T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ UZAYLARDA HARDY EŞİTSİZLİKLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Nurullah YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
Mayıs - 2012

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ UZAYLARDA HARDY EŞİTSİZLİKLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Nurullah YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

KIRŞEHİR
Mayıs - 2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde Lebesgue uzayı, Hardy eşitsizlikleri ve değişken üstlü uzaylar hakkında bilgi verilecek, $L^{p(x)}$ uzayında elde edilen Hardy eşitsizliği ispatıyla birlikte verilecektir. Tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmıdır.

İkinci bölümde, bundan sonraki bölümlerde işlenecek olan konuları yakından ilgilendiren temel uzay bilgisi, Lebesgue uzayı ve bu uzayda kullanılan kavram, notasyon ve teoremlere yer verilecektir. Ayrıca L_p uzayının tanımı, normu ve özelliklerinden bahsedilecek ve Orlicz uzayı ve Modüler uzay tanımı verilecektir. Bu uzayların yapısı hakkında bilgiler verilecektir.

Üçüncü bölümde, Hardy eşitsizliklerinin başlangıcından bugüne gelişimi, kazandığı başka formlar hakkında bilgiler verilecektir.

Dördüncü bölümde, yine L_p uzayında olduğu gibi değişken üstlü $L^{p(x)}$ uzayının tanımı ve özellikleri verilecektir.

Beşinci bölümde, değişken üstlü L_p uzayı için elde edilen Hardy eşitsizliği ispatıyla birlikte verilecektir.

Altıncı bölümde, bazı uygulamalara yer verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Hardy operatörü, Hardy eşitsizliği, değişken üstlü, ağırlıklı eşitsizlikler.

ABSTRACT

In this thesis, information about Lebesgue space, Hardy inequalities and variable exponents spaces will be given, and Hardy's inequality which obtain in the space $L_{p(x)}$ is investigated with it's proof. This thesis consist of six chapters

The first chapter is devoted to introduction.

In the second chapter, we give information about some space knowledge, definition of Lebesgue space and it's basic properties, which is very important for the other sections. The information about L_p space, it's norm and it's basic properties is given and also the definitions of Orlicz space and Modular space is given. The information about the structures' of these spaces is given.

In the third chapter, we talk about the beginning of Hardy inequality and also developing from beginning to today. And we talk about Hardy's inequalities' the other forms.

In the fourth chapter, we give information about $L^{p(x)}$ space, it's norm and it's basic properties like L_p

In the fifth chapter, Hardy's inequality which obtain in the space $L^{p(x)}$ will be given with it's proof. Finally we will present our opinions and suggestions.

In the six chapter, some applications is introduced.

Keywords: Hardy operator, Hardy inequality, variable exponents, weighted inequality.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda yardımcı olan, değerli ve derin bilgileriyle bana ışık tutan, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyetiyle destekleyen ve bana emek veren saygı değer hocalarım;

Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e ve **Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT**'a

(DANIŞMAN)

bugünlere ulaşmamda verdikleri emek ve sevgileri ile destekleri için sevgili aileme teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca Türkiye Bilimsel ve Teknoloji Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK[1]) maddi ve manevi desteğinden ötürü teşekkür ederim.

Nurullah YILMAZ

[1]Tezin yazarı 110T695 numaralı proje ile desteklenmektedir.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi $(-\infty, \infty)$
$B(x,r)$	: x merkezli r yarıçaplı yuvar
L^s_w	: Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$\Vert \cdot \Vert_{s,w}$	: L^s_w uzayında norm
$C(a,b)$	: (a,b)aralığında sürekli olan fonksiyonların kümesi
H	: Hardy operatörü
$\tilde{H}$	: Hardy operatörünün eşleniği (duali)
$L^{p(\cdot)}(X) = L^{p(x)}(X)$	: Değişken üstlü L_p uzayı

1 GİRİŞ

Son yıllarda klasik fonksiyon uzayları esneklik teorisinin modern problemlerin, akışkanlar mekaniğinin, değişkenin hesaplanması ve standart dışı büyüme koşulları ile diferensiyel operatörlerin çözümlerinde yeterli değildir. Değişken üstler (Variable exponents) ile değişkenler uzayların çalışılmasına, dönüşümlerin ve integralin spektral özelliklerinin ve bu uzaylarda diferensiyel operatörlerin araştırılmasına ihtiyaç duyulmuştur.

Lebesgue uzayları modüler uzaylar adı verilen daha büyük bir aileye ait olan genelleştirilmiş Orlicz uzaylarının bir özel durumu olarak göz önünde bulundurulabilir. Bu düşünce değişken üstlü Lebesgue uzaylarının tanımlanmasına ve değiken üstlü Lebesgue uzayında Orlicz ve Lüksemburg normlarının uygun benzerlerinin tanımanmasına imkan verir. Bu nedenle bu uzayda böyle bir eşitsizliğin incelenmesi daha sonraki çalışmalar için önemli bir temel oluşturmaktadır.

Bugüne kadar Dünya'nın her yerinden S. Samko ve V. Kokilashvili, E. Acerbi ve G. Mingione, D. E. Edmunds ve A. Meskhi, X-L. Fan ve D. Zhao, D. Cruz -Uribe ve A.Fiorenza, L. Diening gibi matematiğin önemli isimleri bu alanda çalışmış ve konu alanı yukarıda belirtilen bir çok problemin çözümü için önemli sonuçlar elde etmiştir. Gelişen teknolojiye yeni bir temel oluşturabilecek bu konu her geçen gün Matematik Dünyası içinde önemini artırmaktadır.

Bu tezde "Değişken Üstlü Uzaylarda Hardy Eşitsizlikleri ve Bazı Uygulamaları" konusunu ele alınacaktır. Bilindiği gibi Hardy eşitsizlikleri Lebesgue uzayında gömme teoremlerinin elde edilmesinde çok önemli bir araçtır. Bu tezi başlangıç kabul ederek "Variable Exponent Space (Değişken Üstlü Uzaylar)" konusuna yeni bir bakışın alt yapısı hazırlanmış olacaktır.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.1 X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$

(ii) $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu denir. Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay ve $(i) - (iv)$ özelliklerine de metrik aksiyomları denir. Bir küme üzerinde birden çok metrik tanımlanabilir.

Örnek 2.1.2 $X = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerindeki adi metrik veya öklid metriği denir.

Örnek 2.1.3 X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \ , x = y \\ 1 \ , x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe X üzerindeki ayrık metrik denir.

Örnek 2.1.4 $\mathbb{R}^n$(veya $\mathbb{C}^n$), $n \in \mathbb{N}$, tüm sıralı reel (veya kompleks) n-lilerin kümesini göstermek üzere, $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için aşağıda verilen $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

şeklindeki d dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ üzerindeki adi metrik veya öklid metriği, $(\mathbb{R}^n, d)$ ikilisine ise n-boyutlu öklid uzayı denir.

Örnek 2.1.5 X boş kümeden farklı bir küme, $B(X), X$ ten $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların kümesi ve $d : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in X\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü $B(X)$ üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.1.6 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ için $C[a,b], [a,b]$ üzerindeki sürekli ve reel değerli fonksiyonlar kümesi ve $d : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$d(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in X\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü $C[a,b]$ üzerinde bir metriktir.

Tanım 2.1.7 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X,d) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \geq n_\varepsilon$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi $x_0 \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve bu $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.8 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X,d) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise,

(i) x_0 limiti tektir.

(ii) (x_n) dizisi sınırlıdır.

(iii) (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin limiti de x_0 dır.

(iv) Ek olarak $y_n \to y_0$ ise $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$ olur.

Tanım 2.1.9 (X, d) metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ pozitif bir sayı olmak üzere;

> $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar,
>
> $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir kapalı yuvar,
>
> $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir yuvar yüzeyi denir.

Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(a, r)$ olacak şekilde bir $B(a, r)$ açık yuvarı varsa (x_n) dizisi X metrik uzayında sınırlıdır denir. Ayrıca $E \subseteq B(a, r)$ olacak şekilde $B(a, r)$ açık yuvarı varsa $E \subseteq X$ alt kümesine X metrik uzayında sınırlıdır denir.

Tanım 2.1.10 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere, eğer $B(x_0, \varepsilon) \subseteq E$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa $x_0 \in E$ sayısına E nin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.11 (X, d) metrik uzay ve $G \subset X$ olmak üzere, eğer G kümesinin her noktası G nin bir iç noktası ise G ye (X te) bir açık küme denir.

Tanım 2.1.12 (X, d) metrik uzay ve $G \subseteq X$ olmak üzere,

(i) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $0 < d(c, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $c \in X$ sayısına G kümesinin bir yığılma noktası denir.

(ii) Eğer bir $c \in G$ noktası G nin bir yığılma noktası değilse c elemanına G nin yalıtık noktası(isolated point) denir.

Teorem 2.1.13 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $c \in X$ noktası E kümesinin bir yığılma noktasıdır.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $B(c, \varepsilon)$ açık yuvarı E kümesinin sonsuz çoklukta elemanını kapsar.

(iii) E kümesinde bir (x_n) dizisi vardır ki $n \in \mathbb{N}$ iken $x_n \neq c$ ve $x_n \to c$ dir.

Tanım 2.1.14 (X, d) metrik uzayı ve $F \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer F tüm yığılma noktalarını kapsıyorsa F ye X te bir kapalı küme denir.

Teorem 2.1.15 (X, d) metrik uzay olmak üzere,

(i) X teki açık kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun birleşimi X te bir açık kümedir.

(ii) X teki açık kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun kesişimi X te bir açık kümedir.

Teorem 2.1.16 (X, d) metrik uzay olmak üzere, $F \subseteq X$ alt kümesi X te kapalıdır $\Leftrightarrow$ F nin tümleyeni $F^c = X \setminus F$, X te bir açık kümedir.

Teorem 2.1.17 (X, d) metrik uzay olmak üzere

(il) X teki kapalı kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun kesişimi X te bir kapalı kümedir.

(ii) X teki kapalı kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun birleşimi X te bir kapalı kümedir.

Tanım 2.1.18 $E \subseteq X$ olmak üzere

(i) E kümesinin tüm iç noktalarının kümesine E nin içi denir ve $intE$ şeklinde gösterilir.

(ii) E kümesinin noktalarını ve tüm yığılma noktalarını kapsayan kümeye E nin kapanışı denir ve $\bar{E}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.19 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar $E \subseteq X$, c noktası E nin bir yığılma noktası ve $l \in Y$ olsun.

$x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $d_2(f(x), l) < \varepsilon$ iken $d_1(x, c) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $l \in Y$ noktasına $f : E \to Y$ fonksiyonunun c noktasındaki limiti denir ve $\lim_{x \to c} f(x) = l$ şeklinde gösterilir. Burada c noktasının E kümesine ait olması gerekmez.

Tanım 2.1.20 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar ve $c \in X$ olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım eğer;

$\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x, c) < \delta$ iken $d_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesindeki her noktada sürekli ise f fonksiyonu X uzayında süreklidir denir.

Tanım 2.1.21 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım, eğer

$\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x_1, x_2) < \delta$ iken $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu X te düzgün yakınsaktır denir.

Düzgün yakınsak olan bir fonksiyon aynı zamanda yakınsaktır ancak tersi doğru değildir.

Tanım 2.1.22 (X, d) metrik uzay olsun.(x_n), X te bir dizi olsun.$\forall \varepsilon > 0$ ve $m > n \geq n_0$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.1.23 (X, d) metrik uzay olsun. (x_n), X te bir yakınsak dizi ise (x_n) bir Cauchy dizisi olur. Bu teoremin tersi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ de adi metriğe göre doğru olmakla birlikte genel olarak doğru değildir.

Tanım 2.1.24 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun, E deki her Cauchy dizisi E deki bir noktaya yakınsıyor ise E kümesine tamdır denir.

Tanım 2.1.25 (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X teki bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.26 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun, eğer E deki her dizi, limiti E de olan yakınsak bir alt diziye sahip ise E kümesine kompakt küme denir. Eğer X kompakt ise (X, d) metrik uzayı kompakt olur.

Bir $E \subseteq X$ alt kümesinin kompaktlığı, X uzayında tanımlanan metriğe bağlıdır, örneğin $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi, $\mathbb{R}$ deki adi metriğe göre kompakttır; ancak ayrık metriğe göre kompakt değildir.

Tanım 2.1.27 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. $X = \bar{E}$ ise E kümesine X te yoğun küme denir.

Örnek 2.1.28 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur; ancak $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğun değildir.

2.2 Vektör Uzayları

Tanım 2.2.1 V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olmak üzere,
$+ : V \times V \to V, \quad (x, y) \to x + y$
$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, \quad (\lambda, x) = \lambda x$
dönüşümleri ile sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini tanımlayalım.

$\forall x, y, z \in V$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. x + y = y + x
2. x +(y + z) =(x + y) + z
3. $\forall x \in V$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in V$ vardır.
4. $\forall x \in V$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in V$ vardır.

5. $\forall x \in V$ için $1 \cdot x = x$
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu y$
8. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Bu durumda V ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay), elemanlarına ise vektör veya nokta denir. $V = \mathbb{R}$ alınırsa V ye bir reel vektör uzayı, $V = \mathbb{C}$ alınırsa V ye bir kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.2.2 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer W, V vektör uzayındaki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W ye V nin bir (lineer) alt uzayı denir

Teorem 2.2.3 $\emptyset \neq W \subseteq V$ kümesinin V nin bir alt uzayı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $y_1, y_2 \in W$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ için $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in W$ olmasıdır.

Tanım 2.2.4 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.
$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in V$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyor ise V üzerinde bir norm olur ve bu durumda $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(i) - (iv)$ özelliklerine ise norm aksiyomları denir. Bu uzay $V = \mathbb{R}$ için reel normlu uzay, $V = \mathbb{C}$ için kompleks normlu uzay olur. Bir vektör uzayı üzerinde birden çok normlu uzay tanımlanabilir.

Örnek 2.2.5 $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ öklid vektör uzayını düşünelim.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

normu ile birlikte bir normlu vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya $\mathbb{R}^n$ deki adi norm veya öklid normu denir.

Örnek 2.2.6 l_p, $(1 \leq p < \infty)$ uzayı

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_{l_p} : l^p \to \mathbb{R}$ dönüşümü ile bir normlu uzaydır.

Tanım 2.2.7 Her $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayından $x, y \in V$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde bir metrik elde edilebilir. Bu metriğe $\|\cdot\|$ normu tarafından üretilen metrik veya $\|\cdot\|$ normunun indirgediği metrik denir.

Teorem 2.2.8 $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir V vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her norm V üzerinde süreklidir.

Teorem 2.2.9 $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı herhangi bir V normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir.

Tanım 2.2.10 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in V$ için

$$k\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K\|x\|_1$$

olacak şekilde $k, K \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa V üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk normlar denir.

Tanım 2.2.11 (x_n), $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in V$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterillir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama denir.

Tanım 2.2.12 $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi (x_n) olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.2.13 Bir $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi V içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayına Banach Uzayı adı verilir.

Örnek 2.2.14 $V = \mathbb{R}^n$(veya $V = \mathbb{C}^n$) vektör uzayı

(i) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(ii) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$

(iii) $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ normlarına göre birer Banach uzayıdır.

Örnek 2.2.15 $V = \mathbb{R}$ (veya $V = \mathbb{C}$)olmak üzere $\mathbb{F}$ üzerinde tanımlı V vektör uzayı

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.3 Lebesgue İntegrali

Tanım 2.3.1 X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $\mathcal{H}$ sınıfı için

(i) $\forall A, B \in \mathcal{H}, \quad A \setminus B \in \mathcal{H}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{H}, \quad A \cup B \in \mathcal{H}$

özellikleri sağlanırsa bu $\mathcal{H}$ sınıfına bir **halka** adı verilir. Eğer (ii) yerine

$$\forall k \in N, A_k \in \mathcal{H} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}$$

şartı sağlanırsa bu takdirde $\mathcal{H}$ halkasına bir σ **- halka** denir.

Tanım 2.3.2 X bir küme olsun. X in bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir **cebir** denir.

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A}, \quad E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, ..., n, \quad E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) yerine

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A} \tag{2.1}$$

şartı sağlanırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir σ**-cebir** adı verilir.

Örnek 2.3.3 X bir küme ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ-cebirdir.

Örnek 2.3.4 $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \{\varnothing, \{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}, \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}, \mathbb{N}\}$ alınırsa $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ- cebirdir.

Örnek 2.3.5 X bir sonsuz küme ve $\mathcal{A}$ da X in tüm sonlu alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ- cebiri değildir. Çünkü $E \in \mathcal{A}$ ise E sonludur. Dolayısıyla, E^c sonsuzdur, aksi takdirde X sonlu olurdu. O halde $E^c \notin \mathcal{A}$ dır.

Teorem 2.3.6 X üzerindeki σ- cebirlerin herhangi adetteki kesişimleri yine bir σ- cebiridir.

Teorem 2.3.7 X bir küme $\mathcal{K}$ da X in boş olmayan bir sınıfı olsun. $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ- cebirlerinin bir en küçüğü vardır.

Tanım 2.3.8 Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ- cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ- cebiri denir, $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a,b) aralıklarının doğurduğu σ- cebirine **Borel Cebiri** denir ve $\mathcal{B}$ $(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n=1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nin herbir elemanına bir **Borel Kümesi** denir.

Örnek 2.3.9 $X = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ve E de bir Borel kümesi olsun.
$E_1 = E \cup \{-\infty\}, E_2 = E \cup \{+\infty\}$ ve $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ olsun. E kümesi $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel cebirini taradığında E, E_1, E_2, E_3 kümelerinin sınıfı $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ olsun. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ bir σ- cebiridir. Bu σ- cebirine **Genişletilmiş Borel Cebiri** adı verilir.

Tanım 2.3.10 X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ- cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathcal{A}$ daki her kümeye $\mathcal{A}$-**ölçülebilir uzay** (veya kısaca **ölçülebilir küme**) adı verilir.

Tanım 2.3.11 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun.$\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** adı verilir.
$\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty$ ise μ ye bir **sonlu ölçü** adı verilir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü σ- **sonludur** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir.

Örnek 2.3.12 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. $\forall E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$ biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir sonlu ölçü ve dolayısıyla bir σ- sonlu ölçüdür.

Örnek 2.3.13 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} = P(X)$ olsun. $E \in \mathcal{A}$ için

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, \, E = \emptyset \\ +\infty, \, E \neq \emptyset \end{cases} \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir ölçüdür. Bu ölçü ne sonlu ne de σ- sonludur.

Tanım 2.3.14 Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüsüne bir **ölçü uzayı** adı verilir.

Teorem 2.3.15 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.
Eğer $A, B \in \mathcal{A}$ ve $A \subset B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ şeklindedir. Ayrıca $\mu(A) < \infty$ ise

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A) \tag{2.3}$$

dır.

Teorem 2.3.16 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $(A_n), \mathcal{A}$ daki elemanların artan bir dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{2.4}$$

dır.

2. $(B_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{2.5}$$

dır.

Sonuç 2.3.17 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $(A_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir artan dizisi ise
$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{2.6}$$
dır.

2. $(B_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise
$$\mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{2.7}$$
dır.

Teorem 2.3.18 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $(A_n), \mathcal{A}$ ya ait kümelerin herhangi bir dizisi ise
$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{2.8}$$
dır.

Tanım 2.3.19 X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall E \in P(X), \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in N, A_n \in P(X) \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçüsüdür** denir.

Ölçü ve dış ölçü tanımları göz önüne alınırsa ne ölçünün ne de dış ölçünün bir ölçü olması gerekmediği görülür. Dış ölçü, ölçü fonksiyonunun sağladığı pek çok özelliği sağladığı için bu ad verilmiştir. Bir ölçünün bir dış ölçü olabilmesi için onun tanım kümesinin $P(X)$ kuvvet kümesi olması gerekir.

Örnek 2.3.20 X herhangi bir küme ve $P(X)$ üzerinde tanımlanan

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases} \tag{2.9}$$

fonksiyonu bir ölçü olmayıp bir dış ölçüdür.

Örnek 2.3.21 X herhangi bir sonsuz küme ve $P(X)$ üzerinde tanımlanan

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, n(A) < \infty \\ 1, n(A) = \infty \end{cases} \tag{2.10}$$

fonksiyonu bir dış ölçü değildir.

Bilindiği gibi, bir I aralığının $\ell(I)$ uzunluğu o aralığın uç noktalarının farkı olarak tanımlanır. Yani $I = [a, b]$ (veya (a,b), (a,b], [a,b)) aralığının boyu $\ell(I) = b - a$ dır. Uzunluk bir küme fonksiyonuna (bir koleksiyondaki herbir kümeye bir genişletilmiş reel sayı karşılık getiren fonksiyon) bir örnektir. Bu durumda uzunluğun tanım kümesi aralıklar koleksiyonu, değer kümesi de genişletilmiş reel sayılar kümesidir. Bu bölümde uzunluk kavramı aralıklardan daha karışık kümeler için tanımlayacağız. Örneğin açık bir kümenin uzunluğunu, bu kümeyi oluşturan açık, ayrık aralıkların uzunlukları toplamı olarak tanımlayacağız. Öyle bir λ fonksiyonu teşkil etmek istiyoruz ki, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir $\mathcal{M}$ sınıfı üzerinde tanımlı olsun ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

- λ, $\mathbb{R}$ nin herbir E alt kümesi üzerinde tanımlı olsun, yani

  $$\mathcal{M} = P(\mathbb{R})$$

  olsun.
- Her bir I aralığı için λ(I)=ℓ(I) olsun.
- Eğer (E_n) bir ayrık dizi ve λ bunların herbiri üzerinde tanımlı ise

  $$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

olsun.

- λ öteleme altında invaryant olsun. Yani λ fonksiyonu, E ve

$$E + y = \{x + y : x \in E\}$$

kümeleri üzerinde tanımlı olduğunda

$$\lambda(E + y) = \lambda(E)$$

olsun.

Bu dört özelliği sağlayan bir küme fonksiyonu tanımlamak mümkün değildir. Bu güne kadar ilk üç şartı sağlayan bir küme fonksiyonu bilinmemektedir. Bu nedenle bunlardan birinden vazgeçmek gerekmektedir.

Son üç şartı bırakıp ilk şartı değiştirmek oldukça faydalıdır. Burada yapılacak değişiklik λ fonksiyonunu tüm alt kümeler üzerinde tanımlamayıp daha dar σ- cebiri üzerinde tanımlamaktır. Yani $\mathcal{M}$ olarak $P(\mathbb{R})$ kuvvet kümesi değil, üzerinde λ fonksiyonunu tanımlayabileceğimiz uygun bir σ- cebiri almaktır. Şimdi bu fonksiyonu inşa etmeye başlayalım.

Örnek 2.3.22 (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\mathcal{T}_A = \{(I_k) : A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf\{\Sigma_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : (I_k) \in \mathcal{T}_A\} \tag{2.11}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir.

Teorem 2.3.23 Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin herbir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir, yani $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ise

$$\lambda^*(I) = \ell(I)$$

dır.

Teorem 2.3.24 $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü herbir aralığa onun hacmini karşılık getirir.

Sonuç 2.3.25 A sayılabilir küme ise $\lambda^*(A) = 0$ dır.

Sonuç 2.3.26 $[0, 1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 2.3.27 X bir küme μ^* da X üzerinde bir dış ölçü olsun. Eğer X in herbir A alt kümesi için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{2.12}$$

ise X in E alt kümesi μ^*- **ölçülebilir** (μ^* ye göre ölçülebilir) denir. μ^* fonksiyonunun alt toplamsallık özelliği de denilen $\mu^*(\cup A_k) \leq \Sigma\mu^*(A_k)$ özelliğinden, X in bütün A ve E alt kümeleri için

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

olacağından bir E kümesinin μ^*- ölçülebilir olup olmadığını anlamak için herbir $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{2.13}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Ayrıca, eğer $\mu^*(A) = +\infty$ ise (2.13) eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Şu halde X in bir E alt kümesinin μ^*- ölçülebilir olduğunu göstermek için X in $\mu^*(A) < +\infty$ şartını sağlayan herbir A alt kümesi için (2.13) eşitsizliğinin sağlandığı göstermek yeterlidir.

Teorem 2.3.28 X bir küme ve μ^* da X üzerinde bir dış ölçü olsun. X in herbir E alt kümesi için $\mu^*(E) = 0$ veya $\mu^*(E^c) = 0$ ise E kümesi μ^*- ölçülebilirdir.

Sonuç 2.3.29 $\emptyset$ ve X, X üzerinde tanımlanan her dış ölçüye göre ölçülebilirdir. Özel olarak $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri λ^* Lebesgue dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir.

Teorem 2.3.30 E_1 ve E_2, μ^*- ölçülebilir kümeler ise $E_1 \cup E_2$ de μ^*-ölçülebilirdir.

Teorem 2.3.31 X bir küme μ^* X üzerinde bir dış ölçü ve $\mathcal{M}(X, \mu^*)$ da X üzerinde μ^*- ölçülebilir kümelerin sınıfı olsun.

1. $\mathcal{M}(X, \mu^*)$ bir σ- cebiridir.
2. μ^* ın $\mathcal{M}(X, \mu^*)$ sınıfına kısıtlanması bir ölçüdür.

Lebesgue dış ölçüsü olan λ^* ın $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına ve $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ sınıfına olan kısıtlamasına **Lebesgue Ölçüsü** denir, λ ile gösterilir. İkisini birbirinden ayırmak gerektiğinde, üzerinde Lebesgue ölçüsünün tanımladığı sınıf belirtilir. "$\mathbf{B}(\mathbb{R})$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü" veya "$\mathcal{M}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü" gibi. Bazen de "Borel kümeleri üzerinde tanımlı Lebesgue ölçüsü" şeklinde ifade edilir.

Lemma 2.3.32 $a \in \mathbb{R}$ için $(a, +\infty)$ aralığı λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir.

Teorem 2.3.33 Herbir Borel kümesi λ^* ölçülebilirdir.

2.4 Ölçülebilir Fonksiyonlar

Bu bölümde önce reel değerli fonksiyonların ölçülebilirliği üzerinde durulacak, daha sonra genişletilmiş reel değerli fonksiyonlara yer verilecektir.

Tanım 2.4.1 $(X; \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Longleftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Şimdi bu tanımdaki kümelerin şeklini değiştirmeye imkan veren bir lemmayı ifade edelim.

Lemma 2.4.2 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktir.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

Örnek 2.4.3 Her sabit fonksiyon bir ölçülebilir fonksiyondur. Gerçekten, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ ise $\alpha \geq c$ için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{A}$$

ve $\alpha < c$ için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{A}$$

olur.

Örnek 2.4.4 $X = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ olsun. Sürekli her $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (Borel) ölçülebilirdir.
Gerçekten f sürekli olduğunda her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$$

kümesi $\mathbb{R}$ de bir açık kümedir. Her açık küme Borel cebirine ait olduğundan

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

dir, yani Borel ölçülebilirdir.

Teorem 2.4.5 f ve g ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$cf, f^2, f + g, f.g, |f|$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Tanım 2.4.6 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilirdir } \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

Lemma 2.4.2 deki denklemlerin $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için de doğru olacağı açıktır. Bu tanımların benzerleri $[-\infty, +\infty]$ değerli fonksiyonlar için de verilebilir.

Tanım 2.4.7 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f : A \to [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olmalıdır. X üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}$ ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir. Eğer $f \in M(X, \mathcal{A})$ ise

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\}$$

$$\begin{aligned} B = \{x \in X : f(x) = -\infty\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq -n\} \\ &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right)^c \end{aligned}$$

olacağından A ve B ölçülebilirdir.

Teorem 2.4.8 Genişletilmiş reel değerli bir f fonksiyounun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}, B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

kümelerinin ve

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \; x \notin A \cup B \\ \quad 0, \; x \in A \cup B \end{cases} \tag{2.14}$$

biçiminde tanımlanan reel değerli f_1 fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır.

Tanım 2.4.9 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Borel ölçülebilir fonksiyon veya Borel fonksiyonu adı verilir. $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ σ- cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Lebesgue ölçülebilir fonksiyon denir. $\mathbb{R}$ nin Borel kümesi olmayan fakat Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri mevcut olduğundan, $\mathbb{R}$ de herbir Borel ölçülebilir fonksiyon Lebesgue ölçülebilirdir.

Tanım 2.4.10 f, X den $\overline{\mathbb{R}}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$
$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

biçiminde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^+ fonksiyonuna f nin pozitif parçası, f^- fonksiyonuna da f nin negatif parçası denir. Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında,

$$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ - f^-$$
$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

olur. Teorem gereğince ve yukarıdaki bağıntılar göz önüne alındığında aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 2.4.11 $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır.

Teorem 2.4.12 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. f ile g, A üzerinde tanımlı $[-\infty, +\infty]$- değerli ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde

$$\{x \in A : f(x) < g(x)\}, \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}, \{x \in A : f(x) = g(x)\}$$

kümeleri ölçülebilirdir.

Teorem 2.4.13 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay $A \in \mathcal{A}$ ve f ile g, A da tanımlı $[-\infty, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonlar ise $(f \vee g)$ ve $(f \wedge g)$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

Teorem 2.4.14 (f_n), $A \in \mathcal{A}$ üzerinde tanımlı, $[-\infty, +\infty]$- değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\sup_n f_n$ ve $\inf_n f_n$ fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Teorem 2.4.15 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. (f_n), A üzerinde tanımlı $[-\infty, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\liminf_{n\to\infty} f_n$ ve $\limsup_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir. Ayrıca tanım kümesi $A_0 = \{x \in A : \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\}$ olan $\lim_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.

2.5 İntegral

Bu bölümde önce negatif olmayan ölçülebilir basit fonksiyonların integrali, daha sonra da negatif olmayan, genişletilmiş reel değerli, ölçülebilir fonksiyonların integrali incelenecektir. Bundan sonra da $[-\infty, +\infty]$ -değerli fonksiyonların integrali üzerinde durulacaktır. Önce basit fonksiyonun tanımını verelim.

Tanım 2.5.1 Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen φ fonksiyonuna bir **basit fonksiyon** adı verilir.

Bir reel değerli basit φ fonksiyonu $a_k \in R$ ve χ_{E_k}, E_k kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \tag{2.15}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer φ fonksiyonu X üzerinde tanımlı ise $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = X$ dir. Bu E_k kümelerinin seçilişi tek olmadığından φ nin (2.15) tipindeki gösterimi tek değildir. Eğer $a_1, a_2, ..., a_m$ sayıları φ nin X üzerinde aldığı farklı değerler ve

$$E_k = x \in X : f(x) = a_k$$

seçilirse E_k kümeleri ayrık olur. Bu durumda

$$\varphi = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$$

gösterimine φ fonksiyonunun **standart gösterimi** adı verilir. X üzerinde tanımlı, reel değerli, $\mathcal{A}$ ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X, \mathcal{A})$, S deki negatif olmayan fonksiyonlların kümesi S^+ ile gösterilir.

Tanım 2.5.2 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun a_k lar negatif olamayan reel sayılar $A_1, A_2, ..., A_n$ ler $\mathcal{A}$ ya ait olmak üzere

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$$

$$\varphi = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \tag{2.16}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ **ölçüsüne göre integrali**

$$\int_X \varphi d\mu = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) \tag{2.17}$$

dir.

Bu tanıma göre φ nin μ ye göre integrali ya negatif olmayan bir reel sayı ya da μ ölçüsünün sonlu olmayan bir ölçü olması haline karşılık gelen $+\infty$ değeridir. Belirtelim ki, φ fonksiyonunun μ ye göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır. Bununla ilgili olarak şu teoremi verebiliriz.

Teorem 2.5.3 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı $\varphi \in S^+(X, \mathcal{A})$ ve A_k lar ayrık olmak üzere φ nin bir gösterimi $\varphi = \Sigma_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ olsun. φ nin μ ölçüsüne göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır.

Şimdi negatif olmayan basit fonksiyonların integraline ait temel özellikleri verelim.

Teorem 2.5.4 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı $\varphi \in S^+, \Psi \in S^+$ ve $c \geq 0$ olsun. Bu taktirde

(i) $\int_X c.\varphi d\mu = c \int_X \varphi d\mu$

(ii) $\int_X (\varphi + \Psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \Psi d\mu$

(iii) $\forall x \in X$ için $\varphi(x) \leq \Psi(x)$ ise $\int_X \varphi d\mu \leq \int_X \Psi d\mu$ dir.

Burada basit fonksiyonların integralinden yararlanarak $[0, +\infty]$-değerli fonksiyonların integrali tanımlanıp bu fonksiyonların integraline ait özellikleri verilecektir.

Tanım 2.5.5 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre **integrali**

$$\int_X f d\mu = \sup \int_X \varphi d\mu : \varphi \in S^+ ve \varphi \leq f \tag{2.18}$$

genişletilmiş reel sayısıdır.$E \in \mathcal{A}$ olsun. f nin μ ye göre E **üzerindeki integrali**

$$\int_X f d\mu = \int_X f.\chi_E d\mu \tag{2.19}$$

sayısıdır.

Teorem 2.5.6 $f, g \in M^+(X, \mathcal{A})$ e $E, F \in \mathcal{A}$ olsun.

(i) $\forall x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ ise $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ dir.

(ii) $E \subset F$ ise $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$ dir.

Şimdi integral teorisinin temel teoremlerinden birini ifade edelim.

Teorem 2.5.7 (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise

$$\int_X f d\mu = \int_X f_n d\mu \tag{2.20}$$

dir.

Lemma 2.5.8 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay, $A \in \mathcal{A}$ ve $f : A \to [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Bu taktirde A üzerinde tanımlı $[-\infty, +\infty]$-değerli, ölçülebilir basit fonksiyonların öyle bir artan (φ_n) dizisi vardır ki $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ dir. Eğer f sınırlı ise bu yakınsama düzgündür.

Teorem 2.5.9 (i) $f \in M^+$ ve $c \geq 0$ ise $cf \in M^+$ olup,

$$\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu$$

dir.

(ii) $f, g \in M^+$ ise $f + g \in M^+$ olup,

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

dır.

Teorem 2.5.10 (Fatou Lemması) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve f_n de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonlarınbir dizisi ise

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu \tag{2.21}$$

dır.

Teorem 2.5.11 (Beppo-Levi Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\sum f_k$ da X üzerinde tanımlı $[0, +\infty]$ değerli,ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. Bu taktirde

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k d\mu \right) \tag{2.22}$$

dir.

Tanım 2.5.12 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Eğer $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde integrallenebilirdir denir. Bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir.

Teorem 2.5.13 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Bu taktirde

$$f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$$

dır ve bunların biri gerçeklendiğinde

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

olur.

Teorem 2.5.14 (Tchebichev Eşitsizliği) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. $\alpha > 0$ için

$$A_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

denirse

$$\mu(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{A_\alpha} f d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\int_X f d\mu$$

dır.

Teorem 2.5.15 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, f ile g X üzerinde integrallenebilen reel değerlifonksiyonlar ve α herhangi bir reel sayı olsun. Bu taktirde

(i) $\alpha f \in \mathcal{L}$ ve $f + g \in \mathcal{L}$

(ii) $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$

(iii) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

dır.

2.6 $L_p(\Omega)$ Uzayı

Tanım 2.6.1 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L_p(\Omega)$ uzayı veya Ω bölgesinde p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L_p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty$$

seklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_p$ gösterimine f fonksiyonunun L_p-normu denir.

Ω bölgesinde hemen her x için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna hemen hemen heryerde sınırlıdır denir.

Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin Ω bölgesindeki esas supremumu(esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf \{K : |f(x)| \leq Kh.h.x \in \Omega\}$$

seklinde gösterilir. Ω bölgesindeki hemen hemen heryerde sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^{\infty}(\Omega)$ seklinde gösterilir. Buna göre bir f fonksiyonunun L^{∞}-normu

$$\|f\|_{\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.6.2 (Young eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\forall a, b > 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur.

Teorem 2.6.3 $p \leq 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1} \left(|a|^p + |b|^p\right)$$

olur.

Teorem 2.6.4 (Hölder eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L^p, g \in L^q$ ise $fg \in L^1$ olur ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.6.5 (Minkowski eşitsizliği) Eger $f, g \in L^p$ ve $1 \leq p$ ise $f + g \in L^p$ olur ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Hölder teoremi ve Lebesgue integralinin özellikleri gözönünde bulunduruldugunda $L^p, 1 \leq p < \infty$, nin bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla birlikte $\|f\|_p$; L^p üzerinde bir normdur ve

1. Tanımdan $\|f\|_p \geq 0$
2. $\|f\|_p = 0$ ise hemen hemen heryerde $f(x) = 0$
3. $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
4. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|f\|_p$

özellikleri sağlandığından $L^p,\ 1 \leq p \leq \infty$, bir normlu uzaydır.

Teorem 2.6.6 $L_p, \quad 1 \leq p < \infty$, uzayı

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolaysıyla Banach uzayıdır.

Tanım 2.6.7 f_n ve f fonksiyonları L^p uzayının elemanları olmak üzere; (f_n) dizisi f fonksiyonuna p. mertebeden yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall >$ $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$.

Bu yakınsaklık çeşidine L^p de yakınsaklık da denir. Burada $p \geq 1$ olup,

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_\Omega |f_n - f|^p d\mu \right)$$

dir. Buna göre,
(f_n) dizisinin f fonksiyonuna L^p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ olmasıdır.

2.7 Modüler Uzay ve Orlicz Uzayı

Tanım 2.7.1 X bir reel vektör uzayı olsun. Eğer $\rho : X \to [0, \infty]$ fonksiyoneli $\forall x, y \in X$ için

a. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b. $\rho(x) = \rho(-x)$

c. $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

özelliklerini sağlıyor ise, ρ fonksiyoneline X üzerinde bir **modüler** denir. Eğer c. özelliği yerine $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$ için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$$

özelliği sağlanıyorsa, ρ modülerine X üzerinde bir **konveks modüler** adı verilir.

Örnek 2.7.2 $X = L_p([a, b])$ olsun. Bu durumda

$$\rho(x) = \int_a^\delta |x(t)|^p dt$$

fonksiyoneli $p \geq 1$ için X üzerinde konveks modülerdir.

Eğer ρ fonksiyoneli X üzerinde bir modüler ise

$$X_\rho = \Big\{x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0\Big\}$$

uzayına bir **modüler uzay** denir. X_ρ modüler uzayi X vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır. Genel olarak ρ modüleri alt toplamsal olmadığı için bir norm veya uzaklik gibi davranamaz. Eğer ρ fonksiyoneli X üzerinde konveks modüler ise

$$\|f\|_\rho = \inf\{\lambda > 0 : \rho(\frac{f}{\lambda}) \leq 1\}$$

fonksiyoneli X_ρ üzerinde **Luxemburg normu** adı verilen bir norm belirler.

Tanım 2.7.3 Ω, $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir küme olsun. $\varphi : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

i. $\forall t \in \Omega$ için $\varphi(t,\cdot)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,

ii. $\varphi(t,0) = 0,\ u > 0$ için $\varphi(t,u) > 0$ ve $\lim_{u\to\infty} \varphi(t,u) = \infty$,

iii. Her $u \geq 0$ için $\varphi(\cdot,u)$ ölçülebilir bir fonksiyon

özelliklerine sahip ise, φ fonksiyonuna Φ sınıfına aittir denir.

Eğer φ fonksiyonu Φ sınıfına ait ise $\forall x \in X$ için $\varphi(t,|x(t)|)$ fonksiyonunun ölçülebilir ve $\rho(x) = \int_\Omega \varphi(t,|x(t)|)dt$ ifadesi X de bir ρ modüleri tanımlar.

$\varphi(t,u)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için u nun konveks fonksiyonu ise ρ, X de konveks modülerdir.

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda\to 0^+} \int_\Omega \varphi(t,\lambda|x(t)|) = 0 \right\}$$

modüler uzayına **genelleştirilmiş Orlicz uzayı** veya **Musielak-Orlicz uzayı** denir. L_φ ile gösterilir.

Bunun yanında

$$L_\varphi^0 = \left\{ x \in X : \int_\Omega \varphi(t,|x(t)|)dt < \infty \right\}$$

kümesine genelleştirilmiş **Orlicz sınıfı** adı verilir.

$\forall\ \lambda > 0$ için $\lambda x \in L_\varphi^0$ ise $x \in X$ fonksiyonuna L_φ nin bir *sonlu elemanı* denir. X in tüm sonlu elemanlanlarının uzayı E_φ ile gösterilir. L_φ en az bir $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda x) < \infty$ olacak şekilde tüm $x \in X$ elemanlarının kümesidir. L_φ^0, L_φ nin bir konveks alt kümesi olup, L_φ uzayı X in L_φ^0 kümesini kapsayan en küçük alt vektör uzayıdır. E_φ, X in L_φ^0 kümesinde yer alan en büyük alt vektör uzayıdir.

$\varphi(t,u)=\varphi(u)$ ise, L_φ ve L_φ^0 kümelerine sırasıyla **Orlicz uzayı** ve **Orlicz snıfı** adı verilir.

Özel olarak $\varphi(t,u)$ fonksiyonu $\forall t\in\Omega$ için u nun konveks fonksiyonu ve her $t\in\Omega$ için

$$(0)\lim_{u\to 0^+}\frac{\varphi(t,u)}{u}=0,\qquad (\infty):\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(t,u)}{u}=\infty$$

koşullarını sağlıyorsa φ fonksiyonuna bir N-fonksiyon adı verilir.

3 HARDY EŞİTSİZLİKLERİ

Modern matematiğin en bilinen eşitsizliklerinden biri olan *Hardy* eşitsizliği (kesikli ve sürekli formu) 1906-1928 yılları arasında geliştirilmeye başlandı. Eşitsizliğe ismi verilen G. H. Hardy'nin yanı sıra E. Landau, G. Pólya, I. Schur, M. Riesz gibi önemli matematikçiler bu eşitsizliğin geliştirilmesi konusunda önemli katkılar sağlamışlardır.

Hardy eşitsizliği kesikli ve sürekli formu olmak üzere iki şekilde incelenmiş ve bu eşitizliğin hangi şartlar altında doğru olduğu araştırılmıştır.
Eşitsizliğin kesikli formu :$p > 1$ ve $\{a_k\}_1^\infty$ negatif olmayan reel terimli bir dizi olsun,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p \tag{3.1}$$

Eşitsizliğin sürekli formu :$p > 1$ ve f negatif olmayan $(0,\infty)$ aralığı üzerinde p-integrallenebilir fonksiyon ise f fonksiyonu her bir is $x \in (0,\infty)$ için $(0,\ x)$ aralığında integrallenebilirdir ve

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f(x)^p dx. \tag{3.2}$$

dır. Bu iki tip eşitsizlik, Hardy eşitsizliklerinin standart formlarıdır.

Uyarı 3.0.4 (i) (3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinde ortaya çıkan $(p/(p-1))^p$ sabiti değişmezdir. Yani daha küçük bir sayı için (3.1) ve (3.2) eşitsizliği sırasıyla uygun olan dizi ve fonksiyonlar için sağlanmaz.

(ii) (3.1) ve eşitsizliğinin zayıf formu: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p < \infty$, $a_n \geq 0$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)^p < \infty$ ve $\int_0^\infty f(x)^p dx < \infty$, $f(x) \geq 0$ olmak üzere $\int_0^\infty(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt)^p dx < \infty$ şeklindedir.

(iii) (3.1) ve (3.2) eşitlikleriyle birlikte (iii) ifadesinden *kesikli Hardy operatörü* h ve *sürekli Hardy operatörü* H, $p > 1$ ve $p' = p/(p-1)$

olmak üzere sırasıyla l_p den l_p ye ve L_p den L_p

$$h(\{a_n\}) = \{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\},\ Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,$$

şeklinde tanımlanır. Burada l_p ve L_p sırasıyla $\|a\|_{l_p} := (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p} < \infty$, $\|f\|_{L_p} := (\int_0^{\infty} |f(x)|^p dx)^{1/p} < \infty$ olacak şekilde sırasıyla $a = \{a_n\}$ reel terimli dizilerden ve $(0,\ \infty)$ aralığında ölçülebilir f fonksiyonlarından oluşan Lebesgue uzaylarıdır.

(3.2) eşitsizliği klasik Hardy eşitsizliği olarak kabul edilir. Bu eşitsizlik daha sonraları çok geniş bir şekilde araştırılmış, incelenmiş ve daha genel eşitsizliklerin elde edilmesinde model olarak kullanılmıstır. G.H.Hardy'nin (3.2) eşitsizliğini ispatlamasından çok kısa bir süre sonra bu eşitsizlik değiştirilerek ilk ağırlıklı Hardy eşitsizliği, $p > 1, \varepsilon < p-1$ ve f negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{p-\varepsilon-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\varepsilon dx, \quad (3.3)$$

seklinde verilmistir. Bu eşitsizliğin dual formu $p > 1, \varepsilon > p-1$ ve f negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\varepsilon dx, \quad (3.4)$$

seklindedir. Bu eşitsizlik (3.3) eşitsizliğinden kolaylıkla elde edilebilir.

Hardy eşitsizliğinin gelişimindeki önemli işler ağırlık fonksiyonlarının eşitsizlik içinde kullanılmasıyla elde edilmiştir. Hangi özelliklere sahip ağırlık fonksiyonlarıyla eşitsizlik gerçekleniyor sorusundan hareketle araştırılmalar derinleşmeye başlamış ve yeni neticeler ortaya çıkmıştır.

3.1 A_p Sınıfı Ağırlık Fonksiyonları

Tanım 3.1.1 ω fonksiyonu h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için $\omega(x) > 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda ω fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir. Özel olarak, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ için

$$d(x, y) = \inf_{x \in \partial\Omega} |x - y|$$

ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\omega(x) = (d(x))^\alpha$$

ağırlık fonksiyonuna kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu denir.
Eğer $\omega(2x) \leq C_1\omega(x)$ olacak şekilde bir $1 < C_1 < \infty$ sayısı varsa Ω ağırlık fonksiyonuna çift katlı ağırlık fonksiyonu(D) ve eğer $\omega(x) \leq C_2\omega(2x)$ olacak şekilde bir $0 < C_2 \leq 1$ sayısı varsa ω ağırlık fonksiyonuna ters çift katlı ağırlık fonksiyonu(RD) adı verilir.

Tanım 3.1.2 (($1 \leq p < \infty$) için A_p ağırlıkları) $\omega(x) \leq 0$ ve $\omega(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir $C > 0$ sabiti

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}\,dx\right)^{p-1} \leq C \qquad (3.5)$$

$1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ denir. Burada ve aşağıda, $1/p + 1/p' = 1$ dır.$C > 0$ olmak üzere

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \qquad (3.6)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\omega \in A_1$. (3.5) veya (3.6) de görünen C sabitine ω nın A_p sabiti denir.

Uyarı 3.1.3 $\omega \in A_1$ olması için gerek ve yeter şart $C > 0$ ve herhangi Q kübü için

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx \leq C \inf_{x \in Q} \omega(x). \qquad (3.7)$$

Burada ve aşağıda, inf ile temel infimum olarak düşünülecektir. Dahası, $1 \leq p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ için, A_p sabiti $C \leq 1$ olduğu kolayca görülür. Aslında, her bir Q kübü için

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1/p} \omega(x)^{-1/p} dx \\
&\leq \left\{ \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \right\}^{1/p} \\
&\leq C^{1/p}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi A_p ağırlık fonksiyonlarının bazı özelliklerini verelim.

Önerme 3.1.4 (A_p ağırlıklarının $(I.)$ özellikleri) [11]

i. $1 \leq p < q < \infty$ ise $A_p \subsetneq A_q$, .

ii. $1 < p < \infty$ olmak üzere $\omega \in A_p$ için gerek ve yeter şart $\omega(x)^{1-p'} \in A_{p'}$.

iii. $\omega_0, \omega_1 \in A_1$ ise $1 < p < \infty$ için $\omega_0 \omega_1^{1-p} \leq A_p$.

iv. $(1 \leq p < \infty)$ olmak üzere $\omega \in A_p$ ise herbir $0 < \varepsilon < 1$ için $\omega^{\varepsilon} \in A_p$.

v. $(1 \leq p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise $\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|dx \right)^p . \omega(Q) \leq C \int_Q |f(x)|^p \omega(x)\, dx. \tag{3.8}$$

vi. $(1 \leq p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise herhangi bir $\delta > 1$ için $C(n, p\delta)$ sabiti vardır öyleki her bir Q kübü için, $\omega(\delta Q) \leq C(n,p,\delta)\, \omega(Q)$. Özellikle, $\delta = 2$ alınırsa A_p ağırlıkları çift koşulu sağlar.

vii. $(1 \leq p < 1)$ için $\omega \in A_p$ ise herhangi bir $0 < \alpha < 1$için $0 < \beta < 1$ vardır öyle ki herhangi ölçülebilir $E \subset Q$ için $|E| \leq \alpha|Q|$ ve $\omega(E) \leq \beta\omega(Q)$.

Sıradaki teorem ile A_p ağırlık fonksiyonlarını çok önemli ve kullanışlı olan bir özelliği verilecektir.

Teorem 3.1.5 (Ters Hölder eşitsizliği) [11] $1 \leq p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda herhangi bir Q kübü için sadece p ye bağlı olan $\varepsilon > 0$ ve C, ω nın A_p sabiti olmak üzere

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}\, dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q \omega(x)\, dx \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 3.1.6 (A_p ağırlık fonksiyonlarının (II.) özellikleri) [11]

viii. $1 < p < \infty$ olmak üzere $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $p - \varepsilon > 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ için $\omega(x) \in A_{p-\varepsilon}$.

ix. $1 < p < \infty$ için $A_p = \bigcup_{q<p} A_q$.

x. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $\omega(x)^{1+\varepsilon} \in A_p$.

xi. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun.Bu durumda $\delta > 0$ ve $C > 0$ vardır öyle ki her bir Q kübü ve $E \subset Q$ olacak şekilde ölçülebilir E kümesi için

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta}. \tag{3.10}$$

Uyarı 3.1.7 ω, $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer ω (3.10) denklimini sağlarsa $\omega \in A_\infty$ denir. xi. özelliği gösteriyor ki $\bigcup_{1\leq p<\infty} A_p \subset A_\infty$. Bununla birlikte $\bigcup_{1\leq p<\infty} A_p \supset A_\infty$ olduğu da ispatlanabilir. Sonuç olarak $A_\infty = \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p$.

Tanım 3.1.8 ω bir ağırlık fonksiyonu, $0 < p \leq \infty$ ve $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. Bu durumda Ω bölgesinde

$$\int_{\Omega} |u|^p \omega d\mu < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir fonksiyonların oluşturduğu uzaya Ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve $L_{p,\omega}(\Omega) = L_p(\omega)$ ile gösterilir. $L_{\omega}^{p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L_p(\omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p \omega d\mu \right)^{1/p} < \infty, \ 0 < p < \infty$$
$$\|u\|_{L_\infty(\omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty$$

normları ile bir Banach uzayıdır.

3.2 Hardy Eşitsizliğinin Modern Formu

Son yıllarda yapılan çalısmalarla birlikte (3.3) eşitsizliği genelleştirilerek Hardy eşitsizliğinin modern hali olan aşağıdaki forma dönüştürülmüştür

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.11)$$

Burada, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$, u ve v fonksiyonları (a, b) aralıgında birer ağırlık fonksiyonu, $0 < q < \infty$ ve $1 \leq p \leq \infty$ dir. Bu eşitsizliğin negatif olmayan ölçülebilir tüm fonksiyonlar için sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $1 < p \leq q \leq \infty$ için $(p' = \frac{p}{p-1})$

$$A_{pq} := \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_a^x v(t)^{1-p'} dt \right)^{1/p'} < \infty \quad (3.12)$$

$0 < q < p < \infty, q \neq 1, 1 < p < \infty$ için $\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$ olmak üzere

$$A_{pqr} := \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{r/q} \left(\int_a^x v(t)^{1-p'} dt \right)^{r/q'} v(x)^{1-p'} dx \right)^{1/r} < \infty \quad (3.13)$$

olmasıdır.

Benzer şekilde (3.4) ile verilen Hardy eşitsizliği için

$$\left(\int_a^b\left(\int_x^b f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.14}$$

şeklinde genelleştirilmiş, bu eşitsizliğin negatif olmayan ölçülebilir tüm fonksiyonlar için sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $1<p\leq q\leq\infty$ için $(p^{'}=\frac{p}{p-1})$

$$\tilde{A}_{pq}:=\sup_{a<x<b}\left(\int_a^x u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_x^b v(t)^{1-p^{'}}dt\right)^{1/p^{'}}<\infty \tag{3.15}$$

$0<q<p<\infty, q\neq 1, 1<p<\infty$ için $\left(\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$

$$\tilde{A}_{pqr}:=\left(\int_a^b\left(\int_a^x u(t)dt\right)^{r/q}\left(\int_x^b v(t)^{1-p^{'}}dt\right)^{r/q^{'}}v(x)^{1-p^{'}}dx\right)^{1/r}<\infty \tag{3.16}$$

olarak elde edilmiştir.

Hardy eşitsizlikleri için en önemli sorunlardan biri “en iyi sabit” in ne olması gerektiğidir. Buna göre (3.11) eşitsizliği için en iyi C sabiti

$$p\leq q \quad \text{için} \quad A_{pq}\leq Ck(p,q)A$$

$$q\leq p \quad \text{için} \quad q^{1/q}\left(\frac{p^{'}q}{r}\right)^{1/q^{'}}A_{pqr}\leq C\leq q^{1/q}\left(p^{'}\right)^{1/q^{'}}A_{pqr}$$

olarak kabul edilir. Buradaki $k(p,q)$ sabiti

$$k(p,q)=p^{1/q}\left(p^{'}\right)^{1/p^{'}}$$

$$k(p,q)=q^{1/q}\left(q^{'}\right)^{1/p^{'}}$$

$$k(p,q)=\left(1+\frac{q}{p^{'}}\right)^{1/q}\left(1+\frac{p^{'}}{q}\right)^{1/p}$$

ifadelerinden herhangi biri ile gösterilebilir. Ayrıca şunu belirtmekte yarar vardır ki Hardy eşitsizliklerinde elde edilen en iyi C sabitleri ile (3.12) veya (3.13) de verilen A_{pq} ve A_{pqr} değerleri karşılaştırılabilirdir yani $A_{pq}, A_{pqr} \approx C$ dir. Ve benzer şekilde yine bu C sabitler ile (3.15) veya (3.16) da verilen $\tilde{A}_{pq}$ ve $\tilde{A}_{pqr}$ değerleri karşılaştırılabilirdir yani $\tilde{A}_{pq}, \tilde{A}_{pqr} \approx C$ dir.

3.3 Hardy Operatörü

Tanım 3.3.1 $f = f(t) \geq 0, t \in (a,b)$ ve $a < x < b$ (veya $0 < x < \infty$ alınabilir) olmak üzere,

$$(Hf)(x) := \int_a^x f(t)dt \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlı H dönüşümüne (klasik) Hardy operatörü denir. Bu eşitlik (3.4) eşitsizliğinde kullanılırsa (3.11) eşitsizliği

$$\|Hf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \tag{3.18}$$

seklinde yeniden yazılabilir. Bu durumda (3.18) eşitsizliğinin ölçülebilir negatif olmayan f fonksiyonları için sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $A_{pq} < \infty$ veya $A_{pqr} < \infty$ olmasıdır.H operatörünün eşleniği olan $\tilde{H}$ operatörü

$$(\tilde{H}f)(x) := \int_x^b f(t)dt \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanır.

Buna göre (3.14) eşitsizliğine karsılık gelen eşlenik Hardy eşitsizliği

$$\|\tilde{H}f\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \tag{3.20}$$

seklinde yeniden yazılabilir ve (3.20) eşitsizliğinin ölçülebilir $f \geq 0$ fonksiyonları için sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $\tilde{A}_{pq} < \infty$ veya $A_{pqr} < \infty$ olmasıdır.

Burada H operatörünün sınırlılığı için gerekli ve yeterli olan $A_{pq} < \infty$ ve $A_{pqr} < \infty$ koşullarından H operatörünün eşleniği olan

$\tilde{H}$ operatörünün sınırlığı için gerekli ve yeterli olan $\tilde{A}_{pq} < \infty$ ve $\tilde{A}_{pqr} < \infty$ koşullarına geçis, değişken değiştirme yöntemleri ile kolaylıkla gösterilebilir. Burada asıl önemli olan şey yeni oluşturulan (3.18) ve (3.20) eşitsizliklerinin

$$\|Tf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \tag{3.21}$$

şeklindeki genel ağırlıklı norm eşitsizliğinin ilk modelleri olmasıdır. Burada T genel bir operatörü olup, (3.21) eşitsizliği T operatörünün $L^p(v)$ yi $L^q(u)$ ya sürekli bir şekilde eşlediğini ($T : L^p(v) \to L^q(u)$) veya bir baska deyişle T operatörünün sınırlı olduğunu gösterir.

4 DEĞİŞKEN ÜSTLÜ UZAYLAR

Bu bölümde değişken üstlü Lebesgue uzayı tanımı ve özellikleri verilecektir.

4.1 Değişken Üstlü Lebesgue Uzayı

$\Omega, \mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir küme, $|\Omega| > 0$ ve E kümesi Ω bölgesinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. E kümesinde h.h.h. eşit fonksiyonları bir eleman olarak göz önüne alınırsa p fonksiyonu ölçülebilir bir fonksiyon yani $p \in E$ olarak düşünülebilir.

$$\varphi(x,s) = s^{p(x)}, \quad \forall x \in \Omega, s \geq 0$$

şeklinde tanımlanan $\varphi : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

1. $\forall x \in \Omega$ için $\varphi(x,\cdot) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,
2. $\varphi(x,0) = 0, s > 0$ için $\varphi(x,s) > 0$ ve $\lim_{s\to\infty} \varphi(x,s) = \infty$,
3. Her $s \geq 0$ için $\varphi(\cdot,s) \in E$

özelliklerine sahip olduğundan, φ fonksiyonu Φ sınıfına aittir. Ayrıca, $\varphi(x,s)$ fonksiyonunun $\forall x \in \Omega$ için s nin bir konveks fonksiyonu olduğu açıktır. Bu nedenle $u \in E$ fonksiyonu için

$$\rho(u) = \rho_{p(x)}(u) = \int_\Omega \varphi(x,|u|)dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx$$

şeklinde tanımlanan $\rho : E \to [0,\infty]$ fonksiyonu

1. $\rho(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $\rho(u) = \rho(-u)$

3. $\rho(\alpha u+\beta v)\leq \alpha\rho(u)+\beta\rho(v),\ \forall u,v\in E, \forall\alpha,\beta>0,\ \alpha+\beta=1$

özelliklerini sağladığından, E kümesi üzerinde bir konveks modülerdir.

Böylece $E_\rho = L^{p(x)}(\Omega)$ modüler uzayı

$$L^{p(x)}(\Omega)=\left\{u\in E:\lim_{\lambda\to 0^+}\rho(\lambda u)=0\right\}$$

genelleştirilmiş Orlicz uzayının bir özel çeşididir ve E kümesinin lineer alt uzayıdır.

$\varphi(x,s)$ fonksiyonunun özelliklerinden,

$$L^{p(x)}(\Omega)=\{u\in E:\exists\lambda>0,\rho(\lambda u)<\infty\}$$

yazılabilir. $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının bir konveks alt uzayı olan $L_0^{p(x)}(\Omega)$ uzayı

$$L_0^{p(x)}(\Omega)=\{u\in E:\rho(u)<\infty\},$$

genelleştirilmiş Orlicz sınıfının bir türüdür ve

$$L_1^{p(x)}(\Omega)=\{u\in E:\forall\lambda>0,\rho(\lambda u)<\infty\}$$

uzayı da E nin $L_0^{p(x)}$ kümesinde kapsanan en büyük alt vektör uzayıdır.Bu uzaylar için genel olarak

$$L_1^{p(x)}(\Omega)\subset L_0^{p(x)}(\Omega)\subset L^{p(x)}(\Omega)$$

yazılabilir.

Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir açık küme ve $\Omega'\subset\Omega$ olsun. $p:\Omega\to[1,\infty)$ ölçülebilir fonksiyonu için

$$p_{\Omega'}^-=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega'}p(x) \text{ ve } p_{\Omega'}^+=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega'}p(x)$$

gösterimlerini, ayrıca $p^-=p_\Omega^-$ ve $p^+=p_\Omega^+$ kısaltılabilir. Genel olarak

$$1\leq p^-\leq p^+<\infty \tag{4.1}$$

şeklinde kullanılabilir.

Teorem 4.1.1 $L_1^{p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $p \in L_+^\infty(\Omega)$ olmasıdır. Burada

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{ p \in L^\infty : \operatorname*{ess\,sup}_\Omega p \geq 1 \right\}$$

dir.

Böylece $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ise, $L^{p(x)}(\Omega) = L_0^{p(x)}(\Omega) = L_1^{p(x)}(\Omega) = E_\rho$ yazılabilir ve $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının değişken üstlü Lebesgue uzayı, $p(\cdot)$ fonksiyonu da sınırlı üst olarak adlandırılır. p nin sabit olması durumunda değişken üstlü Lebesgue uzayı ile klasik Lebesgue uzayı çakışır. $p \in L_+^\infty(\Omega)$ olması durumunda modüler fonksiyona ek olarak aşağıdaki özelliklere sahip olur.

1. $\rho(u+v) \leq 2^{p^+}(\rho(u) + \rho(v))$

2. $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için eğer $\lambda > 1$ ise

   $$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u)$$

   ve eğer $0 < \lambda < 1$ ise

   $$\lambda^{p^+}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u)$$

   elde edilir.

3. Eğer h.h.h. $x \in \Omega$ için $|u(x)| \leq |v(x)|$ ve $\rho(v) < \infty$ ise, bu durumda $\rho(u) \leq \rho(v)$ ve $|u| \neq |v|$ için kesin eşitsizlik vardır.

4. Verilen bir $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ için, $\rho(\lambda u)$ fonksiyonu λ ya göre sürekli, konveks çift fonksiyondur ve $\lambda \in [0, \infty)$ için artandır.

ρ modüleri konveks olduğundan $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde

$$\|u\|_{p(\cdot),\Omega} = \|u\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

Lüksemburg normu tanımlanabilir. Bu norm ile birlikte $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayı olur.Eğer $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve h.h.h. $|u(x)| \leq |v(x)|$ ise $\|u\|_{p(\cdot)} \leq \|v\|_{p(\cdot)}$ yazılabilir. $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ olmak üzere $\|f\|_{p(\cdot)} \leq C_1$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(f) \leq C_2$ olmasıdır. $\frac{C_1}{C_2}$ değeri alttan ve üstten p fonksiyonuna bağlı bir sabitle sınırlıdır.

Modüler fonksiyonun (4) özelliğinden ve normun tanımından aşağıdaki teorem elde edilebilir.

Teorem 4.1.2 $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda $\|u\|_{p(\cdot)} = a$ olması için gerek ve yeter şart $\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$ olmasıdır.

$\|u\|_{p(\cdot)}$ normu ve $\rho(u)$ modülleri arasında yakın bir ilişki vardır.Bu ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 4.1.3 $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ olsun. O halde

1. $\|u\|_{p(\cdot)} < 1(= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1(= 1; > 1)$
2. Eğer $\|u\|_{p(\cdot)} > 1$ ise $\|u\|_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{p^+}$
3. Eğer $\|u\|_{p(\cdot)} < 1$ ise $\|u\|_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{p^-}$

ifadeleri geçerlidir.

Teorem 4.1.4 E kümesi Ω bölgesinin ölçülebilir bir alt kümesi ve χ_E de E kümesinin karakteristik fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$|E|^{\frac{1}{p^-}} \leq \|\chi_E\|_{p(\cdot)} \leq |E|^{\frac{1}{p^+}}, \quad |E| < 1$$

$$|E|^{\frac{1}{p^+}} \leq \|\chi_E\|_{p(\cdot)} \leq |E|^{\frac{1}{p^-}}, \quad |E| \geq 1$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Bu uzayların önemli özelliklerinden biri modüler yakınsaklık ile norm yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki sonuçtur.

Teorem 4.1.5 $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $k = 1, 2, \ldots$ için $u_k \in L^{p(x)}(\Omega)$ olsun. Bu durumda

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{p(\cdot)} = 0$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k - u) = 0$
3. u_k ölçümsel olarak Ω bölgesinde u fonksiyonuna yakınsar ve $\lim_{k\to\infty} \rho(u_k) = \rho(u)$ özellikleri eşdeğerdir.

Bu teoremin bir sonucu olarak $L^{p(x)}(\Omega)$ uzalarında aşağıdaki yoğunluk ile ilgili sonuç elde edilebilir.

Teorem 4.1.6 Ω üzerinde tanımlı tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\left(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)}\right)$ uzayında yoğundur.

Teorem 4.1.7 (Hölder Eşitsizliği) $\forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $\forall v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ için $c = 1 + \frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+}$ olmak üzere

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq c\|u\|_{p(\cdot)}\|v\|_{p'(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

$L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı üzerinde

$$\|u\|_\rho = \inf_{\lambda>0} \lambda \left(1 + \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right)$$

şeklinde tanımlanan norma *Amemiya normu* denir. Basit bir hesaplamayla eğer $p(x) = p$ şeklinde bir sabit ise, bu durumda

$$\|u\|_\rho = 2\|u\|_p$$

elde edilir. Dolayısıyla, bu iki norm eşdeğerdir. Yani, $\forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq \|u\|_\rho \leq 2\|u\|_{p(\cdot)}$$

eşitsiliği sağlanır.

Diğer taraftan $p^- > 1$ ise $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında

$$\|u\|_p^{'} = \sup_{\rho_{p'}(v)\leq 1} \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right|$$

Orlicz normu tanımlanabilir ve $\forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_\rho \leq \|u\|_\rho^{'} \leq 2\|u\|_\rho$$

yazılabileceğinden, $\|u\|_\rho^{'}$ normu $\|u\|_\rho$ ve $\|u\|_{p(\cdot)}$ normlarına eşdeğerdir.

Teorem 4.1.8 [8, 5][Minkowski Eşitsizliği] $p^- > 1$ olsun. Bu durumda

$$\left\| \int_\Omega f(\cdot, y)dy \right\|_\rho^{'} \leq \int_\Omega \|f(\cdot, y)\|_\rho^{'} dy$$

ve

$$\left\| \int_\Omega f(\cdot, y)dy \right\|_{p(\cdot)} \leq \int_\Omega \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)} dy$$

eşitsizlikleri sağlanır.

5 DEĞİŞKEN ÜSTLÜ UZAYLARDA HARDY EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölüm, değişken üstlü uzaylarda elde edilen ağırlıklı Hardy eşitsizliklerinin ifade ve ispatlarını içermektedir. Ana sonuçları vermeden önce bazı kısaltma, notasyon ve gösterimler verilecektir.

$p, q : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $v, \omega : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ ağırlık fonksiyonları olsunlar.

$$V_\delta(x) = \int_{B(0,\delta)\backslash B(0,|x|)} v(t)dt \quad |x| < \delta;\ V(x) = V_\infty(x),$$

ve

$$W_N(x) = \int_{B(0,|x|)\backslash B(0,N)} \sigma dt \quad |x| > N;\ W(x) = W_0(x)$$

ile temsil edeceğiz. Ağırlık fonksiyonları için

$$\begin{aligned} &\sigma(x) = \omega^{\frac{-1}{(p(x)-1)}(x)} \in L^1(\mathbb{R}^n\backslash B(0,a))v(x) \in L^1\left(\mathbb{R}^n\backslash B(0,a)\right) \\ &\text{her bir } a > 0, V(0) = \infty, W(\infty) = \infty. \end{aligned} \tag{5.1}$$

koşulları sağlansın. $p(x), q(x)$ fonksiyonarı için 0 civarında ve sonsuzda sırasıyla

$$\exists\delta > 0,\ \exists f(0) \in \mathbb{R} \quad \sup_{x\in B(0,\delta)} |f(x) - f(0)| \ln \frac{1}{W(x)} < \infty; \tag{5.2}$$

$$\exists\delta > 0,\ \exists f_\infty \in \mathbb{R} \quad \sup_{x\in \mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} |f(x) - f_\infty| \ln W(x) < \infty. \tag{5.3}$$

koşullarını sağlansın. $p(x)$ fonksiyonu için (5.2) koşulundan

$$C_1^{-1} W(x)^{p(0)} \leq W(x)^{p(x)} \leq C_1 W(x)^{p(0)} \quad |x| \leq \delta \ \text{ için} \tag{5.4}$$

olduğu ve (5.3) koşulundan

$$C_1^{-1} W(x)^{p_\infty} \leq W(x)^{p_\infty} \leq C_1 W(x)^{p_\infty} \quad |x| \geq N \ \text{ için.} \tag{5.5}$$

olduğu görülür.

Lemma 5.0.9 [12] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $p : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Verilen her hangi bir $f(x)$ fonksiyonu için $\hat{f}(x) = f(\frac{x}{|x|^2})$ denirse

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \||y|^{-2n/\hat{p}}\hat{f}\|_{\hat{p}(\cdot)} \tag{5.6}$$

dir.

İspat. $x = \frac{y}{|y|^2}$ şeklinde değişken değiştirilmesi yapılır ve küresel koordinat sistemine geçilirse

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{|y|^{-2n/\hat{p}(y)}\hat{f}(y)}{\lambda}\right|^{\hat{p}(y)} dy; \ \lambda > 0,$$

olduğu görülür böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.0.10 [12] $1 \leq p \leq q < \infty$ olmak üzere pozitif, ölçülebilir ağırlık fonksiyonları $v, \omega : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ olup (5.1) koşulunu sağlasın.Bu durumda $\forall f(x) \geq 0$ olmak üzere

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:|y|\leq|x|\}} f(y)dy\right)^q v(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}(f(x))^p\,\omega(x)dx\right)^{1/p} \tag{5.7}$$

eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$C_{pq} = \sup_{t>0}\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,t)} v(x)dx\right)\left(\int_{B(0,t)} \omega^{-1/(p-1)}\right)^{q/p'} < \infty; \ C \approx C_{pq}^{1/q} \tag{5.8}$$

dır.

İspat. $F(x) = \int_{\{y\in\mathbb{R}^n:|y|\leq|x|\}} f(y)dy$ olsun. Buradan açıkça görülür ki $F(x)$ radial fonksiyondur. $\tilde{F}(|x|) = F(x)$ olsun. Burada $\tilde{F}(t)$ tek değişkenli bir fonksiyondur. Her bir $\lambda \in (0, \lim_{t\to\infty}\sup\tilde{F}(t))$ olmak üzere $t > \rho_\lambda$ için $\tilde{F}(t) \leq \lambda$ olacak şekilde $\rho_\lambda > 0$ vardır. Buradan

$$\lambda = \int_{\rho_\lambda\leq|x|\leq\rho_{2\lambda}} f(x)dx$$

olsun. Hölder eşitsizliği ve (5.8) koşulu kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\rho_{2\lambda}} v(x)dx &\leq \left(\int_{|x|\geq\rho_{2\lambda}} v(x)dx\right)\left(\frac{1}{\lambda}\int_{\rho_\lambda\leq|x|\leq\rho_{2\lambda}} f(x)dx\right)^q \\
&\leq \frac{1}{\lambda^q}\left(\int_{|x|\geq\rho_{2\lambda}} v(x)dx\right)\left(\int_{\rho_\lambda\leq|x|\leq\rho_{2\lambda}} (f(x))^p\,\omega(x)dx\right)^{q/p} \\
&\quad\times\left(\int_{|x|\leq\rho_{2\lambda}} \omega^{-1/(p-1)}\right)^{q/p'} \\
&\leq \frac{C_{pq}}{\lambda^q}\left(\int_{\rho_\lambda\leq|x|\leq\rho_{2\lambda}} (f(x))^p\,\omega(x)dx\right)^{q/p}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen eşitsizliğin integrali alınıp, Fubini teoremi uygulanıp ve Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^q}\int_{\mathbb{R}^n} (F(x))^q\,v(x)dx &= \int_0^\infty \left(\int_{|x|\geq\rho_{2\lambda}} v(x)dx\right) d\lambda^q \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:F(x)\geq 2\lambda\}} v(x)dx\right) d\lambda^q \\
&\leq qC_{pq}\int_0^\infty \left(\int_{\rho_\lambda\leq|x|\leq\rho_{2\lambda}} (f(x))^p\,\omega(x)dx\right)^{q/p}\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= qC_{pq}\int_0^\infty \left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\lambda\leq F(x)\leq 2\lambda\}} (f(x))^p\,\omega(x)dx\right)^{q/p}\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&\leq qC_{pq}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{F(x)/2}^{F(x)}\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{p/q} (f(x))^p\,\omega(x)dx\right)^{q/p} \\
&= qC_{pq}\ln 2\left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(x))^p\,\omega(x)dx\right)^{q/p}
\end{aligned}
$$

ihtiyaç duyulan (5.7) eşitsizliği $2(C_{pq}q\ln 2)^{1/q}$ sabiti ile birlikte elde edilir. Yeterlilik koşulu olan (5.8) eşitsizliğinin ispatlaması için

$$f_t(x) = \omega^{-1/(p-1)}(x)\chi_{B(0,t)}(x), \quad t>0,$$

test fonksiyonu (5.7) eşitsizliğine yazılarak elde edilir. ■

Uyarı 5.0.11 $0 \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere $f(x)\chi_{a\leq|x|\leq b}(x)$ fonksiyonunu (5.7) eşitsizliğinde test fonksiyonu yerine kullanılırsa

$$\left(\int_{B(0,b)\backslash B(0,a)} v(x)\left(\int_{B(0,|x|)} f(t)dt\right)^q dx\right)^{1/q} \leq \left(\int_{B(0,b)\backslash B(,a)} \omega(x)f(x)^p dx\right)^{1/p} \tag{5.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$C_2 \approx \sup_{a\leq s\leq b}\left(\int_{B(0,b)\backslash B(0,s)} v(x)dx\right)\left(\int_{B(0,b)\backslash B(,a)} \omega(x)^{-1/(p-1)}\right)^{q/p'}. \tag{5.10}$$

Teorem 5.0.12 [12] $x \in \mathbb{R}^n$ için $q(x) \leq p(x), 1 < p^- \leq p(x), q(x) \leq q^+ < \infty$ olsun. (5.2) ve (5.3) koşulları $p(x), q(x)$ için sağlansın.

$$\|v^{1/q(x)}Hf\|_{q(\cdot)} \leq C\|\omega^{1/p(x)}f\|_{p(\cdot)} \tag{5.11}$$

Her bir $f(x) \geq 0$ olmak üzere (5.11) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\exists\delta > 0 \qquad \sup_{x\in B(0,\delta)} V_\delta(x)W(x)^{q(0)/p'(0)} < \infty \tag{5.12}$$

ve

$$\exists N > 0 \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} V(x)W_N(x)^{q_\infty/p'_\infty} < \infty \tag{5.13}$$

olmasıdır.

Teorem 5.0.12 kuvvet ağırlıklarına uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.0.13 [12] p, q, β fonksiyonları için (5.2) ve (5.3) koşulları, $W(x)$ yerine $|x|$ ile değiştirilerek sağlansın. $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon ve $f(x) \geq 0$ olmak üzere

$$\||x|^{\beta(\cdot)-\frac{1}{p'(\cdot)}-\frac{1}{q(\cdot)}}Hf\|_{q(\cdot)} \leq C_2\||x|^{\beta(\cdot)}f\|_{p(\cdot)} \tag{5.14}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\beta(0) < 1/p^{'}(0), \quad \beta_\infty < 1/p^{'}_\infty. \tag{5.15}$$

dır.

İspat. Sonuç 5.0.13 i ispatlamak için (5.12) ve (5.13) koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir. Dolayısıyla sıfırda

$$|x|^{\left(\beta(x)-\frac{1}{p^{'}(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)q(x)}\tilde{|}x|^{\left(\beta(0)-\frac{1}{p^{'}(0)}-\frac{1}{q(0)}\right)q(0)}, \quad |x|^{\beta(x).p(x)}\tilde{|}x|^{\beta(0).p(0)} \tag{5.16}$$

ve sonsuzda

$$|x|^{\left(\beta(x)-\frac{1}{p^{'}(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)q(x)}\tilde{|}x|^{\left(\beta_\infty-\frac{1}{p^{'}_\infty}-\frac{1}{q_\infty}\right)q_\infty}, \quad |x|^{\beta(x).p(x)}\tilde{|}x|^{\beta_\infty.p_\infty} \tag{5.17}$$

şeklindeki eşitsizlikler (5.2) ve (5.3) koşullarından elde edilir. ■

$\tilde{H}f$ operatörü için benzer bir teoremi ifade etmek için bazı notasyonlar verelim.

$$\tilde{W}_\delta(x) = \int_{\{y\in\mathbb{R}^n:|x|\le|y|\le\delta\}} \sigma(y)dy \quad |x| < \delta; \tilde{W}(x) = \tilde{W}_\infty(x),$$

ve

$$\tilde{V}_N(x) = \int_{\{y\in\mathbb{R}^n:N\le|y|\le|x|\}} v(y)dy \quad |x| > N; \quad \tilde{V}(x) = \tilde{V}_0(x).$$

(5.1) koşulu yerine $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sigma = \Omega^{-\frac{1}{p(x)-1}} &\in L^1(\mathbb{R}^n\backslash B(0,a)), \\ v(x) &\in L^1(B(0,a)), \quad \bar{V}(\infty) = \infty, \ \bar{W}(0) = \infty \end{aligned}$$

düzenlemeleri yapılır, (5.2) ve (5.3) koşulları

$$\exists N > 1, \ \exists f_\infty \in \mathbb{R}^n \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n\backslash B(0,N)} |f(x) - f_\infty \ln\frac{1}{\tilde{W}(x)}| < \infty \tag{5.18}$$

ve

$$\exists\delta > 0 \ \exists f(0) \in \mathbb{R} \quad \sup_{x\in B(0,\delta)} |f(x) - f(0)| \ln\tilde{W}(x) < \infty. \tag{5.19}$$

olsun. Şimdi $\tilde{H}f$ operatörü için teoremi ifade edelim.

Teorem 5.0.14 [12] $x \in \mathbb{R}^n$ için $q(x) \geq p(x), 1 < p^- \leq p(x), q(x) \leq q^+ < \infty$ olsun. $p(x), q(x)$ ve $v(x), \omega(x)$ fonksiyonları için (5.18)-(5.19) koşulları sağlansın. Her bir $f(x) \geq 0$ olmak üzere

$$\|v^{1/q(x)} \tilde{H} f\|_{q(\cdot)} \leq C \|\omega^{1/p(x)} f\|_{p(\cdot)} \tag{5.20}$$

$\tilde{H} f$ operatörünün (5.20) eşitsizliğini sağlaması için gerek ve yeter şart

$$\exists \delta > 0 \quad \sup_{x \in B(0,\delta)} \tilde{V}(x) \tilde{W}_\delta(x)^{q(0)/p'(0)} < \infty, \quad \text{and} \tag{5.21}$$

$$\exists N > 0 \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} \tilde{V}_N(x) \tilde{W}(x)^{q_\infty/p'_\infty} < \infty. \tag{5.22}$$

dır.

İspat. $\hat{G} = H(\hat{f}|y|^{-2n})$ olduğundan ve Teorem 5.0.12 ve Lemma 5.0.9 den

$$\begin{aligned}
\|\tilde{H} f(x) v(x)^{1/q(x)}\|_{q(\cdot)} &= \|\hat{G} \|y\|^{-2n/\hat{q}} \hat{v}^{1/\hat{q}}\|_{\hat{q}(\cdot)} \\
&= \|H\left(\hat{f}|z|^{-2n}\right)(y)|y|^{-2n/\hat{q}} \hat{v}^{1/\hat{q}}\|_{\hat{q}(\cdot)} \\
&\leq C_2 \|\hat{f} \hat{\omega}^{1/\hat{p}} |y|^{-2n/\hat{p}}\|_{\hat{p}(\cdot)} \\
&= \|f \omega^{1/p}\|_{p(\cdot)}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada $G = \tilde{H} f(x)$ dir.

Teorem 5.0.12 de v, ω ağırlıkları için uygun olan (5.1), (5.12) ve (5.13) koşulları yerine $v_1 = |y|^{-2n} \hat{v}(y), \omega_1 = |y|^{2n(\hat{p}-1)} \hat{\omega}(y)$ için (5.18), (5.21) ve (5.22) koşulları göze alınır, $q_1 = \hat{q}(y), p_1 = \hat{p}(y)$ olmak üzere yine Teorem 5.0.12 deki p, q için uygun olan (5.2) ve (5.3) koşullarının transformu olan (5.18) ve (5.19) koşulları q_1, p_1 için kullanılırsa Teorem 5.0.14 in ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.0.12'ün İspatı. *Yeterlilik:* 0 *civarı eşitsizlik*
$f(x) \geq 0$ ve

$$\|f \omega^{1/p}\|_{p(\cdot)} \leq 1 \tag{5.23}$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. (5.2) koşulu için yeteri derecede küçük bir $\delta > 0$ sayısı için x, $B(0,\delta)$ yuvarında belirlenmiş bir nokta olsun. Buradan

$$\int_{B(0,|x|)} f(t)dt = \int_{B(0,|x|)} f\chi_{f(t)/\sigma(t)\geq 1}dt + \int_{B(0,|x|)} f\chi_{f(t)/\sigma(t)<1}dt \tag{5.24}$$

olur.Hölder eşitsizliği ve (5.23) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}\int_{B(0,|x|)} f\chi_{f/\sigma\geq 1}dt &= \int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)\,\chi_{f/\sigma\geq 1}\sigma(t)dt \\ &= \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p_x^-}\,\sigma dt\right), \\ &= \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)}\,\sigma dt\right)^{1/p_x^-} \left(\int_{B(0,|x|)} \sigma dt\right)^{1/(p_x^-)'} \\ &\leq \left(\int_{B(0,|x|)} \sigma dt\right)^{1/(p_x^-)'} \end{aligned} \tag{5.25}$$

eşitsizliği elde edilir. $q(x) \geq p(x)$ olduğundan ve (5.25) den

$$\begin{aligned}&\left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p_x^-}\,\chi_{f/\sigma\geq 1}\sigma dt\right)^{q(x)} \\ &= W(x)^{q(x)/(p_x^-)'}\left(W^{-1/(p_x^-)'}(x)\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p_x^-}\,\sigma dt\right)^{q(x)} \\ &\leq \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p_x^-}\,\sigma dt\right)^{p_x^-} \\ &\quad\times W(x)^{(q(x)-p_x^-)/(p_x^-)'}\end{aligned} \tag{5.26}$$

olduğu görülür. $\frac{p^-(x)}{p^-}$, $\frac{p^-(x)}{p_x^- - p^-}$ olmak üzere (5.26) denkleminin sağ tarafına Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\leq W(x)^{q(x)/(p_x^-)-(p^- -1)}\left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p^-}\,\sigma dt\right)^{p^-} \tag{5.27}$$

denklemi elde edilir. (5.27) denkleminden ve (5.25) ifadesindeki ilk eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,\delta)} \left(\int_{B(0,|x|)} f\chi_{f/\sigma \geq 1} dt \right)^{q(x)} v(x)dx \\
&\leq \int_{B(0,\delta)} W(x)^{q(x)/(p_x^-)-(p^- -1)} \\
&\quad \times \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p^-} \sigma dt \right)^{p^-} v(x)dx
\end{aligned} \tag{5.28}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$W(x)^{q(x)/(p_x^-)'} \tilde{W}(x)^{q(0)/p'(0)}; \; x \in B(0,\delta), \tag{5.29}$$

olduğundan (5.23) koşulundan faydalanılarak, (5.28) ve (5.29) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,\delta)} \left(\int_{B(0,|x|)} f\chi_{f/\sigma \geq 1} dt \right)^{q(x)} v(x)dx \\
&\leq C_3 \int_{B(0,\delta)} W(x)^{\frac{q(0)}{p'(0)}-(p^- -1)} \\
&\quad \times \left(\int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)^{p(t)/p^-} \sigma dt \right)^{p^-} v(x)dx
\end{aligned} \tag{5.30}$$

eşitsizliği bulunur. (5.9) eşitsizliğini (5.31) denkleminde kullanarak ve $\omega_1 = \omega(x)^{\frac{p^- -1}{p(x)-1}}, \; v_1 = v(x)W(x)^{\frac{q(0)}{p'(0)}-(p^- -1)}, \; q_1 = p_1 = p^-, \; a = 0, b = \delta$, olduğu kabul edilirse

$$\int_{B(0,\delta)} \left(\int_{B(0,|x|)} f\chi_{f/\sigma \geq 1} dt \right)^{q(x)} v(x)dx \leq C_4 \int_{B(0,\delta)} (f/\sigma)^{p(t)} \sigma dt, \tag{5.31}$$

denklemi elde edilir. Burada

$$C_4 \approx \sup_{0<s<\delta} \left(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,s)} v(x)W(x)^{\frac{q(0)}{p'(0)}-(p^- -1)} dx \right) W(s)^{p^- -1}$$

ve $\frac{q(0)}{p'(0)} - (p^- - 1) > 0$ dir. (5.12) koşulu göz önünde bulundurularak

$$W^{\frac{q(0)}{p'(0)}-(p^--1)}(x) \leq C_5 V_\delta(x)^{-1+\frac{p'(0)}{q(0)}(p^--1)};\ x \in B(0,\delta) \qquad (5.32)$$

eşitsizliği elde edilir. Orjin 0 olmak üzere küresel koordinatlara geçilirek ve (5.32) denkleminden yararlanılarak

$$\begin{aligned} C_4 &\approx W(s)^{p^--1} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,s)} v(x) W(x)^{\frac{q(0)}{p'(0)}-(p^--1)} dx \\ &\leq C_5 \left[- \int_s^\delta \tilde{V}^{-1+\frac{p'(0)}{q(0)}(p^--1)}(t) d\tilde{V}(t) \right] W(s)^{p^--1} \leq C_6 \quad (5.33) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak, (5.24) den eşitsizlik

$$\int_{B(0,\delta)} \left(\int_{B(0,|x|)} f\chi_{f/\sigma\geq 1} dt \right)^{q(x)} v(x) dx \leq C_7 \qquad (5.34)$$

olur ve yine (5.24) den

$$\int_{B(0,|x|)} f\chi_{f/\sigma<1} dt \leq \int_{B(0,|x|)} (f/\sigma)\chi_{(f/\sigma)<1} \sigma dt \leq \int_{B(0,|x|)} \sigma dt \quad (5.35)$$

elde edilir. (5.35) eşitsizliğinden ve (5.2) koşulunu kullanarak

$$\begin{aligned} &\int_{B(0,\delta)} v(x) \left(\int_{B(0,|x|)} f\chi_{f/\sigma\geq 1} dt \right)^{q(x)} dx \\ &\leq \int_{B(0,\delta)} v(x) \left(\int_{B(0,|x|)\sigma} dt \right)^{q(x)} dx \\ &\leq C_8 \int_{B(0,\delta)} v(x) \left(\int_{B(0,|x|)} \sigma dt \right)^{q(0)} dx \qquad (5.36) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan, $\omega_1(x) = \omega_1 = \omega(x)^{\frac{p^--1}{p(x)}},\ v_1(x) = v(x), q_1 = q(0),\ p_1 = p(0),\ a = 0, b = \delta$ denirse (5.9) eşitsizliğinden

$$\left(\int_{B(0,\delta)} v(x) \int_{B(0,|x|)} f\chi_{f/\sigma\geq 1} dt \right)^{q(x)} \leq \int_{B(0,\delta)} \sigma dt = C_9 \tilde{W}(\delta) = C_{10}. \qquad (5.37)$$

eşitsizliği elde edilir.
Sonsuzda eşitsizlik: $N > 1$ sayısı (5.3) koşulunu sağlayacak şekilde bir sayı olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int_{B(0,|x|) \backslash B(0,N)} f(t)dt \right)^{q(x)} v(x)dx \\
&\le 2^{q^+-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int_{B(0,|x|) \backslash B(0,N)} f\chi_{f/\sigma \ge 1} dt \right)^{q(x)} v(x)dx \right. \\
&\left. + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int_{B(0,|x|) \backslash B(0,N)} f\chi_{f/\sigma < 1} dt \right)^{q(x)} v(x)dx \right) \\
&:= 2^{q^+-1}(I_1 + I_2) \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

olur. (5.23) koşulundan

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int_{B(0,|x|) \backslash B(0,N)} (f/\sigma)\chi_{(f/\sigma) \ge 1} \sigma dt \right)^{q(x)} v(x)dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int_{B(0,|x|) \backslash B(0,N)} (f/\sigma)^{p(t)}\chi_{(f/\sigma) \ge 1} \sigma dt \right)^{q(x)} v(x)dx \\
&\le C_{11} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} v(x)dx = C_{12} \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,N)} \left(\int_{B(0,|x|) \backslash B(0,N)} f\chi_{f/\sigma < 1} dt \right)^{q(x)} v(x)dx$$

bulunur.

$$F(x) = \int_{B(0,|x|)} f(t)\chi_{f/\sigma < 1} dt$$

denirse

$$F(x) \le \int_{B(0,|x|)} \sigma dt = W(x) \qquad (5.40)$$

elde edilir. $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $g(x) = \frac{F(x)}{W(x)}$ olsun. Buradan $0 \le g(x) \le 1$

dir ve (5.3) koşulundan da faydalanılarak

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} F(x)^{q(x)} v(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} g^{p(x)} W^{q(x)} v(x)dx \\
&= \int_{\{x:g(x)<1/W(x),|x|>N\}} g^{p(x)} W^{q(x)} v(x)dx \\
&\quad + \int_{\{x:g(x)\geq 1/W(x),|x|>N\}} g^{p(x)} W^{q(x)} v(x)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} v(x)dx + \int_{\{x:g(x)>1/W(x),|x|>N\}} g^{q_\infty} g^{q(x)-q_\infty} W^{q(x)} v(x)dx \\
&\leq \tilde{V}(N) + \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} v(x)dx \\
&\quad + \int_{\{x:g(x)>1/W(x),|x|>N\}\cap\{x:q(x)>q_\infty\}} g^{q_\infty} g^{q(x)-q_\infty} W^{q(x)} v(x)dx \\
&\quad + \int_{\{x:g(x)\geq 1/W(x),|x|>N\}\cap\{x:q(x)\leq q_\infty\}} g^{q_\infty} g^{q(x)-q_\infty} W^{q(x)} v(x)dx \\
&\leq \tilde{V}(N) + \int_{\{x:g(x)\leq 1,|x|>N\}\cap\{x:q(x)\geq q_\infty\}} g^{q_\infty} g^{q(x)-q_\infty} W^{q(x)} v(x)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} g^{q_\infty} W^{q_\infty} v(x)dx \\
&\leq \tilde{V}(N) + \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} g^{q_\infty} W^{q(x)} v(x)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} g^{q_\infty} W^{q_\infty} v(x)dx \\
&\leq \tilde{V}(N) + \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} F^{q_\infty} W^{q(x)-q_\infty} v(x)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} F^{q_\infty} v(x)dx \\
&\leq \tilde{V}(N) + C_{13} \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} F^{q_\infty} v(x)dx \qquad (5.41)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\varphi = f\chi_{(f/\sigma)<1}$, $v_1 = v; \omega_1 = \omega^{(p_\infty-1)/(p(x)-1)}$, $q_1 = q_\infty$, $p_1 = p_\infty$, $a = N, b = \infty$ olduğu kabul edilip $1 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$ olmak üzere (5.9) eşitsizliği (5.41) eşitsizliğine uygulanırsa

$$\int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} F^{q_\infty} v(x)dx \leq C_{14}\left(\int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} f^{p_\infty}\omega^{(p_\infty-1)/(p(x)-1)}\chi_{f/\sigma<1}dx\right)^{q_\infty/p_\infty} \tag{5.42}$$

eşitsizliği ve buradan

$$I_2 \leq C_{11}\left(\int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} f^{p_\infty}\omega^{(p_\infty-1)/(p(x)-1)}\chi_{f/\sigma<1}dx\right)^{q_\infty/p_\infty} + \tilde{V}(N) \tag{5.43}$$

olduğu görülür. (5.10) ve (5.13) koşulları göz önünde bulundurulup (5.3) ve (5.23) koşullarından

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,N)} f^{p_\infty}\omega^{(p_\infty-1)/(p(x)-1)}\chi_{f/\sigma<1}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,N)} (f/\sigma)^{p_\infty}\chi_{f/\sigma<1}\sigma dx \\
&= \int_{\left\{x:f/\sigma<W^{-2/p^{\infty}}(x),|x|>N\right\}} (f/\sigma)^{p_\infty}\chi_{f/\sigma<1}\sigma dx \\
&\quad + \int_{\left\{x:f/\sigma\geq W^{-2/p^{\infty}}(x),|x|>N\right\}} (f/\sigma)^{p_\infty}\chi_{f/\sigma<1}\sigma dx \\
&\leq \int_{\left\{x:f/\sigma<W^{-2/p^{\infty}}(x),|x|>N\right\}\cap\{x:p(x)<p_\infty\}} (f/\sigma)^{p}(f/\sigma)^{p_\infty-p}\chi_{f/\sigma<1}\sigma dx \\
&\quad + \int_{\left\{x:f/\sigma<W^{-2/p^{\infty}}(x),|x|>N\right\}\cap\{x:p(x)\geq p_\infty\}} (f/\sigma)^{p}(f/\sigma)^{p_\infty-p}\chi_{f/\sigma<1}\sigma dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n/B(0,N)} W^{-2}\sigma dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Aranılan eşitsizliği elde etmek için işlemlere devam edilirse

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\tilde{W}(N)} \int_{\{x: f/\sigma \leq 1, |x|>N\} \cap \{x: p(x)<p_\infty\}} (f/\sigma)^p \sigma dx \\
&\quad + \int_{\{x: f/\sigma \leq 1, |x|>N\} \cap \{x: p(x)>p_\infty\}} W^{2(p-p_\infty)} (f/\sigma)^p \chi_{f/\sigma<1} \sigma dx \\
&\quad + C_{15} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} \sigma^{1-p} f^p dx \\
&\leq \frac{1}{\tilde{W}(N)} + C_{15} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} \sigma^{1-p} f^p dx \\
&= C_{16} + C_{15} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} f^p \omega dx = C_{17} \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. (5.40)-(5.44) eşitsizliklerinden ve (5.39) eşitsizliğinden

$$
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} \left(\int_{B(0,|x|) \setminus B(0,N)} f(t) dt \right)^{q(x)} v(x) dx \leq C_{18} \qquad (5.45)
$$

sonucu elde edilir.

Sıfır-Sonsuz arasında eşitsizlik: Açıkça görülüyor ki

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} \left(\int_{B(0,N)} f(t) dt \right)^{q(x)} v(x) dx &\leq \left(1 + \left(\int_{B(0,N)} f(t) dt \right)^{q^+} \right) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,N)} v(x) dx \qquad (5.46)
\end{aligned}
$$

dir.

$$
I_{p'(\cdot);B(0,N)} \left(\omega^{-1/p} \right) = \int_{B(0,N)} \omega^{-1/(p-1)} dt = \tilde{W}(N) \leq C_{19}
$$

olduğundan (5.23) ve $p(\cdot)$-normu için Hölder eşitsizliğinden

$$
\int_{B(0,N)} f(t) dt \leq C_{20} \| f \omega^{1/p} \|_{p(\cdot);B(0,N)} \| \omega^{-1/p} \|_{p'(\cdot);B(0,N)} \leq C_{21} \qquad (5.47)
$$

eşitsizliği elde edilir. (5.45) ve (5.47) eşitliklerinden

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,N)}\left(\int_{B(0,N)}f(t)dt\right)^{q(x)}v(x)dx\le(1+C_{21}^{q^+})\tilde{V}(N)=C_{22}. \tag{5.48}$$

ifadesi elde edilir. $a\ge 0,\ b\ge 0,\ p\ge 1$ olmak üzere $(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p)$ eşitsizliğini kullanarak ve (5.37), (5.45), (5.47),(5.48) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{B(0,|x|)}f(t)dt\right)^{q(t)}v(x)dx\\
&\le\int_{B(0,\delta)}\left(\int_{B(0,|x|)}f(t)dt\right)^{q(x)}v(x)dx\\
&\quad+\int_{B(0,N)\setminus B(0,\delta)}\left(\int_{B(0,|x|)}f(t)dt\right)^{q(x)}v(x)dx\\
&\quad+2^{q^+-1}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,N)}\left(\int_{B(0,N)}f(t)dt\right)^{q(x)}v(x)dx\\
&\quad+2^{q^+-1}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,N)}\left(\int_{B(0,|x|)\setminus B(0,N)}f(t)dt\right)^{q(x)}v(x)dx\\
&\le C_{23}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

olduğu görülür. Böylelikle Teorem 5.0.12 nin yeterlilik kısmı ispatlanmış olur.

Gereklilik: (5.2) koşulu gereği yeteri ölçüde küçük $\delta>0$ sayısını seçelim, $\tilde{W}(\delta)<\frac{1}{2}$ ve $t\in B(0,\delta)$ olsun. (5.11) eşitsizliği için

$$f_t(x)=\left(\int_{B(0,t)}\sigma ds\right)^{-1/p(0)}\sigma(x)\chi_{B(0,t)}(x) \tag{5.50}$$

şekilinde test fonksiyonunu alalım. Buradan

$$Hf_t(x)=\frac{W(x)}{W(t)^{1/p(0)}}\chi_{B(0,t)}(x)+W(t)^{1-1/p(0)}\chi_{B(0,\delta)\setminus B(0,|t|)}(x)$$

olduğu görülür.(5.2) koşulu uygalanırsa

$$I_{p(\cdot)}\left(\omega^{1/p}f_t\right)=\int_{B(0,|t|)}\frac{\sigma(x)dx}{W(t)^{p(x)/p(0)}}\le C_{24}\int_{B(0,|t|)}\frac{\sigma(x)dx}{W(t)}=C_{24}$$

elde edilir. Yine (5.2) koşulundan

$$\begin{aligned}
I_{q(\cdot)}\left(v^{1/q}Hf_t\right) &\geq \int_{B(0,\delta)} v(x)(Hf_t)^{q(x)}dx \\
&\geq \int_{B(0,\delta)\backslash B(0,|t|)} v(x)(Hf_t)^{q(x)}dx \\
&\geq \int_{B(0,\delta)\backslash B(0,|t|)} v(x)W(t)^{(1-\frac{1}{p(0)})q(x)}dx \\
&\geq C_{25}\int_{B(0,\delta)\backslash B(0,|t|)} v(x)W(t)^{q(0)/p'(0)}dx \\
&= C_{25}V_\delta(t)W(t)^{q(0)/p'(0)} \qquad (5.51)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle (5.12) koşulunu gerekliliği ispatlanmış olur. (5.13) koşulunu ispatlamak (5.11) koşulu test foksiyonuna uygulanırsa

$$f_t(x) = \left(\int_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)} \sigma ds\right)^{-1/p_\infty} \sigma(x)\chi_{B(0,t)\backslash B(0,N)}(x), \ |t| > N.$$

olduğu görülür. (5.3) koşulu için yeteri büyüklükte bir sayı N ve $t \in \mathbb{R}^n\backslash B(0,N)$ olsun. Buradan

$$Hf_t(x) = \frac{W_N(x)}{W_N(t)^{1/p_\infty}}\chi_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)}(x) + W_N^{1-1/p_\infty}(t)\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,|t|)}(x). \qquad (5.52)$$

olup (5.3) koşulundan

$$\begin{aligned}
I_p\left(\omega^{1/p}f_t\right) &= \int_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)} \sigma(x)^{p(x)}\omega(x)\left(\int_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)} \sigma dy\right)^{-p(x)/p_\infty} dx \\
&\leq C_{26}
\end{aligned}$$

olduğu ve

$$\begin{aligned}
I_q\left(v^{1/q}Hf_t\right) &\geq \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,\delta)} v(x)(Hf_t(x))^{q(x)}dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n\backslash B(0,|t|)} v(x)\left(\int_{B(0,|t|)\backslash B(0,N)} \sigma ds\right)^{q(x)/p'_\infty} dx \qquad (5.53)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (5.3) koşulu (5.53) eşitsizliğine uygulanırsa

$$I_q\left(v^{1/q}Hf_t\right) \geq C_{27}V(t)\left(\int_{B(0,|t|)\setminus B(0,N)} \sigma ds\right)^{q(x)/p'_\infty} = C_{27}V(t)W_N(t)^{q(x)/p'_\infty}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle Teorem 5.0.12 ispatlanmış olur. ■

6 UYGULAMALAR

Tanım 6.0.15 $\omega(x,\ r) : \Omega \times (0,\ \ell) \to [0,\ \infty)$ ve $\theta(r) : (0,\ \ell) \to [1,\ \infty]$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta(\cdot),\omega(\cdot)}(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta(\cdot),\omega(\cdot)}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \left\| \frac{\omega(x,r)}{r^{\frac{n}{p(x)}}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,r))} \right\|_{L^{\theta(\cdot)}(0,\ell)}$$

şeklinde normu sonlu olan fonksiyonların uzayıdır. Eğer $\theta(r) \equiv \infty$ ise $\mathcal{M}^{p(\cdot),\infty,\omega(\cdot)}(\Omega)$

$$\sup_{x\in\Omega, r\in(0,\ell)} \omega(x,\ r) r^{-\frac{n}{p(x)}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,r))} < \infty$$

şeklinde normu sonlu olan fonksiyonların uzayıdır. Buradan

$$\mathcal{M}^{p(\cdot),\infty,\omega(\cdot)}(\Omega) = \mathcal{M}^{p(\cdot),\frac{1}{\omega(\cdot)}}(\Omega)$$

dır.

Tanım 6.0.16 $\mathcal{P}^{\log} = \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ sembolü ile Ω üzerinde tanımlı ve x, y den bağımsız $A = A(p) > 0$ sabiti için

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{A}{-\ln|x-y|}, \qquad |x-y| \le \frac{1}{2} \ \ x, y \in \Omega \tag{6.1}$$

koşulunu sağlayan p fonksiyonlarının kümesini göstereceğiz. Eğer $\Omega = (0,\ \ell)$ ise $\mathcal{P}_0(0,\ \ell)$ sembolü ile $(0,\ \ell)$ üzerinde tanımlı $[1,\infty)$ değerli, sınırlı,

$$\theta(0) = \lim_{t\to 0} \theta(t)$$

olacak şekilde limiti var olan ve

$$|\theta(t) - \theta(0)| \le \frac{A}{\ln(1/t)},\ 0 < t \le \frac{1}{2}.$$

şartını sağlayan θ fonksiyonlarının kümesini göstereceğiz.

Ölçülebilir ve $[1,\infty]$ değerli ve

$$\theta \in L^{\infty}((0,\ \ell)\backslash E_{\infty}(\theta))$$

olan θ fonksiyonlarının kümesini $\mathbb{P}(0,\ \ell)$ ile göstereceğiz. Burada

$$E_\infty(\theta) = \{t \in (0,\ \ell) : \theta(t) = \infty\}$$

şeklindedir.

Tanım 6.0.17 Belirlenmiş $\delta \in (0,\ \ell)$ için

$$\inf_{x\in\Omega} \|\omega(x,\ \cdot)\|_{L^{\theta(\cdot)}(\delta,\ell)} > 0 \tag{6.2}$$

şartını sağlayan $(\theta,\ \omega)$ ikililerinin kümesini $\mathcal{W}(\delta,\ \ell)$ ile göstereceğiz.

Tezin bu bölümünde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir küme olmak üzere

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x,\ r)|^{-1} \int_{\overline{B}(x,r)} |f(y)|dy$$

şeklinde tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta(\cdot),\omega(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde sınırlılığını inceleyeceğiz.

Ayrıca,$f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ olsun ve p, (4.1) koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{p(x)}} \int_t^\ell r^{-\frac{n}{p(x)}-1} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,r))} dr \quad 0 < t < \delta \tag{6.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada C, f, $x \in \Omega$ ve t den bağımsızdır.(Sadece δ deltaya bağlıdır ve $\delta \to \ell$ iken C artar.).

$p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ olmak üzere eğer

$$\sup_{x\in\Omega} \|\omega(x,\ \cdot)\|_{L^{\theta(\cdot)}(0,\ell)} < \infty \tag{6.4}$$

koşulu sağlanır ve $(\theta,\ \omega) \in \mathcal{W}(\delta,\ \ell)$ olacak şekildeki bir $\delta \in (0,\ \ell)$ varsa

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}^{p(\cdot),\theta(\cdot),\omega(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega) \tag{6.5}$$

gömmeleri vardır.

Teorem 6.0.18 [6] $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ ve (4.1) koşulunu sağlasın. Ve

$$\begin{aligned} &1 < \theta_1^- \le \theta_1(t) \le \theta_1^+ < \infty, \ 0 < t < \ell, \\ &1 \le \theta_2^- \le \theta_2(t) \le \theta_2^+ < \infty, \ 0 < t < \ell. \end{aligned} \tag{6.6}$$

koşulları sağlansın.

$$\theta_1(t) \le \theta_2(t), \ t \in (0, \ \delta) \tag{6.7}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ ve

$$(\theta_1, \ \omega_1) \in \mathcal{U}'(\delta, \ \ell).$$

olsun. Bu durumda $\overline{\theta}_1(\xi) = \inf_{s \in (\xi, \ell)} \theta_1(s)$ olmak üzere

$$\sup_{x \in \Omega, 0 < t < \delta} \int_0^t \omega_2(x, \ \xi)^{\theta_2(\xi)} \Big(\int_t^\delta \frac{dr}{[r\omega_1(x, r)]^{[\overline{\theta}_1(\xi)]'}} \Big)^{\frac{\theta_2(\xi)}{[\overline{\theta}_1(\xi)]'}} d\xi < \infty \tag{6.8}$$

ise $\mathcal{M}^{p(\cdot), \theta_1(\cdot), \omega_{1(\cdot)}}(\Omega)$ uzayından $\mathcal{M}^{p(\cdot), \theta_2(\cdot), \omega_{2(\cdot)}}(\Omega)$ uzayına tanımılı M operatörü sınırlıdır.

İspat. $f \in \mathcal{M}^{p(\cdot), \theta_1(\cdot), \omega_{1(\cdot)}}(\Omega)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot), \theta_1(\cdot), \omega_{1(\cdot)}}(\Omega)} &\le \sup_{x \in \Omega} \left\| \frac{\omega_2(x, t)}{t^{\frac{n}{p(x)}}} \|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,t))} \right\|_{L^{\theta_2(\cdot)}(0, \delta)} \\ &\quad + \sup_{x \in \Omega} \Big\| \frac{\omega_2(x, t)}{t^{\frac{n}{p(x)}}} \|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,t))} \Big\|_{L^{\theta_2(\cdot)}(\delta, \ell)} \\ &=: I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{6.9}$$

elde edilir. I_2 için eşitsizlik (6.5) da belirtilen gömmeden elde edilir. Gerçekten, $(\theta_2, \ \omega_2)$ için (6.4) şartından

$$I_2 \le C \|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|\omega_2(x, \ \cdot)\|_{L^{\theta_2(\cdot)}(\delta, \ell)} \le C \|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

olduğu görülür ve

$$I_2 \le C \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

elde edilir. $p(x)$ log-Hölder koşulunu sağladığında değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Maksimal operatörün sınırlı olduğu göz önünde bulundurulursa

$$I_2 \le C \|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot), \theta_1(\cdot), \omega_{1(\cdot)}}(\Omega)}$$

elde edilir.

I_1 eşitsizliği için (6.3) ifadesi kullanılırsa

$$I_1 \leq C \sup_{x\in\Omega} \|\omega_2(x,\ t) \int_t^{\ell} r^{-\frac{n}{p(x)}-1} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,r))} dr\|_{L^{\theta_2(\cdot)}(0,\delta)} \tag{6.10}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi değişken üstlü Lebesgue uzaylarında bir boyutlu Hardy operatörünü kullanarak aradığımız eşitsizliği elde edelim. İntegrali $(0,\ \delta)$ ve $(\delta,\ \ell)$ iki parçaya ayıralım. $(\delta,\ \ell)$ aralığındaki intagral için yukarıda yaptığımız gibi eşitsizliği elde edebiliriz. $(0,\ \delta)$ aralığındaki integral için Hardy eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta_1(\cdot),\omega_1(\cdot)}(\Omega)} + C \sup_{x\in\Omega} \left\| \frac{\omega_1(x,t)}{t^{\frac{n}{p(x)}}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,t))} \right\|_{L^{\theta_1(\cdot)}(0,\delta)} \\ &\leq C\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta_1(\cdot),\omega_1(\cdot)}(\Omega)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle Teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 6.0.19 [6] $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ ve (4.1) koşulunu sağlasın. $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathcal{P}_0(0,\ \ell)$ ve $\omega_1,\ \omega_2$ (4.12) belirtildiği gibi olsun. Bu durumda

$$\gamma(0) > -\frac{1}{\theta_1(0)},\ -\frac{1}{\theta_1(0)} < \beta(0) \leq \gamma(0) \tag{6.11}$$

ve

$$\frac{1}{\theta_2(0)} = \frac{1}{\theta_1(0)} + \beta(0) - \gamma(0) \tag{6.12}$$

şartları sağlanırsa M maksimal operatörü $\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta_1(\cdot),\omega_{1(\cdot)}}(\Omega)$ uzayından $\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta_2(\cdot),\omega_{2(\cdot)}}(\Omega)$ uzayına sınırlı bir operatördür.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 6.0.18 ile benzerdir. ■

Teorem 6.0.20 [6] $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ ve (4.1) koşulunu sağlasın. $\theta \in \mathbb{P}(0,\ \ell)$ olsun. $(\theta,\ \omega_1) \in \mathcal{W}(\delta,\ \ell)$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı var ve

$$\sup_{x\in\Omega}\left\{\int_{(0,\delta)\setminus E_\infty(\theta)}\left[\omega_2(x,\ t)\int_t^\delta \frac{dr}{r\omega_1(x,r)}\right]^{\theta(t)} dt \right.$$

$$\left. + \sup_{t\in(0,\delta)\cap E_\infty(\theta)} \omega_2(x,\ t)\int_t^\delta \frac{dr}{r\omega_1(x,r)}\right\} < \infty. \tag{6.13}$$

sağlansın. Bu durumda M operatörü $\mathcal{M}^{p(\cdot),\infty,\omega_{1(\cdot)}}(\Omega)$ uzayından $\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta(\cdot),\omega_{2(\cdot)}}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $\|Mf\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta(\cdot),\omega_{2(\cdot)}}}$ normunun sınırlılığını göstermek için öncelikle (6.9) de yaptığımız gibi integrali iki parçaya ayıracağız. Böylelikle sadece $(0,\ \delta)$ aradığımız eşitsizliği elde ettiğimiz taktirde ispat tamamlanmış olacaktır. Buradan

$$\sup_{x\in\Omega}\left\|\frac{\omega_2(x,t)}{t^{\frac{n}{p(x)}}}\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,t))}\right\|_{L^{\theta(\cdot)}(0,\delta)}$$

$$\leq C\sup_{x\in\Omega}\left\|\omega_2(x,\ t)\int_t^\ell r^{-\frac{n}{p(x)}-1}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\overline{B}(x,r))}dr\right\|_{L^{\theta(\cdot)}(0,\delta)} \tag{6.14}$$

$$\leq C\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),\infty,\omega_{1(\cdot)}}}\left(1+\sup_{x\in\Omega}\left\|\omega_2(x,\ t)\int_t^\delta \frac{dr}{r^{\frac{n}{p(x)}+1}\omega_1(x,r)}dr\right\|_{L^{\theta(\cdot)}(0,\delta)}\right)$$

Gerçekten, birinci eşitsizlik (6.3) eşitsizliğinden elde edilir. (6.14) formülünde üçüncü satırda bulunan integrali $(\delta,\ \ell)$ ve $(0,\ \delta)$ üzerinde olmak üzere iki parçaya ayıralım. Birinci integral (6.10) eşitsizliğinde olduğu gibi elde edilir. Buradan, ikinci integralin sonlu olduğunu gösterirsek iddia ispatlanmış olacaktır. Tabi ki buradaki norm değişken üstlü Lebesgue uzayı $L^{\theta(\cdot)}$ normudur ve bu normun sonlu olması için gerekli ve yeterli koşulun (6.13) koşulu olduğu bilinmektedir. Böylelikle de ispat tamamlanır. ■

KAYNAKLAR

[1] M. Balcı, *Reel Analiz*, Balcı Yayıncılık, Ankara, 2005.

[2] B. Çekiç, *Değişken Üstlü Lebesgue ve Sobolev Uzaylarında Gömme Tipi Eşitsizlikler*, Doktora tezi, Diyarbakır, 2005.

[3] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Råžička, *Lebesgue and Sobolev space with variable exponents*, Springer, 2011.

[4] L. Diening, S. Samko, *Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal. 10 (1) 2007.

[5] X. L. Fan, D. Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, J. Math. Anal. Appl. 263, 2001.

[6] V. S. Guliyev, J.J. Hasanov, S. G. Samko, *Boundedness of maximal, potential type and singular integral operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces*, J. Math. Sci., 170 (4), 2010.

[7] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Koskenoja, *Hardy's inequality in variable exponent Sobolev spaces*, Georgian Math. J.,12 (3), 2005

[8] O. Kováčik, J. Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$*. Czechoslovak Math. J.,41 (116), 1991.

[9] A. Kufner, L. Maligranda, L.E. Persson, *The prehistory of Hardy inequality,*The Amer. Math. Monthly ,113 (8), 2006.

[10] A. Kufner,L. E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type*, World Scientific Publishing Co., London-2003.

[11] S. Lu, Y. Ding,D. Yan, *Singular İntegrals and Related Topics*, World Sci. Pub., Beijing, 2007.

[12] F.I. Mamedov, A. Harman, *On a weighted inequality of Hardy type in spaces $L^{p(\cdot)}$*, J. Math. Anal. Appl. 353, 2009.

[13] R. Mashiyev, B. Cekic, F.I. Mamedov, S. Ogras, *Hardy's inequality in power-type weighted* $L^{p(x)}(0, \infty)$, J. Math. Anal. Appl. 334 (1), 2007.

[14] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[15] S. G. Samko, *Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal. 6 (4) , 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Nurullah YILMAZ
Doğum Tarihi	:	01.01.1989
Doğum Yeri	:	Ankara
Ünvanı	:	Yüksek Lisans Öğrencisi
Anabilim Dalı	:	Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Eğitim

Orta Öğrenimi	:	Mustafa Hakan Güvençer Anadolu Lisesi, 2002-2006.
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2006-2010.
Yüksek Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bilim Dalı, 2010-