



T.C.  
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

## DE SITTER 3-UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER

Cansu DOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019



T.C.  
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

## DE SITTER 3-UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER

Cansu DOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 12.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

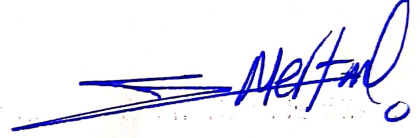
**Tez Jürisi**



Prof. Dr. Levent KULA  
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi



Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK  
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi



Dr. Öğr. Üyesi Tuğba MERT  
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi  
Fen Fakültesi

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Cansu DOĞAN



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; bu lisansüstü teze, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi’nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.



## ÖNSÖZ

"De Sitter 3-Uzayında Rektifiyan Eğriler" konulu tezimin hazırlanmasında, başlangıcından sonuna kadar karşılaştığım sorunların çözümünde deneyimlerinden ve bilgilerinden yararlandığım hocam Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Araştırmalarımda bilgilerinden yararlandığım Prof. Dr. Levent KULA'ya teşekkür ederim.

Çalışmalarımda bana destek veren değerli eşim Burak DOĞAN'a, gerekli izin işlemlerim için yardımlarını esirgemeyen Başpolis Memuru İhsan ZENCİR'e ve bu süreçte bana destek veren değerli aileme sonsuz teşekkür ederim.

Temmuz, 2019

Cansu DOĞAN



# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ . . . . .	v
İÇİNDEKİLER . . . . .	vi
ŞEKİL LİSTESİ . . . . .	vii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ . . . . .	viii
ÖZET . . . . .	ix
ABSTRACT . . . . .	x
1. GİRİŞ . . . . .	1
1.1. Minkowski Uzayında Temel Kavramlar . . . . .	4
1.2. De Sitter 3-Uzayında Temel Kavramlar . . . . .	7
2. $S_1^3$ de NON-DEJENERE REKTİFİYAN EĞRİLER VE KONİK YÜZEYLER . . . . .	15
3. $S_1^3$ de TİMELİKE REKTİFİYAN EĞRİLERİN GENEL HELİSLERLE İLİŞKİSİ . . . . .	22
4. $S_1^3$ de TİMELİKE REKTİFİYAN EĞRİLERİN SINIFLANDIRMASI . . . . .	28
5. $S_1^3$ de EKSTREMUMLU TİMELİKE REKTİFİYAN EĞRİLER . . . . .	35
KAYNAKLAR . . . . .	42
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	45

## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
<b>Şekil 5.1.</b> $\gamma$ timelike rektifiyan eğrisinin, Minkowski 3-uzayına stereografik izdüşümü . . .	39
<b>Şekil 5.2.</b> (a) $V(t)$ timelike pseudo-küresel izdüşüm eğrisi (b) $\gamma$ timelike rektifiyan eğrisinin Minkowski 3-uzayına stereografik izdüşümü . . . . .	40
<b>Şekil 5.3.</b> (a) $V(t)$ spacelike pseudo-küresel izdüşüm eğrisi (b) $\gamma$ spacelike rektifiyan eğrisinin Minkowski 3-uzayına stereografik izdüşümü . . . . .	41





## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\mathbb{R}^3$	: Öklidyen 3-uzay
$\mathbb{R}_1^n$	: Minkowski n-uzay
$\mathbb{R}_1^3$	: Minkowski 3-uzay
$\mathbb{R}_1^4$	: Minkowski 4-uzay
$\mathbb{S}_1^3$	: De Sitter 3-uzay
$\mathbb{S}^2$	: Birim küre
$\mathbb{S}_1^2$	: Birim pseudo-küre
$\mathbb{S}_1^1$	: Birim pseudo-çember
$T_p\mathbb{S}_1^3$	: De Sitter 3-uzayının $p$ noktasındaki teğet uzayı
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Skalar çarpım
$\ \cdot\ $	: Lorentz normu
$\text{sign}(\cdot)$	: İşaret fonksiyonu
$\times$	: Minkowski 4-uzayda Lorentz vektörel çarpma
$\wedge$	: De Sitter 3-uzayda vektörel çarpma
$\text{HP}(v, c)$	: Minkowski 4-uzayda hiperdüzlem
$\gamma$	: De Sitter 3-uzayda non-dejenere eğri
$\nabla^0$	: Minkowski 4-uzayının Levi-Civita konneksiyonu
$\bar{\nabla}$	: De Sitter 3-uzayının Levi-Civita konneksiyonu
$T_\gamma$	: $\gamma$ nın birim teğet vektörü
$N_\gamma$	: De Sitter 3-uzayda $\gamma$ nın asli normal vektörü
$B_\gamma$	: De Sitter 3-uzayda $\gamma$ nın binormal vektörü
$\kappa_g$	: De Sitter 3-uzayda $\gamma$ nın geodezik eğriliği
$\tau_g$	: De Sitter 3-uzayda $\gamma$ nın geodezik burulması
$\delta_1$	: $T_\gamma$ nın işareti
$\delta_2$	: $N_\gamma$ nın işareti
$\delta_3$	: $B_\gamma$ nın işareti
$\exp_p$	: De Sitter 3-uzayda $p$ noktasındaki üstel dönüşüm
$\beta_s(u)$	: De Sitter 3-uzayda $p$ ve $\gamma(s)$ den geçen geodezik
$\exp_{\gamma(s)}(uN_\gamma(s))$	: De Sitter 3-uzayda $\gamma$ eğrisinin asli normal geodeziği
$P$	: De Sitter 3-uzayda bir geodezik boyunca paralel öteleme dönüşümü
$M$	: De Sitter 3-uzayda non-dejenere yüzey
$\nabla$	: $M$ yüzeyinin Levi-Civita konneksiyonu
$\psi(t, z)$	: De Sitter 3-uzayda non-dejenere konik yüzeyin paramaterizasyonu
$N(t, z)$	: De Sitter 3-uzayda non-dejenere konik yüzeyin birim normal vektör alanı
$V$	: $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$ de non-dejenere birim hızlı eğri
$T_V$	: $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$ de $V$ nin birim teğeti
$N_V$	: $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$ de $V$ nin asli normalı
$\kappa_V$	: $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$ de $V$ nin geodezik eğriliği
$\delta$	: $T_V$ nin işareti

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## DE SITTER 3-UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER

Cansu DOĞAN

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK

Bu tez çalışmasında, pozitif sabit eğrilikli Lorentziyen uzay formu olarak bilinen De Sitter 3-uzayında non-dejenere rektifiyan eğri kavramı tanımlandı. Özellikle, De Sitter 3-uzayında sıfırdan farklı geodezik burulmaya sahip timelike eğriler için bazı karakterizasyonlar ilk defa bu tezde elde edildi. Buna göre, De Sitter 3-uzayındaki bir timelike konik yüzeyin geodeziğinin, timelike rektifiyan eğri olmasının gerek ve yeter şart olduğu gösterildi. Sonra, De Sitter 3-uzayında timelike rektifiyan eğriler için geodezik burulmasının, geodezik eğriliğine oranına göre bir karakterizasyon verildi. Daha sonra, De Sitter 3-uzayında timelike rektifiyan eğrilerin sınıflandırılması ile ilgili karakterizasyon verildi. Son olarak, ekstremumlu eğriler bakış açısıyla, De Sitter 3-uzayında sıfırdan farklı sabit geodezik eğrilikli ve lineer formda geodezik burulmaya sahip bir timelike eğrinin, iki boyutlu pseudo-küredeki spiral tipten birim hızlı timelike eğri tarafından üretilen bir timelike rektifiyan eğriye kongrüent olduğu sonucu elde edildi.

Temmuz 2019, 45 Sayfa.

**Anahtar Kelimeler:** Rektifiyan Eğri, Konik Yüzey, Geodezik, Helis, Ekstremumlu Eğri, Spiral Eğri

# ABSTRACT

MSc THESIS

## RECTIFYING CURVES IN DE SITTER 3-SPACE

Cansu DOĞAN

Kırşehir Ahi Evran University  
Science and Engineering Institute  
Mathematics Department

Supervisor: Asst. Prof. Mahmut MAK

In this thesis, we give the notion of non-degenerate rectifying curve and non-degenerate conical surface in De Sitter 3-space which is known that Lorentzian space form with positive constant curvature one. Especially, in this thesis for the first time, some characterizations of timelike rectifying curves with nonzero geodesic torsion are obtained in De Sitter 3-space. In this sense, we give relationship between timelike rectifying curve and geodesic of timelike conical surface in De Sitter 3-space. After, we obtain a nice characterization with respect to the ratio of geodesic torsion and geodesic curvature for timelike rectifying curves in De Sitter 3-space. Moreover, we have a characterization which determines all timelike rectifying curve in De Sitter 3-space. Finally, in viewpoint of extremal curves, we give a corollary that a timelike curve in De Sitter 3-space, which has non-zero constant geodesic curvature and linear form geodesic torsion, congruent to a timelike rectifying curve, which is generated by a spiral type unit speed timelike curve with certain geodesic curvature in 2-dimensional pseudo-sphere, and vice versa.

July 2019, 45 Pages.

**Keywords:** Rectifying Curve, Conical Surface, Geodesic, Helix, Extremal Curve, Spiral Curve

## 1. GİRİŞ

$\mathbb{R}^3$  Öklidyen 3-uzayında, en az dördüncü mertebeden sürekli türevlere sahip her bir  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  regüler birim hızlı eğrisi için sırasıyla, eğrinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanı olarak adlandırılan ve birbirine karşılıklı olarak ortogonal olan  $T, N, B$  birim vektör alanlarını (Serret-Frenet vektör alanlarını) bulmak mümkündür. Bu durumda eğrinin her bir noktasında  $\{T, N\}$ ,  $\{T, B\}$  ve  $\{N, B\}$  vektörleri tarafından gerilen düzlemler sırasıyla, oskütatör düzlem, rektifiyan düzlem ve normal düzlem olarak adlandırılır. Eğer  $\mathbb{R}^3$  de bir eğri sıfırdan farklı eğrilik ve burulmaya sahip ise burulmalı eğri olarak adlandırılır. Eğriler teorisinden aşağıdaki kavramlar iyi bilinmektedir.

- " $\mathbb{R}^3$  de bir eğrinin pozisyon vektörü, eğrinin her bir noktasında oskütatör düzlemde yatıyor ise eğri bir düzlemde yatar. Yani eğrinin burulması sıfırdır."
- " $\mathbb{R}^3$  de bir eğrinin pozisyon vektörü, eğrinin her bir noktasında normal düzlemde yatıyor ise eğri bir kürede yatar. Yani eğri bir küresel eğridir."

Bu kavramlar üzerine, 2003 de Chen, " $\mathbb{R}^3$  de bir eğrinin pozisyon vektörü, eğrinin her bir noktasında rektifiyan düzlemde ne zaman yatar?" sorusuna yanıt aramıştır. Böylece, bu sorudan ortaya çıkan yeni eğri türünü şöyle tanımlamıştır:

- Bir  $p \in \mathbb{R}^3$  sabit noktası var öyle ki bazı  $\lambda(s), \mu(s)$  diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha(s) - p = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s) \quad (1.1)$$

özelliğini sağlayan  $\alpha$  eğrisine,  $\mathbb{R}^3$  de bir rektifiyan eğri denir [5].

Buradan herbir  $s$  için  $p$  sabit noktasının, eğrinin bütün rektifiyan düzlemlerine ait olduğu açıktır. (1.1) eşitliğine,  $\mathbb{R}^3$  ün diferensiyellenebilir manifold yapısına göre veya eğrinin herhangi bir noktasındaki teğet uzayı yapısına göre farklı gözle de bakılabilir. " $\mathbb{R}^3$  de burulmalı bir eğri genel helistir gerek ve yeter şart eğrinin her bir noktasında burulmasının ( $\tau$ ), eğriliğine ( $\kappa$ ) oranı sıfırdan farklı bir sabittir" karakterizasyonu iyi bilinir. [5] de Chen rektifiyan eğriler için,

- " $\mathbb{R}^3$  de burulmalı bir eğri, bir rektifiyan eğriye kongrüenttir gerek ve yeter şart  $\tau/\kappa$  oranı, eğrinin yay parametresine göre bir sabit olmayan lineer fonksiyondur."

karakterizasyonunu elde etti.  $\mathbb{R}^3$  de eğrilerin temel varlık ve teklik teoreminden, eğrinin yay uzunluğuna göre eğrilik ve burulma fonksiyonları verilirse o zaman uygun katı hareketler altında eğri tek olarak belirlenebilir. Fakat pratikte,  $\mathbb{R}^3$  de eğriliği ve burulması verilen bir eğrinin parametrisasyonunu her zaman açık olarak belirlemek mümkün olmamasına rağmen bazı özel

durumlar için bilgisayar desteği ile nümerik çözümler elde edilebilir. Bununla birlikte,  $\mathbb{R}^3$  de  $\kappa > 0$  olacak şekilde bir rektifiyan eğrinin, birim hızlı küresel bir eğriden üretilebileceğini gösterdi [5].

[20] de Izumiya ve Takeuchi,  $\mathbb{R}^3$  de sıfırdan farklı eğriliğe sahip regüler bir eğrinin rektifiyan açılabilir yüzeyini tanımladı. Ayrıca,

- " $\mathbb{R}^3$  de bir rektifiyan açılabilir yüzey, bir konik yüzeydir gerek ve yeter şart yüzeyin üreteç eğrisi bir konik geodezik eğridir (yani [5] deki rektifiyan eğri)."

önermesi elde edildi [20]. Yani, rektifiyan eğri kavramı kullanmadan, bu eğrilerin konik yüzeyde yattığı ifade edildi.

Kinematik ile birlikte mekanikte önemli rol oynayan ve anlık dönüş merkezinin (instantaneous center of rotation) izlediği yol olarak bilinen centroid (*centrode*),  $\mathbb{R}^3$  de sıfırdan farklı eğriliğe sahip regüler bir eğrinin Darboux vektörüne karşılık gelir. Darboux vektör alanının, eğrinin rektifiyan düzleminde yatması sebebi ile centroid ve rektifiyan eğri arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki sayesinde, Chen ve Dillen tarafından,  $\mathbb{R}^3$  de bir rektifiyan eğriyi elde etmeye yarayan;

- " $\mathbb{R}^3$  de sıfırdan farklı sabit eğrilikli (sabit olmayan eğrilikli) ve sabit olmayan burulmalı (sıfırdan farklı sabit burulmalı) bir birim hızlı eğrinin centroidi, bir rektifiyan eğridir."
- " $\mathbb{R}^3$  de her rektifiyan eğri, sıfırdan farklı sabit eğrilikli (sabit olmayan eğrilikli) ve sabit olmayan burulmalı (sıfırdan farklı sabit burulmalı) birim hızlı bir eğrinin centroididir."

metotları verildi [6]. Aynı makalede, rektifiyan eğriler ile ekstremumlu eğriler arasındaki bağlantıyı kurdular. Böylece rektifiyan eğrileri elde etmek için diğer bir yöntem olan;

- " $\alpha$ ,  $\mathbb{R}^3$  de sıfırdan farklı sabit eğriliğe ve yay parametresine göre verilen sabit olmayan lineer burulmaya sahip bir eğridir gerek ve yeter şart  $\alpha$ ,  $S^2$  birim küresinde, geodezik eğriliği  $c \sec^3(t)$  ( $c$  belli bir sabit) fonksiyonuna eşit olan birim hızlı spiral tipteki bir eğriden elde edilen rektifiyan eğriye kongrüenttir."

sonucu elde edildi [6].

Manifold anlamında, (1.1) eşitliğinden,  $p$  noktası ile  $\alpha(s)$  yi birleştiren doğru ( $\mathbb{R}^3$  ün geodeziği),  $\alpha(s)$  nin  $N(s)$  asli normal doğrultusuna (yani  $\alpha(s)$  başlangıç noktalı  $N(s)$  doğrultmanlı geodezik) ortogondur. Böylece Riemann manifoldu bakış açısıyla, [5] de verilen rektifiyan eğri tanımı sırasıyla, [23] de küresel uzaya ve [24] da hiperbolik uzaya genişletilmiştir.

Daha yeni olarak, [5] ve [6] de verilen kavramlar üzerine [10] de

- $\mathbb{R}^3$  de herhangi bir helisin centroidinin, bir rektifiyan eğri olmadığı gösterildi,
- $S^2$  birim küresindeki geodezikler (büyük çemberler) haricindeki birim hızlı küresel eğriler tarafından,  $\mathbb{R}^3$  de rektifiyan eğri üretilebildiği ifade edildi,
- bazı şartlar altında,  $\mathbb{R}^3$  de helis olmayan bir eğrinin centroidinin rektifiyan eğri olması halinde üreteç eğrisinin Bertrand eğri olduğunun gerek ve yeter şartı elde edildi.
- $\mathbb{R}^3$  de bir  $\kappa > 0$  eğrilikli helis olmayan bir eğrinin, genişlemeli centroidi (dilated centrode) olan yeni eğrinin bir rektifiyan eğri olduğu gösterildi.

Böylece  $\mathbb{R}^3$  de rektifiyan eğri elde etmek için bir başka metot daha verildi.

Rektifiyan eğri kavramı ve özelliklerinin, Riemann veya pseudo-Riemann metrik ile verilen farklı (boyutlu) ambient uzaylara genişletilmesine dair diğer çalışmalar [1, 2, 7], [10]-[13], [15]-[20] nolu kaynaklarda mevcuttur.

Bu tezin amacı; Minkowski 4-uzayında bir sabit pozitif eğrilikli Lorentziyen uzay formu olan ve 3-boyutlu pseudo-küre olarak bilinen De Sitter 3-uzayında non-dejenere rektifiyan eğrileri tanımlamak ve [23, 24] da verilen mevcut karakterizasyonların Lorentziyen versiyonlarını, özellikle bu uzaydaki timelike rektifiyan eğriler için elde etmektir. Buna göre, tezin bölümleri aşağıdaki gibi oluşturuldu.

Birinci bölümde; Minkowski ve De Sitter 3-uzayında eğriler ve yüzeyler teorisi ile ilgili ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremlere yer verildi. İkinci bölümde; De Sitter 3-uzayında non-dejenere rektifiyan eğri ve non-dejenere konik yüzey tanımı verildi. Daha sonra genelliği bozmadan diğer bölümlerde; De Sitter 3-uzayında sıfırdan farklı geodezik burulmaya sahip timelike eğriler için karakterizasyonlar ilk defa bu tezde elde edildi. Buna göre ikinci bölümde; De Sitter 3-uzayındaki bir timelike konik yüzeyin geodeziğinin, timelike rektifiyan eğri olmasının gerek ve yeter şart olduğu gösterildi. Üçüncü bölümde; De Sitter 3-uzayında timelike rektifiyan eğriler için geodezik burulmasının, geodezik eğrilğine oranına göre bir karakterizasyon verildi. Dördüncü bölümde; De Sitter 3-uzayında timelike rektifiyan eğrileri sınıflandırmaya yarayan karakterizasyonlar elde edildi. Beşinci bölümde; ekstremumlu eğriler bakış açısıyla, De Sitter 3-uzayında sıfırdan farklı sabit geodezik eğrilikli ve lineer formda geodezik burulmaya sahip bir timelike eğrinin, birim hızlı spiral tipten timelike pseudo-küresel eğri tarafından üretilen bir timelike rektifiyan eğriye kongrüent olmasının gerek ve yeter şart olduğu verildi.

Şimdi, sırasıyla Minkowski ve De Sitter 3-uzayında eğriler ve yüzeyler teorisi ile ilgili ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremleri verelim.

## 1.1. Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

**Tanım 1.1.**  $V$  bir reel vektör uzayı olmak üzere  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümüne bilineer ve simetrik ise  $g$  dönüşümü  $V$  üzerinde bir bilineer form denir [26].

**Tanım 1.2.**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  simetrik bilineer form ve  $v \in V$  olsun. O zaman, her  $u \in V$  için  $g(u, v) = 0$  olması  $v = 0$  olmasını gerektiriyorsa  $g$  dönüşümüne non-dejenere form denir [26].

**Tanım 1.3.**  $V$  vektör uzayının bir alt vektör uzayı  $W$  olsun. O zaman bir  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  simetrik bilineer formundan elde edilen  $g|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  kısıtlaması negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu bir  $W$  alt vektör uzayının boyutuna  $g$  nin indeksi denir. Eğer indeks  $\nu$  ise  $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$  dir. Ayrıca  $V$  nin indeksi üzerinde tanımlı olan  $g$  nin indeksi olarak tanımlanır [26].

**Tanım 1.4.**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde tanımlı simetrik , bilineer, non-dejenere forma bir skalar çarpım denir. Bu çarpım ile birlikte  $V$  vektör uzayına da skalar çarpım uzayı denir [26].

**Tanım 1.5.**  $V$  skalar çarpım uzayının indeksi  $\nu$  olmak üzere  $\nu = 1$  ve  $\text{boy}V \geq 2$  ise  $V$  skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir [26].

**Teorem 1.6.**  $V$  Lorentz uzayının bir altuzayı  $W$  olsun. Bu durumda,

- (i)  $W$  timelike altuzaydır  $\Leftrightarrow W$  bir timelike vektöre sahiptir,
- (ii)  $W$  spacelike altuzaydır  $\Leftrightarrow W$  nın sıfırdan farklı her vektörü spacelike vektördür,
- (iii) Diğer durumlarda ise  $W$  lightlike (null) altuzaydır [27].

**Tanım 1.7.**  $\mathbb{R}^n$  reel vektör uzayında her bir  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  vektörleri için,

$$\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + \sum_{i=2}^n x_iy_i$$

skalar çarpımı ile verilen  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ikilisine n-boyutlu Minkowski uzayı (Lorentz uzayı) denir ve  $\mathbb{R}_1^n$  ile gösterilir [27].

**Tanım 1.8.**  $\mathbb{R}_1^n$  uzayında bir  $x \in \mathbb{R}_1^n$  vektörü için,

- (i)  $\langle x, x \rangle > 0$  veya  $x = 0$  ise  $x$  bir spacelike vektör,

(ii)  $\langle x, x \rangle < 0$  ise  $x$  bir timelike vektör,

(iii)  $\langle x, x \rangle = 0$  ise  $x$  bir null (lightlike) vektör,

olarak adlandırılır [27].

**Tanım 1.9.**  $\mathbb{R}_1^n$  uzayında bir  $x$  vektörünün işaret fonksiyonu,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ spacelike} \\ 0, & x \text{ null} \\ -1, & x \text{ timelike} \end{cases}$$

olarak tanımlanır [14].

**Tanım 1.10.**  $\mathbb{R}_1^n$  uzayında her  $x$  vektörü için,

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$$

olarak tanımlanan norma, Lorentz normu denir [27].

**Tanım 1.11.**  $\mathbb{R}_1^n$  uzayında herhangi  $x, y$  vektörü için,

$$\langle x, y \rangle = 0$$

ise  $x$  ve  $y$  vektörleri, Lorentz ortogonal (pseudo-ortogonal) denir [27].

**Tanım 1.12.**  $\mathbb{R}_1^n$  de null olmayan iki vektör  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ve  $y = (y_1, \dots, y_n)$  olsun.

(1)  $x$  ve  $y$  spacelike vektörler olsun. Buna göre,

- (i)  $Sp\{x, y\}$  spacelike bir düzlem ise  $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$  olacak şekilde bir tek  $0 \leq \theta \leq \pi$  sayısı vardır.
- (ii)  $Sp\{x, y\}$  timelike bir düzlem ise  $\text{sign}(x_2) = \text{sign}(y_2)$  veya  $\text{sign}(x_2) \neq \text{sign}(y_2)$  işaretlerine göre sırasıyla,  $\varepsilon = 1$  veya  $\varepsilon = -1$  olacak şekilde  $\langle x, y \rangle = \varepsilon \|x\| \|y\| \cosh(\theta)$  eşitliğini sağlayan bir tek  $\theta \geq 0$  sayısı vardır.

(2)  $x$  ve  $y$  timelike vektörler olsun.  $x$  ve  $y$ , farklı veya aynı time-konide olması halinde sırasıyla,  $\varepsilon = 1$  veya  $\varepsilon = -1$  olacak şekilde  $\langle x, y \rangle = \varepsilon \|x\| \|y\| \cosh(\theta)$  eşitliğini sağlayan bir tek  $\theta \geq 0$  sayısı vardır.



(3)  $x$  spacelike ve  $y$  timelike vektör olsun.  $\text{sign}(x_2) = \text{sign}(y_1)$  veya  $\text{sign}(x_2) \neq \text{sign}(y_1)$  işaretlerine göre sırasıyla,  $\varepsilon = 1$  veya  $\varepsilon = -1$  olacak şekilde  $\langle x, y \rangle = \varepsilon \|x\| \|y\| \sinh(\theta)$  eşitliğini sağlayan bir tek  $\theta \geq 0$  sayısı vardır.

Bu durumda ifade edilen  $\theta$  sayısına, null olmayan  $x, y \in \mathbb{R}_1^n$  vektörleri arasındaki açı denir [22, 25].

**Tanım 1.13.**  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\mathbb{R}_1^n$  uzayında lineer bağımsız vektörler olsun. O zaman  $\delta_{ij}$ , Kronecker-delta fonksiyonunu göstermek üzere  $\varepsilon_1 = -1$ ,  $\varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 1$  için,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$$

ise  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\mathbb{R}_1^n$  nin Lorentz anlamda ortonormal (pseudo-ortonormal) bazıdır denir [27].

**Tanım 1.14.**  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ,  $\mathbb{R}_1^4$  uzayında bir pseudo-ortonormal baz olmak üzere herhangi  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ,  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}_1^4$  vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı

$$x \times y \times z = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

olarak tanımlanır. Bu vektöre,  $x, y, z$  ye pseudo-ortogonal vektör denir ve herhangi  $w \in \mathbb{R}_1^4$  için,

$$\langle w, x \times y \times z \rangle = \det(w, x, y, z) \quad (1.3)$$

eşitliği sağlanır [14].

**Tanım 1.15.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^4$  regüler eğrisinin her  $s \in I$  için  $\alpha'(s)$  hız vektörü, sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise  $\alpha$  eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır [26].

**Tanım 1.16.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^4$  bir spacelike veya timelike eğri olsun. O zaman  $T, N_1, N_2, N_3$  sırasıyla,  $\alpha$  eğrisinin teğet vektör alanı, birinci (asli) normal vektör alanı, ikinci normal vektör alanı ve üçüncü normal vektör alanını göstermek üzere  $i = 1, 2, 3, 4$  için,

$$\varepsilon_i = \pm 1, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = -1$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned}\langle T, T \rangle &= \varepsilon_1 \\ \langle N_i, N_j \rangle &= \varepsilon_{i+1} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \langle T, N_i \rangle &= 0\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlansın. Buna göre  $\mathbb{R}_1^4$  de spacelike veya timelike bir  $\alpha$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N_1, N_2, N_3\}$  ve eğrilikleri  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  olacak şekilde Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa_1 & 0 & \varepsilon_3 \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \kappa_2 & 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 \kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

olarak verilir [28].

## 1.2. De Sitter 3-Uzayında Temel Kavramlar

**Tanım 1.17.**  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  uzayında bir yarı-Riemann hiperyüzeyi olan ve n-boyutlu birim pseudo-küre olarak adlandırılan

$$\mathbb{S}_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

kümesine, de-Sitter n-uzayı denir [26].

Özellikle,  $n = 3$  ise,  $\mathbb{R}_1^4$  de bir 3-boyutlu birim pseudo-küre olan

$$\mathbb{S}_1^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}_1^4 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

De Sitter 3-uzayı elde edilir.  $n = 2$  ise,  $\mathbb{R}_1^3$  de 2-boyutlu birim pseudo-küre ( $\mathbb{R}^3$  de tek kanatlı hiperboloid) olarak bilinen

$$\mathbb{S}_1^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

De Sitter 2-uzayı (De Sitter düzlemi) elde edilir.  $n = 1$  ise,  $\mathbb{R}_1^2$  de 1-boyutlu birim pseudo-çember ( $\mathbb{R}^2$  de hiperbol) olarak bilinen

$$\mathbb{S}_1^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2 \mid -x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

De Sitter 1-uzayı elde edilir.

**Tanım 1.18.**  $v \in \mathbb{R}_1^4$  sıfırdan farklı bir vektör ve  $c \in \mathbb{R}$  bir reel sayı olsun. O zaman,

$$\text{HP}(v, c) = \{x \in \mathbb{R}_1^4 \mid \langle x, v \rangle = c\}$$

kümesine,  $\mathbb{R}_1^4$  de  $v$  pseudo-normalli hiperdüzlem denir. Burada,

- (i)  $v$  timelike ise  $\text{HP}(v, c)$ ,  $\mathbb{R}_1^4$  de bir spacelike hiperdüzlem,
- (ii)  $v$  spacelike ise  $\text{HP}(v, c)$ ,  $\mathbb{R}_1^4$  de bir timelike hiperdüzlem,
- (iii)  $v$  null ise  $\text{HP}(v, c)$ ,  $\mathbb{R}_1^4$  de bir lightlike hiperdüzlem,

olarak adlandırılır [21].

**Tanım 1.19.**  $\text{HP}(v, c)$  hiperdüzlemi ile  $\mathbb{S}_1^3$  ün boştan farklı arakesitlerine, De Sitter 3-uzayda bir yüzey denir. Burada  $\mathbb{S}_1^3$  uzayında bir yüzey  $M = \text{HP}(v, c) \cap \mathbb{S}_1^3$  olmak üzere,

- (i)  $\text{HP}(v, c)$  spacelike hiperdüzlem ise  $M$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir eliptik De Sitter kuadrik yüzey,
- (ii)  $\text{HP}(v, c)$  timelike hiperdüzlem ise  $M$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir hiperbolik De Sitter kuadrik yüzey,
- (iii)  $\text{HP}(v, c)$  lightlike hiperdüzlem ise  $M$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir parabolik De Sitter kuadrik yüzey,

olarak adlandırılır [21].

**Uyarı 1.20.**  $D = \text{HP}(v, 0)$ ,  $\mathbb{R}_1^4$  de orijinden geçen 3-boyutlu bir non-dejenere hiperdüzlem ve  $M = D \cap \mathbb{S}_1^3$  olsun. O zaman,  $D$  timelike (spacelike) hiperdüzlem ise  $M$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir timelike (spacelike) yüzey olan birim pseudo-küreye (birim küreye) kongrüenttir [21].

**Uyarı 1.21.**  $\Pi$ ,  $\mathbb{R}_1^4$  de orijinden geçen 2-boyutlu bir non-dejenere düzlem ve  $\Gamma = \Pi \cap \mathbb{S}_1^3$  olsun. O zaman,  $\Pi$  timelike (spacelike) düzlem ise  $\Gamma$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir timelike (spacelike) eğri olan birim pseudo-çembere (birim çembere) kongrüenttir.

**Teorem 1.22.**  $\alpha$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir sabit olmayan geodezik olsun. Bu durumda,

- (i)  $\alpha$  timelike ise  $\mathbb{R}_1^4$  de hiperbolün bir kanadının parametrizasyonudur,

(ii)  $\alpha$  null ise  $\mathbb{R}_1^4$  ün bir geodeziği olan düz doğrunun parametrizasyonudur,

(iii)  $\alpha$  spacelike ise  $\mathbb{R}_1^4$  de bir çemberin periyodik parametrizasyonudur [26].

**Teorem 1.23.**  $\mathbb{S}_1^3$  de birbirinden farklı antipodal olmayan iki nokta  $p$  ve  $q$  olsun. Bu durumda,

(i)  $\langle p, q \rangle > 1$  ise timelike ve birebir olacak şekilde  $p$  ve  $q$  dan geçen bir tek geodezik vardır,

(ii)  $\langle p, q \rangle = 1$  ise  $p$  ve  $q$  dan geçen bir tek null geodezik vardır,

(iii)  $-1 < \langle p, q \rangle < 1$  ise spacelike ve periyodik olacak şekilde  $p$  ve  $q$  dan geçen bir tek geodezik vardır,

(iv)  $\langle p, q \rangle < -1$  ise  $p$  ve  $q$  dan geçen bir geodezik yoktur [26].

O halde, Tanım 1.12., Teorem 1.22. ve Teorem 1.23. den aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

**Sonuç 1.24.**  $\alpha$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de birbirinden farklı antipodal olmayan  $p$  ve  $q$  noktalarından geçen geodezik olsun. O zaman,  $\mathbb{R}_1^4$  de orijinden geçen düzlem  $\Pi = Sp\{p, q\}$  ve  $w = q - \langle p, q \rangle p \in \mathbb{R}_1^4$  olmak üzere  $\alpha$  nın parametrizasyonu her  $t \in \mathbb{R}$  için,

(i)  $\Pi$  spacelike düzlem ise  $\text{sign}(w) = 1$  ve  $\alpha(t) = \cos(t)p + \sin(t)\frac{w}{\|w\|}$ ,

(ii)  $\Pi$  timelike düzlem ise  $\text{sign}(w) = -1$  ve  $\alpha(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)\frac{w}{\|w\|}$ ,

(iii)  $\Pi$  null düzlem ise  $\text{sign}(w) = 0$  ve  $\alpha(t) = p + t(q - p)$ ,

olarak verilir.

**Tanım 1.25.**  $U$ ,  $\mathbb{R}^2$  nin açık altkümesi olmak üzere,  $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  immersiyonu ile belli olan  $\psi(U) = M$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir regüler yüzey olsun. O zaman  $p \in M$  noktasındaki  $M$  nin  $T_p M$  teğet uzayı sırasıyla,  $\mathbb{R}_1^4$  ün spacelike, timelike veya null altuzayı (yani yüzeyin birim normal vektör alanı sırasıyla timelike, spacelike veya null) ise,  $M$  ye  $\mathbb{S}_1^3$  de bir spacelike, timelike veya null yüzey denir. Ayrıca null olmayan yüzeye bir non-dejenere yüzey denir [21, 26].

**Tanım 1.26.**  $U$ ,  $\mathbb{R}^2$  nin açık altkümesi olmak üzere,  $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  immersiyonu ile belli olan  $\psi(U) = M$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir non-dejenere regüler yüzey ve  $\langle N, N \rangle = \varepsilon = \pm 1$  olacak şekilde birim normal vektör alanı  $N$  olsun. O zaman  $\mathbb{R}_1^4$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  ve  $M$  nin yarı-Riemann konneksiyonları sırasıyla,  $\nabla^0$ ,  $\bar{\nabla}$  ve  $\nabla$  ile gösterilmek üzere  $X, Y \in \mathfrak{X}(M) \subset \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^3)$  diferensiyellenebilir vektör alanları için  $M$  nin Gauss eşitlikleri,

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle X, Y \rangle \psi, \quad (1.5)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon \langle S(X), Y \rangle N, \quad (1.6)$$

ve Weingarten eşitliği

$$S(X) = -\bar{\nabla}_X N \quad (1.7)$$

olarak verilir [26].

**Uyarı 1.27.**  $\mathbb{S}_1^3$  de bir  $M$  non-dejenere regüler yüzeyinin birim normal vektör alanı  $N$  ve bu yüzeyde yatan  $\beta = \beta(s)$  birim hızlı eğrinin teğet vektör alanı  $T_\beta$  olsun. O zaman,  $M$  yüzeyinde  $\beta$  eğrisinin geodezik olması demek  $\nabla_{T_\beta} T_\beta = 0$  olması demektir. Buradan (1.6) gözönüne alınırsa,  $\beta$ ,  $M$  de bir geodeziktir gerek ve yeter şart  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\beta$  boyunca  $\bar{\nabla}_{T_\beta} T_\beta$ ,  $N$  normaline paraleldir. Yani  $\bar{\nabla}_{T_\beta} T_\beta$ ,  $M$  yüzeyine diktir.

**Tanım 1.28.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  non-dejenere (spacelike veya timelike) eğrisi için  $(d\gamma)_t : T_t I \rightarrow T_{\gamma(t)} \mathbb{S}_1^3$  türev dönüşümü birebirdir gerek ve yeter şart  $\gamma = \gamma(t)$  eğrisi, De Sitter 3-uzayında bir non-dejenere regüler (immersed) eğridir [26].

**Tanım 1.29.**  $I \subset \mathbb{R}$  açık altküme ve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  bir non-dejenere regüler eğri olsun. O zaman  $\mathbb{R}_1^4$  ve  $\mathbb{S}_1^3$  ün yarı-Riemann konneksiyonları sırasıyla,  $\nabla^0$  ve  $\bar{\nabla}$  ile gösterilmek üzere  $\gamma$  eğrisi boyunca bir diferensiyellenebilir  $X \in \mathfrak{X}(\gamma(I)) \subset \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^3)$  vektör alanı için  $\gamma$  nın  $\mathbb{S}_1^3$  deki Gauss denklemi,

$$X' \equiv \nabla_{\gamma'}^0 X = \bar{\nabla}_{\gamma'} X - \langle \gamma', X \rangle \gamma, \quad (1.8)$$

olarak verilir [26].

**Tanım 1.30.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  non-dejenere birim hızlı regüler eğrisinin yay parametresi  $s$  olsun. Bu durumda  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma(s)$  noktasındaki  $\gamma$  nın birim teğet vektörü

$$T_\gamma(s) = \gamma'(s)$$

dir.  $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = 1$  olduğundan  $\text{sign}(T_\gamma(s)) = \delta_1$  olmak üzere  $\langle \gamma(s), T_\gamma'(s) \rangle = -\delta_1$  bulunur.  $T_\gamma'(s) + \delta_1 \gamma(s)$  vektörü,  $\gamma(s)$  ve  $T_\gamma(s)$  vektörlerinin her ikisine de pseudo-ortogonaldir. Buradan  $\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle \neq 1$  şartı altında,  $\text{sign}(N_\gamma(s)) = \delta_2$  olmak üzere,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma$  nın asli normal vektörü

$$N_\gamma(s) = \delta_2 \frac{T_\gamma'(s) + \delta_1 \gamma(s)}{\|T_\gamma'(s) + \delta_1 \gamma(s)\|}$$

dir. Bu durumda  $\text{sign}(B_\gamma(s)) = \delta_3$  olmak üzere,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma$  nın binormal vektörü

$$B_\gamma(s) = (-\delta_3) \gamma(s) \times T_\gamma(s) \times N_\gamma(s)$$

olarak tanımlanır. Böylece  $\mathbb{R}_1^4$  de  $\gamma$  eğrisi boyunca pozitif yönlendirilmiş  $\{\gamma(s), T_\gamma(s), N_\gamma(s), B_\gamma(s)\}$  pseudo-ortonormal bazı elde edilir. Aşağıdaki

$$\begin{cases} T_\gamma(s) \times N_\gamma(s) \times B_\gamma(s) = \gamma(s), \\ N_\gamma(s) \times B_\gamma(s) \times \gamma(s) = -\delta_1 T_\gamma(s), \\ B_\gamma(s) \times \gamma(s) \times T_\gamma(s) = \delta_2 N_\gamma(s), \\ \gamma(s) \times T_\gamma(s) \times N_\gamma(s) = -\delta_3 B_\gamma(s), \end{cases} \quad (1.9)$$

eşitlikler ile birlikte bu baz,  $\mathbb{R}_1^4$  de  $\gamma$  nın eğri-hiperyüzey çatısı olarak adlandırılır [11, 14, 29].

**Tanım 1.31.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  non-dejenere birim hızlı regüler eğri olsun. O zaman,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma$  nın  $\gamma(s)$  noktasındaki geodezik eğriliği ve geodezik burulması, sırasıyla

$$\begin{cases} \kappa_g(s) = \|T'_\gamma(s) + \delta_1 \gamma(s)\|, \\ \tau_g(s) = \delta_3 \frac{\det(\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{(\kappa_g(s))^2}, \end{cases} \quad (1.10)$$

eşitlikleri ile verilir [11, 14, 29].

**Teorem 1.32.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  non-dejenere birim hızlı regüler eğrisinin, eğri-hiperyüzey çatısı  $\{\gamma(s), T_\gamma(s), N_\gamma(s), B_\gamma(s)\}$ , geodezik eğriliği  $\kappa_g$  ve geodezik burulması  $\tau_g$  olmak üzere  $\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle \neq 1$  şartı altında aşağıdaki

$$\begin{bmatrix} \gamma'(s) \\ T'_\gamma(s) \\ N'_\gamma(s) \\ B'_\gamma(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta_1 & 0 & \delta_2 \kappa_g(s) & 0 \\ 0 & -\delta_1 \kappa_g(s) & 0 & \delta_3 \tau_g(s) \\ 0 & 0 & -\delta_2 \tau_g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(s) \\ T_\gamma(s) \\ N_\gamma(s) \\ B_\gamma(s) \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

geçiş bağıntıları elde edilir [11, 14, 29].

**Tanım 1.33.** Bir  $q \in \mathbb{S}_1^3$  noktasındaki  $T_q \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  teğet uzayında,  $\mathbb{R}_1^4$  de sütun vektörleri olarak düşünülen  $u, v \in T_q \mathbb{S}_1^3$  teğet vektörleri için,

$$u \wedge v = q \times u \times v \quad (1.12)$$

eşitliği ile tanımlanan "  $\wedge$  " ye  $\mathbb{S}_1^3$  deki vektörel çarpma denir. Ayrıca bu vektörel çarpma,  $\mathbb{R}_1^4$  de "  $\times$  " vektörel çarpmasından indirgenmiş olup (1.3) den her  $w \in T_q\mathbb{S}_1^3$  için

$$\langle u \wedge v, w \rangle = -\det(q, u, v, w) \quad (1.13)$$

eşitliği sağlanır [22].

**Tanım 1.34.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  birim hızlı geodezik olmayan non-dejenere regüler eğrisinin  $\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  uzayındaki Frenet çatası

$$\left\{ T_\gamma = \gamma', N_\gamma = \delta_2 \frac{\bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma}{\|\bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma\|}, B_\gamma = (-\delta_3) T_\gamma(s) \wedge N_\gamma(s) \right\}$$

ve  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma$  nın geodezik eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\begin{cases} \kappa_g = \|\bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma\|, \\ \tau_g = \langle \bar{\nabla}_{T_\gamma} N_\gamma, B_\gamma \rangle, \end{cases} \quad (1.14)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma \\ \bar{\nabla}_{T_\gamma} N_\gamma \\ \bar{\nabla}_{T_\gamma} B_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_2 \kappa_g & 0 \\ -\delta_1 \kappa_g & 0 & \delta_3 \tau_g \\ 0 & -\delta_2 \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\gamma \\ N_\gamma \\ B_\gamma \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

Frenet formülleri ile birlikte

$$\begin{cases} T_\gamma(s) \wedge N_\gamma(s) = -\delta_3 B_\gamma(s), \\ N_\gamma(s) \wedge B_\gamma(s) = -\delta_1 T_\gamma(s), \\ B_\gamma(s) \wedge T_\gamma(s) = -\delta_2 N_\gamma(s). \end{cases} \quad (1.16)$$

özellikleri sağlanır [22].

**Uyarı 1.35.** (1.8), (1.10) ve (1.14) eşitliklerinden aşağıdaki ilişkiler kolayca görülür.

$$(i) \quad \kappa_g(s) = \|\bar{\nabla}_{T_\gamma(s)} T_\gamma(s)\| = \|T_\gamma'(s) + \delta_1 \gamma(s)\|,$$

$$(ii) \quad \tau_g(s) = \langle \bar{\nabla}_{T_\gamma(s)} N_\gamma(s), B_\gamma(s) \rangle = \delta_3 \frac{\det(\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{(\kappa_g(s))^2}.$$

**Tanım 1.36.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  non-dejenere birim hızlı regüler eğrisinin geodezik eğriliği sıfıra eşitse,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir geodeziktir denir [26].

**Uyarı 1.37.**  $\gamma$  eğrisinin, eğri-hiperyüzey çatısını oluştururken koyulan  $\langle \gamma''(s), \gamma'''(s) \rangle \neq 1$  şartı,  $\kappa_g(s) \neq 0$  eşitliğine (yani eğrinin  $\mathbb{S}_1^3$  de geodezik olmaması koşuluna) karşılık gelir.

**Tanım 1.38.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  non-dejenere birim hızlı regüler eğrisinin her noktasında geodezik burulması (torsiyonu) sıfıra eşitse,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir düzlemsel eğri denir. Ayrıca  $\gamma$  bir spacelike (timelike) düzlemsel eğridir gerek ve yeter şart  $\gamma$  bir  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}_1^3$  tam geodezik iki boyutlu küresinde ( $\mathbb{S}_1^2 \subset \mathbb{S}_1^3$  tam geodezik pseudo-küresinde) yatar [4].

**Uyarı 1.39.** (1.3), (1.12) ve (1.13) eşitliklerinden,  $\gamma$  eğrisinin  $T_{\gamma(s)}\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  teğet uzayındaki  $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$  (intrinsic) Frenet çatısı ile  $\mathbb{R}_1^4$  ambient uzayındaki  $\{\gamma(s), T_\gamma(s), N_\gamma(s), B_\gamma(s)\}$  eğri-hiperyüzey çatısının zıt yönlendirmeye sahip olduğu kolayca görülür.

**Tanım 1.40.**  $p \in \mathbb{S}_1^3$  ve  $v \in T_p\mathbb{S}_1^3$  olsun. Bu durumda başlangıç noktası  $p$  ve başlangıç hızı  $\alpha'_v(0) = v$  olan sabit hızlı geodezik  $\alpha_v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  olmak üzere  $p \in \mathbb{S}_1^3$  noktasındaki üstel dönüşüm (the exponential map)

$$\exp_p : T_p\mathbb{S}_1^3 \rightarrow \mathbb{S}_1^3, \quad \exp_p(v) = \alpha_v(1)$$

olarak verilir. Ayrıca herhangi  $t \in \mathbb{R}$  için

$$\exp_p(tv) = \alpha_{tv}(1) = \alpha_v(t) \quad (1.17)$$

eşitliği sağlanır. Yani  $\exp_p$  üstel dönüşümü,  $T_p\mathbb{S}_1^3$  deki orijinden geçen doğruları,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $p$  noktasından geçen geodeziklere taşır [26].

**Tanım 1.41.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  non-dejenere birim hızlı regüler eğrisinin,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma$  eğrisi boyunca Frenet çatısı  $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$  ve  $\text{sign}(N_\gamma(s)) = \delta_2$  olsun. O zaman  $f^2(t) + \delta_2 g^2(t) = 1$  denklemini sağlayan  $f, g$  diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\exp_{\gamma(s)}(tN_\gamma(s)) = f(t)\gamma(s) + g(t)N_\gamma(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.18)$$

non-dejenere geodeziğine,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma(s)$  başlangıç noktalı asli normal geodeziği denir [22].

**Teorem 1.42.**  $\mathbb{R}_1^4$  de  $M_1$  ve  $M_2$  yarı-Öklidyen hiperyüzeyleri, bir  $\alpha$  eğrisi boyunca teğet ve  $v_0 = \alpha'(s_0)$  vektörü de,  $T_{\alpha(s_0)}M_1 = T_{\alpha(s_0)}M_2$  özelliğini sağlayan teğet uzaylarına ait vektör olsun. O zaman  $P, M_1$  hiperyüzeyine göre  $\alpha$  boyunca  $v_0$  vektörünün paralel taşımaları gerekir



ve yeter şart  $P, M_2$  hiperyüzeyine göre  $\alpha$  boyunca  $v_0$  vektörünün paralel taşınmasıdır. Ayrıca  $P$  paralel öteleme (taşıma) dönüşümünün kovaryant türevi her iki hiperyüzey için aynıdır [22].

**Sonuç 1.43.**  $\alpha = \alpha(t), \mathbb{S}_1^3$  de bir non-dejenere geodezik ve  $\alpha'(t)$  ye pseudo-ortogonal olan bir vektör alanı  $X$  olsun. O zaman Teorem 1.42. den,  $P(X) = X$ . Yani  $P, X$  vektör alanını sabit (değişmez) bırakır [22].

**Uyarı 1.44.**  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma(s)$  başlangıç noktalı asli normal geodeziği  $\alpha_s(t) = \exp_{\gamma(s)}(tN_\gamma(s))$  ve  $\text{sign}(N_\gamma) = \delta_2$  olsun. O zaman  $\alpha_s(t)$  boyunca paralel taşıma  $P$  olmak üzere

$$\delta_2 f^2(t) + g^2(t) = 1,$$

denklemini sağlayan  $f, g$  diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\alpha'_s(t) = -g(t)\gamma(s) + f(t)N_\gamma(s) = P(N_\gamma(s)),$$

eşitliği sağlanır ve Sonuç 1.43. den,

$$P(T_\gamma(s)) = T_\gamma(s), P(B_\gamma(s)) = B_\gamma(s),$$

elde edilir [22].

## 2. $\mathbb{S}_1^3$ de NON-DEJENERE REKTİFİYAN EĞRİLER VE KONİK YÜZEYLER

Bu bölümde,  $\mathbb{S}_1^3$  de non-dejenere (spacelike veya timelike) rektifiyan eğri ve non-dejenere konik yüzey kavramlarını verilecektir. Şimdi bu kavramlar arasındaki ilişkiyi açıklayan, rektifiyan eğriler için ilk karakterizasyonu ifade edelim.

**Tanım 2.1.**  $\mathbb{S}_1^3$  de  $p \in \mathbb{S}_1^3$  sabit noktası ve  $\kappa_g > 0$  geodezik eğrilikli bir  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  non-dejenere birim hızlı eğrisi verilsin. O zaman,  $\gamma(I) \subset \mathbb{S}_1^3 \setminus \{\pm p\}$  olacak şekilde her  $s \in I$  için  $p$  ve  $\gamma(s)$  noktasından geçen geodezikler,  $\gamma$  nın  $\gamma(s)$  başlangıç noktalı asli normal geodeziklerine ortogonal ise  $\gamma$  ya  $\mathbb{S}_1^3$  de bir non-dejenere rektifiyan eğri denir.

Böylece, Tanım 2.1. den,  $p$  ile  $\gamma(s)$  den geçen geodezikler,  $\gamma$  nın  $T_{\gamma(s)}\mathbb{S}_1^3$  teğet uzayındaki  $S_p\{T_\gamma(s), B_\gamma(s)\}$  non-dejenere rektifiyan düzlemlerine teğettir. Daha açık olarak;  $p$  ve  $\gamma(s)$  den geçen geodezik,

$$\beta_s(u) = \exp_p(u\gamma(s)) = \cos(u)p + \sin(u)\gamma(s), \quad u \in \mathbb{R}$$

ve  $\langle N_\gamma(s), N_\gamma(s) \rangle = \delta_2$  olmak üzere  $\gamma$  eğrisinin,  $\gamma(s)$  başlangıç noktalı asli normal geodeziği

$$\alpha_s(u) = \exp_{\gamma(s)}(uN_\gamma(s)) = f(u)\gamma(s) + \delta_2 g(u)N_\gamma(s), \quad u \in \mathbb{R}$$

olarak verilsin. Burada  $\gamma$  timelike (spacelike) ise  $N_\gamma(s)$  spacelike (spacelike yada timelike) olur. Buna göre  $f^2(u) + \delta_2 g^2(u) = 1$  denkleminin sağlanması için

$$\delta_2 = \begin{cases} 1; & f(u) = \cos(u), \quad g(u) = \sin(u) \\ -1; & f(u) = \cosh(u), \quad g(u) = \sinh(u) \end{cases},$$

durumları elde edilir. O halde Tanım 2.1. den her  $s \in I$  için

$$\left\langle \frac{d}{du}\beta_s(u), N_\gamma(s) \right\rangle = 0$$

rektifiyan eğri olma şartı elde edilir. O zaman  $\langle T_\gamma(s), T_\gamma(s) \rangle = \delta_1$  ve  $\langle B_\gamma(s), B_\gamma(s) \rangle = \delta_3$  için

$$\frac{d}{du}\beta_s(u) = \lambda(s)T_\gamma(s) + \mu(s)B_\gamma(s)$$

olacak şekilde  $\delta_1\lambda^2(s) + \delta_3\mu^2(s) = 1$  denklemini sağlayan  $\lambda(s)$ ,  $\mu(s)$  diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. Buradan  $\gamma$  nın spacelike veya timelike olmasına göre aşağıdaki koşullar elde edilir:

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \begin{cases} (1, 1, -1); & \lambda(s) = \cosh(s), \mu(s) = \sinh(s) \\ (1, -1, 1); & \lambda(s) = \cos(s), \mu(s) = \sin(s) \\ (-1, 1, 1); & \lambda(s) = \sinh(s), \mu(s) = \cosh(s) \end{cases} .$$

**Tanım 2.2.** Sabit bir  $p \in \mathbb{S}_1^3$  noktası ile bu noktayı içermeyen  $\mathbb{S}_1^3$  deki bir non-dejenere  $\gamma$  eğrisinin herhangi bir noktasını birleştiren bütün geodeziklerin bileşkesiyle oluşan yüzeye,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir non-dejenere konik yüzey denir. Burada  $p$  noktasına non-dejenere konik yüzeyin tepe noktası (vertex) ve  $\gamma$ -ya dayanak eğrisi (directrix) denir. Yüzeyi oluşturan geodeziklerin her biri ise yüzeyin üretici (generatrix) olarak adlandırılır.

Şimdi  $V : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$  non-dejenere birim hızlı regüler eğrisi verilsin. Buna göre,  $V$  nin non-dejenere birim teğet vektör alanı  $T_V = V'$  ve

$$\text{sign}(T_V) = \delta \quad (2.1)$$

olmak üzere  $V$  ve  $T_V$  ye pseudo-ortogonal olan  $N_V = V \wedge T_V$  vektörüne,  $V$  nin  $\mathbb{S}_1^2$  de non-dejenere asli normal vektörü denir ve

$$\text{sign}(N_V) = -\delta \quad (2.2)$$

olur. O halde  $\{V, T_V, N_V\}$  üçlüsüne,  $V$  nin  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$  de eğri-yüzey çatısı denir.  $\{p, V, T_V, N_V\}$ ,  $\mathbb{R}_1^4$  de  $V$  eğrisi boyunca pseudo-ortonormal bazdır. Böylece (1.8) den, Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T_V \\ \nabla_{T_V}^0 T_V \\ \nabla_{T_V}^0 N_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\delta & 0 & -\delta\kappa_V \\ 0 & -\delta\kappa_V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ T_V \\ N_V \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_{T_V} T_V = -\delta\kappa_V N_V \\ \bar{\nabla}_{T_V} N_V = -\delta\kappa_V T_V \end{cases} \quad (2.4)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada  $\kappa_V$ ,  $V$  nin geodezik eğriliği olmak üzere (1.8) ve (1.12) den,

$$\kappa_V = \langle \bar{\nabla}_{T_V} T_V, N_V \rangle = \det(V, V', V'', p). \quad (2.5)$$

olarak ifade edilir.

Şimdi,  $\mathbb{S}_1^3$  de tepe noktası  $p$  ve dayanak eğrisi  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p \mathbb{S}_1^3$  pseudo-küresinde yatan  $V = V(t)$  non-dejenere birim hızlı eğrisi olan  $M$  non-dejenere konik yüzeyinin bir parametrizasyonu,

$$\psi(t, z) = \exp_p(zV(t)) = \cos(z)p + \sin(z)V(t), \quad z > 0 \quad (2.6)$$

olarak verilsin. Ayrıca  $P, \mathbb{S}_1^3$  de  $u = 0$  ve  $u = z$  arasındaki  $\beta_t(u) = \psi(t, u)$  geodeziği boyunca paralel taşıma olsun. Bu durumda Sonuç 1.43. ve Uyarı 1.44. gözönüne alındığında,  $M$  non-dejenere konik yüzeyinin  $\psi(t, z)$  noktasındaki teğet düzleminin bileşenleri

$$\psi_t(t, z) = \sin(z)T_V(t) = \sin(z)P(T_V(t)) \quad (2.7)$$

$$\psi_z(t, z) = -\sin(z)p + \cos(z)V(t) = P(V(t)) \quad (2.8)$$

olarak bulunur. Birinci temel form katsayıları da,

$$E = \langle \psi_t, \psi_t \rangle = \delta \sin^2(z), \quad F = \langle \psi_t, \psi_z \rangle = 0, \quad G = \langle \psi_z, \psi_z \rangle = 1 \quad (2.9)$$

olarak ifade edilir.  $\{T_V, N_V\}$ ,  $\mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^2)$  nin bir bazı olup  $N_V$ ,  $\mathbb{S}_1^2$  ye teğettir. O halde  $N(t, z)$ ,  $M$  yüzeyinin non-dejenere birim normal vektör alanı ve  $\|\psi_t(t, z) \wedge \psi_z(t, z)\| = \sqrt{|EG - F^2|}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} N(t, z) &= \frac{\psi_t(t, z) \wedge \psi_z(t, z)}{\sqrt{|EG - F^2|}} \\ &= \frac{\sin(z)(P(T_V(t)) \wedge P(V(t)))}{\sqrt{|\delta \sin^2(z)|}} \\ &= P(T_V(t)) \wedge P(V(t)) \\ &= -P(N_V(t)) \\ &= -N_V(t) \end{aligned}$$

ve böylece

$$N(t, z) = -N_V(t) \quad (2.10)$$

elde edilir.

**Uyarı 2.3.** (2.2) ve (2.10) dan

$$\langle N(t, z), N(t, z) \rangle = \langle -N_V(t), -N_V(t) \rangle = -\delta \quad (2.11)$$

olup buradan  $V, S_1^2 \subset T_p S_1^3$  de bir spacelike (timelike) eğridir gerek ve yeter şart  $M$  yüzeyi,  $S_1^3$  de bir spacelike (timelike) yüzeydir. Yani  $V$  eğrisi ile  $M$  yüzeyinin kausal karakteri aynıdır.

$S_1^2 \subset T_p S_1^3$  de birim hızlı  $V$  eğrisinin  $\kappa_V = \kappa_V(t)$  geodezik eğriliği, (2.5) eşitliği ile belli olmak üzere  $M$  konik yüzeyinin  $S$  şekil operatörünün bileşenleri (1.7), (2.4), (2.7) ve (2.10) eşitliklerinin kullanılması ile

$$\begin{aligned} S(\psi_t) &= -\bar{\nabla}_{\psi_t} N = \bar{\nabla}_{T_V(t)} N_V(t) = -\frac{\delta \kappa_V(t)}{\sin(z)} \psi_t(t, z), \\ S(\psi_z) &= -\bar{\nabla}_{\psi_z} N = -\nabla_{\psi_z}^0 N = 0. \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece,  $M$  nin  $\mathbb{R}_1^4$  deki ambient uzayına göre ekstrinsik Gauss eğriliği (De Sitter 3-uzayının Gauss eğriliği)  $K_e = 1$  ve intrinsik Gauss eğriliği  $K_I = \det(S)$  olmak üzere Gauss ( $K$ ) ve ortalama ( $H$ ) eğrilikleri

$$\begin{aligned} K &= K_e + K_I = 1, \\ H &= \frac{\text{iz}(S)}{2} = -\frac{\delta \kappa_V(t)}{2 \sin(z)}. \end{aligned}$$

Ayrıca (1.5) Gauss formülü, (2.7) ve (2.8) eşitlikleri gözönüne alınarak;

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\psi_t} \psi_t &= -\delta \sin(z) \cos(z) \psi_z + \delta \kappa_V(t) \sin(z) N, \\ \bar{\nabla}_{\psi_z} \psi_t &= \bar{\nabla}_{\psi_t} \psi_z = \cot(z) \psi_t, \\ \bar{\nabla}_{\psi_z} \psi_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

eşitlikleri elde edilir.

**Teorem 2.4.**  $S_1^3$  de  $\gamma = \gamma(s)$  birim hızlı non-dejenere eğrisi burulmalı olsun. O zaman  $\gamma, S_1^3$  de bir rektifiyan eğridir gerek ve yeter şart bir sabit  $p \in S_1^3 \setminus \gamma(I)$  noktası ve  $S_1^2 \subset T_p S_1^3$  iki boyutlu birim pseudo küresinde yatan bir  $V = V(t)$  birim hızlı non-dejenere eğrisi vardır öyle ki  $\gamma, p$  ve  $V$  tarafından belirlenen  $M$  non-dejenere konik yüzeyinin geodeziğidir.

**İspat.**  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de bir non-dejenere rektifiyan eğri olsun. O zaman bir  $p \in \mathbb{S}_1^3 \setminus \gamma(I)$  noktası ve bir  $V = V(t)$  non-dejenere birim hızlı eğrisi vardır öyleki bazı  $t(s)$  ve  $z(s)$  fonksiyonları için

$$\gamma(s) = \exp_p(z(s)V(t(s))) = \cos(z(s))p + \sin(z(s))V(t(s)).$$

O halde  $\gamma$  eğrisi,  $\gamma(s) = \psi(t(s), z(s))$  parametrizasyonu ile belli olan  $M$  non-dejenere konik yüzeyinde bir eğri olur. Buna göre  $p$  ve  $\gamma(s)$  yi birleştiren non-dejenere geodezik

$$\beta_s(u) = \exp_p(uV(t(s))) = \cos(u)p + \sin(u)V(t(s)) = \psi(t(s), u)$$

olup  $\gamma$  nın birim teğet vektör alanı  $T_{\beta_s} = \frac{d}{du}\beta_s(u)$  olmak üzere non-dejenere rektifiyan eğri olma koşulundan

$$\langle T_{\beta_s}(z(s)), N_\gamma(s) \rangle = 0 \quad (2.13)$$

olur.  $p$  ve  $V$  tarafından belirlenen  $M$  non-dejenere konik yüzeyin  $\gamma(s)$  noktasındaki teğet düzlemi,  $p$  ve  $\gamma(s)$  yi birleştiren geodeziğe teğet vektörler tarafından gerilir. Yani

$$T_{\gamma(s)}M = S_p\{T_{\beta_s}(z(s)), T_\gamma(s)\}$$

olarak ifade edilir. Burada  $p$  ve  $\gamma(s)$  yi birleştiren geodeziğin  $M$  konik yüzeyinin  $\gamma(s)$  noktasındaki üretici olması ve (2.13) eşitliği gözönüne alınırsa  $N_\gamma(s)$ ,  $M$  ye diktir. Böylece Uyarı 1.27. ve (1.15) den  $\overline{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma$ ,  $M$  konik yüzeyine dik olup  $\gamma$ ,  $M$  nin geodeziğidir.

Tersine  $M, \mathbb{S}_1^3$  de non-dejenere bir konik yüzey ve  $s$  yay parametresi ile verilen bir non-dejenere geodeziği  $\gamma(s) = \psi(t(s), z(s))$  olsun. O zaman Uyarı 1.27. ve (1.15) den,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma$  boyunca  $N_\gamma(s)$  asli normal, yüzeyin  $N(t(s), z(s))$  birim normaline paraleldir. O halde konik yüzeyin  $p = \beta_s(0)$  ve  $\gamma(s) = \beta_s(z(s))$  noktalarını birleştiren birim hızlı üretici (yani geodeziği)  $\beta_s$  ile gösterilmek üzere

$$\langle T_{\beta_s}(z(s)), N_\gamma(s) \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de bir non-dejenere rektifiyan eğridir.

**Sonuç 2.5.**  $p \in \mathbb{S}_1^3 \setminus \gamma(I)$  noktası ve  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$  iki boyutlu birim pseudo küresinde yatan bir  $V$  birim hızlı non-dejenere eğrisi tarafından belirlenen  $M$  non-dejenere konik yüzeyinin geodeziği,  $\gamma$  non-dejenere rektifiyan eğrisi olsun. O zaman aşağıdaki durumlar vardır:

- (i)  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de timelike eğri veya timelike  $B_\gamma$  ya sahip spacelike eğridir gerek ve yeter şart  $V$  timelike eğri ve  $M$  timelike yüzeydir.
- (ii)  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de timelike  $N_\gamma$  ya sahip spacelike eğridir gerek ve yeter şart  $V$  spacelike eğri ve  $M$  spacelike yüzeydir.

**İspat.**  $\mathbb{S}_1^3$  ve  $M$  nin yarı-Riemann konneksiyonları sırasıyla,  $\bar{\nabla}$  ve  $\nabla$  ile gösterilmek üzere  $X, Y \in \mathfrak{X}(M) \subset \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^3)$  diferensiyellenebilir vektör alanları için  $M$  nin Gauss eşitliği, (1.6) ve (2.11) den

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (-\delta) \langle S(X), Y \rangle N \quad (2.14)$$

olarak ifade edilir. Şimdi  $M, \mathbb{S}_1^3$  de bir non-dejenere konik yüzeyin  $s$  yay parametresi ile verilen bir non-dejenere geodeziği  $\gamma(s) = \psi(t(s), z(s))$  olsun. O zaman

$$T_\gamma(s) = t'(s)\psi_t(t(s), z(s)) + z'(s)\psi_z(t(s), z(s))$$

olup  $\gamma$  nın  $M$  yüzeyinin geodeziği olması gözönüne alınarak (2.14) den

$$\bar{\nabla}_{T_\gamma(s)} T_\gamma(s) = \delta(t'(s))^2 \kappa_V(t(s)) \sin(z(s)) N(t(s), z(s)) \quad (2.15)$$

elde edilir. Ayrıca (1.15) den  $\text{sign}(N_\gamma(s)) = \delta_2$  için

$$\bar{\nabla}_{T_\gamma(s)} T_\gamma(s) = \delta_2 \kappa_g(s) N_\gamma(s) \quad (2.16)$$

dir. O halde (2.15) ve (2.16) dan

$$\delta_2 \kappa_g^2 = -\delta(t')^4 \kappa_V^2(t) \sin^2(z)$$

olup buradan

$$\text{sign}(N_\gamma(s)) = \delta_2 = -\delta = \text{sign}(N(t(s), z(s))) \quad (2.17)$$

elde edilir. Böylece (2.11) ve (2.17) den

$$\text{sign}(N_\gamma(s)) = \text{sign}(N(t(s), z(s))) = \text{sign}(N_V(t(s))) \quad (2.18)$$

bulunur. Sonuç olarak,  $\mathbb{R}_1^4$  de  $V$  eğrisi boyunca  $\{p, V, T_V, N_V\}$  ve  $\gamma$  eğrisi boyunca  $\{\gamma, T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$  pseudo-ortonormal bazlarının işaret tabloları da gözönüne alınırsa (i) ve (ii) kolayca elde edilir.

**Uyarı 2.6.** [23] de küresel uzayda ve [24] de hiperbolik uzayda, her düzlemsel (eğrinin her noktasında geodezik burulması sıfıra eşit) eğrinin bir rektifiyan eğri olduğu gösterildi. Benzer düşünce ile De Sitter 3-uzayında da sadece sıfırdan farklı geodezik burulmaya sahip non-dejenere rektifiyan eğrileri incelemek yeterlidir. Bundan sonra aksi söylenmedikçe,  $\mathbb{S}_1^3$  de burulmalı ( $\tau_g \neq 0$ ) timelike rektifiyan eğrileri ele alacağız. Ayrıca, diğer bölümlerde verilecek olan metotlar kullanılarak,  $\mathbb{S}_1^3$  de spacelike rektifiyan eğriler için de benzer sonuçlar kolayca elde edilebilir.





### 3. $\mathbb{S}_1^3$ de TİMELİKE REKTİFİYAN EĞRİLERİN GENEL HELİSLERLE İLİŞKİSİ

Chen, 2003 te üç boyutlu Öklidyen uzayda genelleştirilmiş helisler (Lancret eğrileri) ve rektifiyan eğriler arasındaki ilişkiyi vermiştir [5]. Gerçekten, her iki eğri ailesi, bazı  $c_1, c_2$  sabitleri için  $s$  yay parametresi olmak üzere burulmasının eğriliğine oranı,

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) = c_1 s + c_2,$$

lineer fonksiyonu ile karakterize edilir. Burada  $c_1 = 0$  ise genel helisler, diğer durumda ise ( $c_1 \neq 0$ ) rektifiyan eğriler elde edilir.

Barros ise 1997 de sıfırdan farklı sabit eğrilikli flat olmayan Riemannian uzay formları olarak,  $\mathbb{S}^3$  üç boyutlu kürede ve  $\mathbb{H}^3$  üç boyutlu hiperbolik uzayda genel helisleri tanımladı ve klasik Lancret teoreminin genelleştirmesini verdi [3]. 2001 yılında da Barros ve arkadaşları, sıfırdan farklı sabit eğrilikli flat olmayan Lorentzian uzay formları olan  $\mathbb{S}_1^3$  De Sitter 3-uzayında ve  $\mathbb{H}_1^3$  anti De Sitter 3-uzayında genel helis kavramını Lorentziyen bakış açısıyla yeniden ele alıp Lancret teoremlerini verdi [4]. Bu iki çalışmada, verilen eğri boyunca sabit uzunluklu bir Killing vektör alanı var öyle ki eğri boyunca bu Killing vektör alanı ile eğrinin teğeti arasındaki açı sıfırdan farklı bir sabit ise verilen eğri bir genel helis olarak adlandırıldı. O halde, özellikle  $\mathbb{S}^3$  ve  $\mathbb{S}_1^3$  de genel helisleri karakterize eden aşağıdaki Lancret teoremlerini hatırlatalım:

**Teorem 3.1.**  $\gamma, \mathbb{S}^3$  de bir genel helistir gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i)  $\tau_g \equiv 0$  ve  $\gamma, \mathbb{S}^2$  birim küresinde bir eğridir, veya
- (ii)  $\tau_g = b \kappa_g \pm 1$  olacak şekilde  $a$  ve  $b$  sabitleri vardır [3].

**Teorem 3.2.**  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de bir non-dejenere regüler eğrisi genel helistir gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i)  $\tau_g \equiv 0$  ve  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  nın bir tam geodezik yüzeyinde (yani  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}_1^3$  küresinde veya  $\mathbb{S}_1^2 \subset \mathbb{S}_1^3$  pseudo-küresinde) yatar, veya
- (ii)  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de bir aşikar helistir (yani geodezik eğriliği ve geodezik burulması sabittir) [4].

Şimdi,  $\mathbb{S}_1^3$  de timelike rektifiyan eğrilerin geodezik burulmasının geodezik eğriliğine oranına göre karakterizasyonunu verelim.

$\gamma$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de parametrizasyonu (2.6) ile verilen bir  $M$  timelike konik yüzeyinde birim hızlı timelike eğri olsun. O zaman bazı  $t = t(s)$  ve  $z = z(s)$  diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{S}_1^3, \quad \gamma(s) = \psi(t(s), z(s))$$

olarak alınabilir. Böylece (2.1), (2.7), (2.8) eşitlikleri ve Sonuç 2.5. den  $V$  nin timelike eğri (yani  $\langle T_V, T_V \rangle = \delta = -1$ ) olması gözönüne alınırsa,

$$-1 = \langle T_\gamma, T_\gamma \rangle = \langle t'\psi_t + z'\psi_z, t'\psi_t + z'\psi_z \rangle = -(t')^2 \sin^2(z) + (z')^2 \quad (3.1)$$

eşitliği elde edilir.  $T_\gamma \in \mathfrak{X}(M)$  için (1.5) den,

$$\bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma = \nabla_{T_\gamma}^0 T_\gamma - \psi \quad (3.2)$$

olur. Buna göre,

$$\nabla_{T_\gamma}^0 T_\gamma = \gamma'' = t''\psi_t + t'(t'\psi_{tt} + z'\psi_{tz}) + z''\psi_z + z'(t'\psi_{zt} + z'\psi_{zz}) \quad (3.3)$$

olup buradan (1.5), (2.9) ve (2.12) gözönüne alındığında

$$\begin{cases} \psi_{tt} = \nabla_{\psi_t}^0 \psi_t = \bar{\nabla}_{\psi_t} \psi_t - \langle \psi_t, \psi_t \rangle \psi = \sin(z) \cos(z) \psi_z - \kappa_V(t) \sin(z) N + \sin^2(z) \psi \\ \psi_{tz} = \psi_{zt} = \nabla_{\psi_t}^0 \psi_z = \bar{\nabla}_{\psi_t} \psi_z - \langle \psi_t, \psi_z \rangle N = \cot(z) \psi_t \\ \psi_{zz} = \nabla_{\psi_z}^0 \psi_z = \bar{\nabla}_{\psi_z} \psi_z - \langle \psi_z, \psi_z \rangle \psi = -\psi \end{cases} \quad (3.4)$$

eşitlikleri elde edilir. O halde (3.1), (3.3) ve (3.4), (3.2) eşitliğine uygulanırsa;

$$\bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma = (t'' + 2t'z' \cot(z)) \psi_t + \left( z'' + (t')^2 \sin(z) \cos(z) \right) \psi_z - (t')^2 \kappa_V(t) \sin(z) N \quad (3.5)$$

elde edilir. Ayrıca (2.17) den  $N_\gamma$  spacelike vektör alanı, yani

$$\langle N_\gamma, N_\gamma \rangle = -\delta = 1$$

olup (2.16) eşitliğinden

$$\bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma = \kappa_g N \quad (3.6)$$

bulunur.

Şimdi  $\gamma$ ,  $M$  timelike konik yüzeyinde bir geodezik (yani  $\mathbb{S}_1^3$  de bir timelike rektifiyan eğri) olsun. O zaman (3.5) ve (3.6) den  $t = t(s)$  ve  $z = z(s)$  diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$t'' + 2t'z' \cot(z) = 0 \quad (3.7)$$

$$z'' + (t')^2 \sin(z) \cos(z) = 0 \quad (3.8)$$

$$-(t')^2 \kappa_V(t) \sin(z) = \kappa_g > 0 \quad (3.9)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$y(s) = \cos(z(s)) \quad (3.10)$$

seçimi yapılırsa (3.1) ve (3.8) eşitliklerinin kullanılması ile

$$y''(s) - y(s) = 0$$

diferensiyel denklemini elde edilir. Böylece bazı  $A, B$  ve  $s_0$  sabitleri için

$$y(s) = A \sinh(s + s_0) + B \cosh(s + s_0) \quad (3.11)$$

ve buradan

$$z(s) = \arccos(A \sinh(s + s_0) + B \cosh(s + s_0)) \quad (3.12)$$

olarak bulunur. Teorem 2.4. den,  $N_\gamma(s)$ ,  $N(t(s), z(s))$  paralel olup genelliği bozmadan  $N_\gamma = -N$  alınırsa,

$$a(s) = \frac{\langle B_\gamma, \psi_t \rangle}{E} = \frac{z'}{\sin(z)}, \quad b(s) = \frac{\langle B_\gamma, \psi_z \rangle}{G} = -t' \sin(z)$$

olmak üzere

$$B_\gamma(s) = a(s)\psi_t(t(s), z(s)) + b(s)\psi_z(t(s), z(s)) \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\bar{\nabla}_{T_\gamma} B_\gamma = \nabla_{T_\gamma}^0 B_\gamma = a'\psi_t + b'\psi_z + at'\psi_{tt} + (az' + bt')\psi_{tz} + bz'\psi_{zz}$$

ve (1.15) den

$$\bar{\nabla}_{T_\gamma} B_\gamma = -\tau_g N_\gamma$$

olup (3.4) eşitlikleri gözönüne alınırsa,

$$\tau_g(s) = t'(s)z'(s)\kappa_V(t(s))$$

bulunur. O halde (3.9) ile birlikte

$$\frac{\tau_g}{\kappa_g}(s) = -\frac{z'(s)}{t'(s)\sin(z(s))} \quad (3.14)$$

elde edilir. Şimdi (3.7) nin her iki tarafı  $\sin^2(z)$  ile çarpılırsa

$$t'' \sin^2(z) + 2t'z' \sin(z) \cos(z) = 0$$

olup  $u = \sin^2(z)$  değişken değiştirmesi ile  $\lambda$  bir sabit olmak üzere

$$t''u + t'u' = 0 \Rightarrow d(t'u) = 0 \Rightarrow t'u = \lambda.$$

bulunur. O halde buradan,

$$t' \sin^2(z) = \lambda, \quad \lambda \neq 0, \quad (3.15)$$

olur. (3.1) ve (3.15) den

$$(z')^2 = \frac{\lambda^2}{\sin^2(z)} - 1 \quad (3.16)$$

ve (3.10) dan

$$\sin^2(z) = 1 - y^2 \Rightarrow \sin^2(z) = 1 - (A \sinh(s + s_0) + B \cosh(s + s_0))^2 \quad (3.17)$$

olup (3.17), (3.16) da yerine konulursa,

$$(z')^2 = \frac{\lambda^2}{1 - (A \sinh(s + s_0) + B \cosh(s + s_0))^2} - 1 \quad (3.18)$$

bulunur. Ayrıca (3.12) den

$$(z')^2 = \frac{(A \sinh(s + s_0) + B \cosh(s + s_0))^2}{1 - (A \sinh(s + s_0) + B \cosh(s + s_0))^2} \quad (3.19)$$

elde edilir. Buna göre (3.18) ve (3.19) eşitlikleri kullanılarak  $A, B$  ve  $\lambda$  arasındaki ilişki,

$$A^2 - B^2 - \lambda^2 = -1 \quad (3.20)$$

olarak bulunur. Son olarak (3.12), (3.14) ve (3.15) eşitlikleri göz önüne alındığında gerekli hesaplamalardan sonra  $c_2^2 - c_1^2 < 1$  eşitsizliğini sağlayan

$$c_1 = \frac{-B}{\lambda}, \quad c_2 = \frac{-A}{\lambda},$$

sabitleri için

$$\frac{\tau_g}{\kappa_g} = c_1 \sinh(s + s_0) + c_2 \cosh(s + s_0) \quad (3.21)$$

eşitliği elde edilir.

Tersine  $\gamma = \gamma(s)$ , (3.21) eşitliğini sağlayan  $\mathbb{S}_1^3$  de birim hızlı timelike eğri olsun ve bazı  $c_1, c_2$  sabitleri için  $c_2^2 - c_1^2 - 1 < 0$  eşitsizliği sağlansın. Buradan  $\lambda \neq 0$  sabit olmak üzere

$$B = -c_1 \lambda, \quad A = -c_2 \lambda,$$

sabitleri için

$$\lambda^2 = \frac{1}{c_1^2 - c_2^2 + 1}$$

eşitliği verilsin. Şimdi sırasıyla (3.11) ve (3.12) eşitlikleri ile tanımlanan  $y = y(s)$  ve  $z = z(s)$  fonksiyonları tanımlansın. O zaman (3.15) diferensiyel denkleminin bir çözümü olan

$$t(s) = \tanh^{-1} \left( \frac{AB}{\lambda} + \left( \frac{1 + A^2}{\lambda} \right) \tanh(s + s_0) \right)$$

fonksiyonu ve (3.9) eşitliği ile belli olan  $\kappa_V$  fonksiyonu tanımlanabilir. Şimdi  $\gamma(I) \subset \mathbb{S}_1^3 \setminus \{p\}$  olacak şekilde bir  $p \in \mathbb{S}_1^3$  noktası ve geodezik eğriliği  $\kappa_V$  ile verilen  $S_1^2 \subset T_p \mathbb{S}_1^3$  deki birim hızlı timelike  $V = V(t)$  eğrisi verilsin. O halde parametrizasyonu (2.6) ile verilen  $\mathbb{S}_1^3$  deki bir  $M$

timelike konik yüzeyi ve bu yüzey üzerinde bir timelike eğri

$$\tilde{\gamma}(s) = \psi(t(s), z(s))$$

olarak tanımlanabilir. Buna göre gerekli hesaplamalardan sonra  $\tilde{\kappa}_g = \kappa_g$  ve  $\tilde{\tau}_g = \tau_g$  olacak şekilde  $\tilde{\gamma}$  nın  $M$  nin bir timelike geodeziği olduğu gösterilir. Böylece  $\gamma$ ,  $M$  timelike konik yüzeyindeki bir timelike geodeziğe kongrüenttir.

Sonuç olarak,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma = \gamma(s)$  timelike eğrisi,  $\psi(t(s), z(s))$  parametrizasyonu ile verilen bir timelike konik yüzeyin geodeziğidir gerek ve yeter şart  $\gamma = \gamma(s)$ , (3.21) denklemini sağlar. O halde, Teorem 2.4. de göz önüne alınırsa aşağıdaki karakterizasyon elde edilir.

**Teorem 3.3.**  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma = \gamma(s)$  birim hızlı burumalı timelike eğri olsun. O zaman  $\gamma$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir timelike rektifiyan eğriye kongrüenttir gerek ve yeter şart bazı  $c_1, c_2$  ve  $s_0$  sabitleri için

$$c_2^2 - c_1^2 - 1 < 0,$$

eşitsizliği ile birlikte

$$\frac{\tau_g}{\kappa_g}(s) = c_1 \sinh(s + s_0) + c_2 \cosh(s + s_0).$$

#### 4. $\mathbb{S}_1^3$ de TİMELİKE REKTİFİYAN EĞRİLERİN SINIFLANDIRMASI

Aşağıdaki teorem,  $\mathbb{S}_1^3$  deki burulmalı timelike rektifiyan eğriler için bir karakterizasyondur.

**Teorem 4.1.**  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma = \gamma(s)$  burulmalı birim hızlı timelike eğri olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

(i)  $\gamma$  bir rektifiyan eğridir.

(ii)  $p \notin \gamma(I)$  olacak şekilde  $p$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir nokta ve  $p^\perp$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $p$ -nin  $T_\gamma$ -ya ortogonal bileşeni olmak üzere

$$b_1^2 - b_2^2 + b^2 = 1,$$

eşitliğini sağlayan bazı  $b_1, b_2, b$  ve  $s_0$  sabitleri için,

$$\begin{aligned}\langle p, T_\gamma(s) \rangle &= b_1 \sinh(s + s_0) + b_2 \cosh(s + s_0), \\ \|p^\perp\| &= b^2.\end{aligned}$$

(iii)  $p \notin \gamma(I)$  olacak şekilde  $p \in \mathbb{S}_1^3$  vardır öyleki

$$\langle p, N_\gamma(s) \rangle = 0.$$

(iv)  $p \notin \gamma(I)$  olacak şekilde  $p \in \mathbb{S}_1^3$  vardır öyleki  $a$  sabit olmak üzere,

$$\langle p, B_\gamma(s) \rangle = a.$$

(v)  $p \notin \gamma(I)$  olacak şekilde  $p \in \mathbb{S}_1^3$  vardır öyleki  $a_2^2 - a_1^2 \leq 1$  şartını sağlayan bazı  $a_1, a_2$  ve  $s_0$  sabitleri için

$$\langle p, \gamma(s) \rangle = a_1 \sinh(s + s_0) + a_2 \cosh(s + s_0).$$

(vi)  $p \notin \gamma(I)$  olacak şekilde  $\mathbb{S}_1^3$  deki bir  $p$  noktası ve  $\gamma(s)$  arasındaki uzaklık fonksiyonu

$$\rho(s) = d(p, \gamma(s))$$

olmak üzere bazı  $d_2^2 - d_1^2 \leq 1$  eşitsizliğini sağlayan bazı  $d_1, d_2$  ve  $s_0$  sabitleri için

$$\cos(\rho(s)) = d_1 \sinh(s + s_0) + d_2 \cosh(s + s_0).$$

**İspat.** Kabul edelim ki  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de timelike bir rektifiyan eğri olsun. O zaman  $\gamma$ , Teorem 2.4. den parametrizasyonu (2.6) ile verilen  $M$  timelike konik yüzeyinin bir geodeziğidir. Buradan  $t(s)$  ve  $z(s)$  fonksiyonları (3.7)-(3.9) denklemlerini sağlamak üzere  $\gamma(s) = \psi(t(s), z(s))$  yazılabilir. O zaman,

$$\langle p, \gamma(s) \rangle = \cos(z(s)) \langle p, p \rangle + \sin(z(s)) \langle p, V(t(s)) \rangle = \cos(z(s)),$$

olup (3.12) de gözönüne alınırsa,

$$\langle p, \gamma(s) \rangle = A \sinh(s + s_0) + B \cosh(s + s_0)$$

olarak bulunur. Ayrıca (3.20) den

$$B^2 - A^2 = 1 - \lambda^2 \leq 1$$

olup  $A = a_1$  ve  $B = a_2$  için

$$a_2^2 - a_1^2 \leq 1$$

ve

$$\langle p, \gamma(s) \rangle = a_1 \sinh(s + s_0) + a_2 \cosh(s + s_0) \quad (4.1)$$

elde edilir. Böylece (i)  $\Rightarrow$  (v) sağlanır.

Şimdi (v) ifadesini kabul edelim. Bu durumda,

$$\frac{d}{ds} \langle p, \gamma(s) \rangle = \langle p, T_\gamma(s) \rangle$$



ve (4.1) den

$$\frac{d}{ds} \langle p, \gamma(s) \rangle = a_1 \cosh(s + s_0) + a_2 \sinh(s + s_0)$$

olup buradan

$$\langle p, T_\gamma(s) \rangle = a_1 \cosh(s + s_0) + a_2 \sinh(s + s_0)$$

olur. Buradan tekrar  $s$ -ye göre türev alınıp (1.11) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle p, T_\gamma(s) \rangle &= a_1 \sinh(s + s_0) + a_2 \cosh(s + s_0) = \langle p, \gamma(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle p, T_\gamma(s) \rangle &= \left\langle p, \nabla_{T_\gamma(s)}^0 T_\gamma(s) \right\rangle = \kappa_g \langle p, N_\gamma(s) \rangle + \langle p, \gamma(s) \rangle \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde buradan,

$$\kappa_g \langle p, N_\gamma(s) \rangle = 0$$

olmalıdır. Ayrıca  $\kappa_g > 0$  olduğundan

$$\langle p, N_\gamma \rangle = 0$$

olarak bulunur. Böylece (v)  $\Rightarrow$  (iii) sağlanır.

Şimdi (iii) ifadesini kabul edelim. Bazı  $u(s)$  fonksiyonu için  $\beta_s(u)$ ,  $p = \beta_s(0)$  ve  $\gamma(s) = \beta_s(u(s))$  yi birleştiren geodezik yay olsun. O zaman  $a(u)$  ve  $b(u)$  fonksiyonları için

$$\beta'_s(u) = a(u)p + b(u)\gamma(s)$$

olmak üzere

$$\langle \beta'_s(u(s)), N_\gamma(s) \rangle = a(u) \langle p, N_\gamma(s) \rangle + b(u) \langle \gamma(s), N_\gamma(s) \rangle = 0.$$

Böylece  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de bir rektifiyan eğridir. Buradan (iii)  $\Rightarrow$  (i) olup (i), (iii) ve (v) ifadeleri denktir. (1.11) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\frac{d}{ds} \langle p, B_\gamma(s) \rangle = \left\langle p, \nabla_{T_\gamma(s)}^0 B_\gamma(s) \right\rangle = -\tau_g(s) \langle p, N_\gamma(s) \rangle = 0.$$

Burada hipotezden  $\gamma$  burulmalı eğri ( $\tau_g \neq 0$ ) olup (iii) den  $\langle p, N_\gamma(s) \rangle = 0$  olması ile (iii) ve (v) birbirine denktir.

Şimdi, Tanım 1.12. den

$$\langle p, \gamma(s) \rangle = \cos(\rho(s))$$

olacak şekilde  $\rho(s)$  fonksiyonu mevcut olsun. Buradan (v) ve (vi) sağlandığı kolayca görülür.

Şimdi,  $\gamma$  bir timelike rektifiyan eğri olsun. O zaman (iii), (iv) ve (v) sağlanır. (v) de türev alınmasıyla

$$\langle p, T_\gamma(s) \rangle = a_1 \cosh(s + s_0) + a_2 \sinh(s + s_0)$$

olup (ii) nin ilk denklemini sağlanmış olur. Ayrıca (iii) ve (iv) ifadelerinden

$$\begin{aligned} p^\perp &= \lambda_1 N_\gamma + \lambda_2 B_\gamma = a B_\gamma \\ \|p^\perp\|^2 &= \langle p, N_\gamma \rangle^2 + \langle p, B_\gamma \rangle^2 = a^2 \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece, (ii) nin ikinci denklemini sağlanmış olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \langle p, T_\gamma \rangle^2 &= a_1^2 \cosh^2(s + s_0) + a_2^2 \sinh^2(s + s_0), \\ \langle p, \gamma \rangle^2 &= a_1^2 \sinh^2(s + s_0) + a_2^2 \cosh^2(s + s_0), \\ \langle p, B_\gamma \rangle^2 &= a^2, \end{aligned}$$

olup  $T_\gamma$  timelike olmak üzere

$$1 = \langle p, p \rangle = \langle p, \gamma \rangle^2 - \langle p, T_\gamma \rangle^2 + \langle p, B_\gamma \rangle^2 = a_2^2 - a_1^2 + a^2$$

elde edilir. Son olarak (ii) ifadesini kabul edelim. (ii) nin ilk denkleminin integrasyonu sonucunda  $c$  sabit olmak üzere,

$$\int \langle p, T_\gamma(s) \rangle ds = \langle p, \gamma(s) \rangle + \langle p, c \rangle.$$

Buradan  $c_0 = -\langle p, c \rangle$  sabit olmak üzere,

$$\langle p, \gamma(s) \rangle = b_1 \cosh(s + s_0) + b_2 \sinh(s + s_0) + c_0 \quad (4.2)$$

elde edilir. Ayrıca (ii) nin ikinci denkleminde,

$$1 = \langle p, p \rangle = \langle p, \gamma \rangle^2 - \langle p, T_\gamma \rangle^2 + \|p^\perp\|^2$$

olup buradan

$$b_1^2 - b_2^2 = \langle p, \gamma \rangle^2 - \langle p, T_\gamma \rangle^2 = 1 - b^2 \quad (4.3)$$

bulunur. O halde (ii) nin birinci denklemi (4.2) ve (4.3) ile birlikte düşünüldüğünde,  $c_0$  sabiti sıfır olmak zorundadır. Buna göre  $b_1 = a_2$  ve  $b_2 = a_1$  sabitleri için,

$$\langle p, \gamma(s) \rangle = a_1 \sinh(s + s_0) + a_2 \cosh(s + s_0),$$

ve

$$a_2^2 - a_1^2 = b_1^2 - b_2^2 = 1 - b^2 \leq 1,$$

elde edilir. Böylece (v) sağlanır ve burada  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de bir timelike rektifiyan eğridir.

Şimdi  $\mathbb{S}_1^3$  de bütün timelike rektifiyan eğrileri belirleyeceğimiz teoremi verelim.

**Teorem 4.2.**  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$ -de burulmalı timelike eğri olsun. O zaman,  $\gamma$  bir rektifiyan eğridir gerek ve yeter şart  $p \notin \gamma(I)$  olacak şekilde bir nokta  $p \in \mathbb{S}_1^3$  ve  $V = V(t), \mathbb{S}_1^2 \subset T_p \mathbb{S}_1^3$  de bir birim hızlı timelike eğri olmak üzere bazı  $a \neq 0$  ve  $t_0$  sabitleri için

$$\rho(t) = \arctan(a \operatorname{sech}(t + t_0))$$

olup  $\gamma$ -nın uygun bir yeniden parametrelendirmesi

$$\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t)) = \cos(\rho(t))p + \sin(\rho(t))V(t). \quad (4.4)$$

**İspat.**  $p \in \mathbb{S}_1^3$  bir nokta ve  $V = V(t), \mathbb{S}_1^2 \subset T_p \mathbb{S}_1^3$  de bir birim hızlı timelike eğri ve  $\rho = \rho(t)$ , pozitif bir fonksiyon olsun. O halde

$$\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$$

olmak üzere  $\langle \gamma', \gamma' \rangle = -v^2$  için

$$\gamma' = -\rho' \sin(\rho)p + \rho' \cos(\rho)V + \sin(\rho)V',$$

ve

$$v^2 = \sin^2(\rho) - (\rho')^2 > 0. \quad (4.5)$$

O zaman  $T_\gamma$  birim teğet vektör alanı

$$T_\gamma = \frac{\gamma'}{v} = \frac{-\rho'}{v} \sin(\rho)p + \frac{\rho'}{v} \cos(\rho)V + \frac{1}{v} \sin(\rho)V', \quad (4.6)$$

olarak bulunur. Şimdi  $\gamma$  nın yay parametresi  $s = s(t)$  ile gösterilsin. Yani,

$$s(t) = \int \|\gamma'(t)\| dt$$

olup  $v(t) = s'(t)$  dir. O halde, (1.11) Frenet denklemlerinden

$$T'_\gamma(s(t)) = s'(t) \frac{d}{ds} T_\gamma(s) = v(t)(\gamma(s) + \kappa_g(s)N_\gamma(s))$$

ve buradan

$$\left( \frac{T'_\gamma}{v} - \gamma \right) (t) = (\kappa_g N_\gamma)(s)$$

eşitliği bulunur. Böylece  $\frac{1}{v}T'_\gamma - \gamma$  vektör alanının,  $\gamma$  nın  $N_\gamma$  asli normal vektör alanına paralel olduğu görülür. Diğer taraftan  $V$  birim hızlı timelike eğrisinin,  $p$  ve  $V$  ye normal fakat  $\mathbb{S}_1^2$  ye teğet olan asli normal  $N_V = V \wedge V'$  ve geodezik eğriliği  $\kappa_V$  olarak verilsin. O zaman  $V$  nin  $\mathbb{S}_1^2$  deki Sabban (eğri-yüzey) çatısına göre (2.3) den

$$V'' = V + \kappa_V N_V. \quad (4.7)$$

bulunur. Şimdi (4.6) ve (4.7) den

$$\langle p, \frac{1}{v}T'_\gamma - \gamma \rangle = \frac{1}{v} \left( \frac{\rho'}{v} \sin(\rho) \right)' + \cos(\rho).$$

Ayrıca Teorem 4.1. den  $\gamma$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de timelike rektifiyan eğri ise  $\langle p, N_\gamma \rangle = 0$  ve  $N_\gamma$  nin  $\frac{1}{v}T'_\gamma - \gamma$  ya paralel olmasından

$$\frac{1}{v} \left( \frac{\rho'}{v} \sin(\rho) \right)' + \cos(\rho) = 0$$

olmalıdır. Böylece gerekli hesaplamalardan sonra,

$$\sin(\rho)\rho'' - 2\cos(\rho)(\rho')^2 + \cos(\rho)\sin^2(\rho) = 0 \quad (4.8)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmek için  $\rho(t) = \arctan(\phi(t))$  olacak şekilde  $\phi = \phi(t)$  fonksiyonunu düşünelim. O zaman

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\phi'}{1+\phi^2}, & \rho'' &= \frac{(1+\phi^2)\phi'' - 2\phi\phi'}{(1+\phi^2)^2} \\ \sin(\rho) &= \frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}, & \cos(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}} \end{aligned}$$

eşitlikleri (4.8) de yerine konursa

$$\frac{1}{(1+\phi^2)^{3/2}}(\phi\phi'' - 2(\phi')^2 + \phi^2) = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin aşikar olmayan çözümleri ise bazı  $a \neq 0$  ve  $t_0$  sabitleri için  $\phi(t) = a \operatorname{sech}(t + t_0)$  fonksiyonu ile verilir. Böylece  $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de bir timelike rektifiyan eğridir gerek ve yeter şart  $a \neq 0$  ve  $t_0$  sabitleri için

$$\rho(t) = \arctan(a \operatorname{sech}(t + t_0)).$$

Benzer metot ile  $\mathbb{S}_1^3$  de timelike  $N_\gamma$  ya sahip bütün spacelike eğriler de aşağıdaki teorem ile karakterize edilir.

**Teorem 4.3.**  $\gamma$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  de timelike  $N_\gamma$  ya sahip burulmalı spacelike eğri olsun. O zaman,  $\gamma$  bir rektifiyan eğridir gerek ve yeter şart  $p \notin \gamma(I)$  olacak şekilde bir nokta  $p \in \mathbb{S}_1^3$  ve  $V = V(t)$ ,  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$  de bir birim hızlı spacelike eğri olmak üzere bazı  $a \neq 0$  ve  $t_0$  sabitleri için  $\rho(t) = \arctan(a \sec(t + t_0))$  olup  $\gamma$ -nın uygun bir yeniden parametrelendirmesi

$$\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t)) = \cos(\rho(t))p + \sin(\rho(t))V(t). \quad (4.9)$$

## 5. $\mathbb{S}_1^3$ de EKSTREMUMLU TİMELİKE REKTİFİYAN EĞRİLER

Chen ve Dillen, 2005 yılında ekstremumlu eğriler bakış açısıyla üç boyutlu Öklidyen uzayda rektifiyan eğriler için aşağıdaki tanım ve teoremleri verdi:

**Tanım 5.1.**  $\mathbb{R}^3$  de  $x$  eğrisi, bir  $\rho$  fonksiyonu ve  $\mathbb{S}^2$ -de bir  $y$  küresel eğrisi için  $x = \rho y$  olarak verilsin. O zaman  $y$ ,  $x$ -in küresel izdüşümü olarak adlandırılır [6].

Aşağıdaki teorem,  $\mathbb{R}^3$  de verilen bir rektifiyan eğrinin, küresel izdüşümlü eğriler arasında her bir noktada  $\frac{v^4 \kappa^2}{\rho^2}$  fonksiyonunun minimum değerini kabul eden bir ekstremumlu eğri olduğunu gösterir:

**Teorem 5.2.**  $y = y(t)$ ,  $\mathbb{S}^2$  de bir birim hızlı eğri ve  $\rho = \rho(t)$  bir pozitif fonksiyon olsun. O zaman hızı  $v$ , eğriliği  $\kappa$  olan  $x$  eğrisi ve  $\kappa_g$  geodezik eğrilikli  $y$  küresel eğrisi için

$$\kappa_g^2 \leq \frac{v^4 \kappa^2}{\rho^2}$$

eşitsizliği sağlanır ve eşitlik durumunda  $x$  bir rektifiyan eğridir [6].

Böylece üç boyutlu Öklidyen uzayda sıfırdan farklı sabit eğrilige ve lineer formdaki burulmaya sahip küresel tipten rektifiyan eğrilerin sınıflandırması aşağıda sonuçta verilmiştir.

**Sonuç 5.3.**  $\mathbb{R}^3$  de sıfırdan farklı sabit eğrilikli ve sabit olmayan lineer burulmalı bir  $x$  eğrisi  $s$  yay parametrelidir gerek ve yeter şart Bu eğri, sıfırdan farklı bir  $c$  sabiti için  $\kappa_g = c \sec^3(t)$  geodezik eğrilikli  $\mathbb{S}^2$ -deki birim hızlı spiral tipten  $y$  küresel eğrisi üzerindeki bir rektifiyan eğriye kongrüenttir [6].

Şimdi [6], [23] ve [24] de ekstremumlu eğriler olarak verilen rektifiyan eğriler yaklaşımını,  $\mathbb{S}_1^3$  de timelike rektifiyan eğriler için düşünelim.

**Tanım 5.4.**  $\mathbb{S}_1^3$  de bir timelike  $\gamma = \gamma(s)$  eğrisi,  $p \in \mathbb{S}_1^3$ ,  $\rho(t) \neq 0$  keyfi fonksiyonu ve  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p \mathbb{S}_1^3$  de yatan bit timelike  $V(t)$  eğrisi için  $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$  olarak verilsin. O zaman  $V$ ,  $\gamma$  nın timelike pseudo-küresel izdüşümü olarak adlandırılır.

Şimdi  $\mathbb{S}_1^3$  deki bir  $\gamma$  timelike rektifiyan eğrinin aynı  $V$  timelike pseudo-küresel izdüşümlü eğriler arasında  $v$ ,  $\kappa_g$  ve  $\rho$  'ya bağlı olan belli bir fonksiyonun minimum değerinde  $\kappa_V^2$  ye eşit olma özelliği ile karakterize edildiğini gösteren teoremi verelim.

**Teorem 5.5.**  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$  de yatan bir timelike birim hızlı  $V(t)$  eğrisi ve  $p \in \mathbb{S}_1^3$  noktası verilsin. O zaman, herhangi  $0 \neq \rho(t)$  fonksiyonu, hızlı  $v$  ve geodezik eğriliği  $\kappa_g$  olan timelike eğri  $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$  ve  $\kappa_v$  geodezik eğrilikli  $V$  timelike pseudo-küresel izdüşümü için

$$\kappa_V^2 \leq \frac{v^4 \kappa_g^2}{\sin^2(\rho)} \quad (5.1)$$

eşitsizliği vardır ve eşitlik durumunda  $\gamma$  bir timelike rektifiyan eğridir.

**İspat.** Kabul edelim ki  $\rho$  sıfırdan farklı bir fonksiyon ve  $V, \mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$  de timelike birim hızlı eğri olmak üzere  $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$  şeklinde tanımlanan timelike eğrisi verilsin.  $\exp_p$  tanımı, (4.6) eşitliği ve  $N_V$  spacelike vektörünün  $S_p\{p, V, V'\}$  timelike uzayına ortogonal olduğu gözönüne alınırsa  $N_V$  nin hem  $\gamma$  ya hem de  $T_\gamma$  ya ortogonal olduğu sonucuna varılır. O halde  $\theta = \theta(t)$  keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$N_V = V \wedge V' = \cos(\theta)N_\gamma + \sin(\theta)B_\gamma \quad (5.2)$$

yazılabilir. (5.2) nin  $t$  ye göre türevi alınıp, (1.15) ve (4.7) uygulanırsa;  $v = \sqrt{|\langle \gamma', \gamma' \rangle|}$  olmak üzere

$$\kappa_V V' = \theta'(-\sin(\theta))N_\gamma + \cos(\theta)(\kappa_g T_\gamma + \tau_g B_\gamma) + \theta' \cos(\theta)B_\gamma + \theta'(\sin(\theta))v(-\tau_g N_\gamma)$$

dır. Buradan

$$\kappa_V V' = (v\kappa_g \cos(\theta))T_\gamma + (\theta' + v\tau_g)(-\sin(\theta)N_\gamma + \cos(\theta)B_\gamma) \quad (5.3)$$

elde edilir.  $\langle V', V' \rangle = -1$  ve  $\langle T_\gamma, T_\gamma \rangle = -1$  olduğundan  $-\kappa_V^2 = (v\kappa_g \cos(\theta))^2 - (\theta' + v\tau_g)^2$  ise

$$\kappa_V^2 = (v\kappa_g \cos(\theta))^2 - (\theta' + v\tau_g)^2 \quad (5.4)$$

Şimdi  $p$  noktasını,  $\{\gamma, T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$  pseudo-ortogonal çatısına göre ifade edelim. Yani

$$p = \eta_1 \gamma + \eta_2 T_\gamma + \eta_3 N_\gamma + \eta_4 B_\gamma$$

olacak şekilde  $i = 1, 2, 3, 4$  için  $\eta_i$  fonksiyonlarını arayalım. O zaman (4.4) den

$$\eta_1 = \langle p, \gamma \rangle = \cos(\rho) \quad (5.5)$$

ve türevin alınmasıyla (4.6) den

$$\eta_2 = \langle p, T_\gamma \rangle = -\frac{\rho' \sin(\rho)}{v} \quad (5.6)$$

bulunur. Şimdi (5.3) den

$$a = \frac{v\kappa_g \cos(\theta)}{\kappa_V}, \quad b = \frac{\theta' + v\tau_g}{\kappa_V}$$

olmak üzere  $V' = aT_\gamma + b(-\sin(\theta)N_\gamma + \cos(\theta)B_\gamma)$  yazılabilir. O halde  $\langle p, V' \rangle = 0$ ,  $\langle p, N_V \rangle = 0$  olup (5.2) ve (5.6) gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \sin(\theta) \langle p, N_\gamma \rangle - \cos(\theta) \langle p, B_\gamma \rangle &= \frac{a\rho' \sin(\theta)}{bv} \\ \cos(\theta) \langle p, N_\gamma \rangle + \sin(\theta) \langle p, B_\gamma \rangle &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden

$$\eta_3 = \langle p, N_\gamma \rangle = \frac{a\rho'}{bv} \sin(\theta) \sin(\rho), \quad (5.7)$$

$$\eta_4 = \langle p, B_\gamma \rangle = -\frac{a\rho'}{bv} \cos(\theta) \sin(\rho), \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.5)-(5.8) denklemlerinden,

$$p = \cos(\rho)\gamma - \frac{\rho' \sin(\rho)}{v} T_\gamma + \frac{a\rho' \sin(\theta) \sin(\rho)}{bv} N_\gamma - \frac{a\rho' \cos(\theta) \sin(\rho)}{bv} B_\gamma$$

bulunur. Böylece

$$1 = \langle p, p \rangle = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \left( \frac{\rho'}{v} \right)^2 \left( \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right)$$

eşitliğinden  $\left( \frac{\rho'}{v} \right)^2 \left( \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right) = 1$  olmalıdır. Buradan  $a$  ve  $b$  yerine yazılırsa

$$(\theta' + v\tau_g)^2 = \frac{(\rho')^2}{v^2 + (\rho')^2} (v\kappa_g \cos(\theta))^2 \quad (5.9)$$

elde edilir. (5.9), (5.4) de yerine yazılıp (4.5) eşitliği gözönüne alınırsa;

$$\kappa_V^2 = \frac{v^4 \kappa_g^2 \cos^2(\theta)}{\sin^2(\rho)} \quad (5.10)$$



elde edilir. Buradan (5.1) eşitsizliği sağlanır. Açık ki, (5.1) de eşitlik durumunda  $\sin(\theta) = 0$  olmalıdır. Buradan (5.2) gözönüne alındığında  $N_V = \mp N_\gamma$  olması demektir, yani  $N_V // N_\gamma$  dir. O halde  $\gamma$  timelike eğrisi, Teorem (2.4.) den  $\psi(t, z) = \exp_p(zV(t))$  parametrizasyonu ile verilen timelike konik yüzeyin bir geodeziğidir. Yani  $\gamma$  bir timelike rektifiyan eğridir. Sonuç olarak (5.1) in eşitlik durumu sağlanır gerek ve yeter şart  $\gamma, \mathbb{S}_1^3$  de bir timelike rektifiyan eğridir.

Teorem 5.5. in bir sonucu olarak,  $\mathbb{S}_1^3$  de sıfırdan farklı sabit geodezik eğrilikli ve lineer hiperbolik trigonometrik geodezik burulmalı timelike eğrilerin, spirial tipten timelike rektifiyan eğrilere kongrüent olduğunu gösterelim.

**Sonuç 5.6.**  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma(s) = \exp_p(\rho(s)V(s))$  şeklinde tanımlı timelike eğrinin, geodezik eğriliği sıfırdan farklı bir  $k_0$  sabiti ve bazı  $d_1, d_2$  ve  $s_0$  sabitleri için  $d_2^2 - d_1^2 - \kappa_0^2 < 0$  şartı ile birlikte yay uzunluğu parametrelili geodezik burulması

$$\tau_g(s) = d_1 \sinh(s + s_0) + d_2 \cosh(s + s_0)$$

dir gerek ve yeter şart  $\gamma = \gamma(s)$  eğrisi, bazı  $a \neq 0, c \neq 0$  ve  $t_0$  sabitleri için  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$  deki geodezik eğriliği

$$\kappa_V(t) = c(\cosh^2(t + t_0) + a^2)^{-3/2} \quad (5.11)$$

olan  $V(t)$  birim hızlı spirial tipten timelike eğrisi üzerindeki bir timelike rektifiyan eğriye kongrüenttir.

**İspat.** Kabul edelim ki,  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\gamma = \exp_p(\rho V)$  şeklinde tanımlı timelike eğrinin geodezik eğriliği sıfırdan farklı bir  $\kappa_0$  sabiti ve  $s$  yay uzunluğu parametresi ile verilen geodezik burulması bazı  $d_1, d_2$  ve  $s_0$  sabitleri için  $d_2^2 - d_1^2 - \kappa_0^2 < 0$  şartı ile birlikte  $\tau_g(s) = d_1 \sinh(s + s_0) + d_2 \cosh(s + s_0)$  olsun. O zaman Teorem 3.3. den  $\gamma$  bir timelike rektifiyan eğridir. O halde Teorem 4.2. den bazı  $a \neq 0$  ve  $t_0$  sabitleri için  $\rho(t) = \arctan(a \operatorname{sech}(t + t_0))$  olarak alabiliriz. Buradan Teorem 5.5. de gözönüne alındığında,  $0 \neq c = a(1 + a^2)\kappa_0$  sabit olmak üzere  $\kappa_V(t) = c(\cosh^2(t + t_0) + a^2)^{-3/2}$  olarak elde edilir.

Tersine, geodezik eğriliği (5.11) ile verilen  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$  de birim hızlı timelike  $V = V(t)$  eğrisi üzerinde  $\mathbb{S}_1^3$  de bir timelike rektifiyan eğri  $\gamma = \exp_p(\rho V)$  olarak verilsin. O zaman Teorem 4.2.

den bazı  $a \neq 0$  ve  $t_0$  sabitleri için  $\rho(t) = \arctan(a \operatorname{sech}(t + t_0))$  olur. Buradan

$$\frac{v^4(t)}{\sin^2(\rho(t))} = \frac{a(1 + a^2)^2}{(a^2 + \cosh^2(t + t_0))^3}$$

bulunur.  $\gamma$  bir timelike rektifiyan eğri olduğundan Teorem 5.5. gereğince

$$\kappa_V^2(t) = \frac{v^4(t)\kappa_g^2(t)}{\sin^2(\rho(t))}$$

olmalıdır. Böylece  $c^2(\cosh^2(t + t_0) + a^2)^{-3} = a^2(1 + a^2)^2(a^2 + \cosh^2(t + t_0))^{-3}\kappa_g^2(t)$  olup

$$\kappa_g^2 = \frac{c^2}{a^2(1 + a^2)^2}$$

sıfırdan farklı sabiti elde edilir. Ayrıca Teorem 3.3. de gözönüne alınırsa bazı  $d_1, d_2, s_0$  sabitleri için  $d_1 = c_1\kappa_g, d_2 = c_2\kappa_g$  olmak üzere  $d_2^2 - d_1^2 - \kappa_g^2 < 0$  şartı ile birlikte

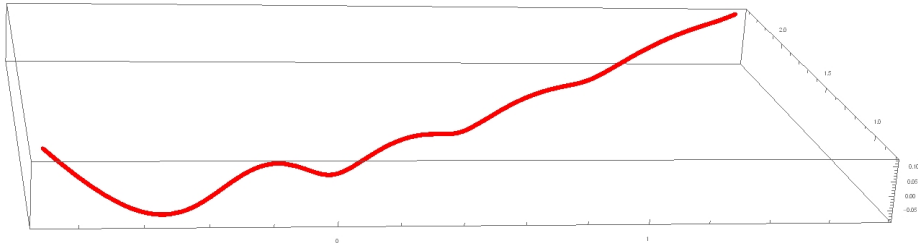
$$\tau_g(t) = d_1 \sinh(s + s_0) + d_2 \cosh(s + s_0)$$

olarak bulunur.

**Örnek 5.7.**  $\mathbb{S}_1^3$  de bir  $\gamma$  timelike rektifiyan eğrisinin geodezik eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla,

$$\kappa_g = 10, \tau_g = 2 \sinh(s) + 2 \cosh(s),$$

olsun. Bu durumda Şekil 5.1,  $\gamma$  ya kongrüent olan timelike rektifiyan eğrinin Minkowski 3-uzayındaki stereografik izdüşümünün, Mathematica paket programında nümerik metotlar kullanılması ile elde edilen grafiğidir.



**Şekil 5.1:**  $\gamma$  timelike rektifiyan eğrisinin, Minkowski 3-uzayına stereografik izdüşümü

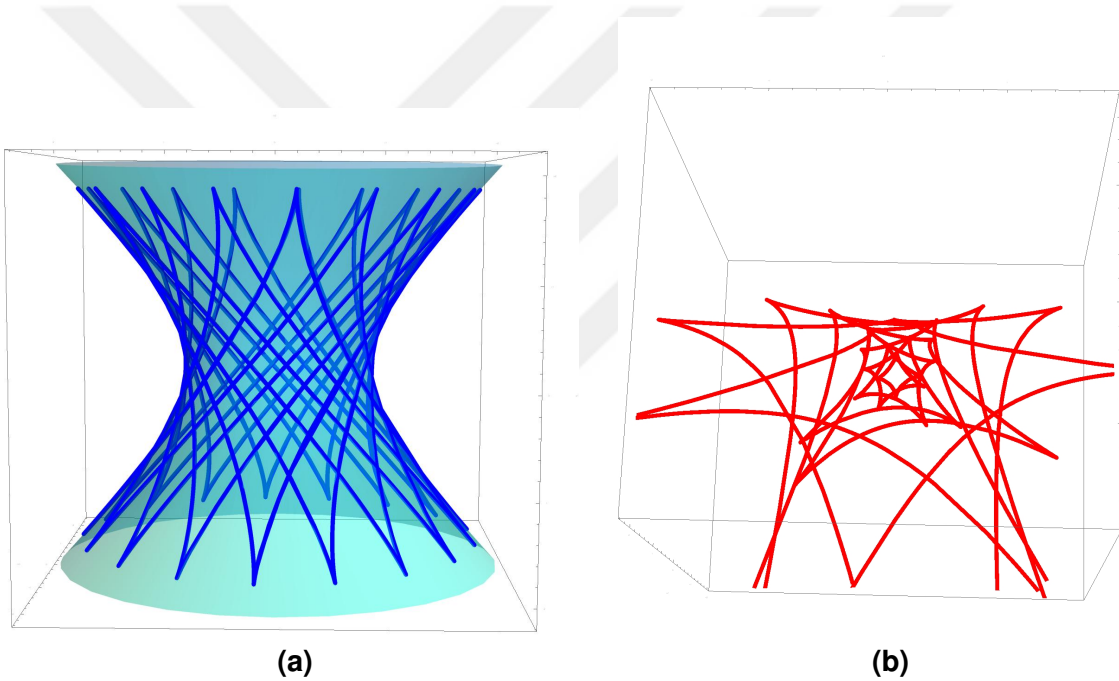
**Örnek 5.8.**  $p = (0, 1, 0, 0) \in \mathbb{S}_1^3$  noktası,  $\rho(t) = \arctan(\operatorname{sech}(t))$  fonksiyonu ve  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$  de yatan bir timelike pseudo-küresel eğri (Şekil 5.2a)

$$V(t) = \left( \frac{15}{8} \cos(17t), 0, \frac{25}{16} \cos(9t) + \frac{9}{16} \cos(25t), \frac{25}{16} \sin(9t) - \frac{9}{16} \sin(25t) \right),$$

tarafından üretilen timelike rektifiyan eğrinin parametrizasyonu

$$\gamma(t) = \frac{\operatorname{sech}(t)}{16\sqrt{1 + \operatorname{sech}^2(t)}} \left( 30 \cos(17t) \operatorname{sech}(t), \frac{16}{\operatorname{sech}(t)}, 25 \cos(9t) + 9 \cos(25t), 25 \sin(9t) - 9 \sin(25t) \right)$$

olarak verilir (Şekil 5.2b).



**Şekil 5.2:** (a)  $V(t)$  timelike pseudo-küresel izdüşüm eğrisi (b)  $\gamma$  timelike rektifiyan eğrisinin Minkowski 3-uzayına stereografik izdüşümü

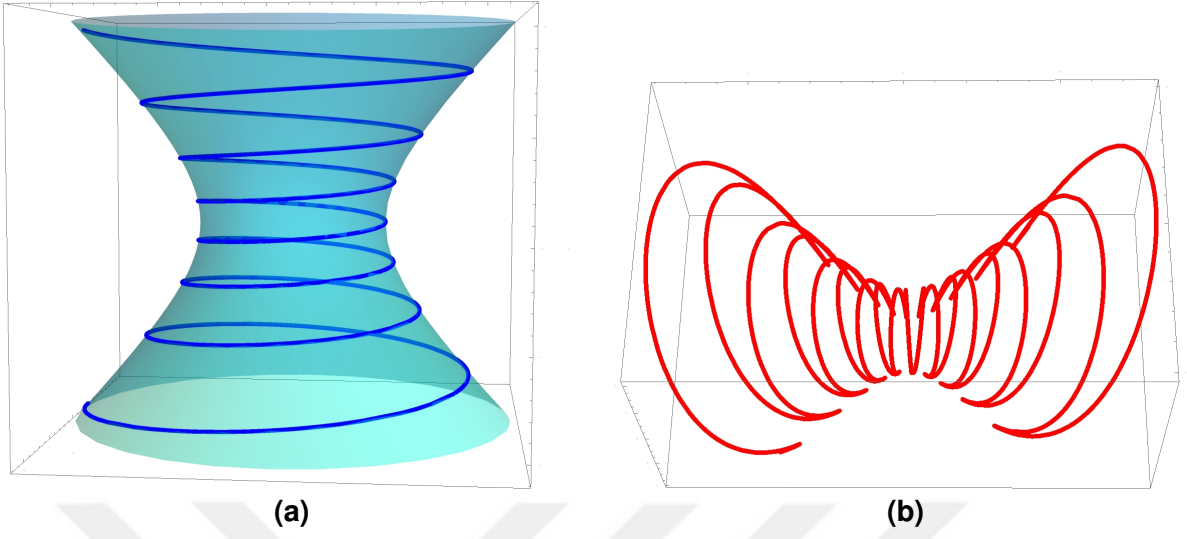
**Örnek 5.9.**  $p = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{S}_1^3$  noktası,  $\rho(t) = \arctan(\sec(t))$  fonksiyonu ve  $\mathbb{S}_1^2 \subset T_p\mathbb{S}_1^3$  de yatan bir spacelike pseudo-küresel eğri (Şekil 5.3a)

$$V(t) = \left( \sinh\left(\frac{t}{15}\right), \cosh\left(\frac{t}{15}\right) \cos(t), \cosh\left(\frac{t}{15}\right) \sin(t), 0 \right),$$

tarafından üretilen spacelike rektifiyan eğrinin parametrizasyonu

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sec^2(t)}} \left( \sec(t) \sinh\left(\frac{t}{15}\right), \cosh\left(\frac{t}{15}\right), \cosh\left(\frac{t}{15}\right) \tan(t), 1 \right)$$

olarak verilir (Şekil 5.3b).



**Şekil 5.3:** (a)  $V(t)$  spacelike pseudo-küresel izdüşüm eğrisi (b)  $\gamma$  spacelike rektifiyan eğrisinin Minkowski 3-uzayına stereografik izdüşümü

## KAYNAKLAR

- [1]. Ali, A.T., Onder, M.A., 2012, *Some characterizations of space-like rectifying curves in the Minkowski space-time*, GJSFR-F Math. Decis. Sci., 12(1).
- [2]. Altunkaya, B., Aksoyak, F., Kula, L., Aytekin, C., 2016, *On rectifying slant helices in Euclidean 3-Space*, Konuralp Journal of Mathematics, 4, 17-24.
- [3]. Barros, M., 1997, *General helices and a theorem of Lancret*, Proc., Amer. Math. Soc., 1503-1509.
- [4]. Barros, M., Ferrandez, A., Lucas, P., Merono, M.A., 2001, *General helices in the three-dimensional Lorentzian space forms*, Rocky Mountain J. Math., 31(2), 373-388.
- [5]. Chen, B.Y., 2003, *When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?*, Amer. Math. Monthly, 110, 147-152.
- [6]. Chen, B.Y., Dillen, F., 2005, *Rectifying curves as centrodes and extremal curves*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin., 33(2), 77-90.
- [7]. Chen, B.Y., 2017, *Rectifying curves and geodesics on a cone in the Euclidean 3-space*. Tamkang J. Math, 48, 209-214.
- [8]. Chen, L., Takahashi, M., 2016, *Dualities and evolutes of fronts in hyperbolic and de Sitter space*, J. Math. Anal. Appl., 437(1), 133-159.
- [9]. Choi, J. H., Kang, T. H., Kim, Y. H. 2012, *Bertrand curves in 3-dimensional space forms*, Applied Mathematics and Computation, 219(3), 1040-1046.
- [10]. Deshmukh, S., Chen, B.Y., Alshammari, S.H., 2018, *On rectifying curves in Euclidean 3-space*, Turk. J. Math., doi:10.3906/mat-1701-52.
- [11]. Fusho, T., Izumiya, S. 2008, *Lightlike surfaces of spacelike curves in De Sitter 3-space*, J. Geom., 88(1-2), 19-29.
- [12]. Grbovic, M., Nesovic, E., 2012, *Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space*, Math. Commun., 17, 655-664.


- [13]. Gungor, M.A., Tosun, M., 2011, *Some characterizations of quaternionic rectifying curves*, DGDS Differ. Geom. Dyn. Syst. Monogr., 13, 89-100.
- [14]. Huang, J., Chen, L., Izumiya, S., Pei, D., 2019, *Geometry of special curves and surfaces in 3-space form*, 136, 31-38.
- [15]. Ilarslan, K., Nesovic, E., Petrovic-Torgasev, M., 2003, *Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space*, Novi Sad J. Math., 33(2), 23-32.
- [16]. Ilarslan, K., Nesovic, E., 2007, *On rectifying curves as centrodes and extremal curves in the Minkowski 3-space*, Novi Sad J. Math., 37(1), 53-64.
- [17]. Ilarslan, K., Nesovic, E., 2008, *Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space  $E^4$* , Turkish J. Math., 32(1), 21-30.
- [18]. Ilarslan, K., Nesovic, E., 2008, *Some characterizations of null, pseudo null and partially null rectifying curves in Minkowski space-time*, Taiwanese J. Math., 12(5), 1035-1044.
- [19]. Ilarslan, K., Nesovic, E., 2014, *Some relations between normal and rectifying curves in Minkowski space-time*, Int. Electron. J. Geom., 7(1), 26-35.
- [20]. Izumiya, S., Takeuchi, N., 2004, *New special curves and developable surfaces*, Turkish J. Math., 28, 153-163.
- [21]. Izumiya, S., Takahashi, M., Tari, F., 2010, *Folding maps on spacelike and timelike surfaces and duality*, Osaka J. Math., 47(3), 839-862.
- [22]. Pascual Lucas and Jose Antonio Ortega-Yagües. 2013, *Bertrand curves in non-flat 3-dimensional (Riemannian or Lorentzian) space forms*, Bull. Korean Math. Soc., 50(4):1109-1126.
- [23]. Lucas, P., Ortega-Yagües, J.A., 2015, *Rectifying curves in the three-dimensional sphere*, 421, 1855-1868.
- [24]. Lucas, P., Ortega-Yagües, J.A., 2016, *Rectifying Curves in the Three-Dimensional Hyperbolic Space*, Mediterr. J. Math., 13, 2199-2214.
- [25]. Nešović, E., 2005, Petrović-Torgašev, M., and Verstraelen, L.. *Curves in Lorentzian spaces*. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana 8-B.3, 685-696.
- [26]. O'Neill, B., 1983, *Semi Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York.

- [27]. Ratcliffe, J.G. 2006, *Foundations of Hyperbolic Manifolds(second edition)*, Springer.
- [28]. Walrave J., 1995, *Curves and surfaces in Minkowski space*, Doctoral Thesis, K U Leuven, Fac Sci, Leuven.
- [29]. Wang, Y. and Pei, D., 2015, *Singularities for normal hypersurfaces of de Sitter timelike curves in Minkowski 4-space*, *Journal of Singularities*, 12, 207-214.



## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Cansu DOĞAN
Doğum Yeri	Edirne
Doğum Tarihi	21/05/1993
Uyruğu	T.C
Telefon	05370108055
E-Posta Adresi	akcansun@gmail.com
Web Adresi	...



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2015

Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Yılı	

Doktora	
Üniversite	
Enstitü	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Yılı	

Makale ve Bildiriler	