T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT KATLI SERİLER VE HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARLA İLİŞKİLERİ

Hüseyin SANCAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR - 2012

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT KATLI SERİLER VE HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARLA İLİŞKİLERİ

Hüseyin SANCAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

KIRŞEHİR - 2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Üye:
Yrd. Doç. Dr. Yasemin KIYMAZ

Üye:
Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışmasında çift katlı seriler incelenmiş ve bir ya da daha çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlarla olan ilişkilerine değinilmiştir. Ayrıca hipergeometrik polinomların belli sınıflarını içeren bazı doğurucu fonksiyon ilişkileri verilmiştir.

Bunun için önce çift katlı serilere kuadratik dönüşümler, kübik dönüşümler ve toplam teoremleri uygulanmıştır. Daha sonra, verilen çift katlı seri özdeşlikleri, iki değişkenli Srivastava-Daoust hipergeometrik fonksiyonu yardımıyla tek katlı serilere indirgenmiştir. Son olarak belli bir polinom sınıfı için elde edilen özdeşliklerden de yararlanılarak karşılık gelen hipergeometrik doğurucu fonksiyon ilişkileri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çift katlı seriler, Hipergeometrik fonksiyonlar, Hipergeometrik polinomlar, Doğurucu fonksiyonlar.

ABSTRACT

In this thesis, double series identities were examined and their consequences involving hypergeometric functions in one or more variables were investigated.

To do this, the quadratic transformations, cubic transformations or summation theorems were applied to double series firstly. Then, the identities that given for double series were reduced to series in one variable with the help of Srivastava-Daoust hypergeometric function. Finally, the associated generating function relations were given by using the identities that obtained for a class of polynomial.

Keywords: Double series, Hypergeometric functions, Hypergeometric polynomials, Generating functions.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim süresince değerli ve derin bilgileriyle bana yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek destek olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ'a, titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA ve Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Baki YAĞBASAN'a, eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hüseyin SANCAR

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$(\lambda)_n$	: Pochhammer sembolü
$\Gamma(x)$	: Gama fonksiyonu
${}_2F_1$	: (Gauss) Hipergeometrik fonksiyon
${}_pF_q$	: Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon
$\left[\frac{n}{m}\right]$	: $\frac{n}{m}$ değerine eşit veya $\frac{n}{m}$ değerinden küçük en büyük tamsayı
$\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$	: Kompleks sayıların sınırlı bir dizisi
$\Delta(m;\lambda)$	: m tane parametrenin bir dizisi
$\delta_{m,n}$	: Kronecker sembolü
$\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)$	: Keyfi katsayılı bir polinom sınıfı

1 GİRİŞ

"Hipergeometrik Seri" kelimesi ilk olarak 1655 yılında John Wellis'in "Arithmetica Infinitorum" adlı kitabında kullanılmıştır. Tek değişkenli hipergeometrik seri teorisindeki çalışmalar ikiyüz yıl öncesine dayanmaktadır. Bu serilerle ilgili ilk çalışmalar Euler tarafından gerçekleştirilmiştir. Ancak ilk sistemli çalışma 1813 yılında Gauss tarafından yapılmıştır.

1836 yılında Kummer tarafından da çeşitli çalışmalar yapılmış olmasına rağmen hipergeometrik fonksiyonların temel gösterimleri Riemann tarafından, diferensiyel denklemler yardımıyla verilmiştir. Barnes ve Mellin bu serilerin integral gösterimlerini tanımlamış, Schwarz ve Goursat ise bu gösterimlerin özel durumlarını incelemişlerdir.

Tek değişkenli hipergeometrik seri teorisindeki büyük başarı, iki veya daha çok değişkenli hipergeometrik serilerin gelişimini tetiklemiştir. 1880 yılında ilk olarak Appell; F_1, F_2, F_3, F_4 ile gösterilen iki değişkenli, dört seri tanımlamıştır. Picard, bu dört seriden birisini, 1870 yılında Pochhammer tarafından çalışılan bir fonksiyonla ilişkilendirmiştir. Ayrıca Picard ve Goursat, Appell serilerinin teorisini geliştirmişlerdir.

1889 yılında Horn, iki değişkenli hipergeometrik serilerin yakınsaklığını araştırmış ve onlara karşılık gelen kısmi diferensiyel denklem sistemlerini kurmuştur. İki değişkenli konfluent hipergeometrik seriler ise ilk olarak P. Humbert tarafından çalışılmıştır. Konu üzerinde çalışan Appell ve Kampé de Fériet'in 1926 yılı yayını daha sonra yapılan ilgili tüm çalışmaların temel kaynağını oluşturmuştur.

Literatür tarandığında bu konuda yapılmış oldukça fazla sayıda tez, kitap ve makaleye rastlanmaktadır. Son yıllarda ise tek ve çift katlı hipergeometrik seriler, bunların çift katlı seriler ile ilişkileri, yakınsaklık durumları ve indirgenebilirlikleri üzerine çeşitli çalışmalar yapılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, 2005 ve 2006 yıllarında Kung-Yu Chen, H. M. Srivastava ve ark. [11,12] tarafından yayınlanan çift katlı seri özdeşlikleri ve karşılık gelen doğurucu fonksiyon ilişkilerinin ele alındığı iki çalışma, ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak bazı tanım ve lemmalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bazı çift katlı seriler, kuadratik dönüşümler, kübik dönüşümler ve toplam dönüşümleri tanımlanmıştır. Bu tanımlar, (bilinen veya yeni) tek ve çift değişkenli bazı seri formülleri elde etmek için kullanılmıştır.

Dördüncü bölümde, iki değişkenli Srivastava-Daoust hipergeometrik fonksiyonu tanıtılmış ve bu fonksiyon yardımıyla çeşitli çift katlı hipergeometrik fonksiyonların indirgenebilirlik durumları verilmiştir.

Beşinci bölümde ise özel bir hipergeometrik polinom tanımlanarak, bu polinomun bazı sınıflarına karşılık gelen doğurucu fonksiyon ilişkileri incelenmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılacak bazı temel bilgiler verilecektir.

a reel ya da kompleks bir sayı, k sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere $(a)_k$ ifadesi

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1 & ;\ k=0 \\ a(a+1)\ldots(a+k-1) & ;\ k\neq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Bu ifadeye *Pochhammer sembolü* denir. Ayrıca $(1)_k = k!$ olduğundan *Faktöriyel fonksiyonu* olarak da bilinir [9].

α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots \tag{2.2}$$

olarak ifade edilen seri matematikte büyük bir öneme sahiptir. Bu seri

$$1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

geometrik serisinin bir genelleştirmesi olduğundan *hipergeometrik seri* adını alır. (2.2) ifadesinden görülmektedir ki γ değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır. (2.2) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ise ıraksaktır. $x = 1$ için eğer $Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ ise seri mutlak yakınsak olur. Ayrıca $x = -1$ iken $-1 < Re(\gamma - \alpha - \beta) \leq 0$ ise seri yakınsaktır [18].

Pochhammer sembolünün (2.1) gösterimi dikkate alınarak, (2.2) hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!} \tag{2.3}$$

şeklinde yazılabilir. (2.3) eşitliğinin genelleştirilmiş ifadesi

$$\begin{aligned} {}_pF_q\left[\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p\ ; \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_q\ ; \end{matrix}\ x\right] &= {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q; x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\ldots(\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n\ldots(\gamma_q)_n}\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

şeklindedir [18]. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterimi yerine genellikle sadece F kullanılır. Yani,

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

olup, bu fonksiyon *Gauss hipergeometrik fonksiyonu* olarak tanımlanır. (2.3) eşitliğinden hipergeometrik fonksiyonun α ve β değişkenlerine göre simetrik olduğu görülür yani

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=F(\beta,\alpha;\gamma;x)$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 2.1 m, keyfi pozitif tamsayı olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}A(k,n-mk)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\left[\frac{n}{m}\right]$; $\frac{n}{m}$ değerine eşit veya $\frac{n}{m}$ değerinden küçük en büyük tamsayıdır [4].

İspat.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)t^{n+mk}$$

çift katlı toplamı göz önüne alınsın. Burada $k=j$, $n+mk=N$ alınırsa $n=N-mj$ olur. $k\geq 0$ olduğundan $j\geq 0$ olacaktır. Dolayısıyla

$$N-mj\geq 0\Rightarrow N\geq mj\geq 0\Rightarrow 0\leq j\leq \frac{N}{m}$$

elde edilir. $0\leq j\leq \frac{N}{m}$ ve j tamsayı olduğundan yeni toplamdaki j indisi 0 değerinden $\left[\frac{N}{m}\right]$ değerine alınabilir. Dolayısıyla buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)t^{n+mk}=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{m}\right]}A(j,N-mj)t^{N}$$

elde edilir. Bu eşitlikte eğer $t=1$, j ve N sırasıyla k ve n alınırsa istenilen sonuca ulaşılır. ■

Yukarıdaki lemmadan aşağıdaki iki sonuca ulaşılabilir:

Sonuç 2.2 $A(k,n)$, iki değişkenli herhangi bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k)$$

eşitliği geçerlidir [4].

Sonuç 2.3 $A(k,n)$, iki değişkenli herhangi bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}A(k,n-2k)$$

eşitliği geçerlidir [4].

Lemma 2.4 m, keyfi pozitif tamsayı olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k, n+mk) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]} B(k,n)$$

eşitliği geçerlidir [4].

İspat.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k, n+mk)t^{n+mk}$$

çift toplamı göz önüne alınsın. Burada $k = j$, $n = N - mk$ alınırsa $n = N - mj$ ve $0 \le k < \infty$ ve $0 \le n < \infty$ yazılabilir. Buradan yeni indisler yer değişirse $0 \le j < \infty$ ve $0 \le N - mj < \infty$ olup $0 \le mj \le N$ ve $0 \le j \le \frac{N}{m}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k, n+mk)t^{n+mk} = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{m}\right]} B(j, N-mj+mj)t^{N} = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{m}\right]} B(j,N)t^{N}$$

bulunur. Bu eşitlikte eğer $t = 1$, j ve N sırasıyla k ve n alınırsa .

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k, n+mk) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]} B(k,n)$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar. ■

Lemma 2.5 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m)\frac{(x+y)^m}{m!} \tag{2.4}$$

eşitliği geçerlidir [11].

İspat. (2.4) eşitliğinin sol tarafı

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(m+n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

şeklinde yazılır ve 2.2. Sonuçtan

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m)\sum_{n=0}^{m} \frac{x^{m-n}}{(m-n)!}\frac{y^n}{n!}$$

bulunur. Burada $(x+y)^m = \sum\limits_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^{m-n} y^n$ olduğundan

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m) \frac{(x+y)^m}{m!}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ∎

3 SERİ ÖZDEŞLİKLERİ

Bu bölümde bazı çift katlı serilere, kuadratik dönüşümler, kübik dönüşümler ve toplam dönüşümleri uygulanıp çeşitli (bilinen veya yeni) tek ve çift katlı seriler elde edilecektir. Ayrıca teoremlerin özel durumları verilip, bu özel durumlarda çift katlı serilerden tek katlı serilerin nasıl elde edileceği gösterilecektir.

Teorem 3.1 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $\lambda+\mu \notin \mathbb{Z}_0^-$ için aşağıdaki çift katlı serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n)(\lambda)_{2m+n}(\lambda)_{m+2n}(\mu)_m(\mu)_n \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$
$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+2n)\frac{(\lambda)_{m+2n}(\lambda)_{2m+3n}(\mu)_{m+n}(\lambda+\mu)_{2m+4n}}{(\lambda+\mu)_{2m+3n}}\frac{(x+y)^m}{m!}\frac{(-xy)^n}{n!} \tag{3.1}$$

eşitliği geçerlidir [11].

İspat. (3.1) eşitliğinin sol tarafı $\Theta(x,y)$ ile gösterilir ve 2.2. Sonuçtan

$$\Theta(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n)(\lambda)_{2m+n}(\lambda)_{m+2n}(\mu)_m(\mu)_n \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \Omega(n)(\lambda)_{m+n}(\lambda)_{2n-m}(\mu)_m(\mu)_{n-m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n-m}}{(n-m)!}$$

elde edilir. Burada

$$(n-m)! = \frac{n!}{(-1)^m(-n)_m} \quad , \quad (\lambda)_{2n-m} = \frac{(\lambda)_{2n}}{(-1)^m(1-\lambda-2n)_m} \ ,$$
$$(\mu)_{n-m} = \frac{(\mu)_n}{(-1)^m(1-\mu-n)_m} \ ,$$
$$(\lambda)_{m+n} = (\lambda+n)_m(\lambda)_n$$

olup bu özellikler son eşitlikte yerlerine yazılırlarsa

$$\Theta(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)\frac{(\lambda+n)_m(\lambda)_n(\lambda)_{2n}(\mu)_m(\mu)_n(-1)^m(-n)_m}{(-1)^m(1-\lambda-2n)_m(-1)^m(1-\mu-n)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n-m}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)(\lambda)_n(\lambda)_{2n}(\mu)_n\frac{y^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-n)_m(\lambda+n)_m(\mu)_m}{(1-\lambda-2n)_m(1-\mu-n)_m}\frac{\left(\frac{-x}{y}\right)^m}{m!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)(\lambda)_n(\lambda)_{2n}(\mu)_n\frac{y^n}{n!}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix} -n,\lambda+n,\mu\ ; \\ 1-\lambda-2n, 1-\mu-n\ ; \end{matrix}\ -\frac{x}{y}\right] \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinde ${}_3F_2$ fonksiyonuna

$$
{}_3F_2\left[\begin{array}{r} \alpha,\beta,\gamma\ ; \\ \alpha-\beta+1,\alpha-\gamma+1\ ; \end{array} z\right]
= (1-z)^{-\alpha}\ {}_3F_2\left[\begin{array}{r} \frac{1}{2}\alpha,\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2},\alpha-\beta-\gamma+1\ ; \\ \alpha-\beta+1,\alpha-\gamma+1\ ; \end{array} -\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \tag{3.3}
$$

şeklinde tanımlanan Whipple Kuadratik Dönüşümü [9] uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\Theta(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)(\lambda)_n(\lambda)_{2n}(\mu)_n\frac{(x+y)^n}{n!} \\
&\quad\cdot\ {}_3F_2\left[\begin{array}{r} -\frac{1}{2}n,-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},1-\lambda-\mu-2n\ ; \\ 1-\lambda-2n,1-\mu-n\ ; \end{array} \frac{4xy}{(x+y)^2}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)(\lambda)_n(\lambda)_{2n}(\mu)_n\frac{(x+y)^n}{n!} \\
&\quad\cdot\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)_m\left(-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)_m(1-\lambda-\mu-2n)_m}{(1-\lambda-2n)_m(1-\mu-n)_m}\frac{\left(\frac{4xy}{(x+y)^2}\right)^m}{m!}
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
(1-\lambda-2n)_m=\frac{(-1)^m(\lambda)_{2n}}{(\lambda)_{2n-m}},\ (1-\mu-n)_m=\frac{(-1)^m(\mu)_n}{(\mu)_{n-m}},\ (n-2m)!=\frac{n!}{(-1)^{2m}(-n)_{2m}},
$$

$$
(-n)_{2m}=2^{2m}\left(-\frac{n}{2}\right)_m\left(\frac{-n+1}{2}\right)_m,\ (1-\lambda-\mu-2n)_m=\frac{(-1)^m(\lambda+\mu)_{2n}}{(\lambda+\mu)_{2n-m}}
$$

oldukları göz önüne alınıp bu değerler yukarıdaki son eşitlikte yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$
\Theta(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\Omega(n)\frac{(\lambda)_n(\lambda)_{2n-m}(\mu)_{n-m}(\lambda+\mu)_{2n}}{(\lambda+\mu)_{2n-m}}\frac{(-xy)^m}{m!}\frac{(x+y)^{n-2m}}{(n-2m)!} \tag{3.4}
$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinde 2.4. Lemmadan

$$
\Theta(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(2m+n)\frac{(\lambda)_{2m+n}(\lambda)_{3m+2n}(\mu)_{m+n}(\lambda+\mu)_{4m+2n}}{(\lambda+\mu)_{3m+2n}}\frac{(-xy)^m}{m!}\frac{(x+y)^n}{n!}
$$

bulunur. Son eşitlikte $n\longmapsto m$ ve $m\longmapsto n$ alınarak ispat tamamlanır. ■

3.1. Teorem, $y=-x$ için aşağıdaki seri özdeşliğine indirgenir:

Sonuç 3.2 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $\lambda+\mu\notin\mathbb{Z}_0^-$ için aşağıdaki serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$
\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n\Omega(m+n)(\lambda)_{2m+n}(\lambda)_{m+2n}(\mu)_m(\mu)_n\frac{x^{m+n}}{m!n!}
=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(2n)\frac{(\lambda)_{2n}(\lambda)_{3n}(\mu)_n(\lambda+\mu)_{4n}}{(\lambda+\mu)_{3n}}\frac{x^{2n}}{n!} \tag{3.5}
$$

eşitliği geçerlidir [11].

İspat. $y=-x$ için (3.1) eşitliğinden, (3.5) eşitliğinin sol tarafını görmek kolaydır. (3.5) eşitliğinin sağ tarafı için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+2n)\frac{(\lambda)_{m+2n}(\lambda)_{2m+3n}(\mu)_{m+n}(\lambda+\mu)_{2m+4n}}{(\lambda+\mu)_{2m+3n}}\frac{(x+y)^m}{m}\frac{(-xy)^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\Omega(2n)\frac{(\lambda)_{2n}(\lambda)_{3n}(\mu)_{n}(\lambda+\mu)_{4n}}{(\lambda+\mu)_{3n}}\frac{(-xy)^n}{n!}\right.$$
$$\left.+\Omega(1+2n)\frac{(\lambda)_{1+2n}(\lambda)_{2+3n}(\mu)_{1+n}(\lambda+\mu)_{2+4n}}{(\lambda+\mu)_{2+3n}}(x+y)\frac{(-xy)^n}{n!}+\dots\right]$$

olup $y=-x$ için ilk terim hariç diğerleri sıfır olacağından

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n\Omega(m+n)(\lambda)_{2m+n}(\lambda)_{m+2n}(\mu)_m(\mu)_n\frac{x^{m+n}}{m!n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(2n)\frac{(\lambda)_{2n}(\lambda)_{3n}(\mu)_{n}(\lambda+\mu)_{4n}}{(\lambda+\mu)_{3n}}\frac{x^{2n}}{n!}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.3 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $\nu+\frac{1}{2}, 2\nu\notin\mathbb{Z}_0^-$ için aşağıdaki çift katlı serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\Omega(2m+n)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_m}\frac{x^{2m}}{m!}\frac{y^n}{n!}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{(\nu)_m}{(2\nu)_m}\frac{(-4x)^m}{m!}\frac{(2x+y)^n}{n!} \tag{3.6}$$

ve $\nu\notin\mathbb{Z}_0^-$ için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\Omega(2m+n)}{(\nu)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{(2\nu+m+n-1)_m}{(\nu)_m}\frac{\{\frac{1}{2}(y-\sqrt{y^2-4x})\}^m}{m!}\frac{(\sqrt{y^2-4x})^n}{n!} \tag{3.7}$$

eşitlikleri geçerlidir [11].

İspat. (3.6) eşitliğinin sol tarafı $\phi(x,y)$ ile gösterilir ve 2.3. Sonuçtan

$$\phi(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\Omega(2m+n)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_m}\frac{x^{2m}}{m!}\frac{y^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\Omega(n)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_m}\frac{x^{2m}}{m!}\frac{y^{n-2m}}{(n-2m)!}$$

olup

$$(n-2m)! = \frac{n!}{(-1)^{2m}(-n)_{2m}} \quad , \quad (-n)_{2m} = 2^{2m}\left(-\frac{n}{2}\right)_m \left(\frac{-n+1}{2}\right)_m$$

özelliklerinden

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\Omega(n)(-1)^{2m}2^{2m}\left(-\frac{n}{2}\right)_m\left(\frac{-n+1}{2}\right)_m}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_m} \frac{x^{2m}}{m!}\frac{y^{n-2m}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{y^n}{n!}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)_m\left(\frac{-n+1}{2}\right)_m}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_m}\frac{\left(\frac{2x}{y}\right)^{2m}}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{y^n}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} -\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\ ; \\ \nu+\frac{1}{2}\ ; \end{matrix}\ \left(\frac{2x}{y}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinde ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonuna

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\alpha+\frac{1}{2}\ ; \\ \gamma\ ;\end{matrix}\ z^2\right] = (1+z)^{-2\alpha}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}2\alpha,\gamma-\frac{1}{2}\ ; \\ 2\gamma-1\ ;\end{matrix}\ \frac{2z}{1+z}\right]$$

şeklinde tanımlanan kuadratik dönüşüm [9] uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{(2x+y)^n}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\nu\ ; \\ 2\nu\ ;\end{matrix}\ \frac{4x}{2x+y}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{(2x+y)^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-n)_m(\nu)_m}{(2\nu)_m}\frac{\left(\frac{4x}{2x+y}\right)^m}{m!}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$(-n)_m = \frac{n!}{(-1)^m(n-m)!}$$

olduğu göz önüne alınıp bu değer yukarıdaki son eşitlikte yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)\frac{(\nu)_m}{(2\nu)_m}\frac{(-4x)^m}{m!}\frac{(2x+y)^{n-m}}{(n-m)!} \tag{3.9}$$

bulunur. (3.9) eşitliğinde 2.4. Lemmadan

$$\phi(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{(\nu)_m}{(2\nu)_m}\frac{(-4x)^m}{m!}\frac{(2x+y)^n}{n!}$$

elde edilir ki bu ilk iddiayı ispatlar. İkinci iddia için (3.7) eşitliğinin sol tarafı $\omega(x,y)$ ile gösterilir ve 2.3. Sonuçtan

$$\begin{aligned}
\omega(x,y) &= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\Omega(2m+n)}{(\nu)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\Omega(n)}{(\nu)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n-2m}}{(n-2m)!}
\end{aligned}$$

olup

$$(n-2m)! = \frac{n!}{(-1)^{2m}(-n)_{2m}}\ ,$$

$$(-n)_{2m} = 2^{2m}\left(-\frac{n}{2}\right)_m\left(\frac{-n+1}{2}\right)_m$$

özelliklerinden

$$\begin{aligned}
\omega(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\Omega(n)(-1)^{2m}2^{2m}\left(-\frac{n}{2}\right)_m\left(\frac{-n+1}{2}\right)_m}{(\nu)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n-2m}}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{y^n}{n!}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(-\frac{n}{2}\right)_m\left(\frac{-n+1}{2}\right)_m}{(\nu)_m}\frac{\left(\frac{4x}{y^2}\right)^m}{m!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{y^n}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{array}{r}-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\ ;\ \\ \nu\ ;\ \end{array}\frac{4x}{y^2}\right]
\end{aligned}\tag{3.10}$$

bulunur. (3.10) eşitliğinde ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonuna

$${}_2F_1\left[\begin{array}{r}\alpha, \alpha+\frac{1}{2}\ ;\\ \gamma\ ;\end{array}\ z\right] = (1-z)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left[\begin{array}{r}2\alpha, 2\gamma-2\alpha-1\ ;\\ \gamma\ ;\end{array}\ \frac{\sqrt{1-z}-1}{2\sqrt{1-z}}\right]$$

şeklinde tanımlanan kuadratik dönüşüm [9] uygulanırsa

$$\omega(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^n}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{array}{r}-n, 2\nu+n-1\ ;\\ \nu\ ;\end{array}\ \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{y^2-4x}-y\right)}{\sqrt{y^2-4x}}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-n)_m(2\nu+n-1)_m}{(\nu)_m m!}\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{y^2-4x}-y\right)\right)^m}{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^m}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-n)_m(2\nu+n-1)_m}{(\nu)_m m!}\frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2-4x}\right)\right)^m}{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^m}$$

elde edilir. Buradan

$$(-n)_m = \frac{n!}{(-1)^m(n-m)!}$$

olduğu göz önüne alınıp bu değer yukarıdaki son eşitlikte yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\omega(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)\frac{(2\nu+n-1)_m}{(\nu)_m m!(n-m)!}\frac{\left(\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2-4x}\right)\right)^m}{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^{m-n}}\tag{3.11}$$

bulunur. (3.11) eşitliğinde, 2.4. Lemmadan

$$\omega(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{(2\nu+m+n-1)_m}{(\nu)_m}\frac{\left(\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2-4x}\right)\right)^m}{m!}\frac{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^n}{n!}$$

sonucuna ulaşılır ve böylece ikinci iddia da ispatlanmış olur. ■

(3.6) eşitliğinde $x = -\frac{1}{2}y$ ve (3.7) eşitliğinde $y = 2\sqrt{x}$ alınarak, 3.3. Teorem aşağıdaki özdeşliğe indirgenir :

Sonuç 3.4 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $\nu + \frac{1}{2}, 2\nu \notin \mathbb{Z}_0^-$ için aşağıdaki serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Omega(2m+n)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_m} \frac{\left(\frac{1}{2}y\right)^{2m}}{m!} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{(\nu)_n}{(2\nu)_n} \frac{(2y)^n}{n!} \tag{3.12}$$

ve $\nu, 2\nu - 1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Omega(2m+n)}{(\nu)_m} \frac{x^m}{m!} \frac{(2\sqrt{x})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n}{(2\nu-1)_n} \frac{(4\sqrt{x})^n}{n!} \tag{3.13}$$

eşitlikleri geçerlidir [11].

İspat. $x = -\frac{1}{2}y$ için (3.6) eşitliğinden, (3.12) eşitliğinin sol tarafını görmek kolaydır. (3.12) eşitliğinin sağ tarafı için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{(\nu)_m}{(2\nu)_m} \frac{(-4x)^m}{m!} \frac{(2x+y)^n}{n!}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\Omega(m) \frac{(\nu)_m}{(2\nu)_m} \frac{(-4x)^m}{m!} + \Omega(m+1) \frac{(\nu)_m}{(2\nu)_m} \frac{(-4x)^m}{m!} (2x+y) + \dots \right]$$

olup $x = -\frac{1}{2}y$ için ilk terim hariç diğerleri sıfır olacağından

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{(\nu)_m}{(2\nu)_m} \frac{(-4x)^m}{m!} \frac{(2x+y)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m) \frac{(\nu)_m}{(2\nu)_m} \frac{(2y)^m}{m!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m) \frac{(\nu)_m}{(2\nu)_m} \frac{(2y)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{(\nu)_n}{(2\nu)_n} \frac{(2y)^n}{n!}$$

biçiminde yazılabileceğinden

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Omega(2m+n)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_m} \frac{\left(\frac{1}{2}y\right)^{2m}}{m!} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{(\nu)_n}{(2\nu)_n} \frac{(2y)^n}{n!}$$

olup ilk iddia ispatlanmış olur. İkinci iddia da $y = 2\sqrt{x}$ için (3.7) eşitliğinden, (3.13) eşitliğinin sol tarafını görmek kolaydır.

(3.13) eşitliğinin sağ tarafı için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{(2\nu+m+n-1)_m}{(\nu)_m} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2-4x}\right)\right)^m}{m!} \frac{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^n}{n!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\Omega(m) \frac{(2\nu+m-1)_m}{(\nu)_m} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2-4x}\right)\right)^m}{m!} \right.$$

$$\left. + \Omega(m+1) \frac{(2\nu+m)_m}{(\nu)_m} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2-4x}\right)\right)^m}{m!} \left(\sqrt{y^2-4x}\right) + \ldots \right]$$

olup $y = 2\sqrt{x}$ için ilk terim hariç diğerleri sıfır olacağından

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{(2\nu+m+n-1)_m}{(\nu)_m} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2-4x}\right)\right)^m}{m!} \frac{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^n}{n!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m) \frac{(2\nu+m-1)_m}{(\nu)_m} \frac{(\sqrt{x})^m}{m!}$$

yazılabilir. Buradan

$$(2\nu+m-1)_m = \frac{(2\nu-1)_{2m}}{(2\nu-1)_m} \quad , \quad (2\nu-1)_{2m} = \left(\frac{2\nu-1}{2}\right)_m (\nu)_m 2^{2m}$$

eşitlikleri göz önüne alınır ve yerlerine yazılırlarsa

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{(2\nu+m+n-1)_m}{(\nu)_m} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{y^2-4x}\right)\right)^m}{m!} \frac{\left(\sqrt{y^2-4x}\right)^n}{n!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m) \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)_m 2^{2m}}{(2\nu-1)_m} \frac{(\sqrt{x})^m}{m!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m) \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)_m 2^{2m}}{(2\nu-1)_m} \frac{(\sqrt{x})^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n 2^{2n}}{(2\nu-1)_n} \frac{(\sqrt{x})^n}{n!}$$

biçiminde yazılabileceğinden

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Omega(2m+n)}{(\nu)_m} \frac{x^m}{m!} \frac{(2\sqrt{x})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n}{(2\nu-1)_n} \frac{(4\sqrt{x})^n}{n!}$$

olup ikinci iddia da ispatlanmış olur. ∎

Uyarı 3.5 (3.12) eşitliğinde $y = 2\sqrt{x}$ ve $\nu = \nu - \frac{1}{2}$ alınırsa, (3.13) eşitliği elde edilir [9].

$n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \notin \mathbb{Z}_0^-$ için

$$ {}_3F_2\left[\begin{array}{r} -n,\alpha,\beta; \\ \gamma,\alpha+\beta-\gamma-n+1; \end{array} 1\right] = \frac{(\gamma-\alpha)_n(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n(\gamma-\alpha-\beta)_n} \tag{3.14} $$

biçiminde verilen Pfaff-Saalschütz Dönüşümünün [9], genelleştirilmiş versiyonu Srivastava tarafından [20] $n, N \in \mathbb{N}_0$ için

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{array}{r} -n,\alpha,\beta; \\ \gamma+N,\alpha+\beta-\gamma-n+1; \end{array} 1\right] &= \frac{(\gamma-\alpha+N)_{n-N}(\gamma-\beta+N)_{n-N}}{(\gamma+N)_{n-N}(\gamma-\alpha-\beta)_n} \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k(\gamma-\alpha-\beta)_{N-k}}{(\gamma+n)_k} \end{aligned} \tag{3.15} $$

şeklinde verilmiştir. Bu eşitlik, $N = 0$ için (3.14) eşitliğine indirgenir.

Teorem 3.6 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $N \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$ \begin{aligned} &\sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^m \Omega(m+n) \frac{(\lambda)_{2m+n}(\lambda-\mu-\nu+1)_m}{(\lambda-\mu+N+1)_m(\lambda-\nu+1)_m} \frac{x^{m+n}}{m!n!} \\ &\qquad = \frac{(\lambda-\mu+1)_N}{(1-\mu)_N(\nu)_N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(\lambda)_k(\lambda-\mu-\nu+1)_k(\nu-\lambda)_{N-k}}{(\lambda-\mu+1)_k} \\ &\qquad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{(\lambda+k)_n(\mu-N)_n(\nu)_n}{(\lambda-\mu+k+1)_n(\lambda-\nu-N+k+1)_n} \frac{x^n}{n!} \end{aligned} \tag{3.16} $$

eşitliği geçerlidir [11].

İspat. (3.16) eşitliğinin sol tarafı $\psi(x)$ ile gösterilir ve 2.2. Sonuçtan

$$ \begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^m \Omega(m+n) \frac{(\lambda)_{2m+n}(\lambda-\mu-\nu+1)_m}{(\lambda-\mu+N+1)_m(\lambda-\nu+1)_m} \frac{x^{m+n}}{m!n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \Omega(n) \frac{(\lambda)_{m+n}(\lambda-\mu-\nu+1)_m}{(\lambda-\mu+N+1)_m(\lambda-\nu+1)_m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \end{aligned} $$

olup

$$ (n-m)! = \frac{n!}{(-1)^m(-n)_m} \quad , \quad (\lambda)_{m+n} = (\lambda+n)_m(\lambda)_n $$

özelliklerinden

$$ \begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (-1)^m(-1)^m \Omega(n) \frac{(-n)_m(\lambda+n)_m(\lambda)_n(\lambda-\mu-\nu+1)_m}{(\lambda-\mu+N+1)_m(\lambda-\nu+1)_m} \frac{x^n}{m!n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n)(\lambda)_n \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-n)_m(\lambda+n)_m(\lambda-\mu-\nu+1)_m}{(\lambda-\mu+N+1)_m(\lambda-\nu+1)_m m!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n)(\lambda)_n \frac{x^n}{n!}\, {}_3F_2\left[\begin{array}{r} -n,\lambda+n,\lambda-\mu-\nu+1\ ; \\ \lambda-\mu+N+1,\lambda-\nu+1\ ; \end{array} 1\right] \end{aligned} \tag{3.17} $$

elde edilir. (3.17) eşitliğinde ${}_3F_2$ fonksiyonuna (3.15) dönüşümü uygulanırsa

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n)(\lambda)_n \frac{x^n}{n!} \frac{(1-\mu-n+N)_{n-N}(\nu+N)_{n-N}}{(\lambda-\mu+N+1)_{n-N}(\nu-\lambda-n)_n}$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(\lambda+n)_k(\lambda-\mu-\nu+1)_k(\nu-\lambda-n)_{N-k}}{(\lambda-\mu+n+1)_k}$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$(1+\lambda-\mu+N)_{n-N} = \frac{(1+\lambda-\mu)_n}{(1+\lambda-\mu)_N} \quad , \quad (\nu+N)_{n-N} = \frac{(\nu)_n}{(\nu)_N},$$
$$(1+\lambda-\mu+n)_k = \frac{(\lambda-\mu+1)_k(\lambda-\mu+k+1)_n}{(\lambda-\mu+1)_n},$$
$$(\nu-\lambda-n)_n = (-1)^n(1-\nu+\lambda)_n,$$
$$(\nu-\lambda-n)_{N-k} = \frac{(1-\nu+\lambda)_n(\nu-\lambda)_{N-k}}{(1-\nu+\lambda-N+k)_n},$$
$$(1-\mu-n+N)_{n-N} = \frac{(-1)^n(\mu-N)_n}{(1-\mu)_N} \quad , \quad (\lambda+n)_k = \frac{(\lambda)_k(\lambda+k)_n}{(\lambda)_n}$$

olup bu özellikler son eşitlikte yerlerine yazılırlarsa

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n)(\lambda)_n \frac{x^n}{n!} \frac{(-1)^n(\mu-N)_n(\nu)_n(1+\lambda-\mu)_N}{(1-\mu)_N(\nu)_N(1+\lambda-\mu)_n(-1)^n(1-\nu+\lambda)_n}$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(\lambda)_k(\lambda+k)_n(\lambda-\mu-\nu+1)_k(\lambda-\mu+1)_n(1-\nu+\lambda)_n(\nu-\lambda)_{N-k}}{(\lambda)_n(\lambda-\mu+1)_k(\lambda-\mu+k+1)_n(1-\nu+\lambda-N+k)_n}$$

elde edilir. Buradan gerekli sadeleştirmeler ve basit düzenlemelerle

$$\psi(x) = \frac{(\lambda-\mu+1)_N}{(1-\mu)_N(\nu)_N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(\lambda)_k(\lambda-\mu-\nu+1)_k(\nu-\lambda)_{N-k}}{(\lambda-\mu+1)_k}$$
$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{(\lambda+k)_n(\mu-N)_n(\nu)_n}{(\lambda-\mu+k+1)_n(\lambda-\nu-N+k+1)_n} \frac{x^n}{n!}$$

bulunup ispat tamamlanır. ■

3.6. Teorem, $N=0$ özel durumunda aşağıdaki sonucu verir:

Sonuç 3.7 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Aşağıdaki serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^m \Omega(m+n) \frac{(\lambda)_{2m+n}(\lambda-\mu-\nu+1)_m}{(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m} \frac{x^{m+n}}{m!n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{(\lambda)_n(\mu)_n(\nu)_n}{(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{3.18}$$

eşitliği geçerlidir [11].

İspat. $N=0$ için (3.16) eşitliğinden, (3.18) eşitliğinin sol tarafını görmek kolaydır. (3.18) eşitliğinin sağ tarafı için, $N=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda-\mu+1)_N}{(1-\mu)_N(\nu)_N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}&\frac{(\lambda)_k(\lambda-\mu-\nu+1)_k(\nu-\lambda)_{N-k}}{(\lambda-\mu+1)_k}\\&\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{(\lambda+k)_n(\mu-N)_n(\nu)_n}{(\lambda-\mu+k+1)_n(\lambda-\nu-N+k+1)_n}\frac{x^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{(\lambda)_n(\mu)_n(\nu)_n}{(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Uyarı 3.8 3.7. Sonuçta $\Omega(n)=1$ alınırsa, (3.18) eşitliğinin sağ tarafının, (3.3) eşitliğinin sol tarafına eşit olduğu açıktır [11].

${}_7F_6$ formundaki hipergeometrik seriler için Dougall Toplam Dönüşümü [9] $n\in N_0$ için

$$\begin{aligned}&{}_7F_6\left[\begin{array}{r}\alpha,\frac{1}{2}\alpha+1,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,-n\ ;\\ \frac{1}{2}\alpha,\alpha-\beta+1,\alpha-\gamma+1,\alpha-\delta+1,\alpha-\varepsilon+1,\alpha+n+1\ ;\end{array}1\right]\\&=\frac{(\alpha+1)_n(\alpha-\beta-\gamma+1)_n(\alpha-\beta-\delta+1)_n(\alpha-\gamma-\delta+1)_n}{(\alpha-\beta+1)_n(\alpha-\gamma+1)_n(\alpha-\delta+1)_n(\alpha-\beta-\gamma-\delta+1)_n}\end{aligned}\tag{3.19}$$

şeklinde olup (3.16) ve (3.18) eşitliklerine benzer olarak aşağıdaki seri özdeşliği verilebilir:

Teorem 3.9 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. O halde aşağıdaki serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=0}^{\infty}&\Omega(m+n)\frac{(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{2m+n}}{(\lambda+1)_{2m+n}(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}}\\&\cdot\frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m(\sigma)_m(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n}{(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m(\lambda-\sigma+1)_m}\frac{x^{m+n}}{m!n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{(\lambda-\mu-\nu+1)_n(\lambda-\mu-\sigma+1)_n(\lambda-\nu-\sigma+1)_n}{(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n(\lambda-\sigma+1)_n(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}\tag{3.20}$$

eşitliği geçerlidir [11].

İspat. (3.20) eşitliğinin sol tarafı $\varphi(x)$ ile gösterilir ve 2.2. Sonuçtan

$$\varphi(x)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{2m+n}}{(\lambda+1)_{2m+n}(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}}$$
$$\cdot\frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m(\sigma)_m}{(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m(\lambda-\sigma+1)_m}$$
$$\cdot\frac{(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n}{(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}}\frac{x^{m+n}}{m!n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)\frac{(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}}{(\lambda+1)_{m+n}(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n}$$
$$\cdot\frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m(\sigma)_m(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{n-m}}{(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m(\lambda-\sigma+1)_m}\frac{x^n}{m!(n-m)!}$$

elde edilir. Burada

$$(n-m)!=\frac{n!}{(-1)^m(-n)_m}\quad,\quad(\lambda+1)_{m+n}=(\lambda+1)_n(\lambda+n+1)_m\ ,$$
$$(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}=(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+n+1)_m\ ,$$
$$(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{n-m}=\frac{(-1)^m(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n}{(\mu+\nu+\sigma-\lambda-n)_m}$$

olup bu özellikler son eşitlikte yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)\frac{(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+n+1)_m}{(\lambda+1)_n(\lambda+n+1)_m(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n}$$
$$\cdot\frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m(\sigma)_m(-1)^m(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n}{(\mu+\nu+\sigma-\lambda-n)_m(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m}$$
$$\cdot\frac{(-1)^m(-n)_m x^n}{(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n(\lambda-\sigma+1)_m m!n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)$$
$$\cdot\frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m(\sigma)_m(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+n+1)_m}{(\lambda+1)_n(\lambda+n+1)_m(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m(\lambda-\sigma+1)_m}$$
$$\cdot\frac{(-n)_m x^n}{(\mu+\nu+\sigma-\lambda-n)_m n!m!}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler ile

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{x^n}{n!(\lambda+1)_n}$$
$$\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m(\sigma)_m(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+n+1)_m}{(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m(\lambda-\sigma+1)_m(\lambda+n+1)_m}$$
$$\cdot\frac{(-n)_m}{(\mu+\nu+\sigma-\lambda-n)_m m!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{x^n}{(\lambda+1)_n n!}$$

$$\cdot \ {}_7F_6 \left[\begin{matrix} \lambda, \frac{1}{2}\lambda+1, \mu, \nu, \sigma, 2\lambda-\mu-\nu-\sigma+n+1, -n \ ; \\ \frac{1}{2}\lambda, \lambda-\mu+1, \lambda-\nu+1, \lambda-\sigma+1, \mu+\nu+\sigma-\lambda-n, \lambda+n+1 \ ; \end{matrix} \ 1 \right] \tag{3.21}$$

bulunur. (3.21) eşitliğinde ${}_7F_6$ fonksiyonuna (3.19) Dougall Toplam Dönüşümü uygulanırsa

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{x^n}{(\lambda+1)_n n!} \frac{(\lambda+1)_n(\lambda-\mu-\nu+1)_n(\lambda-\mu-\sigma+1)_n}{(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n(\lambda-\sigma+1)_n}$$
$$\cdot \frac{(\lambda-\nu-\sigma+1)_n}{(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{(\lambda-\mu-\nu+1)_n(\lambda-\mu-\sigma+1)_n(\lambda-\nu-\sigma+1)_n}{(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n(\lambda-\sigma+1)_n(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n} \frac{x^n}{n!}$$

olup ispat tamamlanır. ■

(3.19) Dougall Toplamı, $\beta = 1+\alpha+n$ ve $n \longrightarrow \infty$ için

$${}_5F_4 \left[\begin{matrix} \alpha, \frac{1}{2}\alpha+1, \gamma, \delta, \varepsilon \ ; \\ \frac{1}{2}\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\delta, 1+\alpha-\varepsilon \ ; \end{matrix} \ 1 \right]$$
$$= \frac{\Gamma(1+\alpha-\gamma)\Gamma(1+\alpha-\delta)\Gamma(1+\alpha-\varepsilon)\Gamma(1+\alpha-\gamma-\delta-\varepsilon)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha-\delta-\varepsilon)\Gamma(1+\alpha-\gamma-\varepsilon)\Gamma(1+\alpha-\gamma-\delta)} \tag{3.22}$$

biçimindeki ${}_5F_4$ hipergeometrik serisine indirgenir [9]. 3.9. Teorem ise, $|\sigma| \longrightarrow \infty$ için aşağıda verilen seri özdeşliğine indirgenir:

Sonuç 3.10 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Aşağıdaki serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^m \Omega(m+n) \frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m}{(\lambda+1)_{2m+n}(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m} \frac{x^{m+n}}{m!n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{(\lambda-\mu-\nu+1)_n}{(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{3.23}$$

eşitliği geçerlidir [11].

İspat. (3.23) eşitliğinin sol tarafı $\psi(x)$ ile gösterilir ve 2.2. Sonuçtan

$$\psi(x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^m \Omega(m+n) \frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m}{(\lambda+1)_{2m+n}(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m} \frac{x^{m+n}}{m!n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \Omega(n) \frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m}{(\lambda+1)_{m+n}(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m} \frac{x^n}{m!(n-m)!}$$

elde edilir. Burada

$$(n-m)! = \frac{n!}{(-1)^m(-n)_m} \quad , \quad (\lambda+1)_{m+n} = (\lambda+1)_n(\lambda+n+1)_m$$

olup bu özellikler son eşitlikte yerlerine yazılırlarsa

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m(-1)^m\Omega(n)\frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m(-n)_m}{(\lambda+1)_n(\lambda+n+1)_m(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m}$$
$$\cdot \frac{x^n}{(\lambda-\nu+1)_m m!n!}$$

bulunur. Buradan basit düzenlemelerle

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)\frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m(-n)_m}{(\lambda+1)_n(\lambda+n+1)_m(\frac{1}{2}\lambda)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m}\frac{x^n}{m!n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega(n)x^n}{(\lambda+1)_n n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(\lambda)_m(\frac{1}{2}\lambda+1)_m(\mu)_m(\nu)_m(-n)_m}{(\frac{1}{2}\lambda)_m(1+\lambda-\mu)_m(1+\lambda-\nu)_m(1+\lambda+n)_m m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega(n)x^n}{(\lambda+1)_n n!}\, {}_5F_4\left[\begin{matrix} \lambda, \frac{1}{2}\lambda+1, \mu, \nu, -n; \\ \frac{1}{2}\lambda, 1+\lambda-\mu, 1+\lambda-\nu, 1+\lambda+n; \end{matrix}\; 1\right] \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.24) eşitliğinde ${}_5F_4$ fonksiyonuna (3.22) dönüşümü uygulanır ve

$$(\lambda+1)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+1)}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(1+\lambda-\mu)\Gamma(1+\lambda-\nu)\Gamma(1+\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+n+1)\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1+\lambda-\nu+n)\Gamma(1+\lambda-\mu+n)}$$
$$\cdot \frac{\Gamma(1+\lambda-\mu-\nu+n)x^n}{\Gamma(1+\lambda-\mu-\nu)n!}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan gerekli sadeleştirmeler yapılır ve

$$\frac{\Gamma(1+\lambda-\mu-\nu+n)}{\Gamma(1+\lambda-\mu-\nu)} = (\lambda-\mu-\nu+1)_n \quad , \quad \frac{\Gamma(1+\lambda-\mu+n)}{\Gamma(1+\lambda-\mu)} = (\lambda-\mu+1)_n \; ,$$

$$\frac{\Gamma(1+\lambda-\nu+n)}{\Gamma(1+\lambda-\nu)} = (\lambda-\nu+1)_n$$

oldukları göz önüne alınırsa

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{(\lambda-\mu-\nu+1)_n}{(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n}\frac{x^n}{n!}$$

bulunur. ■

Aşağıdaki biçimde verilen iki kübik dönüşüm

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, 2b-a-1, a-2b+2\ ; & \dfrac{x}{4} \\ b, a-b+\frac{3}{2}\ ; & \end{matrix}\right] = (1-x)^{-a}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix} \Delta(3,a)\ ; & -\dfrac{27x}{4(1-x)^3} \\ b, a-b+\frac{3}{2}\ ; & \end{matrix}\right], \tag{3.25} $$

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b-\frac{1}{2}, a-b+1\ ; & x \\ 2b-1, 2a-2b+2\ ; & \end{matrix}\right] = \left(1-\frac{x}{4}\right)^{-a}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix} \Delta(3,a)\ ; & \dfrac{27x^2}{(4-x)^3} \\ b, a-b+\frac{3}{2}\ ; & \end{matrix}\right] \tag{3.26} $$

yaklaşık 70 yıl önce Wilfred Norman Bailey tarafından kanıtlanmıştır [3-6]. Burada $m \in \mathbb{N}$ için $\Delta(m;\lambda)$, m tane parametrenin bir dizisi olup

$$ \frac{\lambda}{m},\ \frac{\lambda+1}{m},\ \ldots,\ \frac{\lambda+m-1}{m} $$

ile gösterilir. Ayrıca $m=0$ durumunda dizinin tanımsız olacağı açıktır. (3.25) ve (3.26) eşitliklerinin kullanılmasıyla ispatlanacak ilk teorem aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.11 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $b, 2b-1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ için aşağıdaki çift katlı serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$ \begin{aligned} &\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{2m+n}}{(b)_m (2b-1)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \\ &\qquad = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(3m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}}{(b)_m} \frac{(xy^2)^m}{m!} \frac{(4x+y)^n}{n!} \end{aligned} \tag{3.27} $$

ve $b, 2b-1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ için

$$ \begin{aligned} &\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_m (2b-1)_{m+2n}}{(b)_n (2b-1)_m} \frac{(-x)^m}{m!} \frac{\left(\frac{y}{4}\right)^n}{n!} \\ &\qquad = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(3m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}}{(b)_m} \frac{\left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{m!} \frac{(y-x)^n}{n!} \end{aligned} \tag{3.28} $$

eşitlikleri geçerlidir [12].

İspat. (3.27) eşitliğinin sol tarafı $\phi(x,y)$ ile gösterilir ve 2.2. Sonuçtan

$$ \begin{aligned} \phi(x,y) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{2m+n}}{(b)_m (2b-1)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Omega(n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m} (2b-1)_{m+n}}{(b)_m (2b-1)_{n-m}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^{n-m}}{(n-m)!} \end{aligned} $$

elde edilir. Burada

$$(n-m)! = \frac{n!}{(-1)^m(-n)_m} \quad , \quad (2b-1)_{m+n} = (2b-1)_n(2b+n-1)_m \ ,$$

$$(2b-1)_{n-m} = \frac{(-1)^m(2b-1)_n}{(2-2b-n)_m} \quad , \left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m} = \frac{(-1)^m\left(b-\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}-b-n\right)_m}$$

olup bu özellikler son eşitlikte yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n) \\
&\quad \cdot \frac{(-1)^m(-1)^m\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_n(2b+n-1)_m(2-2b-n)_m(-n)_m}{(-1)^m\left(\frac{3}{2}-b-n)\right)_m(b)_m(2b-1)_n} \\
&\quad\quad \cdot \frac{x^m}{m!}\frac{y^{n-m}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\left(b-\frac{1}{2}\right)_n\frac{y^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-n)_m(2b+n-1)_m(2-2b-n)_m\left(-\frac{x}{y}\right)^m}{\left(\frac{3}{2}-b-n\right)_m(b)_m m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\left(b-\frac{1}{2}\right)_n\frac{y^n}{n!}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix} -n, 2b+n-1, 2-2b-n\ ; & -\dfrac{x}{y} \\ b, \frac{3}{2}-b-n\ ; & \end{matrix}\right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

sonucuna ulaşılır. (3.29) eşitliğinde ${}_3F_2$ fonksiyonuna (3.25) dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\left(b-\frac{1}{2}\right)_n\frac{(4x+y)^n}{n!}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\Delta(3;-n)\ ; & \dfrac{27xy^2}{(4x+y)^3} \\ b, \frac{3}{2}-b-n\ ; & \end{matrix}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\left(b-\frac{1}{2}\right)_n\frac{(4x+y)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\frac{\left(-\frac{n}{3}\right)_m\left(-\frac{n+1}{3}\right)_m\left(-\frac{n+2}{3}\right)_m\left(\frac{27xy^2}{(4x+y)^3}\right)^m}{(b)_m\left(\frac{3}{2}-b-n\right)_m m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\Omega(n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(4x+y)^n\left(-\frac{n}{3}\right)_m\left(-\frac{n+1}{3}\right)_m\left(-\frac{n+2}{3}\right)_m 3^{3m}(xy^2)^m}{(b)_m\left(\frac{3}{2}-b-n\right)_m(4x+y)^{3m}m!n!}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}-b-n\right)_m} = \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m}}{(-1)^m} \quad , \quad (n-3m)! = \frac{n!}{(-1)^{3m}(-n)_{3m}} \ ,$$

$$(-n)_{3m} = \left(-\frac{n}{3}\right)_m\left(-\frac{n+1}{3}\right)_m\left(-\frac{n+2}{3}\right)_m 3^{3m}$$

olup yukarıdaki son eşitlikte yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\Omega(n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m}(xy^2)^m(4x+y)^{n-3m}n!}{(-1)^m(b)_m(-1)^{3m}(n-3m)!m!n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\Omega(n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m}(xy^2)^m(4x+y)^{n-3m}}{(b)_m(n-3m)!m!} \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.30) eşitliğinde 2.4. Lemmadan

$$\phi(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(3m+n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n+2m}(xy^2)^m(4x+y)^n}{(b)_m m!n!}$$

olup böylece ilk iddia ispatlanmış olur. İkinci iddia için (3.28) eşitliğinin sol tarafı $\omega(x,y)$ ile gösterilir ve 2.2. Sonuçtan

$$\begin{aligned}
\omega(x,y) &= \sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_m(2b-1)_{m+2n}}{(b)_n(2b-1)_m}\frac{(-x)^m}{m!}\frac{\left(\frac{y}{4}\right)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_m(2b-1)_{2n-m}}{(b)_{n-m}(2b-1)_m}\frac{(-x)^m}{m!}\frac{\left(\frac{y}{4}\right)^{n-m}}{(n-m)!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$(n-m)! = \frac{n!}{(-1)^m(-n)_m} \quad , \quad (b)_{n-m} = \frac{(-1)^m(b)_n}{(1-b-n)_m} \ ,$$

$$(2b-1)_{2n-m} = \frac{(-1)^m(2b-1)_{2n}}{(2-2b-2n)_m} \ ,$$

$$(2b-1)_{2n} = \left(b-\frac{1}{2}\right)_n(b)_n 4^n \implies (2b-1)_{2n-m} = \frac{(-1)^m\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(b)_n 4^n}{(2-2b-2n)_m}$$

olup bu özellikler son eşitlikte yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\omega(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_m(-1)^m(-1)^m(1-b-n)_m(-n)_m}{(-1)^m(2-2b-2n)_m(2b-1)_m} \\
&\quad \cdot \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(b)_n 4^n}{(b)_n}\frac{(-x)^m}{m!}\frac{\left(\frac{y}{4}\right)^{n-m}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n y^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-n)_m\left(b-\frac{1}{2}\right)_m(1-b-n)_m\left(\frac{4x}{y}\right)^m}{(2-2b-2n)_m(2b-1)_m m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n y^n}{n!}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, b-\frac{1}{2}, 1-b-n\ ;\ \frac{4x}{y} \\ 2-2b-2n, 2b-1\ ;\ y\end{matrix}\right] \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.31) eşitliğinde ${}_3F_2$ fonksiyonuna (3.26) dönüşümü uygulanırsa

$$\omega(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (y-x)^n}{n!} \, {}_3F_2 \left[\begin{array}{c} \Delta(3;-n) \; ; \\ b, \frac{3}{2}-b-n \; ; \end{array} \frac{27x^2y}{4(y-x)^3} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (y-x)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \frac{\left(-\frac{n}{3}\right)_m \left(-\frac{n+1}{3}\right)_m \left(-\frac{n+2}{3}\right)_m \left(\frac{27x^2y}{4(y-x)^3}\right)^m}{(b)_m \left(\frac{3}{2}-b-n\right)_m m!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \Omega(n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (y-x)^n \left(-\frac{n}{3}\right)_m \left(-\frac{n+1}{3}\right)_m \left(-\frac{n+2}{3}\right)_m 3^{3m} \left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{(b)_m \left(\frac{3}{2}-b-n\right)_m (y-x)^{3m} m! n!}$$

elde edilir. Burada

$$(n-3m)! = \frac{n!}{(-1)^{3m}(-n)_{3m}} \quad , \quad (-n)_{3m} = \left(-\frac{n}{3}\right)_m \left(-\frac{n+1}{3}\right)_m \left(-\frac{n+2}{3}\right)_m 3^{3m}$$

eşitliklerinden

$$\omega(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \Omega(n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (y-x)^n n! \left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{(-1)^{3m}(n-3m)!(b)_m \left(\frac{3}{2}-b-n\right)_m (y-x)^{3m} m! n!}$$

bulunur. Böylece

$$\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m} = \frac{(-1)^m \left(b-\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}-b-n\right)_m}$$

olduğu göz önüne alınır ve yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\omega(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \Omega(n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m} (y-x)^n \left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{(-1)^{3m}(-1)^m (n-3m)!(b)_m (y-x)^{3m} m!} \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.32) eşitliğinde 2.4. Lemmadan

$$\omega(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(n+3m) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n+2m} (y-x)^{n+3m} \left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{(b)_m (y-x)^{3m} m! n!}$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(n+3m) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n+2m}}{(b)_m} \frac{\left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{m!} \frac{(y-x)^n}{n!}$$

sonucuna ulaşılır ki bu ikinci iddiayı ispatlar. ■

Uyarı 3.12 (3.27) eşitliğinde $x = \frac{1}{4}y$, $y = -x$ ve $m \longmapsto n$, $n \longmapsto m$ alınırsa (3.28) eşitliği elde edilir [12].

(3.27) seri eşitliğinde $y = -4x$ ve (3.28) seri eşitliğinde $y = x$ alınırsa, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 3.13 $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $b, 2b-1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ için aşağıdaki serilerin her birinin mutlak yakınsak olması şartıyla

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{2m+n}}{(b)_m (2b-1)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{(-4x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(3n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2n}}{(b)_n} \frac{(16x^3)^n}{n!} \tag{3.33}$$

ve $b, 2b-1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_m (2b-1)_{m+2n}}{(b)_n (2b-1)_m} \frac{(-x)^m}{m!} \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(3m) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m}}{(b)_m} \frac{\left(\frac{x^3}{4}\right)^m}{m!} \tag{3.34}$$

eşitlikleri geçerlidir [12].

İspat. $y = -4x$ için (3.27) eşitliğinden, (3.33) eşitliğinin sol tarafını görmek kolaydır. (3.33) eşitliğinin sağ tarafı için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(3m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}}{(b)_m} \frac{(xy^2)^m}{m!} \frac{(4x+y)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\Omega(3m) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m}}{(b)_m} \frac{(xy^2)^m}{m!} \right.$$
$$\left. + \Omega(3m+1) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+1}}{(b)_m} \frac{(xy^2)^m}{m!} (4x+y) + \dots \right]$$

olup $y = -4x$ için ilk terim hariç diğerleri sıfır olacağından

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(3m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}}{(b)_m} \frac{(xy^2)^m}{m!} \frac{(4x+y)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(3m) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m}}{(b)_m} \frac{(16x^3)^m}{m!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Omega(3m) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m}}{(b)_m} \frac{(16x^3)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(3n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2n}}{(b)_n} \frac{(16x^3)^n}{n!}$$

biçiminde yazılabileceğinden

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{2m+n}}{(b)_m (2b-1)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{(-4x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(3n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2n}}{(b)_n} \frac{(16x^3)^n}{n!}$$

olup ilk iddia ispatlanmış olur. İkinci iddia da $y = x$ için (3.28) eşitliğinden, (3.34) eşitliğinin sol tarafını görmek kolaydır. (3.34) eşitliğinin sağ tarafı için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(3m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}}{(b)_m} \frac{\left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{m!} \frac{(y-x)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\Omega(3m) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m}}{(b)_m} \frac{\left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{m!} \right.$$
$$\left. + \Omega(3m+1) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+1}}{(b)_m} \frac{\left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{m!} (y-x) + \dots \right]$$

olup $y=x$ için ilk terim hariç diğerleri sıfır olacağından

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(3m+n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}}{(b)_m}\frac{\left(\frac{x^2y}{4}\right)^m}{m!}\frac{(y-x)^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\Omega(3m)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m}}{(b)_m}\frac{\left(\frac{x^3}{4}\right)^m}{m!}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_m(2b-1)_{m+2n}}{(b)_n(2b-1)_m}\frac{(-x)^m}{m!}\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\Omega(3m)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m}}{(b)_m}\frac{\left(\frac{x^3}{4}\right)^m}{m!}$$

olup ikinci iddia da ispatlanmış olur. ■

Sonuç 3.14 $\delta_{m,n}$ $(m,n\in\mathbb{N}_0)$, Kronecker sembolü olmak üzere, belirli bir $k\in\mathbb{N}_0$ için (3.33) eşitliğinde sırasıyla $\Omega(n)=\delta_{n,3k+1}$ ve $\Omega(n)=\delta_{n,3k+2}$ alınırsa bu durumda

$$\sum_{n=0}^{3k+1}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_{6k-n+2}}{(3k-n+1)!(b)_{3k-n+1}(2b-1)_n}\frac{(-4)^n}{n!}=0 \tag{3.35}$$

$$\sum_{n=0}^{3k+2}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_{6k-n+4}}{(3k-n+2)!(b)_{3k-n+2}(2b-1)_n}\frac{(-4)^n}{n!}=0 \tag{3.36}$$

eşitlikleri geçerli olur [12].

İspat. (3.33) eşitliğinin sağ tarafı için $\Omega(3n)=\delta_{3n,3k+1}$ olup n değişkeninin alacağı değerler için $3n\neq 3k+1$ olduğundan $\delta_{3n,3k+1}=0$ değeri alır. Dolayısıyla (3.33) eşitliğinin sağ tarafı sıfır olur. (3.33) eşitliğinin sol tarafı için 2.2. Sonuçtan

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_{2m+n}}{(b)_m(2b-1)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{(-4x)^n}{n!}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\Omega(m)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_{2m-n}}{(b)_{m-n}(2b-1)_n}\frac{x^{m-n}}{(m-n)!}\frac{(-4x)^n}{n!}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\Omega(m)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_{2m-n}}{(b)_{m-n}(2b-1)_n}\frac{x^{m}}{(m-n)!}\frac{(-4)^n}{n!}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\delta_{m,3k+1}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_{2m-n}}{(b)_{m-n}(2b-1)_n}\frac{x^{m}}{(m-n)!}\frac{(-4)^n}{n!}\\
&=0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada çift toplam, $m\neq 3k+1$ için sıfır olacağından $m=3k+1$ için

$$\sum_{n=0}^{3k+1}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_{6k-n+2}}{(3k-n+1)!(b)_{3k-n+1}(2b-1)_n}\frac{(-4)^n x^{3k+1}}{n!}=0$$

bulunup eşitlikte $x = 1$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{3k+1} \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{6k-n+2}}{(3k-n+1)!(b)_{3k-n+1}(2b-1)_n} \frac{(-4)^n}{n!} = 0$$

elde edilir. Böylece ilk iddia ispatlanmış olur. İkinci iddia için $\Omega(n) = \delta_{n,3k+2}$ ve (3.33) eşitliğinin sağ tarafındaki $\Omega(3n) = \delta_{3n,3k+2}$ olup benzer şekilde n değişkeninin alacağı değerler için $3n \neq 3k+2$ olduğundan $\delta_{3n,3k+2} = 0$ bulunur. Dolayısıyla (3.33) eşitliğinin sağ tarafı sıfır olur. (3.33) eşitliğinin sol tarafı için 2.2. Sonuçtan

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n=0}^{\infty} \Omega(m+n) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{2m+n}}{(b)_m (2b-1)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{(-4x)^n}{n!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \Omega(m) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{2m-n}}{(b)_{m-n}(2b-1)_n} \frac{x^{m-n}}{(m-n)!} \frac{(-4x)^n}{n!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \Omega(m) \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{2m-n}}{(b)_{m-n}(2b-1)_n} \frac{x^{m}}{(m-n)!} \frac{(-4)^n}{n!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \delta_{m,3k+2} \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{2m-n}}{(b)_{m-n}(2b-1)_n} \frac{x^{m}}{(m-n)!} \frac{(-4)^n}{n!} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada çift toplam, $m \neq 3k+2$ için sıfır olacağından $m = 3k+2$ için

$$\sum_{n=0}^{3k+2} \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{6k-n+4}}{(3k-n+2)!(b)_{3k-n+2}(2b-1)_n} \frac{(-4)^n x^{3k+2}}{n!} = 0$$

bulunur. Eşitlikte $x = 1$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{3k+2} \frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n (2b-1)_{6k-n+4}}{(3k-n+2)!(b)_{3k-n+2}(2b-1)_n} \frac{(-4)^n}{n!} = 0$$

olup ikinci iddia da ispatlanmış olur. ■

Üstelik (3.35) ve (3.36) eşitliklerinde $b = 1$ alınıp

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

olduğu da göz önüne alınırsa sırasıyla (3.35) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{3k+1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (1)_{6k-n+2}}{(3k-n+1)!(1)_{3k-n+1}(1)_n} \frac{(-4)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{3k+1} \frac{(-1)^n 4^n (2n)!(6k-n+2)!}{4^n n!((3k-n+1)!)^2 n! n!} \\
&= \sum_{n=0}^{3k+1} \frac{(-1)^n (2n)!(6k-n+2)!}{(n!)^3((3k-n+1)!)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve (3.36) eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{3k+2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n(1)_{6k-n+4}}{(3k-n+2)!(1)_{3k-n+2}(1)_n}\frac{(-4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{3k+2}\frac{(-1)^n4^n(2n)!(6k-n+4)!}{4^nn!((3k-n+2)!)^2n!n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{3k+2}\frac{(-1)^n(2n)!(6k-n+4)!}{(n!)^3((3k-n+2)!)^2}$$
$$=0$$

elde edilir.

Sonuç 3.15 Belirli bir $k\in\mathbb{N}_0$ ve $\Omega(n)=\delta_{n,k}$ için (3.27) eşitliğinden

$$\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{k-m}(2b-1)_{k+m}}{(b)_m(2b-1)_{k-m}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{k-m}}{(k-m)!}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{k-m}}{(b)_m}\frac{(xy^2)^m}{m!}\frac{(4x+y)^{k-3m}}{(k-3m)!} \tag{3.37}$$

olup bu eşitlikte $y=x$ ve $b=1$ alınırsa

$$\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{k-m}(k+m)!}{(m!(k-m)!)^2}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{k-m}5^{k-3m}}{(m!)^2(k-3m)!}$$

elde edilir [12].

İspat. (3.27) eşitliğinin sol tarafı için 2.2. Sonuçtan

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_{2m+n}}{(b)_m(2b-1)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Omega(n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m}(2b-1)_{m+n}}{(b)_m(2b-1)_{n-m}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n-m}}{(n-m)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\delta_{n,k}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m}(2b-1)_{m+n}}{(b)_m(2b-1)_{n-m}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n-m}}{(n-m)!}$$

elde edilir. Burada çift toplam, $n\neq k$ için sıfır olacağından $n=k$ için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(m+n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_n(2b-1)_{2m+n}}{(b)_m(2b-1)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$
$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{k-m}(2b-1)_{k+m}}{(b)_m(2b-1)_{k-m}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{k-m}}{(k-m)!} \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.27) eşitliğinin sağ tarafı için 2.1. Lemmadan

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(3m+n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}}{(b)_m}\frac{(xy^2)^m}{m!}\frac{(4x+y)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\Omega(n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m}}{(b)_m}\frac{(xy^2)^m}{m!}\frac{(4x+y)^{n-3m}}{(n-3m)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\delta_{n,k}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{n-m}}{(b)_m}\frac{(xy^2)^m}{m!}\frac{(4x+y)^{n-3m}}{(n-3m)!}$$

elde edilir. Burada çift toplam, $n\neq k$ için sıfır olacağından $n=k$ için

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Omega(3m+n)\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}}{(b)_m}\frac{(xy^2)^m}{m!}\frac{(4x+y)^n}{n!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{k-m}}{(b)_m}\frac{(xy^2)^m}{m!}\frac{(4x+y)^{k-3m}}{(k-3m)!} \tag{3.39}$$

olup (3.38) ve (3.39) eşitliklerinden

$$\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{k-m}(2b-1)_{k+m}}{(b)_m(2b-1)_{k-m}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{k-m}}{(k-m)!}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]}\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)_{k-m}}{(b)_m}\frac{(xy^2)^m}{m!}\frac{(4x+y)^{k-3m}}{(k-3m)!}$$

elde edilir ki buda istenilendir. (3.37) eşitliğinde $y=x$ ve $b=1$ alınırsa

$$\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{k-m}(1)_{k+m}}{(1)_m(1)_{k-m}}\frac{x^m}{m!}\frac{x^{k-m}}{(k-m)!}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{k-m}}{(1)_m}\frac{(x)^{3m}}{m!}\frac{(5x)^{k-3m}}{(k-3m)!}$$

$$\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{k-m}(k+m)!x^k}{(m!(k-m)!)^2}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{k-m}5^{k-3m}x^k}{(m!)^2(k-3m)!}$$

olup bu eşitliklerde $x=1$ alınırsa

$$\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{k-m}(k+m)!}{(m!(k-m)!)^2}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{3}\right]}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{k-m}5^{k-3m}}{(m!)^2(k-3m)!}$$

bulunur. ■

4 İNDİRGENEBİLİR ÇİFT KATLI HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

İki değişkenli çok katlı hipergometrik fonksiyonlar hakkındaki ilk çalışmalar, yaklaşık 30 yıl önce Srivastava ve Daoust tarafından yapılmıştır [16-19]. İki değişkenli çok katlı bir hipergeometrik fonksiyon

$$F^{A:B;B'}_{C:D;D'}\left(\begin{matrix}[(a):\vartheta,\varphi]:[(b):\psi];[(b'):\psi'];\\ [(c):\xi,\eta]:[(d):\zeta];[(d'):\zeta'];\end{matrix}x,y\right)$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m\vartheta_j+n\varphi_j}\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m\psi_j}\prod\limits_{j=1}^{B'}(b'_j)_{n\psi'_j}}{\prod\limits_{j=1}^{C}(c_j)_{m\xi_j+n\eta_j}\prod\limits_{j=1}^{D}(d_j)_{m\zeta_j}\prod\limits_{j=1}^{D'}(d'_j)_{n\zeta'_j}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada çift katlı hipergeometrik seri

$$1+\sum_{j=1}^{C}\xi_j+\sum_{j=1}^{D}\zeta_j-\sum_{j=1}^{A}\vartheta_j-\sum_{j=1}^{B}\psi_j\geq 0$$

ve

$$1+\sum_{j=1}^{C}\eta_j+\sum_{j=1}^{D'}\zeta'_j-\sum_{j=1}^{A}\varphi_j-\sum_{j=1}^{B'}\psi'_j\geq 0$$

için yakınsak olup yukarıdaki eşitsizlikler yalnızca $|x|$ ve $|y|$ uygun aralıklara kısıtlandığında eşitlik halini alır [10, 17]. Burada (a); $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_A$ şeklinde olup A tane parametreden oluşur. (b), (b'), (c), (d) ve (d') için de aynı şey söz konusudur. Ayrıca (4.1) eşitliğinde ϑ, φ, ψ, ψ', ξ, η, ζ, ζ' parametrelerinin 1 seçilmesi, çift katlı hipergeometrik fonksiyonların indirgenebilirliği açısından çok yararlıdır [8, 19].

3.2. Sonuç, 3.4. Sonuç, 3.6. Teorem ve 3.9. Teoremde $n\in\mathbb{N}_0$ için

$$\Omega(n)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_n}{\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_n} \tag{4.2}$$

alınarak sırasıyla aşağıdaki çift katlı hipergeometrik fonksiyonların indirgenebilirlik durumları verilecektir. Bunun için kübik dönüşümde de belirtildiği üzere $m\in\mathbb{N}$ için $\Delta(m;\lambda)$, m tane parametrenin bir dizisi olup

$$\frac{\lambda}{m},\ \frac{\lambda+1}{m},\ \ldots,\ \frac{\lambda+m-1}{m}$$

biçiminde verilir. $\Delta[m;(a)]$ ise

$$\frac{a_j}{m},\ \frac{a_j+1}{m},\ \dots,\ \frac{a_j+m-1}{m} \qquad (j=1,\ \dots\ ,A\ ;\ m\in\mathbb{N})$$

şeklindeki mA tane parametreden oluşur.

3.2. Sonuç kullanılarak elde edilen indirgeme formülü :

$$(\lambda)_{2n}=\left(\frac{\lambda}{2}\right)_n\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)_n 2^{2n}\quad,\quad (\lambda)_{3n}=\left(\frac{\lambda}{3}\right)_n\left(\frac{\lambda+1}{3}\right)_n\left(\frac{\lambda+2}{3}\right)_n 3^{3n}\ ,$$

$$(\lambda+\mu)_{3n}=\left(\frac{\lambda+\mu}{3}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+1}{3}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+2}{3}\right)_n 3^{3n}\ ,$$

$$(\lambda+\mu)_{4n}=\left(\frac{\lambda+\mu}{4}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+1}{4}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+2}{4}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+3}{4}\right)_n 4^{4n}\ ,$$

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{2n} &= (a_1)_{2n}(a_2)_{2n}\dots(a_A)_{2n}\\
&= \left(\frac{a_1}{2}\right)_n\left(\frac{a_1+1}{2}\right)_n 2^{2n}\left(\frac{a_2}{2}\right)_n\left(\frac{a_2+1}{2}\right)_n 2^{2n}\dots\left(\frac{a_A}{2}\right)_n\left(\frac{a_A+1}{2}\right)_n 2^{2n}\\
&= \left(\frac{a_1}{2}\right)_n\left(\frac{a_1+1}{2}\right)_n\left(\frac{a_2}{2}\right)_n\left(\frac{a_2+1}{2}\right)_n\dots\left(\frac{a_A}{2}\right)_n\left(\frac{a_A+1}{2}\right)_n 2^{(2n+2n+\dots+2n)}\\
&= \left(\frac{a_1}{2}\right)_n\left(\frac{a_1+1}{2}\right)_n\left(\frac{a_2}{2}\right)_n\left(\frac{a_2+1}{2}\right)_n\dots\left(\frac{a_A}{2}\right)_n\left(\frac{a_A+1}{2}\right)_n 2^{2An},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{2n} &= (b_1)_{2n}(b_2)_{2n}\dots(b_B)_{2n}\\
&= \left(\frac{b_1}{2}\right)_n\left(\frac{b_1+1}{2}\right)_n 2^{2n}\left(\frac{b_2}{2}\right)_n\left(\frac{b_2+1}{2}\right)_n 2^{2n}\dots\left(\frac{b_B}{2}\right)_n\left(\frac{b_B+1}{2}\right)_n 2^{2n}\\
&= \left(\frac{b_1}{2}\right)_n\left(\frac{b_1+1}{2}\right)_n\left(\frac{b_2}{2}\right)_n\left(\frac{b_2+1}{2}\right)_n\dots\left(\frac{b_B}{2}\right)_n\left(\frac{b_B+1}{2}\right)_n 2^{(2n+2n+\dots+2n)}\\
&= \left(\frac{b_1}{2}\right)_n\left(\frac{b_1+1}{2}\right)_n\left(\frac{b_2}{2}\right)_n\left(\frac{b_2+1}{2}\right)_n\dots\left(\frac{b_B}{2}\right)_n\left(\frac{b_B+1}{2}\right)_n 2^{2Bn}
\end{aligned}$$

eşitliklerinin göz önünde tutulmasıyla

$$\begin{aligned}
&F^{A+2:1;1}_{B:0;0}\left(\begin{array}{c}[\lambda:2,1],[\lambda:1,2],[(a):1,1]:[\mu:1]\ ;\ [\mu:1]\ ;\\ \qquad\qquad\qquad [(b):1,1]:\quad -\quad ;\quad -\quad ;\end{array} x,-x\right)\\
&\qquad = \sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(\lambda)_{2m+n}(\lambda)_{m+2n}(\mu)_m(\mu)_n x^m x^n}{\left(\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)m!n!}
\end{aligned}$$

olup

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(\lambda)_{2m+n}(\lambda)_{m+2n}(\mu)_m(\mu)_n x^m x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)m!n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{2n}\right)(\lambda)_{2n}(\lambda)_{3n}(\mu)_n(\lambda+\mu)_{4n}x^{2n}}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{2n}\right)(\lambda+\mu)_{3n}n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)_n\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)_n\left(\frac{\lambda}{3}\right)_n\left(\frac{\lambda+1}{3}\right)_n\left(\frac{\lambda+2}{3}\right)_n(\mu)_n\left(\frac{\lambda+\mu}{4}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+1}{4}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+2}{4}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+3}{4}\right)_n}{\left(\frac{\lambda+\mu}{3}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+1}{3}\right)_n\left(\frac{\lambda+\mu+2}{3}\right)_n}$$

$$\cdot\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}\left(\frac{a_j}{2}\right)_n\left(\frac{a_j+1}{2}\right)_n\right)(4^{A-B+5})^n x^{2n}}{\left(\prod_{j=1}^{B}\left(\frac{b_j}{2}\right)_n\left(\frac{b_j+1}{2}\right)_n\right)n!}$$

$$=\ {}_{2A+10}F_{2B+3}\left[\begin{array}{r}\Delta(2;\lambda),\Delta(3;\lambda),\mu,\Delta(4;\lambda+\mu),\Delta[2;(a)]\ ;\\ \Delta(3;\lambda+\mu),\Delta[2;(b)]\ ;\end{array}4^{A-B+5}x^2\right]$$

elde edilir.

3.4. Sonuç kullanılarak elde edilen indirgeme formülü:

$$F_{B:1;0}^{A:0;0}\left(\begin{array}{l}[(a):2,1]:\qquad - \qquad ;-;\\ [(b):2,1]:[\nu+\frac{1}{2}:1]\ ;-;\end{array}\left(\frac{1}{2}y\right)^2,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{2m+n}\right)\left(\frac{1}{2}y\right)^{2m}y^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{2m+n}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_m m!n!}$$

olup

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{2m+n}\right)\left(\frac{1}{2}y\right)^{2m}y^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{2m+n}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_m m!n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_n\right)(\nu)_n(2y)^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_n\right)(2\nu)_n n!}$$

$$=\ {}_{A+1}F_{B+1}\left[\begin{array}{l}\nu\ ,\ (a)\ ;\\ 2\nu\ ,\ (b)\ ;\end{array}2y\right]$$

bulunur.

3.6. Teorem kullanılarak elde edilen indirgeme formülü:

$$F^{A+1:1;0}_{B:2;0}\left(\begin{array}{r}[\lambda:2,1],[(a):1,1]: \qquad\qquad [\lambda-\mu-\nu+1:1]\ ;-;\\ [(b):1,1]:[\lambda-\mu+N+1:1],[\lambda-\nu+1:1]\ ;-;\end{array} -x,x\right)$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(\lambda)_{2m+n}(\lambda-\mu-\nu+1)_m(-x)^m x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda-\mu+N+1)_m(\lambda-\nu+1)_m m!n!}$$

olup

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(\lambda)_{2m+n}(\lambda-\mu-\nu+1)_m(-x)^m x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda-\mu+N+1)_m(\lambda-\nu+1)_m m!n!}$$

$$=\frac{(\lambda-\mu+1)_N}{(1-\mu)_N(\nu)_N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{(\lambda)_k(\lambda-\mu-\nu+1)_k(\nu-\lambda)_{N-k}}{(\lambda-\mu+1)_k}$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_n\right)(\lambda+k)_n(\mu-N)_n(\nu)_n x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_n\right)(\lambda-\mu+k+1)_n(\lambda-\nu-N+k+1)_n n!}$$

$$=\frac{(\lambda-\mu+1)_N}{(1-\mu)_N(\nu)_N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{(\lambda)_k(\lambda-\mu-\nu+1)_k(\nu-\lambda)_{N-k}}{(\lambda-\mu+1)_k}$$

$$\cdot\ {}_{A+3}F_{B+2}\left[\begin{array}{r}\lambda+k,\mu-N,\nu,(a)\ ;\\ \lambda-\mu+k+1,\lambda-\nu-N+k+1,(b)\ ;\end{array} x\right]$$

bulunur. Buradan $N=0$ özel durumunda

$$F^{A+1:1;0}_{B:2;0}\left(\begin{array}{r}[\lambda:2,1],[(a):1,1]: \qquad\qquad [\lambda-\mu-\nu+1:1];-;\\ [(b):1,1]:[\lambda-\mu+1:1],[\lambda-\nu+1:1];-;\end{array} -x,x\right)$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(\lambda)_{2m+n}(\lambda-\mu-\nu+1)_m(-x)^m x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m m!n!}$$

olduğu dikkate alınır ve 3.7. Sonuç kullanılırsa

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(\lambda)_{2m+n}(\lambda-\mu-\nu+1)_m(-x)^m x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m m!n!} \tag{4.3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_n\right)(\lambda)_n(\mu)_n(\nu)_n x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_n\right)(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n n!}$$

$$= {}_{A+3}F_{B+2}\left[\begin{array}{r} \lambda,\mu,\nu,(a)\ ; \\ \lambda-\mu+1,\lambda-\nu+1,(b)\ ; \end{array} x\right] \tag{4.4}$$

elde edilir.

Uyarı 4.1 Yukarıda da görüldüğü gibi 3.7. Sonuçta $\Omega(n)$, (4.2) eşitliğinde olduğu gibi seçilirse, 3.7. Sonuç için indirgeme bağıntısı (4.4) eşitliği gibi olur.

3.9. Teorem kullanılarak elde edilen indirgeme formülü:

$$F^{A+1:5;1}_{B+3:4;0}\left(\begin{array}{r} [2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1:2,1],[(a):1,1]: \\ [\lambda+1:2,1],[2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1:1,1],[\lambda-\mu-\nu-\sigma+1:1,1],[(b):1,1]: \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{r} [\lambda:1],[\frac{1}{2}\lambda+1:1],[\mu:1],[\nu:1],[\sigma:1];[\lambda-\mu-\nu-\sigma+1:1]\ ; \\ [\frac{1}{2}\lambda:1],[\lambda-\mu+1:1],[\lambda-\nu+1:1],[\lambda-\sigma+1:1];-\ ; \end{array} x,x\right)$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{2m+n}(\lambda)_m\left(\frac{1}{2}\lambda+1\right)_m}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda+1)_{2m+n}(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}}$$
$$\cdot \frac{(\mu)_m(\nu)_m(\sigma)_m(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n x^{m+n}}{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m(\lambda-\sigma+1)_m m!n!}$$

olup

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{2m+n}(\lambda)_m\left(\frac{1}{2}\lambda+1\right)_m}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda+1)_{2m+n}(2\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_{m+n}}$$
$$\cdot \frac{(\mu)_m(\nu)_m(\sigma)_m(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n x^{m+n}}{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m(\lambda-\sigma+1)_m m!n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_n\right)(\lambda-\mu-\nu+1)_n(\lambda-\mu-\sigma+1)_n(\lambda-\nu-\sigma+1)_n x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_n\right)(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n(\lambda-\sigma+1)_n(\lambda-\mu-\nu-\sigma+1)_n n!}$$

$$= {}_{A+3}F_{B+4}\left[\begin{array}{r} \lambda-\mu-\nu+1,\lambda-\mu-\sigma+1,\lambda-\nu-\sigma+1,(a)\ ; \\ \lambda-\mu+1,\lambda-\nu+1,\lambda-\sigma+1,\lambda-\mu-\nu-\sigma+1,(b)\ ; \end{array} x\right]$$

elde edilir. Buradan $|\sigma| \longrightarrow \infty$ limit durumunda 3.10. Sonuç kullanılarak elde edilen indirgeme formülü:

$$F^{A:4;0}_{B+1:3;0}\left(\begin{array}{r}[(a):1,1]: \qquad [\lambda:1],[\frac{1}{2}\lambda+1:1],[\mu:1],[\nu:1];-;\\ [\lambda+1:2,1],[(b):1,1]:[\frac{1}{2}\lambda:1],[\lambda-\mu+1:1],[\lambda-\nu+1:1];-;\end{array} -x,x\right)$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(\lambda)_m\left(\frac{1}{2}\lambda+1\right)_m(\mu)_m(\nu)_m(-x)^m x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda+1)_{2m+n}\left(\frac{1}{2}\lambda\right)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m m!n!}$$

olup

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(\lambda)_m\left(\frac{1}{2}\lambda+1\right)_m(\mu)_m(\nu)_m(-x)^m x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda+1)_{2m+n}\left(\frac{1}{2}\lambda\right)_m(\lambda-\mu+1)_m(\lambda-\nu+1)_m m!n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_n\right)(\lambda-\mu-\nu+1)_n x^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_n\right)(\lambda-\mu+1)_n(\lambda-\nu+1)_n n!}$$

$$= {}_{A+1}F_{B+2}\left[\begin{array}{r}\lambda-\mu-\nu+1,(a)\ ;\\ \lambda-\mu+1,\lambda-\nu+1,(b)\ ;\end{array} x\right]$$

bulunur.

Şimdi 3.11. Teorem ve 3.13. Sonuçta $\Omega(n)$, (4.2) eşitliğindeki gibi alınarak iki değişkenli Srivastava-Daoust hipergeometrik fonksiyonu için çeşitli dönüşüm ve indirgeme formülleri elde edilecektir.

Teorem 4.2 (4.1) ile tanımlı Srivastava-Daoust çift katlı hipergeometrik fonksiyonu için

$$F^{A+1:0;1}_{B:1;1}\left(\begin{array}{r}[2\lambda-1:2,1],[(a):1,1]:\quad - \quad;\ [\lambda-\frac{1}{2}:1];\\ [(b):1,1]:[\lambda:1]\ ;\ [2\lambda-1:1];\end{array} x,y\right)$$
$$=F^{A+1:0;0}_{B:1;0}\left(\begin{array}{r}[\lambda-\frac{1}{2}:2,1],[(a):3,1]:\quad - \quad;-;\\ [(b):3,1]:[\lambda:1]\ ;-;\end{array} xy^2,4x+y\right)$$

ve

$$F^{A+1:1;0}_{B:1;1}\left(\begin{array}{r}[2\lambda-1:1,2],[(a):1,1]:\ [\lambda-\frac{1}{2}:1]\ ;\quad - \quad;\\ [(b):1,1]:[2\lambda-1:1]\ ;\ [\lambda:1];\end{array} -x,\frac{y}{4}\right)$$
$$=F^{A+1:0;0}_{B:1;0}\left(\begin{array}{r}[\lambda-\frac{1}{2}:2,1],[(a):3,1]:\quad - \quad;-;\\ [(b):3,1]:[\lambda:1]\ ;-;\end{array} \frac{xy^2}{4},y-x\right)$$

biçimindeki dönüşümler doğrudur [12].

İspat. İlk olarak

$$F^{A+1:0;1}_{B:1;1}\left(\begin{array}{r}[2\lambda-1:2,1],[(a):1,1]:\quad - \quad;\ [\lambda-\frac{1}{2}:1];\\ [(b):1,1]:[\lambda:1]\ ;\ [2\lambda-1:1];\end{array} x,y\right)$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_{2m+n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n x^m y^n}{\left(\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda)_m(2\lambda-1)_n m!n!}$$

olduğu dikkate alınır ve (3.27) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_{2m+n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n x^m y^n}{\left(\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda)_m(2\lambda-1)_n m!n!}$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{3m+n}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}(xy^2)^m(4x+y)^n}{\left(\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{3m+n}\right)(\lambda)_m m!n!}$$
$$=F^{A+1:0;0}_{B:1;0}\left(\begin{array}{r}[\lambda-\frac{1}{2}:2,1],[(a):3,1]:\quad - \quad;\ -\ ;\\ [(b):3,1]:[\lambda:1]\ ;\ -\ ;\end{array} xy^2,4x+y\right)$$

elde edilir. İkinci olarak

$$F^{A+1:1;0}_{B:1;1}\left(\begin{array}{r}[2\lambda-1:1,2],[(a):1,1]:\ [\lambda-\frac{1}{2}:1]\ ;\quad - \quad;\\ [(b):1,1]:[2\lambda-1:1]\ ;\ [\lambda:1]\ ;\end{array} -x,\frac{y}{4}\right)$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_{m+2n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_m(-x)^m\left(\frac{y}{4}\right)^n}{\left(\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_m(\lambda)_n m!n!}$$

olduğu dikkate alınır ve (3.28) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_{m+2n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_m(-x)^m\left(\frac{y}{4}\right)^n}{\left(\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_m(\lambda)_n m!n!}$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{3m+n}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}\left(\frac{x^2y}{4}\right)^m(y-x)^n}{\left(\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{3m+n}\right)(\lambda)_m m!n!}$$
$$=F^{A+1:0;0}_{B:1;0}\left(\begin{array}{r}[\lambda-\frac{1}{2}:2,1],[(a):3,1]:\quad - \quad;\ -\ ;\\ [(b):3,1]:[\lambda:1]\ ;\ -\ ;\end{array} \frac{xy^2}{4},y-x\right)$$

olup ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.3 (4.1) ile tanımlı Srivastava-Daoust çift katlı hipergeometrik fonksiyonu için

$$F^{A+1:0;1}_{B:1;1}\left(\begin{matrix}[2\lambda-1:2,1],[(a):1,1]: & - & ; & [\lambda-\frac{1}{2}:1]; \\ [(b):1,1]: & [\lambda:1] & ; & [2\lambda-1:1];\end{matrix}\; x,-4x\right)$$
$$= {}_{3A+2}F_{3B+1}\left[\begin{matrix}\Delta\left(2;\lambda-\frac{1}{2}\right),\Delta[3;(a)]\;; \\ \lambda,\Delta[3;(b)]\;;\end{matrix}\;(3^{A-B}4x)^3\right]$$

ve

$$F^{A+1:1;0}_{B:1;1}\left(\begin{matrix}[2\lambda-1:1,2],[(a):1,1]: & [\lambda-\frac{1}{2}:1] & ; & - & ; \\ [(b):1,1]: & [2\lambda-1:1] & ; & [\lambda:1] & ;\end{matrix}\;-x,\frac{x}{4}\right)$$

$$= {}_{3A+2}F_{3B+1}\left[\begin{matrix}\Delta\left(2;\lambda-\frac{1}{2}\right),\Delta[3;(a)]\;; \\ \lambda,\Delta[3;(b)]\;;\end{matrix}\;(3^{A-B}x)^3\right]$$

şeklindeki indirgeme bağıntıları doğrudur [12].

İspat. İlk iddia göz önüne alınırsa

$$F^{A+1:0;1}_{B:1;1}\left(\begin{matrix}[2\lambda-1:2,1],[(a):1,1]: & - & ; & [\lambda-\frac{1}{2}:1]; \\ [(b):1,1]: & [\lambda:1] & ; & [2\lambda-1:1];\end{matrix}\; x,-4x\right)$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_{2m+n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n x^m(-4x)^n}{\left(\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda)_m(2\lambda-1)_n m!n!}$$

olup (3.33) eşitliği ile beraber

$$\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{2n}=\left(\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{2}\right)_n\left(\frac{\lambda-\frac{1}{2}+1}{2}\right)_n 2^{2n}\,,$$

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{3n}&=(a_1)_{3n}\dots(a_A)_{3n}\\
&=\left(\frac{a_1}{3}\right)_n\left(\frac{a_1+1}{3}\right)_n\left(\frac{a_1+2}{3}\right)_n 3^{3n}\dots\left(\frac{a_A}{3}\right)_n\left(\frac{a_A+1}{3}\right)_n\left(\frac{a_A+2}{3}\right)_n 3^{3n}\\
&=\left(\frac{a_1}{3}\right)_n\left(\frac{a_1+1}{3}\right)_n\left(\frac{a_1+2}{3}\right)_n\dots\left(\frac{a_A}{3}\right)_n\left(\frac{a_A+1}{3}\right)_n\left(\frac{a_A+2}{3}\right)_n 3^{(3n+\ldots+3n)}\\
&=\left(\frac{a_1}{3}\right)_n\left(\frac{a_1+1}{3}\right)_n\left(\frac{a_1+2}{3}\right)_n\dots\left(\frac{a_A}{3}\right)_n\left(\frac{a_A+1}{3}\right)_n\left(\frac{a_A+2}{3}\right)_n 3^{3An}\,,\end{aligned}$$

$$\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{3n} = (b_1)_{3n}\dots(b_B)_{3n}$$

$$= \left(\frac{b_1}{3}\right)_n\left(\frac{b_1+1}{3}\right)_n\left(\frac{b_1+2}{3}\right)_n 3^{3n}\dots\left(\frac{b_B}{3}\right)_n\left(\frac{b_B+1}{3}\right)_n\left(\frac{b_B+2}{3}\right)_n 3^{3n}$$

$$= \left(\frac{b_1}{3}\right)_n\left(\frac{b_1+1}{3}\right)_n\left(\frac{b_1+2}{3}\right)_n\dots\left(\frac{b_B}{3}\right)_n\left(\frac{b_B+1}{3}\right)_n\left(\frac{b_B+2}{3}\right)_n 3^{(3n+\dots+3n)}$$

$$= \left(\frac{b_1}{3}\right)_n\left(\frac{b_1+1}{3}\right)_n\left(\frac{b_1+2}{3}\right)_n\dots\left(\frac{b_B}{3}\right)_n\left(\frac{b_B+1}{3}\right)_n\left(\frac{b_B+2}{3}\right)_n 3^{3Bn}$$

özellikleri kullanılırsa

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_{2m+n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n x^m(-4x)^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(\lambda)_m(2\lambda-1)_n m!n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{3n}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{2n}(16x^3)^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{3n}\right)(\lambda)_n n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}\left(\frac{a_j}{3}\right)_n\left(\frac{a_j+1}{3}\right)_n\left(\frac{a_j+2}{3}\right)_n\right)\left(\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{2}\right)_n\left(\frac{\lambda-\frac{1}{2}+1}{2}\right)_n(3^{A-B}4x)^{3n}}{\left(\prod_{j=1}^{B}\left(\frac{b_j}{3}\right)_n\left(\frac{b_j+1}{3}\right)_n\left(\frac{b_j+2}{3}\right)_n\right)(\lambda)_n n!}$$

$$= {}_{3A+2}F_{3B+1}\left[\begin{array}{r}\Delta\left(2;\lambda-\frac{1}{2}\right),\Delta[3;(a)]\ ;\\ \lambda,\Delta[3;(b)]\ ;\end{array}(3^{A-B}4x)^3\right]$$

elde edilir. İkinci iddia için

$$F^{A+1:1;0}_{B:1;1}\left(\begin{array}{r}[2\lambda-1:1,2],[(a):1,1]:\ [\lambda-\frac{1}{2}:1]\ ;\quad -\quad ;\\ [(b):1,1]:[2\lambda-1:1]\ ;[\lambda:1]\ ;\end{array}-x,\frac{x}{4}\right)$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_{m+2n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_m(-x)^m\left(\frac{x}{4}\right)^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_m(\lambda)_n m!n!}$$

olduğu dikkate alınır ve (3.34) eşitliği ile beraber

$$\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{2n}=\left(\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{2}\right)_n\left(\frac{\lambda-\frac{1}{2}+1}{2}\right)_n 2^{2n}\ ,$$

$$\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{3m}=\prod_{j=1}^{A}\left(\frac{a_j}{3}\right)_m\left(\frac{a_j+1}{3}\right)_m\left(\frac{a_j+2}{3}\right)_m 3^{3Am}\ ,$$

$$\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{3m}=\prod_{j=1}^{B}\left(\frac{b_j}{3}\right)_m\left(\frac{b_j+1}{3}\right)_m\left(\frac{b_j+2}{3}\right)_m 3^{3Bm}$$

özellikleri kullanılırsa

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_{m+2n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_m (-x)^m \left(\frac{x}{4}\right)^n}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\right)(2\lambda-1)_m(\lambda)_n m!n!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{3m}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{2m}\left(\frac{x^3}{4}\right)^m}{\left(\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{3m}\right)(\lambda)_m m!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\prod_{j=1}^{A}\left(\frac{a_j}{3}\right)_m\left(\frac{a_j+1}{3}\right)_m\left(\frac{a_j+2}{3}\right)_m\right)\left(\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{2}\right)_n\left(\frac{\lambda-\frac{1}{2}+1}{2}\right)_n (3^{A-B}x)^{3m}}{\left(\prod_{j=1}^{B}\left(\frac{b_j}{3}\right)_m\left(\frac{b_j+1}{3}\right)_m\left(\frac{b_j+2}{3}\right)_m\right)(\lambda)_m m!}$$

$$= {}_{3A+2}F_{3B+1}\left[\begin{array}{c} \Delta\left(2;\lambda-\frac{1}{2}\right), \Delta[3;(a)]\ ; \\ \lambda, \Delta[3;(b)]\ ; \end{array} (3^{A-B}x)^3\right]$$

olup ispat tamamlanır. ■

5 DOĞURUCU FONKSİYON İLİŞKİLERİ

$F(x,t)$ iki değişkenli fonksiyonu, değişkenlerinden birine göre

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n \tag{5.1}$$

şeklinde bir Taylor serisine açılmış olsun. Böyle bir durumda $F(x,t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$, $n=0,1,2,\ldots$ fonksiyonları için *doğurucu fonksiyon* denir. (5.1) serisinin tüm x ve t değerleri için yakınsak olması gerekmez. I belirli bir aralık ve r pozitif bir sabit olmak üzere $|t|<r$ ve $x\in I$ için yakınsak olması yeterlidir. Ortagonal (dik) fonksiyon ailelerinin pek çoğunun doğurucu fonksiyonu bilinmektedir. Bu tip ailelerin önemli bazı özelliklerinin ortaya çıkarılmasında doğurucu fonksiyon önemli rol oynar [1].

$\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)$ polinomu, keyfi katsayılı bazı polinomlar sınıfının özel bir durumu olup ilk olarak 1972 yılında Srivastava tarafından, son zamanlarda ise Lin tarafından ele alınmıştır [13]. $\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)$ polinomu [13]

$$\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\frac{(-n)_{mk}(\mu+n)_{lk}}{k!}\Omega(k)z^k\ , \quad (l,m\in\mathbb{N};\ n\in\mathbb{N}_0) \tag{5.2}$$

biçiminde tanımlı olup, burada $\{\Omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, daha önce de belirtildiği gibi keyfi reel veya kompleks sayıların sınırlı bir dizisidir. Bu bölümde $\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)$ polinom sınıfı için iki adet doğurucu fonksiyon bulunacaktır. Bunun için

(5.2) tanımı kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}t^n\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\frac{(-n)_{mk}(\mu+n)_{lk}}{k!}\Omega(k)z^k$$

olup

$$(\mu+n)_{lk}=\frac{(\mu)_{lk}(\mu+lk)_n}{(\mu)_n}\quad,\quad(-n)_{mk}=\frac{(-1)^{mk}n!}{(n-mk)!}$$

özelliklerinden

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\frac{(\lambda)_n(-1)^{mk}n!(\mu)_{lk}(\mu+lk)_n}{n!(n-mk)!(\mu)_nk!}\Omega(k)z^kt^n$$

elde edilir. 2.4. Lemmadan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mk}(\lambda)_{n+mk}(\mu)_{lk}(\mu+lk)_{n+mk}}{n!k!(\mu)_{n+mk}}\Omega(k)z^kt^{n+mk}$$

bulunur. Böylece

$$(\lambda)_{n+mk}=(\lambda)_{mk}(\lambda+mk)_n \quad , \quad (\mu)_{n+mk}=(\mu)_{mk}(\mu+mk)_n$$
$$(\mu+lk)_{n+mk}=\frac{(\mu)_n(\mu+n)_{k(m+l)}}{(\mu)_{lk}}$$

özelliklerinden

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mk}(\lambda)_{mk}(\lambda+mk)_n(\mu)_{lk}(\mu)_n(\mu+n)_{k(m+l)}}{k!n!(\mu)_{mk}(\mu+mk)_n(\mu)_{lk}}\Omega(k)z^k t^{n+mk}$$

elde edilir.

$$(\mu+n)_{k(m+l)}=\frac{(\mu)_{k(m+l)}(\mu+k(m+l))_n}{(\mu)_n}$$

ifadesi yukarıdaki son eşitlikte yerine yazılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mk}(\lambda)_{mk}(\lambda+mk)_n(\mu)_n(\mu)_{k(m+l)}(\mu+k(m+l))_n}{k!n!(\mu)_{mk}(\mu+mk)_n(\mu)_n}\Omega(k)z^k t^{n+mk}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{mk}(\mu)_{k(m+l)}}{(\mu)_{mk}k!}\Omega(k)z^k(-t)^{mk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu+k(m+l))_n(\lambda+mk)_n t^n}{(\mu+mk)_n n!}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{mk}(\mu)_{k(m+l)}}{(\mu)_{mk}k!}\Omega(k)\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\mu+(l+m)k,\lambda+mk\ ; \\ \mu+mk\ ;\end{matrix}\ t\right]\{z(-t)^m\}^k$$

sonucuna ulaşılır. Son eşitlikten $k\longrightarrow n$ indis değişimi ile

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{mn}(\mu)_{n(m+l)}}{(\mu)_{mn}}\Omega(n)\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\mu+(l+m)n,\lambda+mn\ ; \\ \mu+mn\ ;\end{matrix}\ t\right]\frac{\{z(-t)^m\}^n}{n!} \tag{5.3}$$

elde edilir. Pfaff-Kummer Dönüşümü [14]

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\beta\ ; \\ \gamma\ ;\end{matrix}\ z\right]=(1-z)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\gamma-\beta\ ; \\ \gamma\ ;\end{matrix}\ \frac{z}{z-1}\right] \tag{5.4}$$

şeklinde olup (5.4) dönüşümü, (5.3) eşitliğindeki ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonuna uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{mn}(\mu)_{n(m+l)}}{(\mu)_{mn}}\Omega(n)(1-t)^{-[\mu+(l+m)n]}$$
$$\cdot\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\mu+(l+m)n,\mu-\lambda\ ; \\ \mu+mn\ ;\end{matrix}\ \frac{t}{t-1}\right]\frac{\{z(-t)^m\}^n}{n!}$$

bulunur. Son eşitlik düzenlenirse $|t|<1;\ l,m\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n=(1-t)^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega(n)(\lambda)_{mn}(\mu)_{n(m+l)}}{(\mu)_{mn}n!}$$
$$\cdot\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\mu+(l+m)n,\mu-\lambda\ ; & \dfrac{t}{t-1}\\ \mu+mn\ ; & \end{matrix}\right]\left(\frac{\{z(-t)^m\}}{(1-t)^{l+m}}\right)^n \tag{5.5}$$

elde edilir. (5.5) eşitliği için $\lambda=\mu$ özel durumunda

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\mu+(l+m)n,0\ ; & \dfrac{t}{t-1}\\ \mu+mn\ ; & \end{matrix}\right]&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+(l+m)n)_k(0)_k\left(\frac{t}{t-1}\right)^k}{(\mu+mn)_k k!}\\&=\frac{(\mu+(l+m)n)_0(0)_0\left(\frac{t}{t-1}\right)^0}{(\mu+mn)_0 0!}+\dots\\&=1\end{aligned}$$

olacağından $|t|<1;\ l,m\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n=(1-t)^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega(n)(\mu)_{n(m+l)}}{n!}\left(\frac{\{z(-t)^m\}}{(1-t)^{l+m}}\right)^n \tag{5.6}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca (5.5) eşitliğinin sağ tarafı

$$\begin{aligned}&(1-t)^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega(n)(\lambda)_{mn}(\mu)_{n(m+l)}}{(\mu)_{mn}n!}\left(\frac{\{z(-t)^m\}}{(1-t)^{l+m}}\right)^n\\&\qquad\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+(l+m)n)_k(\mu-\lambda)_k}{(\mu+mn)_k k!}\left(\frac{t}{t-1}\right)^k\\&=(1-t)^{-\mu}\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{\Omega(n)(\lambda)_{mn}(\mu)_{n(m+l)}(\mu+(l+m)n)_k(\mu-\lambda)_k}{(\mu)_{mn}(\mu+mn)_k n!k!}\\&\qquad\cdot\left(\frac{\{z(-t)^m\}}{(1-t)^{l+m}}\right)^n\left(\frac{t}{t-1}\right)^k\end{aligned}$$

olup

$$(\mu+mn)_k=\frac{(\mu)_{mn+k}}{(\mu)_{mn}}\quad,\quad(\mu+n(l+m))_k=\frac{(\mu)_{n(l+m)+k}}{(\mu)_{n(l+m)}}$$

özelliklerinden son eşitliğin sağ tarafı

$$(1-t)^{-\mu}\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{\Omega(n)(\lambda)_{mn}(\mu)_{n(m+l)}(\mu)_{n(l+m)+k}(\mu-\lambda)_k(\mu)_{mn}}{(\mu)_{n(l+m)}(\mu)_{mn}(\mu)_{mn+k}n!k!}\left(\frac{\{z(-t)^m\}}{(1-t)^{l+m}}\right)^n\left(\frac{t}{t-1}\right)^k$$

olarak bulunur. Bu son ifade düzenlenirse

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\mathcal{T}_n^{l,m}(z;\mu)t^n$$
$$= (1-t)^{-\mu}\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{\Omega(n)(\lambda)_{mn}(\mu)_{n(l+m)+k}(\mu-\lambda)_k}{(\mu)_{mn+k}n!k!}\left(\frac{\{z(-t)^m\}}{(1-t)^{l+m}}\right)^n\left(\frac{t}{t-1}\right)^k \tag{5.7}$$

elde edilir. Şimdi sırasıyla (5.6) ve (5.7) eşitlikleri için hipergeometrik doğurucu fonksiyon ailesi bulunacaktır. Bunun için sırasıyla (5.6) ve (5.7) eşitliklerinden $|t|<1;\ l,m\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
(-n)_{mk} &= \left(\frac{-n}{m}\right)_k\left(\frac{-n+1}{m}\right)_k\cdots\left(\frac{-n+m-1}{m}\right)_k m^{mk}\ ,\\
(\mu+n)_{lk} &= \left(\frac{\mu+n}{l}\right)_k\left(\frac{\mu+n+1}{l}\right)_k\cdots\left(\frac{\mu+n+l-1}{l}\right)_k l^{lk}\ ,\\
(\mu)_{(l+m)n} &= \left(\frac{\mu}{l+m}\right)_n\left(\frac{\mu+1}{l+m}\right)_n\cdots\left(\frac{\mu+n(l+m)-1}{l+m}\right)_n (l+m)^{(l+m)k}\ ,\\
\Delta(m;-n) &= \frac{-n}{m},\frac{-n+1}{m},\ldots,\frac{-n+m-1}{m}\ ,\\
\Delta(l;m+n) &= \frac{m+n}{l},\frac{m+n+1}{l},\ldots,\frac{m+n+l-1}{l}\ ,\\
\Delta(l+m;\mu) &= \frac{\mu}{l+m},\frac{\mu+1}{l+m},\ldots,\frac{\mu+l+m-1}{l+m}
\end{aligned}$$

özelliklerinin göz önüne alınması ve $\Omega(n)$ değerinin, (4.2) eşitliğindeki gibi alınmasıyla istenilen hipergeometrik doğurucu fonksiyon ailesi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_n}{n!}\ {}_{l+m+A}F_B\left[\begin{array}{r}\Delta(m;-n),\Delta(l;m+n),(a)\ ;\\ (b)\ ;\end{array}\ zl^lm^m\right]t^n$$
$$= (1-t)^{-\mu}\ {}_{l+m+A}F_B\left[\begin{array}{r}\Delta(l+m;\mu),(a)\ ;\\ (b)\ ;\end{array}\ z(-t)^m\left(\frac{l+m}{1-t}\right)^{l+m}\right] \tag{5.8}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\ {}_{l+m+A}F_B\left[\begin{array}{r}\Delta(m;-n),\Delta(l;m+n),(a)\ ;\\ (b)\ ;\end{array}\ zl^lm^m\right]t^n = (1-t)^{-\mu}$$
$$\cdot\ F_{1:B;0}^{1:1+A;1}\left(\begin{array}{lll}[\mu:l+m,1]:[\lambda:m],[(a):1]\,;[\mu-\lambda:1]\ ; & \dfrac{z(-t)^m}{(1-t)^{l+m}},\dfrac{t}{t-1}\\ [\mu:m,1]: \qquad [(b):1]\,; \qquad - \qquad ; & \end{array}\right) \tag{5.9}$$

olarak bulunur.

Ayrıca (5.9) ve (5.8) hipergeometrik doğurucu fonksiyonun çeşitli özel durumları ve sonuçları matematiksel literatürde oldukça yaygındır [18]. Üstelik Ben Cheikh'nin son çalışmalarından bazıları bu tip hipergeometrik doğurucu fonksiyonların ailelerine dayanır [7]. Özellikle (5.8) eşitliğinde $l = m = 1$ alınırsa $|t| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu)_n}{n!} \; {}_{A+2}F_B \left[\begin{array}{r} -n, \mu + n, (a) \; ; \\ (b) \; ; \end{array} z \right] = (1-t)^{-\mu} \; {}_{A+2}F_B \left[\begin{array}{r} \Delta(2;\mu), (a) \; ; \\ (b) \; ; \end{array} \frac{-4zt}{(1-t)^2} \right]$$

elde edilir ki bu da Chaundy'nin hipergeometrik doğurucu fonksiyonlarından biridir [18].

Teorem 5.1 $N \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)_n \prod\limits_{j=1}^{A} (a_j)_n \{(1-x)t\}^n}{\prod\limits_{j=1}^{B} (b_j)_n n!} \; {}_{2N+(N-1B)}F_{2N+(N-1)A-2}$$
$$\left[\begin{array}{r} \Delta(N;-n), \Delta[N-1; 1-(b)-n], \Delta(N; 2-2\lambda-n); \\ \Delta[N-1; 1-(a)-n], \Delta(N; \frac{3}{2}-\lambda-n), \Delta(N-2; 2-2\lambda-n), \lambda; \end{array} z \right]$$
$$= F^{A+1:0;0}_{B:1;0} \left(\begin{array}{r} \left[\lambda - \frac{1}{2} : 2, 1\right], [(a) : 3, 1] : \quad - ; - ; \\ \left[(b) : 3, 1\right] : [\lambda : 1] ; - ; \end{array} x(1-x)^2 t^{N+2}, (1-x)t + 4xt^N \right) \tag{5.10}$$

şeklinde verilen, hipergeometrik doğurucu fonksiyon ilişkisi doğrudur. Burada uygunluk için

$$z = (-1)^{(N-1)(A+B)} \frac{xN^N (N-1)^{(N-1)(B-A)}}{(N-2)^{N-2}(1-x)^N}$$

alınmalıdır [12].

İspat. (5.10) hipergeometrik doğurucu fonksiyon ilişkisinin sol tarafına $\psi(x,t)$ denir ve $j = 1, 2, \ldots, A$, $j = 1, 2, \ldots, B$ için

$$\begin{aligned}
\Delta(N;-n) &= \frac{-n}{N}, \frac{-n+1}{N}, \ldots, \frac{-n+N-1}{N} \;, \\
\Delta(N; 2-2\lambda-n) &= \frac{2-2\lambda-n}{N}, \frac{3-2\lambda-n}{N}, \ldots, \frac{1-2\lambda+N-n}{N} \;, \\
\Delta(N; \frac{3}{2}-\lambda-n) &= \frac{\frac{3}{2}-\lambda-n}{N}, \frac{\frac{5}{2}-\lambda-n}{N}, \ldots, \frac{\frac{1}{2}-\lambda+N-n}{N} \;, \\
\Delta(N-2; 2-2\lambda-n) &= \frac{2-2\lambda-n}{N-2}, \frac{3-2\lambda-n}{N-2}, \ldots, \frac{N-2\lambda-n-1}{N-2} \;, \\
\Delta[N-1; 1-(a)-n] &= \frac{1-a_j-n}{N-1}, \frac{2-a_j-n}{N-1}, \ldots, \frac{N-a_j-n-1}{N-1} \;, \\
\Delta[N-1; 1-(b)-n] &= \frac{1-b_j-n}{N-1}, \frac{2-b_j-n}{N-1}, \ldots, \frac{N-b_j-n-1}{N-1} \;,
\end{aligned}$$

$$(-n)_{Nm}=\left(\frac{-n}{N}\right)_m\cdots\left(\frac{-n+N-1}{N}\right)_m N^{Nm}\ ,$$
$$(2-2\lambda-n)_{Nm}=\left(\frac{2-2\lambda-n}{N}\right)_m\cdots\left(\frac{1-2\lambda+N-n}{N}\right)_m N^{Nm}\ ,$$
$$(2-2\lambda-n)_{(N-2)m}=\left(\frac{2-2\lambda-n}{N-2}\right)_m\cdots\left(\frac{N-2\lambda-n-1}{N-2}\right)_m (N-2)^{(N-2)m}\ ,$$

$$\left(\frac{3}{2}-\lambda-n\right)_{Nm}=\left(\frac{\frac{3}{2}-\lambda-n}{N}\right)_m\cdots\left(\frac{\frac{1}{2}+N-\lambda-n}{N}\right)_m N^{Nm},$$
$$\prod_{j=1}^{A}(1-a_j-n)_{(N-1)m}=\prod_{j=1}^{A}\left(\frac{1-a_j-n}{N-1}\right)_m\cdots\left(\frac{N-a_j-n-1}{N-1}\right)_m (N-1)^{(N-1)Am}\ ,$$
$$\prod_{j=1}^{B}(1-b_j-n)_{(N-1)m}=\prod_{j=1}^{B}\left(\frac{1-b_j-n}{N-1}\right)_m\cdots\left(\frac{N-b_j-n-1}{N-1}\right)_m (N-1)^{(N-1)Bm}$$

oldukları göz önüne alınırsa

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_n\{(1-x)t\}^n}{\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_n n!}$$
$$\cdot\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{N}\right]}\frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{B}(1-b_j-n)_{(N-1)m}\right)(-n)_{Nm}}{\left(\prod\limits_{j=1}^{A}(1-a_j-n)_{(N-1)m}\right)(2-2\lambda-n)_{(N-2)m}}$$
$$\cdot\frac{(2-2\lambda-n)_{Nm}}{\left(\frac{3}{2}-\lambda-n\right)_{Nm}(\lambda)_m m!}\left((-1)^{(N-1)(A+B)}\frac{x}{(1-x)^N}\right)^m$$

elde edilir. Burada

$$\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{n-Nm}=\frac{(-1)^{Nm}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}-\lambda-n\right)_{Nm}}\ ,$$
$$(n-Nm)!=\frac{n!}{(-1)^{Nm}(-n)_{Nm}}\ ,$$
$$(2\lambda-1)_{n-(N-2)m}=\frac{(-1)^{(N-2)m}(2\lambda-1)_n}{(2-2\lambda-n)_{N-2}m}\ ,$$
$$(2\lambda-1)_{n-Nm}=\frac{(-1)^{Nm}(2\lambda-1)_n}{(2-2\lambda-n)_{Nm}}\ ,$$
$$\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{n-(N-1)m}=\prod_{j=1}^{A}\frac{(-1)^{(N-1)Am}(a_j)_n}{(1-a_j-n)_{(N-1)m}}\ ,$$
$$\prod_{j=1}^{B}(b_j)_{n-(N-1)m}=\prod_{j=1}^{B}\frac{(-1)^{(N-1)Bm}(b_j)_n}{(1-b_j-n)_{(N-1)m}}$$

eşitliklerinden yararlanarak

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_n\{(1-x)t\}^n}{\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_n n!}$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{N}\right]}\frac{n!(-1)^{Nm}(2\lambda-1)_n(2\lambda-1)_{n-(N-2)m}}{(2\lambda-1)_{n-Nm}(-1)^{Nm}(n-Nm)!m!(-1)^{(N-2)m}(2\lambda-1)_n}$$

$$\cdot\frac{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{n-Nm}(-1)^{(N-1)Bm}\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_n\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{n-(N-1)m}}{(-1)^{Nm}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n(\lambda)_m(-1)^{(N-1)Am}\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{n-(N-1)m}\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_n}$$

$$\cdot\left((-1)^{(N-1)(A+B)}\frac{x}{(1-x)^N}\right)^m$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{N}\right]}\frac{\{(1-x)t\}^n\{x(1-x)^{-N}\}^m\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{n-Nm}(2\lambda-1)_{n-(N-2)m}}{(n-Nm)!m!(\lambda)_m(2\lambda-1)_{n-Nm}}$$

$$\cdot\frac{\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{n-(N-1)m}}{\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{n-(N-1)m}}$$

elde edilir. 2.4. Lemmadan

$$\psi(x,t)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n(2\lambda-1)_{2m+n}(xt^N)^m\{(1-x)t\}^n}{\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}(\lambda)_m(2\lambda-1)_n m!n!}$$

bulunur. (3.27) eşitliğinde $\Omega(n)$, (4.2) eşitliğindeki gibi seçilir, $b=\lambda$, $x=xt^N$ ve $y=(1-x)t$ alınırsa

$$\psi(x,t)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_n(2\lambda-1)_{2m+n}(xt^N)^m\{(1-x)t\}^n}{\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}(\lambda)_m(2\lambda-1)_n m!n!}$$

$$=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{3m+n}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)_{2m+n}\left(x(1-x)^2t^{N+2}\right)^m\left((1-x)t+4xt^N\right)}{\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{3m+n}(\lambda)_m m!n!}$$

eşitliği yazılabileceğinden

$$\psi(x,t)=F^{A+1:0;0}_{B:1;0}\left(\begin{array}{r}\left[\lambda-\frac{1}{2}:2,1\right],[(a):3,1]:\quad-\quad;-;\\ [(b):3,1]:[\lambda:1];-;\end{array}x(1-x)^2t^{N+2},(1-x)t+4xt^N\right)$$

olarak bulunur ki bu da ispatı tamamlar. ■

KAYNAKLAR

[1] Altın, A. *Uygulamalı Matematik,* Gazi Kitapevi, Ankara, 2011.

[2] Andrews, G. E.; Askey, R.; Roy, R. *Special Functions,* Cambridge University Press **1999**, Cambridge, London, New York.

[3] Askey, R. *A Look At The Bateman Project,* Contemp. Math. **1994**, 169, 29-43.

[4] Atak, Ö. *On Calculation of Bilateral Generating Functions of Special Functions Using Sl (2) Representations,* Abant İzzet Baysal Üniv. Fen Bil. Enst. Yüksek Lisans Tezi **2007**.

[5] Bailey, W. N. *Products of Generalized Hypergeometric Series,* Proc. London Math. Soc. (2) **1928**, 28, 242-254.

[6] Bailey, W. N. *Transformations of Generalized Hypergeometric Series,* Proc. London Math. Soc. (2) **1929**, 29, 495-502.

[7] Ben Cheikh, Y. *Decomposition of Some Hypergeometric Polynomials with Respect to The Cycling Group of Order n,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **2000**, 32, 103-121.

[8] Buschman, R. G.; Srivastava, H. M. *Series Identities and Reducibility of Kampé de Fériet Functions,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **1982**, 91, 435-440.

[9] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions,* McGraw-Hill Book Company **1953**, New York.

[10] Hài, N. T.; Marichev, O. I.; Srivastava, H. M. *A Note on The Convergence of Certain Families of Multiple Hypergeometric Series,* J. Math. Anal. Appl. **1992**, 164, 104-115.

[11] Chen, K. Y.; Srivastava, H. M. *Series Identities and Associated Families of Generating Functions,* J. Math. Anal. Appl. **2005**, 311, 582-599.

[12] Chen, K. Y.; Liu, S. J.; Srivastava, H. M. *Some Double-Series Identities and Associated Generating Function Relationships,* Applied Mathematics Letters **2006**, 19, 887-893.

[13] Lin, S. D.; Srivastava, H. M.; Wang, P. Y. *Some Families of Hypergeometric Transformations and Generating Relations,* Math. Comput. Modelling **2002**, 36, 445-459.

[14] Rainville, E. D. *Special Functions,* Macmillan **1960**, Reprinted by Chelsea, Bronx, NY, 1971.

[15] Srivastava, H. M.; Daoust, M. C. *Certain Generalized Neumann Expansions Associated with Kampé de Fériet Function,* Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **1969**, 31, 449-457.

[16] Srivastava, H. M.; Daoust, M. C. *On Eulerian Integrals Associated with Kampé de Fériet's Function,* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S) (23) **1969**, 9, 199-202.

[17] Srivastava, H. M.; Daoust, M. C. *A Note on The Convergence of Kampé de Fériet's Double Hypergeometric Series,* Math. Nachr. **1972**, 53, 151-159.

[18] Srivastava, H. M.; Manocha, H. L. *A Treatise on Generating Functions,* Halsted/Ellis Horwood/Willey, **1984**, New York.

[19] Srivastava, H. M.; Karlsson, P. W. *Multiple Gaussian Hypergeometric Series,* Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons **1985** , New York, Chichester, Brisbane, Toronto.

[20] Srivastava, H. M. *An Identity for Double Hypergeometric Series,* SIAM Rev. **1986**, 28, 576-578.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı	: Hüseyin SANCAR
Doğum Yeri	: Çorum
Doğum Tarihi	: 23.08.1987
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim

Orta Öğrenim	: Çorum Eti Lisesi, 2002-2006.
Lisans	: Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2006-2010.
Yüksek Lisans	: Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2010-...