}{p^m}\right\rfloor\right)$$

$e \geq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Lemma 2.2 ye göre eğer $p \neq 2$ ise $e \geq 0$.

p = 2 olduğunu varsayalım. Bu durumda (n+2, 3n] aralığında 2^k şeklinde bir sayı vardır. Lemma 2.2 ye göre

$$\begin{aligned}e&=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{3n}{2^m}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{2^m}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+1}{2^m}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+2}{2^m}\right\rfloor\right)\\&\geq\left\lfloor\frac{3n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{3n}{2^k}\right\rfloor\\&\geq f(n)\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}f(n)&=\left\lfloor\frac{3n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor+1\\&=\left\lfloor\frac{3n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\\&=\left\lfloor\frac{3n}{2}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\end{aligned}$$

Dikkat edilirse f(0) = 0-2.0-0 = 0 ve f(1)=1-2.0-0-1=0 olduğundan

f(0) = 0 = f(1) olur. Ayrıca,

$$f(n+2)=\left\lfloor \frac{3(n+2)}{2} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{(n+2)}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$$
$$=\left(\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + 3\right) - 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) - \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1\right)$$
$$=\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$
$$=f(n)$$

Böylece tümevarımdan her $n \geq 0$ için $f(n) = 0$ olur. Sonuç olarak her zaman e pozitif olur. Dolayısıyla R_n bir tamsayıdır.[15]

Örneğin $R_5 = \dfrac{15!}{5!6!7!} = 3003$ tamsayıdır.

2.3. Conway'ın Genellemesi :

Conway, Örnek 2.2 yi aşağıdaki şekilde genellemiştir:

$$m!n! \mid (m,n)(m+n-1)!$$

Burada (m,n) m ile n'nin OBEB'idir. İspatta aşağıdaki bilgiler kullanılır:

- İki pozitif tamsayının OBEB'i pozitif tamsayıdır.
- Her binom katsayısı tamsayıdır.
- $\dfrac{m(m+n-1)!}{m!n!} = \dbinom{m+n-1}{m-1}$
- (ab, ac)=a(b, c)

Buradan,

$$\left(\frac{m(m+n-1)!}{m!n!}, \frac{n(m+n-1)!}{m!n!}\right) = \left(\binom{m+n-1}{m-1}, \binom{m+n-1}{n-1}\right)$$

Sol tarafın tamsayı olması için $\frac{(m+n-1)!}{m!n!}(m,n)$ ifadesi tamsayı olmalıdır. Bunun sonucunda ise $m!n!\,|\,(m,n)(m+n-1)!$ olmalıdır.

Örneğin m=6 ve n=9 için (m,n)=(6,9)=3 olur. Buradan

$$\frac{(m,n)(m+n-1)!}{m!n!}=\frac{3.14!}{6!9!}=1001$$

tamsayı olarak bulunur.[15]

Örnek 2.4.

m ve n pozitif tamsayı olmak üzere

$$\frac{\left[\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}\right]}{\binom{m+n}{m}}=\frac{(2m)!(2m)!(2n)!(2n)!m!n!}{m!m!m!m!n!n!n!n!n!(m+n)!}$$

$$=\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

Eşitliğin sol tarafı tamsayı olduğundan $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ ifadesi de tamsayı olmalıdır.

2.4. Merkezi Binom Katsayısı İçin İndirgeme İlişkisi:

Şimdi merkezi binom katsayısı için indirgeme bağıntısı elde edelim. Bunun için $A_n=\binom{2n}{n}$ olsun.

$$A_{n+1}=\binom{2n+2}{n+1}$$

$$=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$=\frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$=\frac{2(2n+1)}{n+1}A_n$$

olduğundan indirgeme bağıntısı vardır. Buna göre indirgeme bağıntısı,

$$(n+1)A_{n+1}=2(2n+1).A_n$$

şeklindedir. Burada $A_0 = 1$ alınır.[4]

2.5. Merkezi Binom Katsayısı İçin Üreteç Fonksiyonu:

Şimdi merkezi binom katsayısı için üreteç fonksiyonu oluşturalım. A_n ifadesinde $n \geq 0$ olmak üzere

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n$$

$$=A_0+\sum_{n=0}^{\infty}A_{n+1}x^{n+1}$$

x değişkenine göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$A'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}x^n \tag{2.1}$$

$$xA'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}nA_n x^n$$

(2.1) de indirgeme ilişkisi kullanılırsa

$$A'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2(2n+1)A_n x^n$$

$$=2\left[2\sum_{n=0}^{\infty} nA_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n\right]$$

$$=2\left[2xA'(x)+A(x)\right]$$

$$=4xA'(x)+2A(x)$$

$$\left(1\text{-}4x\right)A'(x)=2A(x)$$

$$\frac{A'(x)}{A(x)}=\frac{2}{1\text{-}4x}$$

Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\ln A(x)=\ln\frac{1}{\sqrt{1-4x}}+\ln C$$

$$A(x)=\frac{C}{\sqrt{1-4x}}$$

$A(0) = A_0 = 1$ olduğundan $C = 1$ bulunur.

$$A(x)=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$$

elde edilir.[15]

Teorem 2.2. (Binom Teoremi):

x ile y keyfi reel sayılar ve n keyfi negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

İspat:

Verilen ifadeyi P(n) ile gösterelim. $n = 0$ için; $(x+y)^0=1$ ve $\sum_{r=0}^{0}\binom{0}{r}x^{0-r}y^r=x^0y^0=1$

olduğundan eşitlik doğrudur.

Varsayalım ki keyfi bir $k \geq 0$ tamsayısı için P(k) doğru olsun. Bu durumda

$$(x+y)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r$$

doğrudur. k+1 için,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)^k (x+y) \\
&= \left[\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r \right] (x+y) \\
&= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^{r+1} \\
&= \left[\binom{k}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r \right] + \left[\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} x^{k-r} y^{r+1} + \binom{k}{k} y^{k+1} \right] \\
&= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r-1} x^{k+1-r} y^r + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \left[\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} \right] x^{k+1-r} y^r + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k+1}{r} x^{k+1-r} y^r + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \\
&= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} x^{k+1-r} y^r
\end{aligned}$$

Böylece tümevarımdan her $n \geq 0$ için eşitliğin doğruluğu ispatlanır.[14]

Sonuç 2.1.

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Diğer bir ifadeyle binom katsayılarının toplamı 2^n olur.

İspat:

Binom teoreminde x=y=1 alınarak sonuç elde edilir.

3. BÖLÜM

CATALAN MATRİSLERİ

Genelleştirilmiş Pascal matrisi $P_n\left[x\right]=\left[p_{i,j}\left[x\right]\right]$ $\left(i,j=1,2,...,n\right)$ şeklinde gösterilir. Burada

$$p_{i,j}\left[x\right]=\begin{cases} x^{i-j}\begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix}, & \text{i-j} \geq 0 \\ 0 \qquad , & \text{i-j} < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

biçiminde elemanlara sahiptir. Genelleştirilmiş Pascal matrisinde $x=1$ alınırsa Pascal matrisi $P_n=\left[p_{i,j}\right]$ $\left(i,j=1,2,...,n\right)$ ile gösterilir.

Özel fonksiyonlar teorisindeki bütünlüğü bozmadan ana tanımları yineleyelim. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon, $_pF_q$ sonsuz toplamı olarak tanımlanır

$$_pF_q\left(a_1,...,a_p;\ \mathrm{b}_1,...,\mathrm{b}_q;\ \lambda\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_l....\left(a_p\right)_l}{\left(b_1\right)_l....\left(b_q\right)_l}\cdot\frac{\lambda^l}{l!}$$

burada

$$_aP_n=P(a,\ n)=\left(a\right)_n=\underbrace{a\left(a+1\right)....\left(a+n-1\right)}_{n\ tane}=\frac{\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(a\right)}$$

şeklinde tanımlanan Pochhammer fonksiyonu (aynı zamanda artan faktöriyel gösterimi olarak da bilinir) ve $\Gamma(n)$=(n-1)! olan Euler gama fonksiyonudur.[10-12]

Catalan sayıları $\left\{C_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ şeklinde alınarak incelenmiştir. Burada terimler sırasıyla 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, … olur. Dizinin ilk terimi C_0=1 ve n-inci terim Binom katsayıları cinsinden açıkça ifade edilirse,

$$C_n=\frac{1}{\mathrm{n}+1}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}=\frac{\left(2n\right)!}{\left(n+1\right)!n!}\ ,\ \ \mathrm{n}\geq 0 \tag{3.4}$$

Ayrıca Catalan sayısının aşağıdaki gösterimine dikkat ediniz,

$$C_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma(2+n)} \;, \quad \text{n keyfi.} \tag{3.5}$$

Aşağıda verilen formül, bilinen Catalan sayılarını kapsayan formüldür

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k . C_{n-k} \;, \quad n \geq 0 \; . \tag{3.6}$$

Ayrıca ardışık iki Catalan sayıları arasındaki indirgeme bağıntısı

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \mathrm{C}_n$$

şeklindedir.

Bundan sonraki kısımda alt üçgen matrisin sıfırdan farklı elemanları olarak Catalan sayıları kullanmaktır. Catalan matrisini göstermek için bu matrisi kullanacağız.

Tanım 3.1.

n. mertebeden genelleştirilmiş Catalan matrisi $C_n[x] = [c_{i,j}[x]]$ ile gösterilir, diğer bir ifadeyle i,j=1, 2, ... ,n olmak üzere,

$$c_{i,j}[x] = \begin{cases} x^{i-j} C_{i-j} \;, & \text{i-j} \geq 0 \\ \quad 0 \quad\;, & \text{i-j} < 0 \end{cases}$$

şeklindedir, burada C_k sayısı k. Catalan sayısı ve $x \in R$ dır.

Örnek 3.1.

7x7 tipindeki genelleştirilmiş Catalan matrisi

$$C_7[x]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5x^3 & 2x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14x^4 & 5x^3 & 2x^2 & x & 1 & 0 & 0 \\ 42x^5 & 14x^4 & 5x^3 & 2x^2 & x & 1 & 0 \\ 132x^6 & 42x^5 & 14x^4 & 5x^3 & 2x^2 & x & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Basitlik için, x = 1 olması durumunda n. dereceden Catalan matrisi $C_n=[C_{i,j}]$ şeklinde gösterilir. Örneğin 7x7 tipindeki Catalan matrisi $x=1$ olması durumunda

$$C_7[x]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 42 & 14 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 132 & 42 & 14 & 5 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.

nxn tipindeki genelleştirilmiş Catalan matrisi birim alt üçgen matris olduğu için determinantı 1 dir, dolayısıyla tersi vardır. $C_n[x]=\left[c_{i,j}[x]\right]$ matrisinin ters matrisi $\left(C_n[x]\right)^{-1}=\left[c'_{i,j}[x]\right]$ olup burada

$$c'_{i,j}[x]=\begin{cases} 1\,, & \text{i=j} \\ -x^{i-j}C_{i-j-1}\,, & \text{i} \geq \text{j+1} \\ 0\,, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklindedir.

İspat :

$q_{i,j}\left[x\right]=\sum_{k=1}^{n} c_{i,k}\left[x\right].c'_{k,j}\left[x\right]$ olduğunu dikkate alalım. $i<j$ için $q_{i,j}\left[x\right]=0$ olduğunu görmek zor değildir. Ayrıca $q_{i,i}\left[x\right]=1$, i=1, 2,.,n olur. $i>j$ durumunda (3.6) da bazı cebirsel dönüşümler ve bağıntılar kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
q_{i,j}\left[x\right] &= \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}\left[x\right].c'_{k,j}\left[x\right] \\
&= \sum_{k=j}^{i} c_{i,k}\left[x\right].c'_{k,j}\left[x\right] \\
&= c_{i,j}\left[x\right].c'_{j,j}\left[x\right] + \sum_{k=j+1}^{i} c_{i,k}\left[x\right].c'_{k,j}\left[x\right] \\
&= \mathrm{x}^{i-j}C_{i-j} - \sum_{k=j+1}^{i} \mathrm{x}^{i-k}C_{i-k}.\mathrm{x}^{k-j}C_{k-j-1} \\
&= \mathrm{x}^{i-j}C_{i-j} - \mathrm{x}^{i-j}\sum_{k=0}^{i-j-1} C_{i-j-1-k}.C_{k} \\
&= \mathrm{x}^{i-j}\left(C_{i-j}-C_{i-j}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Bu nedenle $C_n\left[x\right].\left(C_n\left[x\right]\right)^{-1}=I_n$ olduğu görülür, burada I_n , nxn tipinde birim matristir. Benzer şekilde $\left(C_n\left[x\right]\right)^{-1}.C_n\left[x\right]=I_n$ olduğu da gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.

7x7 tipindeki genelleştirilmiş Catalan matrisinin tersi

$$
\left(C_7[x]\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2x^3 & -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5x^4 & -2x^3 & -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 \\ -14x^5 & -5x^4 & -2x^3 & -x^2 & -x & 1 & 0 \\ -42x^6 & -14x^5 & -5x^4 & -2x^3 & -x^2 & -x & 1 \end{bmatrix}
$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.

İlk m Catalan sayısının toplamı

$$
\Xi(m) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - C_m \cdot {}_2F_1\left(1,\ m+\frac{1}{2};\ m+2;\ 4\right)
$$

şeklindedir, burada $i = \sqrt{-1}$ sanal birimdir.

İspat:

(3.5) denklemiyle verilen Catalan sayısı gösterimini kullanalım. Bu denklem dikkate alınarak

$$
\sum_{k=0}^{m-1} \frac{4^k}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma(2+k)} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - \frac{4^m}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{\Gamma(2+m)} \cdot {}_2F_1\left(1, m+\frac{1}{2};\ m+2;\ 4\right)
$$

olduğunu ispatlamalıyız. İspatı matematiksel tümevarım yöntemiyle yapalım.

m=1 için doğruluğunu inceleyelim,

$$
\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \Gamma(3) = 2 \text{ ve } {}_2F_1\left(1, \frac{3}{2};\ 3;\ 4\right) = -\frac{1}{2} i\left(-i+\sqrt{3}\right)
$$

değerleri denklemde yerlerine yazılırsa denklemi sağladığı görülür. m için doğru olsun, m+1 için doğruluğunu inceleyelim. Tümevarım adımını ispatlamak için genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonun aşağıdaki özelliğini kullanacağız;

$$ {}_2F_1\left(1,a;\ \mathrm{b};\ \lambda\right)=\lambda\frac{a}{b}\cdot\ {}_2F_1\left(1,a+1;\ \mathrm{b+1};\ \lambda\right)+1 $$

Ayrıca tümevarım hipotezi kullanılırsa,

$$ \sum_{k=0}^{m}\frac{4^k}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(2+k\right)}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-\frac{4^m}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{\Gamma\left(2+m\right)}\cdot 4\cdot\frac{\frac{1}{2}+m}{2+m}\cdot\ {}_2F_1\left(1,\frac{3}{2}+m;\ 3+m;\ 4\right) $$

bulunur. Şimdi $\Gamma\left(z+1\right)=z\Gamma\left(z\right)$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$ \sum_{k=0}^{m}\frac{4^k}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(2+k\right)}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-\frac{4^{m+1}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}{\Gamma\left(3+m\right)}\cdot\ {}_2F_1\left(1,\frac{3}{2}+m;\ 3+m;\ 4\right) $$

olup ispat tamamlanır.[16]

Sonuç 3.1.

m > 0 keyfi olmak üzere Catalan sayıları için aşağıdaki indirgeme bağıntısı geçerlidir

$$ C_m=\frac{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-\Xi(m)}{{}_2F_1\left(1,m+\frac{1}{2};\ m+2;\ 4\right)} $$

3.1. Kombinasyon Özdeşliklerine Bağlı Ters Matrisler:

$G_n\left[x\right]=\left[g_{i,j}\left[x\right]\right]$, $\mathrm{H}_n\left[x\right]=\left[h_{i,j}\left[x\right]\right]$, (i,j=1, 2, ,...., n) matrisleri tanımlansın. Aşağıdaki iki teorem genelleştirilmiş Catalan matrisi ve genelleştirilmiş Pascal matrisi arasındaki ilişkiyi verir. Çeşitli kombinasyon özdeşliklerinin sonuçları olarak türetilmiştir. Basitlik için bundan sonra $G_n\left[1\right]$ ifadesini G_n ve $g_{i,j}\left[1\right]$ ifadesini de $g_{i,j}$ şeklinde gösterelim. Aynı şekilde $H_n\left[1\right]$ ifadesinin yerine H_n ve $h_{i,j}\left[1\right]$ ifadesinin yerine de $h_{i,j}$ ifadelerini kullanalım.

Teorem 3.3.

$G_n[x]=\left[g_{i,j}[x]\right]$ (i,j=1, ... ,n) matrisinin elemanları

$$g_{i,j}[x]=\begin{cases} 1 & ; \quad i=j \\ x^{i-j}\left(\dfrac{1}{2}\dbinom{i-1}{j-1}-C_{i-j-1}\cdot\ {}_2F_1\left(j,j-i;\ \dfrac{3}{2}-i+j;\ \dfrac{1}{4}\right)\right) & ; \quad i>j \\ 0 & ; \quad i<j \end{cases}$$

olmak üzere

$$P_n[x]=C_n[x]\cdot G_n[x] \tag{3.8}$$

dır.

İspat :

$G_n[x]=\left(C_n[x]\right)^{-1}\cdot P_n[x]$ eşitliğini ispatlamak için yeterlidir.

$\sum_{k=1}^{n}c'_{i,k}[x].p_{k,j}[x]$ toplamını $\mathrm{s}_{i,j}[x]$ ile gösterelim. $i<j$ için

$\mathrm{s}_{i,j}[x]=0=g_{i,j}[x]$ olduğu açıktır. O halde $i\geq j$ durumu doğrulayalım.

$$\begin{aligned}\mathrm{s}_{i,j}[x]&=\sum_{k=1}^{n}c'_{i,k}[x].p_{k,j}[x]\\ &=\sum_{k=j}^{i}c'_{i,k}[x].p_{k,j}[x]\\ &=\sum_{k=j}^{i-1}c'_{i,k}[x].p_{k,j}[x]+c'_{i,i}[x].p_{i,j}[x]\end{aligned}$$

(3.7) ile (3.1) ifadelerinden;

$$\mathrm{s}_{i,j}[x]=x^{i-j}\left(\binom{i-1}{j-1}-\sum_{k=j}^{i-1}C_{i-k-1}\binom{k-1}{j-1}\right),\ \mathrm{i}\geq \mathrm{j} \tag{3.9}$$

Elde edilir. i = j durumunda $s_{i,j}[x]=\binom{i-1}{j-1}=1=g_{i,j}[x]$ olur. Şimdi i > j için aşağıdaki özdeşliği ispat etmemiz gerekir.

$$\sum_{k=j}^{i-1} C_{i-k-1}\binom{k-1}{j-1}=\frac{1}{2}\binom{i-1}{j-1}+C_{i-j-1}\cdot\ {}_2F_1\left(j,j-i;\ \frac{3}{2}-i+j;\ \frac{1}{4}\right) \tag{3.10}$$

basitleştirmek amacıyla eşitliğin sol tarafına R diyelim. Hipergeometrik fonksiyon dönüşümleri uygulanırsa aşağıdaki gibi olur

$$R=\frac{1}{2}\binom{i-1}{j-1}+C_{i-j-1}\ {}_2F_1\left(j,j-i;\ \frac{3}{2}-i+j;\ \frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\binom{i-1}{j-1}+C_{i-j-1}\sum_{k\geq 0}\frac{(j)_k(j-i)_k}{\left(\frac{3}{2}-i+j\right)_k}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^k}{k!}$$

Pochhammer fonksiyonundaki temel dönüşümler dikkate alınırsa

$$(j)_k=\frac{(j+k-1)!}{(j-1)!}\ ;\ (j-i)_k=(-1)^k\frac{(i-j)!}{(j-i-k)!}\ ,\ i\geq j\ ,\ k\leq i\text{-}j \tag{3.11}$$

$$\left(\frac{3}{2}-i+j\right)_k=(-1)^k\frac{(2i-2j-3)(2i-2j-5)....(2i-2j-2k-1)}{2^k}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{4^k}\dfrac{(2i-2j-3)!}{(2i-2j-2k-3)!}\dfrac{(i-j-k-2)!}{(i-j-2)!} & ;\ k\leq i\text{-}j\text{-}2\\[2ex] 2\dfrac{(-1)^{i-j-1}}{4^{i-j-1}}\dfrac{(2i-2j-3)!}{(i-j-2)!} & ;\ k=i\text{-}j\text{-}1\\[2ex] \dfrac{(-1)^{i-j+1}}{4^{i-j-1}}\dfrac{(2i-2j-3)!}{(i-j-2)!} & ;\ k=i\text{-}j\end{cases}$$

Toplam, en büyük değerini i-j ye eşit olduğunda alır.

$C_{i-j-1}=\dfrac{\left(2\left(i-j-1\right)\right)!}{\left(i-j\right)!\left(i-j-1\right)!}$ yerine yazılırsa

$$R=\frac{1}{2}\binom{i-1}{j-1}+2\left(\sum_{k=0}^{i-j-2}\frac{\left(2i-2j-2k-3\right)!\left(j+k-1\right)!}{\left(i-j-k\right)!}\frac{1}{\left(j-1\right)!\left(i-j-k-2\right)!k!}+\frac{1}{2}\binom{i-2}{j-1}-\frac{1}{4}\binom{i-1}{j-1}\right)$$

$$=2\sum_{k=0}^{i-j-2}\frac{\left(2k+1\right)!\left(i-3-k\right)!}{\left(k+2\right)!}\frac{1}{\left(j-1\right)!k!\left(i-j-k-2\right)!}+\binom{i-2}{j-1}$$

olur. Şimdi aşağıdaki eşitliği yazabiliriz

$$R=\sum_{k=0}^{i-j-2}\frac{\left(2k+2\right)!}{\left(k+2\right)!\left(k+1\right)!}\frac{\left(i-3-k\right)!}{\left(j-1\right)!\left(i-j-k-2\right)!}+\binom{i-2}{j-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{i-j-2}C_{k+1}\binom{i-3-k}{j-1}+C_0\binom{i-2}{j-1}$$

$$=\sum_{k=j}^{i-1}C_{i-k-1}\binom{k-1}{j-1}$$

olur. Buna göre (3.10) un sol tarafı da bulunmuş olur. Bu teorem doğrultusunda aşağıdaki sonucu elde ederiz.[17]

Sonuç 3.2.

Keyfi bir pozitif n tamsayısı için Catalan sayılarında aşağıdaki indirgeme bağıntısı vardır:

$$C_n=1-\Xi(n)+\sum_{k=0}^{n-1}C_k\Xi(n-k) \qquad (3.12)$$

ayrıca

$$1=\sum_{k=1}^{n+1}C_{n-k+1}\Xi(n-k)\left(\frac{1}{2}-C_{k-2}\cdot{}_2F_1\left(1,1-k;\ \frac{5}{2}-k;\frac{1}{4}\right)\right) \qquad (3.13)$$

İspat:

Keyfi n boyutlu bir C_n matrisi seçelim. (3.8) ve (3.9) dan

$$p_{i,j}=\binom{i-1}{j-1}=\sum_{k=j}^{i} C_{i-k}\left(\binom{k-1}{j-1}-\sum_{l=j}^{k-1} C_{k-l-1}\binom{l-1}{j-1}\right)$$

elde edilir. (i, j)=(n, 1) olduğunda

$$\begin{aligned} 1 &= C_{n-1}+\sum_{k=2}^{n} C_{n-k}\left(1-\sum_{l=1}^{k-1} C_{k-l-1}\right) \\ &= C_{n-1}+\sum_{k=2}^{n} C_{n-k}\left(-\sum_{l=1}^{k-2} C_{l}\right) \\ &= C_{n-1}-\sum_{k=0}^{n-2} C_{k}\left(\sum_{l=1}^{n-k-2} C_{l}\right) \end{aligned}$$

buradan

$$C_n=1+\sum_{k=0}^{n-1} C_k \sum_{l=1}^{n-k-1} C_l$$

ve sonuçta (3.12) bulunmuş olur.

(3.13) ü kanıtlamak için Teorem 3.3 teki özdeşlikleri kullanırsak, aşağıdaki eşitlik bulunur

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \binom{i-1}{j-1}, \\ &= \sum_{k=j+1}^{i} C_{i-k}\left(\frac{1}{2}\binom{k-1}{j-1}-C_{k-j-1}\ {}_2F_1\left(j, j-k;\ \frac{3}{2}-k+j; \frac{1}{4}\right)\right)+C_{i-j}\ . \end{aligned}$$

Burada $i=n, j=1$ alınırsa (3.13) bulunur. $C_{-1}=-1/2$, ${}_2F_1(a,0;b;\lambda)=1$ ve n nin keyfiliği dikkate alınarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.

$H_n[x]=\left[h_{i,j}[x]\right]$ (i,j=1,....,n) şeklinde tanımlanan matriste

$$h_{i,j}[x]=\begin{cases} x^{i-j}\binom{i-1}{j-1}\dfrac{1+{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},j-i;j;-4\right)}{2} & ; \quad i\geq j \\ 0 & ; \quad aksi\ durumda \end{cases} \tag{3.14}$$

olmak üzere

$$P_n[x]=H_n[x]\cdot C_n[x] \tag{3.15}$$

eşitliği vardır.

İspat :

(3.14) özdeşliğini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$\sum_{k=j+1}^{i} C_{k-j-1}\binom{i-1}{k-1}=\binom{i-1}{j-1}\frac{1-{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},j-i;j;-4\right)}{2} \tag{3.16}$$

eşitliğinden ispata devam edelim. (3.11) de yapılan kısaltmalar da dikkate alındığında

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_k=-\frac{(2k-3)!!}{2^k} \tag{3.17}$$

olur. Yapılan dönüşümler (3.16) nın sağ tarafında yazılırsa

$$\binom{i-1}{j-1}\frac{1-{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},j-i;j;-4\right)}{2}=\frac{1}{2}\binom{i-1}{j-1}\left(1-\sum_{k\geq 0}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_k (j-i)_k(-4)^k}{(j)_k\,k!}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\binom{i-1}{j-1}\left(\sum_{k=1}^{i-j}\frac{(2k-3)!!(i-j)!(j-1)!2^k}{(i-j-k)!(j+k-1)!k!}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-j}\frac{(2k-3)!!(i-1)!2^k}{(i-j-k)!(j+k-1)!k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{i-j-1}\frac{(2k-1)!!(i-1)!2^k}{(i-j-k-1)!(j+k)!(k+1)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{i-j-1}\binom{i-1}{j+k}\frac{(2k-1)!!2^k k!}{(k+1)!k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{i-j-1}\binom{i-1}{j+k}\frac{1}{(k+1)}\binom{2k}{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{i-j-1}C_k\binom{i-1}{j+k}$$

$$=\sum_{k=j+1}^{i}C_{k-j-1}\binom{i-1}{k-1}$$

elde edilir. Böylece (3.16) eşitliğinin sağ tarafından, sol tarafı elde edilerek ispat tamamlanır.[17]

Sonuç 3.2.

i≥1 olan keyfi bir tamsayının Catalan sayısına karşılık gelen ifadesi aşağıda verilen eşitlikteki gibidir:

$$i=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i}C_{k-2}\binom{i-1}{k-1}\cdot{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},k-i;\ k;-4\right) \qquad (3.18)$$

İspat:

(3.15) den aşağıdaki eşitlik yazılabilir,

$$\binom{i-1}{j-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=j}^{i}\binom{i-1}{k-1}C_{k-j}+\frac{1}{2}\sum_{k=j}^{i}\binom{i-1}{k-1}C_{k-j}\cdot{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},k-i;\ k;-4\right) \qquad (3.19)$$

Şimdi aşağıdaki kısma odaklanarak ispata devam edelim,

$$\sum_{k=j}^{i} C_{k-j}\binom{i-1}{k-1}=\binom{i-1}{j-2}\frac{1-{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},j-i-1;\ \text{j-1};-4\right)}{2} \tag{3.20}$$

Bu eşitlik Teorem 3.4 deki gibi ispatlanır, ayrıca (3.17) özdeşliği de kullanılırsa,

$$(j-1)_k=-\frac{(j+k-2)!}{(j-2)!}\ ;\quad (j-i-1)_k=(-1)^k\frac{(i-j+1)!}{(i-j-k+1)!}\ ,\quad i\geq j,\ k\leq i\text{-}j\text{+}1$$

ve

$$_2F_1\left(-\frac{1}{2},j-i-1;\ \text{j-1};-4\right)=\sum_{k=0}^{i-j+1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k(j-i-1)_k(-4)^k}{(j-1)_k\,k!}$$

Bu değerler (3.20) ve (3.19) da yerine yazılırsa

$$\binom{i-1}{j-1}=\binom{i-1}{j-2}\frac{1-{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},j-i-1;j-1;-4\right)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=j}^{i}\binom{i-1}{k-1}C_{k-j}\cdot{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},k-i;\ k;-4\right)$$

burada $C_{-1}=-1/2$, $j=2$ değerlerini yerine yazarsak ispat tamamlanır.

nxn tipindeki pascal matrisinin tersinin bulunabileceğinden hareketle, tersi $(P_n[x])^{-1}=p_n[-x]$ olmak üzere yeni kombinasyon özdeşlikleri bulunabilir.

Teorem 3.5.

Catalan sayıları,

$$C_i=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\cdot\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},-k;\ 2;4\right),\quad \text{i}\geq 1$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat :

(3.8) den $G_n[x]=[g_{i,j}[x]]$ matrisinin tersinin olduğu açıktır ve $(G_n[x])^{-1}=(P_n[x])^{-1}\cdot C_n[x]$ şeklindedir. $(G_n[x])^{-1}=[g'_{i,j}[x]]$ formunu bulalım,

$$g'_{i,j}[x]=\begin{cases} x^{i-j}\sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}C_{k-j}\binom{i-1}{k-1} & ; \quad i\geq j \\ 0 & ; \quad i<j \end{cases} \tag{3.21}$$

(3.8) den $C_n[x]=P_n[x](G_n[x])^{-1}\cdot$ Şimdi $1\leq j\leq i\leq n$ için (3.21) i elde edelim,

$$C_{i-j}=\sum_{k=j}^{i}\binom{i-1}{k-1}\cdot\sum_{l=j}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k-1}{l-1}C_{l-j}$$

i yerine $i+1$ kullanılır ve $j=1$ alınırsa

$$C_i=\sum_{k=1}^{i+1}\binom{i}{k-1}\left(\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k-l+1}\binom{k-1}{l}C_l\right)$$

olur. Şimdi, özel fonksiyonların temel tanım ve özelliklerini kullanarak keyfi pozitif bir k tamsayı için aşağıdaki özdeşliği yazabiliriz,

$$\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l+1}\binom{k-1}{l}C_l=-{}_2F_1\left(\frac{1}{2},1-k;\ 2;4\right)$$

Gerçekten de, Catalan sayılarının tanımı ve binom katsayıları temel özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l+1}\binom{k-1}{l}C_l&=-\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{(k-l)_l}{l!}\cdot\frac{1}{l+1}\cdot\frac{(l+1)_l}{l!}\\&=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(1-k)_l}{(l+1)!}\cdot\frac{(l+1)_l}{4^l}\cdot\frac{4^l}{l!}\\&=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(1-k)_l}{(2)_l}\cdot\frac{(l+1)_l}{4^l}\cdot\frac{4^l}{l!}\end{aligned}$$

olur, buradan

$$\frac{(l+1)_l}{4^l}=\frac{(2l)!}{2^l\cdot l!\cdot 2^l}=\frac{(2l-1)!!\cdot(2l)!!}{(2l)!!\cdot 2^l}=\left(\frac{1}{2}\right)_l$$

n keyfi olmak üzere genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon tanımı dikkate alınır ve ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

[1] Alter, R. “Prime and Prime Power Divisiblity of Catalan Numbers,” *Notices of the AMS* 19 (1972), A-48.

[2] Cofman, J. “Catalan Numbers for the Classroom?,” *Elemente der Mathematik* 52 (1997), 108–117.

[3] Cohn, D. I. A. *Basic Techniques of Combinatorial Theory*,Wiley, NewYork, 1978.

[4] Deustch, E., and Sagan, B. E. “Congruences for Catalan and Motzkin Numbers and Related Sequences,” *Journal of Number Theory*, 117 (2006), 191–215.

[5] Došli´c, T. “Perfect Matchings, Catalan Numbers, and Pascal’s Triangle,” *Mathematics Magazine* 80 (June 2007), 219–226.

[6] Erdös, P. et al. “On the Prime Factors of $\binom{2n}{n}$” *Mathematics of Computation* 29 (Jan. 1975), 83–92.

[7] Grimaldi, R. P. “The Catalan Numbers,” MAA Minicourse, Orlando, Florida (Jan. 1996).

[8] http://tr.wikipedia.org/wiki/%C3%9C%C3%A7gensel_say%C4%B1

[9] http://tr.wikipedia.org/wiki/D%C3%B6rty%C3%BCzl%C3%BCsel_say%C4%B1

[10] http://www.belgeler.com/ara?s=Pochhammer+fonksiyonu

[11] http://mathworld.wolfram.com/PochhammerSymbol.html

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Pochhammer_symbol

[13] http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF_eskisayilar/1998_1_11_15_BINOM.pdf

[14] Jarvis, F. “Catalan Numbers,” *Mathematical Spectrum* 36 (2003–2004), 9–12.

[15] Koshy, T. 2009, Catalan Numbers with Applications.

[16] Ülker, M. 2009, Kovaryans matrisinin ozdeğerlerinin aralık tahminlerinin simulasyonla belirlenmesi,

[17] Stanimirovic, S, Stanimirovic, P, Miladinovic, M, Ilic, A, ‘’ Catalan matrix and related combinatorial identities’’ Applied Mathematics and Computation 215 (2009) 796–805

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : EKİCİ, Hikmet Turan

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 17.10.1971 KIRŞEHİR

Medeni hali : Evli

Telefon : 0 (386) 214 44 35

e-mail : hturanekici@mynet.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Karadeniz Teknik Ünv./Matematik Bölümü	2004
Lise	Kırşehir Lisesi	1988

Yabancı Dil

Almanca