T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK KESİŞİMSEL VE ESNEK BİRLEŞİMSEL CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE

Melike GÜVEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2022

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK KESİŞİMSEL VE ESNEK BİRLEŞİMSEL CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE

Melike GÜVEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

KIRŞEHİR / 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Melike GÜVEN

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-nin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması süresince değerli bilgilerini benden esirgemeyen, karşılaştığım tüm zorluklarda yardımcı olan sayın hocam Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans eğitimime başladığım günden itibaren bana desteklerini esirgemeyen Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik Bölümü tüm öğretim üyelerine teşekkür ederim. Bana verdikleri sevgi ve emekle hayatım boyunca güçlü durmamı sağlayan anne ve babama, bana destek ve motivasyon sağlayan tüm sevdiklerime sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2022 Melike GÜVEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

(F,A), F_A	: Esnek küme
$[F,A]$	: Esnek matris
$\wedge$	: Ve çarpım işlemi
$\vee$	: Veya çarpım işlemi
$\widetilde{\cup}$	: Esnek birleşim işlemi
$\cup_R$	: Kısıtlanmış esnek birleşim işlemi
$\widetilde{\cap}$	: Esnek kesişim işlemi
$\sqcap_{\varepsilon}$	: Genişletilmiş esnek kesişim işlemi
$\sim_R$	: Esnek kısıtlanmış fark işlemi
$(F,A)^c$, (F^c,A)	: Esnek kümenin tümleyeni
Φ_A	: Esnek boş küme
$\widetilde{\subseteq}$	: Esnek alt küme
$S(U)$	: U evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek kümeler
$SM(U)$	: U evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek matrisler
$\curlywedge$	: Genelleştirilmiş Ve-Çarpımı
$\curlyvee$	: Genelleştirilmiş Veya-Çarpımı
$\bar{\curlywedge}$	: Genelleştirilmiş Ve-Değil-Çarpımı
$\underline{\curlyvee}$	: Genelleştirilmiş Veya-Değil-Çarpımı
$\underline{\curlywedge}$	: Kısıtlandırılmış-Ve Çarpımı
$(F,A)^{\supseteq\alpha}$	: (F,A)'nın *üst* α- *içeren* kümesi
$(F,A)^{\subseteq\alpha}$	: (F,A)'nın *alt* α- *içeren* kümesi

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK KESİŞİMSEL VE ESNEK BİRLEŞİMSEL CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE

Melike GÜVEN

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, esnek küme hakkında literatürde yapılmış olan çalışmalar tanıtılmıştır. İkinci bölümde, ileriki bölümde gerekli olan temel tanımlar ile esnek kesişimsel halkalar ve uygulamalarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise, esnek kesişimsel ve esnek birleşimsel alt uzayların tanımları, α içeren yapıları ve özellikleri ayrıca lineer dönüşüm altında özellikleri ile ilgili kavramlar incelenmiştir.

Haziran 2022, 53 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Esnek Küme, Esnek Alt Uzay, Esnek Kesişimsel Alt Uzay, Esnek Birleşimsel Alt Uzay

ABSTRACT

MSc THESIS

ON SOFT INTERSECTION AND SOFT UNION ALGEBRAIC STRUCTURES

Melike GÜVEN

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

This thesis consists of three main sections. In the first section, the studies on the soft set in the literature are introduced. In the second section, the basic definitions required in the next section with soft intersection rings and their applications are given. In the third section, the definitions of soft intersection and soft union subspaces, their α-containing structures with properties, furthermore the concepts related to properties under linear transformations are examined.

Jun 2022, 53 Pages.

Keywords: Soft Set, Soft Subspace, Intersection Soft Subspace, Union Soft Subspace

1. GİRİŞ

Kesin olmayan bilgi modellemesinin karmaşıklığı klasik yöntemlerle başarılı bir şekilde çözümlenememektedir. Kesin olmayan bilgilerin tanımlanmasında olasılık teorisi, bulanık küme teorisi (Fuzzy sets), kaba küme teorisi (Raugh sets), muğlak küme teorisi (Vogue sets) ve aralık matematiği (interval math) kullanışlı yaklaşımlardır fakat bu teorilerde kendi iç dinamikleri kaynaklı dezavantajlar bulunmaktadır. Molodtsov [18] 1999 yılında esnek küme teorisi (soft set theory) ismini verdiği yaklaşımla, belirsizliklerin modellenmesinde, parametrelenmiş kümelerin kullanıldığı yeni ve kullanışlı bir matematiksel yöntem ortaya koymuştur. Bu teori; gerek kendi başına gerekse diğer belirsizlik modelleme yöntemleriyle birleştirilerek elde edilen hibrit yapılar kullanılarak, bilgi sistemleri, karar verme problemleri ve optimizasyon teorisi gibi belirsizlik içeren birçok alana uygulanmıştır.
Esnek küme teorisinin, gerek teorik gerekse uygulama da çok çeşitli çalışma alanları bulunmaktadır. Esnek karar verme [14], [16], [19] esnek kümelerin teorik çalışması [2] ve bulanık esnek kümeler [4], [6], [7], [13] bunlardan birkaçıdır. Maji ve ark. [15] ve Ali ve ark. [2] çalışmalarında esnek kümelerin çeşitli işlemlerini tanımladığından beri, esnek küme teorisinin cebirsel yapıları üzerine çalışmalar da hız kazanmıştır. Aktaş ve Çağman [3] esnek küme teorisinde, esnek işlemleri baz alarak bazı temel yapıları ve cebirsel yapılara araştırmacıların ilgisini çeken, esnek grup kavramını tanımlamışlardır. Feng ve ark. [10] esnek yarı halkaları, Sun ve ark. [16] esnek modülleri, Acar ve ark. [1] esnek halkaları ve Jun ve ark. [11, 12, 13, 14] esnek cebirleri tanımlamış ve çeşitli özellikleri ve cebirsel ilişkileri elde etmişlerdir. Esnek küme teorisinde, Çağman ve Enginoğlu [5] esnek kümelerde bazı işlemleri yeniden tanımlamış ve bu sayede Çağman ve ark. [8] kapsama bağıntısı ve kümelerin kesişimlerini baz alarak esnek kesişimsel grup kavramını tanıtmışlardır.

Çıtak ve Çağman [9], esnek kesişimsel grup yapısını halka yapısına taşımak suretiyle, yeni bir esnek halka çeşidi olan ve ilk olarak Atagün ve Sezgin [22] tarafından tanıtılan esnek kesişimsel halka kavramını detaylı olarak incelemiştir. Bu yeni esnek kesişimsel halka tanımına bağlı olarak esnek kesişimsel alt halka esnek kesişimsel ideal kavramları tanıtılmış ve aynı zamanda iki esnek küme arasında toplama, fark ve çarpım işlemleriyle, bir esnek kümenin negatifi tanımlanmış ve esnek idealle ilişkili olarak bunların özellikleri çalışılmıştır.

Bu tezin ikinci bölümünde [9], üçüncü bölümünde ise [25] makaleleri detaylı olarak incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde yapılan çalışmalarda kullanılacak esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca esnek matrisler ve esnek kümeler birbiri yerine kullanılabildiği için esnek matrisler ve literatürde sık kullanılan işlemleri de eklenmiştir. İlk olarak, Molodtsov [18] tarafından bilim dünyasına kazandırılan esnek küme kavramı için, genel olarak, U bir başlangıç evrensel küme ve E parametrelerin kümesi olmak üzere $P(U)$, U'nun kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ alınacaktır. Burada $A \subseteq E$, tüm parametreler içinden araştırmacının seçtiği parametrelerden oluşan A kümesi anlamı taşır.

Tanım 2.1. (Molodtsov, [18]) U üzerinde bir (F, A) esnek kümesi,

$$F : A \longrightarrow P(U)$$

fonksiyonuyla tanımlanır. Dolayısıyla (F, A),

$$(F, A) = \{(x, F(x)) \mid x \in A, F(x) \in P(U)\}$$

sıralı ikililerin kümesi şeklinde de ifade edilebilir.

U kümesi üzerinde bir kısıtlama yoktur. Dolayısıyla, araştırma alanına göre seçim yapma imkanı tanıması, esnek küme teorisini diğer teorilerden pozitif ayırmaktadır. Eğer uygulamaya yönelik bir çalışma isteniyorsa, U olabilecek tüm alternatifler olarak alınabilir veya cebirsel bir çalışma varsa, U bir cebir yapısı olarak alınabilir. Benzer şekilde E parametre kümesi de üzerinde çalışılan probleme göre seçilebildiğinden, araştırma alanını çok genişleten bir teori ortaya çıkmaktadır. Tanım 2.1. [9] çalışmasında aşağıdaki şekilde yeniden yorumlanmıştır.

Tanım 2.2. (Çağman ve Enginoğlu, [5] U üzerinde A parametresine bağlı, $x \notin A$ ise $F(x) = \emptyset$ olmak üzere $F_A = \{(x, F_A(x)) : x \in E, F_A(x) \in P(U)\}$ ile verilir.

Gösterim 2.3. Genel kullanıma uygun olarak, bundan böyle $S(U)$ ile U evrensel kümesi üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi belirtilecektir.

Ayrıca, Atagün ve Aygün [20], $S(U)$ kümesini kendi başına grup yapısına taşıyan iki farklı işlemi tanıtmış ve bu iki grubun birbirlerine izomorf olduklarını ispatlamıştır. Dolayısıyla, şimdiye kadar esnek küme teorisi kullanılarak yapılan cebirsel yapılar üç kategoride toplanabilir. Bunlar: Esnek kümelerle inşa edilen cebirsel yapılar, esnek cebirsel yapılar ve cebirsel yapılar üzerinde esnek kümelerdir. Bu çalışmada, cebirsel yapılar üzerinde esnek kümeler ele alınmıştır. Esnek kümeler, bir fonksiyon yardımıyla parametrelenmiş kümeler olduğundan, çok sayıda esnek işlem tanımı bulunmaktadır. Bu bölümde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan esnek işlemlere yer verilmiştir. Bu bölümün son kısımlarında verilen esnek matris işlemleri ise, esnek kümelerdeki işlemlerle elde edilen sonuçların, esnek matrislerde de görülebilir olması nedeniyle, bu çalışmayı esnek matrisler üzerinde görmek isteyen araştırmacılar için bir ön bilgi niteliğinde verilmiştir.

Tanım 2.4. (Çağman ve Enginoğlu, [5]) (F,A) ve (F,B), U üzerinde esnek kümeler ve $A,B \subseteq E$ parametreler kümesi olsun. Eğer $\forall x \in E$ için $F_A(x) \subseteq F_B(x)$ ise (F,A), (F,B)'nin esnek alt kümesidir denir ve $(F,A) \tilde{\subseteq} (F,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. (Çağman ve Enginoğlu, [5]) (F,A) ve (F,B), U üzerinde esnek kümeler ve $A,B \subseteq E$ parametreler kümesi olsun. Eğer $\forall x \in E$ için $F_A(x) = F_B(x)$ ise (F,A) ile (F,B) eşit esnek kümelerdir ve $(F,A)\tilde{=}(F,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. (Maji ve ark., [15]) (F,A) ve (G,B), U üzerinde esnek kümeler olsun. "(F,A) VE (G,B)" esnek kümesi,
$(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B) \ni \forall (x,y) \in A \times B$ için $H(x,y) = F(x) \cap G(y)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.7. (Maji ve ark., [15]) (F,A) ve (G,B), U üzerinde esnek kümeler olsun. "(F,A) VEYA (G,B)" esnek kümesi, $(F,A) \vee (G,B) = (H, A \times B) \ni \forall (x,y) \in A \times B$ için $H(x,y) = F(x) \cup G(y)$ şeklinde tanımlanır.

Esnek kümelerde, klasik matematikten farklı olarak, birden çok sayıda kesişim, birleşim vb. işlemler tanımlanabilir. Bu çeşitli tanımlar, probleme göre işlem seçmeye olanak sağlamaktadır.

Tanım 2.8. (Maji ve ark., [15]) (F,A) ve (G,B), U üzerinde esnek kümeler olsun.
$C = A \cup B$ olmak üzere (F,A) ve (G,B)'nin genişletilmiş esnek birleşimi (H,C), $\forall x \in C$ için

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in A \setminus B \\ G(x) & , x \in B \setminus A \\ F(x) \cup G(x) & , x \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(F, A)\widetilde{\cup}(G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9. (Ali ve ark., [2]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. (F, A) ve (G, B)'nin kısıtlanmış birleşimi (H, C) olmak üzere $\forall x \in C = A \cap B$ için $H(x) = F(x) \cup G(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A) \cup_R (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10. (Ali ve ark., [2]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. (F, A) ve (G, B)'nin kısıtlanmış kesişimi (H, C) olmak üzere $\forall x \in C = A \cup B$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A) \cap_R (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.11. (Pei ve Miao, [24]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler olsun. (F, A) ve (G, B)'nin esnek kesişimi (H, C) olmak üzere $\forall x \in C = A \cap B$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A)\widetilde{\cap}(G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.12. (Ali ve ark., [2]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler olsun.
$C = A \cup B$ olmak üzere (F, A) ve (G, B)'nin genişletilmiş kesişimi (H, C), $\forall x \in C$ için,

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in A \setminus B \\ G(x) & , x \in B \setminus A \\ F(x) \cap G(x) & , x \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(F, A) \sqcap_\varepsilon (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.13. (Ali ve ark., [2]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. (F, A) ve (G, B)'nın kısıtlanmış farkı (H, C) olmak üzere $\forall x \in C = A \cap B$ için $H(x) = F(x) \setminus G(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A) \sim_R (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. (Ali ve ark., [2]) $(F, A), U$ üzerinde esnek küme olsun. (F, A) esnek kümesinin tümleyeni $\forall x \in A$ için $F^c(x) = U \setminus F(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A)^c = (F^c, A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.15. (Maji ve ark., [15]) (F, A), U üzerinde esnek bir küme olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = \emptyset$ ise (F, A) esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ_A ile gösterilir.

Tanım 2.16. (Maji ve ark., [15]) (F, A), U üzerinde esnek bir küme olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = U$ ise (F, A) esnek kümesine mutlak esnek küme denir.

Aşağıdaki tanımla, bir esnek kümeyi matris formunda ifade etmek mümkün olmaktadır. Dolayısıyla, yüksek sayıda eleman içeren esnek kümelerle işlem yapmak yerine, bunların matris karşılıklarını ifade ederek, sonuçların ve hesaplamaların bilgisayar ortamına taşınması olanağına sahip olunmuştur. Klasik matematikten bildiğimiz, bir kümenin karakteristik fonksiyonu yardımıyla da aşağıdaki tanım verilebilir. Bunun için detaylı bilgi [5] çalışmasında bulunur.

Tanım 2.17. (Çağman ve Enginoğlu, [5]) $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $A \subseteq E$ ve (F, A), U üzerinde bir esnek küme olsun. O zaman

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ , u_i \in F(e_j) \\ 0 \ , u_i \notin F(e_j) \end{cases}$$

olmak üzere;

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

matrisine, U üzerinde tanımlı (F, A) esnek kümesine karşılık gelen esnek matris denir. Buna göre, bir esnek küme ile buna karşılık gelen esnek matris karşılıklı olarak ifade edilir.

Gösterim 2.18. $SM(U)$, $S(U)$ kümesinin elemanlarına karşılık gelen tüm esnek matrislerin kümesini belirtir.

Örnek 2.19. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin kümesi olsun. $A = \{e_1, e_3, e_5\}$ ve $F : A \longrightarrow P(U)$, $F(e_1) = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}$, $F(e_3) = \{u_3\}$, $F(e_5) = \emptyset$ ise bu esnek küme

$$(F, A) = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_4, u_6\}), (e_3, \{u_3\}), (e_5, \emptyset)\}$$

şeklinde yazılır. O zaman (F, A) esnek kümesine karşılık gelen $[a_{ij}] \in SM_{6\times 5}$ esnek matrisi ise,

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.20. (Çağman ve Enginoğlu, [5]) $[a_{ij}]$,$[b_{ij}] \in SM_{n\times m}$ olsun. O zaman

1. $[a_{ij}]$ matrisi, eğer $\forall\, i, j$ için $a_{ij} = 0$ sağlanıyorsa, sıfır esnek matris olarak adlandırılır ve $[0]$ ile gösterilir.
2. $[a_{ij}]$ matrisi, eğer $\forall\, i, j$ için $a_{ij} = 1$ sağlanıyorsa, evrensel esnek matris olarak adlandırılır ve $[1]$ ile gösterilir.
3. $\forall\ i, j$ için $a_{ij} \leq b_{ij}$ ise $[a_{ij}]$ matrisine $[b_{ij}]$ matrisinin esnek alt matrisi denir ve $[a_{ij}]\tilde{\subseteq}[b_{ij}]$ ile gösterilir.
4. $\forall\, i, j$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ matrislerine esnek eşit matrisler denir ve $[a_{ij}]\tilde{=}[b_{ij}]$ ile gösterilir.
5. $\forall\, i, j$ için c_{ij} =maks$\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise $[c_{ij}]$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ esnek matrislerinin birleşimi denir ve $[c_{ij}]$=$[a_{ij}]\ \tilde{\cup}\ [b_{ij}]$ ile gösterilir.
6. $\forall\, i, j$ için $c_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise $[c_{ij}]$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ esnek matrislerinin kesişimi denir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}]\tilde{\cap}[b_{ij}]$ ile gösterilir.
7. $\forall\, i, j$ için $c_{ij} = 1 - a_{ij}$ ise $[c_{ij}]$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ esnek matrisinin tümleyeni denir ve $[c_{ij}]$=$[a_{ij}]^c$ ile gösterilir.

İşlem hızını artırmak ve dolayısıyla araştırma için harcanan emek ve zamanı minimuma indirmek için, esnek kümelerde parametre indirgeme, parametre birleştirme veya alternatifleri indirgeme metodları kullanılmaktadır. Aşağıdaki tanımla, kullanılmayan parametreleri işlem yükünden çıkarmak için bir yöntem verilmiştir.

Tanım 2.21. (Atagün ve diğ., [21]) $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $A \subseteq E$ ve $1 \leq s \leq m$ olmak üzere A nın eleman sayısı (kardinalitesi) $|A| = s$ olsun. O zaman

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ , } e_j \in A \text{ ve } u_i \in F(e_j) \\ 0 \text{ , } e_j \in \text{A ve } u_i \notin F(e_j) \end{cases}$$

olacak şekildeki $[a_{ij}]$ matrisine U üzerinde (F, A) esnek kümesinin indirgenmiş esnek matrisi denir.

Başka bir ifadeyle, eğer $e_j \notin A$ ise $F(e_j) = \emptyset$ olduğundan, (F, A) esnek kümesinde, $E - A$ kümesinin parametreleri elenmek suretiyle, (F, A) esnek kümesine karşılık gelen indirgenmiş esnek matris bulunabilir ve daha az sayıda bileşen içeren bu esnek matrisin tipi $n \times s$ olacaktır.

Eğer $A = E$ ise, aşikar olarak (F, A) ya karşılık gelen indirgenmiş esnek matris ile (F, A) nın esnek matrisi eşittir.

Örnek 2.22.

$$(F, A) = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_4, u_6\}), (e_3, \{u_3\}), (e_5, \emptyset)\}$$

esnek kümesinin

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

esnek matrisini göz önüne alınsın. (F, A) ya karşılık gelen indirgenmiş esnek matris, $[a_{ij}] \in SM_{6\times 3}$ ve

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Aşağıda verilen tanım ve teoremlerde, $|U| = n$ ve tüm esnek matrisler yerine indirgenmiş esnek matrisler kullanılacaktır. Bu kısımda, (F, A),$(G, B) \in S(U)$ esnek kümelerine karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler, sırasıyla $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ ile gösterilecektir. Esnek matris çarpımları, genel kullanım itibariyle, satır çarpımları ve sütun çarpımları olarak ikiye ayrılabilir. Burada sütun çarpımlarına ait dört tanım sunulmuştur:

Tanım 2.23. (Atagün ve diğ., [21]) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Genelleştirilmiş Ve-Çarpımı $\curlywedge$ ile gösterilir ve

$$\curlywedge : SM_{n\times s} \times SM_{n\times t} \longrightarrow SM_{n\times st}$$

$$([a_{ij}], [b_{ik}]) \longrightarrow [a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

$c_{ip} = min\{a_{ij}, b_{ik}\}$ öyle ki $j = \beta$, $p = (\beta - 1)t + k$, burada β, $p \leq \beta t$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.24. (Atagün ve diğ., [21]) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Genelleştirilmiş Veya-Çarpımı $\curlyvee$ ile gösterilir ve

$$\curlyvee : SM_{n\times s} \times SM_{n\times t} \longrightarrow SM_{n\times st}$$

$$([a_{ij}], [b_{ik}]) \longrightarrow [a_{ij}] \curlyvee [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

$c_{ip} = max\{a_{ij}, b_{ik}\}$ öyle ki $j = \beta$, $p = (\beta - 1)m_2 + k$, burada β, $p \leq \beta t$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.25. (Atagün ve diğ., [21]) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Genelleştirilmiş Ve-Değil-Çarpımı $\bar{\curlywedge}$ ile gösterilir ve

$$\bar{\curlywedge} : SM_{n\times s} \times SM_{n\times t} \longrightarrow SM_{n\times st}$$

$$([a_{ij}], [b_{ik}]) \longrightarrow [a_{ij}]\bar{\curlywedge}[b_{ik}] = [c_{ip}]$$

$c_{ip} = min\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ öyle ki $j = \beta$, $p = (\beta - 1)t + k$, burada β, $p \leq \beta t$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.26. (Atagün ve diğ., [21]) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Genelleştirilmiş Veya-Değil-Çarpımı $\underline{\curlyvee}$ ile gösterilir ve

$$\underline{\curlyvee} : SM_{n\times s} \times SM_{n\times t} \longrightarrow SM_{n\times st}$$

$$([a_{ij}], [b_{ik}]) \longrightarrow [a_{ij}]\underline{\curlyvee}[b_{ik}] = [c_{ip}]$$

$c_{ip} = max\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ öyle ki $j = \beta$, $p = (\beta - 1)t + k$, burada β, $p \leq \beta t$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Yukarıda verilen genelleştirilmiş çarpım tanımlarından uygun olan, üzerinde çalışılan problemin içeriğine göre seçilir. Örneğin, bir karar verme probleminde iki karar verici arasında olumluları belirleyen ve/veya olumsuzları eleyen bir bakış açısıyla çalışılması halinde uygun olan işlem seçilir. Eğer her iki karar verici de olumlu alternatifleri seçiyor ve ortak sonuç aranıyorsa genelleştirilmiş ve çarpımı uygundur. Eğer karar vericiler olumsuz alternatifleri elemek istiyor ve çözüm olarak çok sayıda sonuç görmek istiyorlarsa genelleştirilmiş veya-değil çarpımı daha uygun olur.

Örnek 2.27. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ ve $B = \{e_1, e_2, e_4\}$ olsun. Daha sonra,
$(F, A) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_3, U), (e_5, \{u_1\})\}$ ve
$(F, B) = \{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_4\}), (e_4, \{u_1, u_2, u_3\})\}$ esnek kümeleri ele alınsın. Aşağıdaki $[a_{ij}] \in SM_{4\times 4}$ ve $[b_{ik}] \in SM_{4\times 3}$ sırasıyla (F, A) ve (F, B) esnek kümelerinin esnek matrisleridir.

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin Genelleştirilmiş Ve-Çarpımı

$$[a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}] = [c_{ip}] = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve görüldüğü gibi $[c_{ip}]$ 4×12 tipinde esnek matristir. Dikkat edilirse, bu çarpımlarda herbir parametreye ait sütunlar, karşılıklı olarak işleme girmektedirler, yani ilk esnek kümedeki 1. parametre, sırasıyla ikinci esnek kümede ki 1., 2., ... parametrelerle etkileşime girerler. Dolayısıyla bu çarpım tanımları özellikle karar verme problemlerinin çözümlerinde çok kullanışlıdırlar.

Genelleştirilmiş çarpımların aşağıdaki özellikleri mevcuttur.

Teorem 2.28. (Atagün ve diğ., [21]) Genelleştirilmiş Ve-Çarpım birleşme özelliğine sahiptir. Yani, $[a_{ij}] \in SM_{n\times s}$, $[b_{ik}] \in SM_{n\times t}$ ve $[c_{il}] \in SM_{n\times r}$ ise

$$([a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}]) \curlywedge [c_{il}] = [a_{ij}] \curlywedge ([b_{ik}] \curlywedge [c_{il}])$$

dir.

Teorem 2.29. (Atagün ve diğ., [21]) Genelleştirilmiş Veya-Çarpım birleşme özelliğine sahiptir. Yani, $[a_{ij}] \in SM_{n\times s}$, $[b_{ik}] \in SM_{n\times t}$ ve $[c_{il}] \in SM_{n\times r}$ ise

$$([a_{ij}] \curlyvee [b_{ik}]) \curlyvee [c_{il}] = [a_{ij}] \curlyvee ([b_{ik}] \curlyvee [c_{il}])$$

dir.

Burada dikkat edilmesi gereken hususlardan birisi, bu çarpımların değişme özelliği olmamasıdır. Dolayısıyla, parametrelerin etkileşimi sağlanırken, işlemlerin iki yönlü yapılması ve bu şekilde bir sonuca ulaşılması doğru sonuca yakınlaşmayı sağlayacaktır. Bununla ilgili detaylı bilgi için [21] önerilmektedir.

Lemma 2.30. (Kamacı ve diğ., [23]) $[a_{ij}] \in SM_{n\times s}$, $[b_{ik}] \in SM_{n\times t}$ olsun. O zaman $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $min\{a_{ij}, b_{ik}\} = a_{ij}b_{ik}$ dir.

İspat. $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin bileşenleri 0 ve 1 den ibaret olduğu için ispat açıktır. ■

Gösterim 2.31. $[a_{ij}] \in SM_{n\times m}$ olsun. $[a_{ij}]$'nin i.satırındaki değerlerin toplamı $v_i([a_{ij}])$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem, özellikle karar verme veya benzerlik problemlerinde ağırlık hesabı için kullanışlıdır.

Teorem 2.32. (Kamacı ve diğ., [23]) $[a_{ij}] \in SM_{n\times s}$ ve $[b_{ik}] \in SM_{n\times t}$ olsun. Eğer $[a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}] = [c_{ip}]$ ise o zaman $v_i(a_{ij})v_i(b_{ik})$=$v_i(c_{ip})$ dir.

İspat. $[a_{ij}] \in SM_{n\times s}$, $[b_{ik}] \in SM_{n\times t}$ ve $[c_{ip}]$=$[a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}]$ olsun. $[c_{ip}] \in SM_{n\times st}$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
v_1([c_{ip}]) \sum_{p=1}^{st} c_{1p} =& c_{11} + c_{12} + \cdots + c_{1(st)} \\
=& \min\{a_{11}, b_{11}\} + \min\{a_{11}, b_{12}\} + \cdots + \min\{a_{11}, b_{1t}\} \\
& + \min\{a_{12}, b_{11}\} + \min\{a_{12}, b_{12}\} + \ldots + \min\{a_{12}, b_{1t}\} \\
& + \ldots + \min\{a_{1s}, b_{11}\} + \min\{a_{1s}, b_{12}\} + \ldots + \min\{a_{1s}, b_{1t}\} \\
=& a_{11}b_{11} + a_{11}b_{12} + \ldots + a_{11}b_{1t} + a_{12}b_{11} + a_{12}b_{12} \\
& + \ldots + a_{12}b_{1t} + \ldots + a_{1s}b_{11} + a_{1s}b_{12} + \ldots + a_{1s}b_{1t} \\
=& a_{11}(b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1t}) + a_{12}(b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1t}) \\
& + \ldots + a_{1s}(b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1t}) \\
=& (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1s}) + (b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1t}) \\
=& \sum_{j=1}^{s} a_{1j} + \sum_{k=1}^{t} b_{1k} = v_1([a_{ij}])v_1([b_{ik}])
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $i = 2, \ldots, n$ için $v_i([a_{ij}])v_i([b_{ik}])$=$v_i([c_{ip}])$ dir. ■

2.1. ESNEK KESİŞİMSEL HALKALAR

Bu bölüm, tamamen Filiz Çıtak ve Naim Çağman'ın [9] makalesinden yararlanılarak oluşturulmuştur. Bu bölüm boyunca R toplamsal birim elemanı 0_R olan bir halka olarak kabul edilir. R bir bölümlü halkaysa (division ring) bu durumda R nin çarpımsal elemanı 1_R ile gösterilir. Temel kavramlar kısmında belirtildiği gibi, şimdiye kadar esnek küme teorisi kullanılarak yapılan cebirsel yapılar üç kategoride toplanabilir: Esnek kümelerle inşa edilen cebirsel yapılar, esnek cebirsel yapılar ve cebirsel yapılar üzerinde esnek kümelerdir. Burada, üçüncü kısımda, yani bir halka yapısı üzerinde esnek küme yapısı inşa edilerek çalışılmıştır. Dolayısıyla, bu çalışma, klasik matematik ve esnek kümeler teorisi arasında bir köprü görevi görmektedir.

Tanım 2.33. R, " $+$ ", "." ikili işlemlerine göre bir halka ve $h_R \in S(U)$ olsun. h_R, U üzerinde " $+$ " işlemine göre esnek kesişimsel grup ise ve h_R, U üzerinde "." işlemine göre bir esnek kesişimsel grupoid ise, h_R ye U üzerinde esnek kesişimsel halka denir.

Teorem 2.34. R bir halka ve $h_R \in S(U)$ olsun. Bu durumda h_R nin U üzerinde esnek kesişimsel halka olması için gerek ve yeter şart $\forall u, v \in R$ için

(i) $h_R(u - v) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$

(ii) $h_R(uv) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. h_R, U üzerinde bir esnek kesişimsel halka olsun. Bu durumda $h_R(u + v) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$ ve $h_R(-u) = h_R(u)$ dir. Bundan dolayı, $h_R(u - v) \supseteq h_R(u) \cap h_R(-v) = h_R(u) \cap h_R(v)$ sonucuna ulaşılır. Ayrıca h_R, U üzerinde esnek kesişimsel grupoid olduğundan dolayı $h_R(uv) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$ elde edilir. Şimdi diğer taraftan $\forall u, v \in R$ için $h_R(u - v) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$ ve $h_R(uv) \supseteq h_R(v)$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. $u = 0_R$ seçildiğinde $\forall v \in R$ için $h_R(0_R - v) = h_R(-v) \supseteq h_R(v)$ ve $h_R(v) = h_R(-(-v)) \supseteq h_R(-v)$ dir. Böylece $\forall u \in R$ için $h_R(-u) = h_R(u)$ elde edilir. Ayrıca $h_R(u + v) = h_R(u - (-v)) \supseteq h_R(u) \cap h_R(-v) = h_R(v) \cap h_R(u)$ dir. Bu nedenle, h_R, U üzerinde esnek kesişimsel halkadır.

■

Tanım 2.35. R bir halka ve h_R esnek alt halkası olsun.

$\forall u, v \in R$ için $h_R(uv) \supseteq h_R(v)$ ise h_R, R nin sol esnek kesişimsel ideali olarak adlandırılır.

$\forall u, v \in R$ için $h_R(uv) \supseteq h_R(u)$ ise h_R, R nin sağ esnek kesişimsel ideali olarak adlandırılır.

h_R, R nin U üzerinde sağ ve sol esnek kesişimsel ideali ise h_R ye R nin U üzerinde esnek kesişimsel ideali denir.

Teorem 2.36. R bir halka ve $h_R \in S(U)$ olsun. Bu durumda h_R nin U üzerinde esnek kesişimsel ideal olması için gerek ve yeter şart $\forall u, v \in R$ için

(i) $h_R(u - v) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$

(ii) $h_R(uv) \supseteq h_R(u) \cup h_R(v)$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. Bu durumda (i) ve (ii) şartları Tanım 2.35. den açıktır.

Tersine, $\forall u, v \in R$ için $h_R(u - v) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$ ve $h_R(uv) \supseteq h_R(u) \cup h_R(v)$ olduğu kabul edilsin. Böylece

$h_R(uv) \supseteq h_R(u) \cup h_R(v) \supseteq h_R(u)$

$h_R(uv) \supseteq h_R(u) \cup h_R(v) \supseteq h_R(v)$ ve

$h_R(uv) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$ olur. Buradan, h_R, U üzerinde esnek kesişimsel idealdir. ■

Önerme 2.37. h_R, U üzerinde $\forall u \in R$ için esnek kesişimsel halka (esnek kesişimsel ideal) ise o zaman $h_R(0_R) \supseteq h_R(u)$ olur.

İspat. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel halka (esnek kesişimsel ideal) olsun. Bu durumda, $\forall u \in R$ için $h_R(0_R) = h_R(u - u) \supseteq h_R(u) \cap h_R(u) = h_R(u)$ elde edilir. ■

Önerme 2.38. R birimli halka olsun. h_R, U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal ise $\forall u \in R$ için $h_R(u) \supseteq h_R(1_R)$ dir.

İspat. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. Buradan, $\forall u \in R$ için
$h_R(u) = h_R(u1_R) \supseteq h_R(1_R)$ dir. ■

Teorem 2.39. R bir bölümlü (division) halka ve $h_R \in S(U)$ olsun. h_R nin U üzerinde esnek kesişimsel ideal olması için gerek ve yeter şart $\forall 0_R \neq u \in R$ için $h_R(u) = h_R(1_R) \subseteq h_R(0_R)$ dır.

İspat. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. $\forall u \in R$ için
$h_R(0_R) \supseteq h_R(u)$ olduğundan özel olarak $h_R(0_R) \supseteq h_R(1_R)$ sağlanır. Şimdi, $0_R \neq u \in R$ olsun. $h_R(u) = h_R(u1_R) \supseteq h_R(1_R)$ ve $h_R(1_R) = h_R(u^{-1}u) \supseteq h_R(u)$ ve buradan $h_R(u) = h_R(1_R) \subseteq h_R(0_R)$ dir. Tersine,

(i) $u, v \in R$ olsun. $u - v \neq 0_R$ ise,
$h_R(u - v) = h_R(1_R) = h_R(u) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$ ve $u - v = 0_R$ ise, $h_R(u - v) = h_R(0_R) \supseteq h_R(u) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v)$.

(ii) $u, v \in R$ olsun. $u \neq 0_R$ ve $v = 0_R$ ise, $h_R(uv) = h_R(0_R) \supseteq h_R(1_R) = h_R(u)$ ve $h_R(uv) = h_R(0_R) = h_R(v)$.

Böylece , $h_R(uv) \supseteq h_R(u) \cup h_R(v)$ elde edilir. $u \neq 0_R$ ve $v \neq 0_R$ ise, iki durum $uv \neq 0_R$ veya $uv = 0_R$ söz konusudur. $uv \neq 0_R$ ise, $h_R(uv) = h_R(1_R) = h_R(u)$ ve $h_R(uv) = h_R(1_R) = h_R(v)$ dır. $uv = 0_R$ ise, $h_R(uv) = h_R(0_R) \supseteq h_R(u)$ ve $h_R(uv) = h_R(0_R) \supseteq h_R(v)$ dır. Böylece $h_R(uv) \supseteq h_R(u) \cup h_R(v)$, yani h_R nin U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal olduğu gösterilmiş olur. ■

Uyarı 2.40. Teorem 2.39, bir bölümlü halkada bir esnek sol (sağ) kesişimsel idealin esnek kesişimsel ideal olduğunu gösterir.

Teorem 2.41. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel halka (esnek kesişimsel ideal) olsun. Herhangi $u, v \in R$ için, eğer $h_R(u - v) = h_R(0_R)$ ise, bu durumda $h_R(u) = h_R(v)$ dir.

İspat. Herhangi $u, v \in R$ için $h_R(u-v) = h_R(0_R)$ olduğu kabul edilsin.

$$\begin{aligned} h_R(u) &= h_R(u-v+v) \\ &\supseteq h_R(u-v) \cap h_R(v) \\ &= h_R(0_R) \cap h_R(v) \\ &= h_R(v) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, $h_R(u-v) = h_R(-(u-v)) = h_R(v-u) = h_R(0_R)$ olduğundan $h_R(v) \supseteq h_R(u)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Önerme 2.42. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel halka (esnek kesişimsel ideal) ve $\forall u \in R$ için h_R nin görüntüsü kapsamaya göre sıralı olsun. Eğer $\forall u, v \in R$ için $h_R(v) \supset h_R(u)$ ise $h_R(u-v) = h_R(u) = h_R(v-u)$ dir.

İspat. $u, v \in R$ için $h_R(v) \supset h_R(u)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $h_R(u-v) \supseteq h_R(u) \cap h_R(v) = h_R(u)$, $h_R(u) = h_R(u-v+v)$ ve $h_R(u) \supseteq h_R(u-v) \cap h_R(v)$. Buradan $u, v \in R$ için $h_R(v) \supset h_R(u)$ ve $h_R(u) \supseteq h_R(u-v) \cap h_R(v)$ ve $h_R(u-v) \subseteq h_R(u)$ dir. Böylece $h_R(u-v) = h_R(u) = h_R(v-u)$ elde edilir. ■

Teorem 2.43. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel halka (esnek kesişimsel ideal) $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ için

$Imh_R = \{\emptyset, \alpha\}$ olsun. f_R ve g_R, U üzerinde esnek kesişimsel idealler olmak üzere eğer $h_R = f_R \widetilde{\cup} g_R$ ise bu durumda ya $f_R \widetilde{\subseteq} g_R$ ya da $g_R \widetilde{\subseteq} f_R$ dir.

İspat. Aksini kabul ederek yapalım. $u, v \in R$ için $f_R(u) \supset g_R(u)$ ve $g_R(v) \supset f_R(v)$ olduğunu varsayalım. $h_R = f_R \widetilde{\cup} g_R$ olduğundan, $h_R(u) = f_R(u) \supset g_R(u) \supseteq \emptyset$ ve $h_R(v) = g_R \supset f_R \supseteq \emptyset$ dir. $Imh_R = \{\emptyset, \alpha\}$ olduğundan $h_R(u) = \alpha = h_R(v) = f_R(u) = g_R(v) = h_R(u-v)$ dir.

Önerme 2.42. den dolayı $f_R(v) \subset \alpha = f_R(u)$ ve $g_R(u) \subset \alpha = g_R(v)$dir. Böylece $f_R(u-v) = f_R(v)$ ve $g_R(u-v) = g_R(u)$ elde edilir. Sonuç olarak $h_R(u-v) = f_R(v) \cup g_R(u) \subset \alpha$ çelişkisi elde edilir. ■

Teorem 2.44. h_K ve h_L, U üzerinde iki esnek kesişimsel halka olsun. Bu durumda, $h_K \wedge h_L$ de, U üzerinde esnek kesişimsel halkadır.

İspat.

$$
\begin{aligned}
&(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in K\times L\\
&h_{K\wedge L}((u_1,v_1)-(u_2,v_2)) = h_{K\wedge L}((u_1-u_2,v_1-v_2))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; = h_K(u_1-u_2)\cap h_L(v_1-v_2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; \supseteq (h_K(u_1)\cap h_K(u_2))\cap(h_L(v_1)\cap h_L(v_2))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; = (h_K(u_1)\cap h_L(v_1))\cap(h_K(u_2)\cap h_L(v_2))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; = h_{K\wedge L}(u_1,v_1)\cap h_{K\wedge L}(u_2,v_2)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
h_{K\wedge L}((u_1,v_1)(u_2,v_2)) &= h_{K\wedge L}(u_1u_2,v_1v_2)\\
&= h_K(u_1u_2)\cap h_L(v_1v_2)\\
&\supseteq (h_K(u_1)\cap h_K(u_2))\cap(h_L(v_1)\cap h_L(v_2))\\
&= (h_K(u_1)\cap h_L(v_1))\cap(h_K(u_2)\cap h_L(v_2))\\
&= h_{K\wedge L}(u_1,v_1)\cap h_{K\wedge L}(u_2,v_2)
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla, $h_{K\wedge L}$, U üzerinde bir esnek kesişimsel halkadır.

■

Ancak, genelde $h_{K\vee L}$, U üzerinde bir esnek kesişimsel halka değildir.

Örnek 2.45. $U=\mathbb{Z}^+$ evrensel kümesini ele alınsın.
$R=\mathbb{Z}_4$ ve $H=\left\{\begin{bmatrix} x & x\\ y & y\end{bmatrix} \mid x,y\in\mathbb{Z}_2\right\}$, 2×2 tipindeki $\mathbb{Z}_2$ elemanlarından oluşan matrislerin kümesi olsun. $U=\mathbb{Z}^+$ üzerinde esnek halka

$h_R(\bar{0})=\mathbb{Z}^+$

$h_R(\bar{1})=\{4,14,22,24,30\}$

$h_R(\bar{2})=\{2,4,6,10,14,22,24,30,34,38\}$

$h_R(\bar{3})=\{4,14,22,24,30\}$

olarak tanımlansın. h_H'nin $U=\mathbb{Z}^+$ üzerinde bir esnek kesişimsel halka olduğu gösterilecektir.

$h_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathbb{Z}^+$

$h_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)=\{4,10,18\}$

$$h_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{2, 4, 6, 10, 16, 18, 3, 72\}$$
$$h_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 22, 32, 36, 40, 42\}$$
Bu durumda, $h_{K\vee L}$, U üzerinde esnek kesişimsel halka değildir.

Teorem 2.46. h_K ve h_L, U üzerinde iki esnek kesişimsel idealler olsun. Bu durumda $h_{K\wedge L}$ da U üzerinde esnek kesişimsel idealdir.

İspat. Teorem 2.44. den, h_K ve h_L esnek kesişimsel halkalar iken $h_{K\wedge L}$ de bir esnek kesişimsel halkadır. O halde $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in K \times L$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h_{K\wedge L}((u_1, v_1)(u_2, v_2)) &= h_{K\wedge L}(u_1u_2, v_1v_2) \\ &= h_K(u_1u_2) \cap h_L(v_1v_2) \\ &\supseteq h_K(u_1) \cap h_L(v_1) \\ &= h_{K\wedge L}(u_1, v_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_{K\wedge L}((u_1, v_1)(u_2, v_2)) &= h_{K\wedge L}(u_1u_2, v_1v_2) \\ &= h_K(u_1u_2) \cap h_L(v_1v_2) \\ &\supseteq h_K(u_2) \cap h_L(v_2) \\ &= h_{K\wedge L}(u_2, v_2) \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle, $h_{K\wedge L}$, U üzerinde bir esnek kesişimsel idealdir.

■

Ancak, genelde $h_{K\vee L}$, U üzerinde bir esnek kesişimsel ideal değildir.

Örnek 2.47. Örnek 2.45. teki h_K ve h_L, $U = \mathbb{Z}^+$ üzerinde esnek kesişimsel ideal olduğu halde $h_{K\vee L}$ nin esnek kesişimsel ideal olmadığı görülür.

Teorem 2.48. h_R ve f_R, U üzerinde iki esnek kesişimsel halka olsun. Bu durumda $h_R \widetilde{\cap} f_R$, U üzerinde esnek kesişimsel halkadır.

İspat. $u, v \in R$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(h_R \widetilde{\cap} f_R)(u-v) &= h_R(u-v) \cap f_R(u-v) \\ &\supseteq (h_R(u) \cap h_R(v)) \cap (f_R(u) \cap f_R(v)) \\ &= (h_R(u) \cap f_R(u)) \cap (h_R(v) \cap f_R(v)) \\ &= (h_R \widetilde{\cap} f_R)(u) \cap (h_R \widetilde{\cap} f_R)(v)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(h_R \widetilde{\cap} f_R)(uv) &= h_R(uv) \cap f_R(uv) \\ &\supseteq (h_R(u) \cap h_R(v)) \cap (f_R(u) \cap f_R(v)) \\ &= h_R(u) \cap f_R(u) \cap h_R(v) \cap f_R(v) \\ &= (h_R \widetilde{\cap} f_R)(u) \cap (h_R \widetilde{\cap} f_R)(v)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, $h_R \widetilde{\cap} f_R$, U üzerinde esnek kesişimsel halkadır. ■

Teorem 2.49. h_R ve f_R, U üzerinde iki esnek kesişimsel ideal olsun. Bu durumda $h_R \widetilde{\cap} f_R$, U üzerinde esnek kesişimsel idealdir.

İspat. h_R ve f_R, U üzerinde iki esnek kesişimsel halka iken $h_R \widetilde{\cap} f_R$ nin de U üzerinde esnek kesişimsel halka olduğu Teorem 2.48. de gösterildi.
$u, v \in R$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(h_R \widetilde{\cap} f_R)(uv) &= h_R(uv) \cap f_R(uv) \\ &\supseteq h_R(u) \cap f_R(u) \\ &= (h_R \widetilde{\cap} f_R)(u)\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
(h_R \widetilde{\cap} f_R)(uv) &= h_R(uv) \cap f_R(uv) \\
&\supseteq h_R(v) \cap f_R(v) \\
&= (h_R \widetilde{\cap} f_R)(v)
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla, $h_R \widetilde{\cap} f_R$, U üzerinde esnek kesişimsel idealdir. ■
Bir halkanın alt halka yapısından yola çıkarak, esnek kesişimsel alt halka tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.50. R bir halka ve K, R nin bir alt halkası olsun. h_R, U üzerinde bir esnek kesişimsel halka ve h_K, h_R nin U üzerinde boştan farklı bir esnek kesişimsel alt kümesi olsun. h_K, kendi başına U üzerinde esnek kesişimsel halka ise, h_K ye U üzerinde h_R nin esnek kesişimsel alt halkası denir.

Örnek 2.51. $U = S_3$ evrensel kümesini ele alalım. $K = \mathbb{Z}_6$ ve $L = \{0, 2, 4\}$ iki küme olsun. Aşağıdaki şekilde verilen, h_K, $U = S_3$ üzerinde bir esnek kesişimsel halkadır.
$h_K(0) = S_3$
$h_K(1) = \{(1), (12), (123), (132)\}$
$h_K(2) = \{(12), (13), (123\}$
$h_K(3) = \{(12), (13), (23), (123)\}$
$h_K(4) = \{(12), (13), (123)\}$
$h_K(5) = \{(12), (13), (123)\}$
Şimdi, eğer $U = S_3$ üzerinde h_L esnek kümesi,
$h_L(0) = \{(1), (12), (13), (132)\}$
$h_L(2) = \{(12), (13)\}$
$h_L(4) = \{(12), (13)\}$
ile verilirse, bu durumda h_L, U üzerinde h_K nin bir esnek kesişimsel alt halkasıdır.

Teorem 2.52. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel halka ve h_L ile h_M, U üzerinde h_R nin iki esnek kesişimsel alt halkası olsun. Bu durumda, $h_L \widetilde{\cap} h_M$, U üzerinde h_R nin esnek kesişimsel althalkasıdır.

İspat. $u, v \in R$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} h_{L\tilde{\cap}M}(u-v) &= h_L(u-v) \cap h_M(u-v) \\ &\supseteq (h_L(u) \cap h_L(v)) \cap (h_M(u) \cap h_M(v)) \\ &= (h_L(u) \cap h_M(u)) \cap (h_L(v) \cap h_M(v)) \\ &= h_{L\tilde{\cap}M}(u) \cap h_{L\tilde{\cap}M}(v) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_{L\tilde{\cap}M}(uv) &= h_L(uv) \cap h_M(uv) \\ &\supseteq (h_L(u) \cap h_L(v)) \cap (h_M(u) \cap h_M(v)) \\ &= (h_L(u) \cap h_M(u)) \cap (h_L(v) \cap h_M(v)) \\ &= h_{L\tilde{\cap}M}(u) \cap h_{L\tilde{\cap}M}(v) \end{aligned}$$

dir. Böylece $h_L \widetilde{\cap} h_M$, U üzerinde h_R nin esnek kesişimsel althalkasıdır.

■

Ancak, genelde $h_L \widetilde{\cup} h_M$, U üzerinde h_R nin esnek kesişimsel althalkası değildir.

Örnek 2.53. $U = S_3$ üzerinde, h_R esnek kesişimsel halkasını ve Örnek 2.51. deki h_K nin h_L esnek kesişimsel althalkasını ele alalım. $M = \{0, 3\}$ olsun.
$h_M(0) = \{(1), (12), (123)\}$
$h_M(3) = \{(12), (123)\}$
şeklinde verilirse, $h_L \widetilde{\cup} h_M$, U üzerinde h_K nin esnek kesişimsel alt halkası değildir.

Tanım 2.54. R bir halka ve $h_R, f_R \in S(U)$ olsun. O zaman $h_R \mp f_R, -h_R, h_R f_R$ aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall u \in R$ için
$(h_R \mp f_R)(u) = \cup\{h_R(v) \cap f_R(t) \mid v, t \in R, v \mp t = u\}$
$(-h_R)(u) = h_R(-u)$
$(h_R f_R)(u) = \cup\{h_R(v) \cap f_R(t) \mid v, t \in R, v.t = u\}$
$h_R + f_R, h_R - f_R, h_R f_R$, sırasıyla h_R ve f_R nin toplam, fark ve çarpımı ve $-h_R$, h_R nin negatifi olarak adlandırılır.

Teorem 2.55. R bir halka ve $h_R, f_R, g_R \in S(U)$ olsun. Bu durumda, $h_R(f_R + g_R) \subseteq h_R f_R + h_R g_R$ dir.

İspat. $uv = t$ olacak şekilde $u, v, t \in R$ olsun. O zaman $h_R(f_R + g_R)(t) = \cup\{h_R(u) \cap (f_R + g_R)(v) \mid u, v \in R, uv = t\}$ ve
$h_R(u) \cap (f_R + g_R)(v)$
$= h_R(u) \cap \{\cup\{f_R(y) \cap g_R(z) \mid y, z \in R, y + z = v\}$
$= \cup\{(h_R(u) \cap f_R(y)) \cap (h_R(u) \cap g_R(z)) \mid y, z \in R, y + z = v\}$
$= \cup\{(h_R(u) \cap f_R(y)) \cap (h_R(u) \cap g_R(z)) \mid y, z \in R, uy + uz = uv\}$
$\subseteq \cup\{(h_R f_R)(uy) \cap (h_R g_R)(uz) \mid y, z \in R, uy + uz = uv\}$
$= (h_R f_R + h_R g_R)(t)$
elde edilir. Böylece, $\forall t \in R$ için $h_R(f_R + g_R)(t) \subseteq (h_R f_R + h_R g_R)(t)$ dir.
Dolayısıyla, $h_R(f_R + g_R) \subseteq (h_R f_R) + (h_R g_R)$ dir. ■

Teorem 2.56. h_R, U üzerinde bir esnek sağ kesişimsel ideal ve f_R bir esnek sol kesişimsel ideal olsun. O zaman $h_R f_R \widetilde{\subseteq} h_R \widetilde{\cap} f_R$ dir.

İspat. $(h_R f_R)(u) = \emptyset$ ise, $h_R f_R \widetilde{\subseteq} h_R \widetilde{\cap} f_R$ olduğu açıktır.
$(h_R f_R)(u) \neq \emptyset$ ve $(h_R f_R)(u) = \cup\{h_R(v) \cap f_R(t) \mid v, t \in R, u = vt\}$ olduğu kabul edilsin. Buradan h_R, U üzerinde bir esnek sağ kesişimsel ideal ve f_R bir esnek sol kesişimsel ideal olduğundan $h_R(u) = h_R(vt) \supseteq h_R(v)$ ve $f_R(u) = f_R(vt) \supseteq f_R(t)$ dır. Buradan $\forall u \in R$ için,

$$\begin{aligned}(h_R f_R)(u) &= \cup\{h_R(v) \cap f_R(t) \mid v, t \in R, u = vt\} \\ &\subseteq h_R(u) \cap f_R(u) \\ &= (h_R \widetilde{\cap} f_R)(u)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, $h_R f_R \widetilde{\subseteq} h_R \widetilde{\cap} f_R$ elde edilir. ■

Tanım 2.57. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel halka olsun. h_R nin merkez kümesi ch_R ile gösterilir ve $ch_R = \{u \in R : h_R(u) = h_R(0_R)\}$ ile tanımlıdır.

Teorem 2.58. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel halka olsun. ch_R, R nin alt halkasıdır.

İspat. $0_R \in ch_R \subseteq R$ olduğu açıktır. $u, v \in ch_R$ olsun. $h_R(u) = h_R(v) = h_R(0_R)$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} h_R(u-v) &\supseteq h_R(u) \cap h_R(v) \\ &= h_R(0_R) \cap h_R(0_R) \\ &= h_R(0_R) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_R(uv) &\supseteq h_R(u) \cap h_R(v) \\ &= h_R(0_R) \cap h_R(0_R) \\ &= h_R(0_R) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $u - v, uv \in ch_R$ elde edilir. Böylece ch_R, R nin alt halkasıdır. ■

Teorem 2.59. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel ideal olsun. ch_R, R nin bir idealidir.

İspat. $0_R \in ch_R \subseteq R$ olduğu açıktır. $u, v \in ch_R$ olsun. $h_R(u) = h_R(v) = h_R(0_R)$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} h_R(u-v) &\supseteq h_R(u) \cap h_R(v) \\ &= h_R(0_R) \cap h_R(0_R) \\ &= h_R(0_R) \end{aligned}$$

$\forall\, r \in R, u \in ch_R$ için $h_R(ru) \supseteq h_R(r) \cup h_R(u) = h_R(r) \cup h_R(0_R) = h_R(0_R)$ ve $h_R(ur) \supseteq h_R(u) \cup h_R(r) = h_R(u) \cup h_R(0_R) = h_R(0_R)$ dolayısıyla $u, v \in ch_R$ için $u - v \in ch_R$, $r \in R$, $u \in ch_R$ için $ru \in ch_R$ ve $ur \in ch_R$ olduğundan ch_R, R nin bir idealidir. ■

Teorem 2.60. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel halka olsun ve $\alpha \subseteq h_R(0_R)$ olsun. Bu durumda h_R^α, R nin alt halkasıdır.

İspat. $0_R \in h_R^\alpha \subseteq R$ olduğu açıktır. $u, v \in h_R^\alpha$ olsun. Bu durumda $h_R(u) \supseteq \alpha$ ve $h_R(v) \supseteq \alpha$. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} h_R(u-v) &\supseteq h_R(u) \cap h_R(v) \\ &\supseteq \alpha \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_R(uv) &\supseteq h_R(u) \cap h_R(v) \\ &\supseteq \alpha \end{aligned}$$

dir. Böylece, $u - v, uv \in h_R^\alpha$ elde edilir. Sonuç olarak h_R^α, R nin alt halkasıdır. ■

Teorem 2.61. h_R, U üzerinde esnek kesişimsel ideal ve $\alpha \subseteq h_R(0_R)$ olsun. Bu durumda h_R^α, R nin idealidir.

İspat. $0_R \in h_R^\alpha \subseteq R$ olduğu açıktır. $u, v \in h_R^\alpha$ olsun. $h_R(u) = h_R(v) = h_R(0_R)$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} h_R(u-v) &\supseteq h_R(u) \cap h_R(v) \\ &= h_R(0_R) \cap h_R(0_R) \\ &= h_R(0_R) \end{aligned}$$

ve $\forall\ r \in R$, $u \in h_R^\alpha$ için $h_R(ru) \supseteq h_R(r) \cup h_R(u) = h_R(r) \cup h_R(0_R) = h_R(0_R)$ ve $h_R(ur) \supseteq h_R(u) \cup h_R(r) = h_R(u) \cup h_R(0_R) = h_R(0_R)$ dolayısıyla $u, v \in h_R^\alpha$ için $u - v \in h_R^\alpha$, $r \in R$, $u \in h_R^\alpha$ için $ru \in h_R^\alpha$ ve $ur \in h_R^\alpha$ olduğundan h_R^α, R nin bir idealidir. Böylece, $u - v, uv \in h_R^\alpha$ elde edilir. Sonuç olarak h_R^α, R nin idealidir. ■

3. ESNEK KESİŞİMSEL VE ESNEK BİRLEŞİMSEL ALT UZAYLAR

Bu bölüm, tamamen Aslıhan Sezgin Sezer, Akın Osman Atagün ve Naim Çağman'ın [25] makalesinden yararlanılarak oluşturulmuştur.

3.1. ESNEK KESİŞİMSEL ALT UZAYLAR

Tanım 3.1. F bir cisim V, F üzerinde bir vektör uzayıdır. U, V nin alt uzayı ve G_U, V üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall x, y \in U$ ve $\alpha \in F$ iken

1) $G(x+y) \supseteq G(x) \cap G(y)$

2) $G(\alpha x) \supseteq G(x)$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda G_U, V nin bir IS(Intersectional soft subspace)-alt uzayı (kesişimsel esnek alt uzayı) olarak adlandılır. $G_U \widetilde{<}_i V$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.2. $V = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde vektör uzayı ve U da V nin alt uzayı olsun. G_U, V üzerinde esnek küme olsun, buradan $G : U \to P(V)$ küme değerli fonksiyonu;

$$G\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$

$$G\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$$

$$G\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$$

$$G\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda, $G_U \widetilde{\not<}_i V$ dir. Fakat, V üzerinde H_U esnek kümesini tanımlarsak,

$H\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right\}$

$H\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right\},$

$H\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right\},$

$H\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right\},$

bu durumda,

$H\left(\left(\bar{0}.\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)= H\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) \not\supseteq H\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right).$

Böylece, H_U, V de esnek kesişimsel alt uzay değildir.

Önerme 3.3. Eğer $W_U \widetilde{<}_i V$ ise, bu durumda $\forall x \in U$ için $W(0_V) \supseteq W(x)$.

İspat. W_U, V nin bir kesişimsel esnek alt uzayı olduğundan, $\forall x, y \in U$ için $W(x+y) \supseteq W(x) \cap W(y)$ sağlanır. $\forall x, y \in U$ için sağlandığından $y = -x$ için $W(x-x) = W(0_V) \supseteq W(x) \cap W(x) = W(x)$. ■

Teorem 3.4. Eğer $G_{U_1} \widetilde{<}_i V$ ve $H_{U_2} \widetilde{<}_i V$ ise, bu durumda $G_{U_1} \cap_R H_{U_2} \widetilde{<}_i V$ dir.

İspat. U_1 ve U_2, V nin alt uzayları olduğundan, $U_1 \cap U_2$ de V nin bir alt uzayıdır. Tanım 3.1. den yararlanarak $G_{U_1} \cap H_{U_2} = (G, U_1) \cap (H, U_2) = (W, U_1 \cap U_2)$ olsun. O zaman $\forall v \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ için $W(v) = G(v) \cap H(v)$ dir. Bu durumda $\forall v, t$ için $U_1 \cap U_2$ ve $\alpha \in F$ için

$$\begin{aligned} W(v+t) &= G(v+t) \cap H(v+t) \\ &\supseteq (G(v) \cap G(t)) \cap (H(v) \cap H(t)) \\ &= (G(v) \cap H(v)) \cap (G(t) \cap H(t)) \\ &= W(v) \cap W(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W(\alpha v) &= G(\alpha v) \cap H(\alpha v) \\
&\supseteq G(v) \cap H(v) \\
&= W(v)
\end{aligned}
$$

şartları sağlandığından $G_{U_1} \cap H_{U_2} = W_{U_1} \cap W_{U_2} \widetilde{<}_i V$ dir. ■

Tanım 3.5. (G, U_1) ve (H, U_2), sırasıyla V_1 ve V_2 nin IS-alt uzayları olsun. (G, U_1) ve (H, U_2) çarpımı, $(G, U_1) \times (H, U_2) = (T, U_1 \times U_2)$ ise buradan $\forall (u, v) \in U_1 \times U_2$ için $T(u, v) = G(u) \times H(v)$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.6. Eğer $G_{U_1} \widetilde{<}_i V_1$ ve $H_{U_2} \widetilde{<}_i V_2$ ise o zaman $G_{U_1} \times H_{U_2} \widetilde{<}_i V_1 \times V_2$ dir.

İspat. U_1 ve U_2 sırasıyla V_1 ve V_2 nin alt uzayları olduğundan dolayısıyla $U_1 \times U_2$, $V_1 \times V_2$ nin alt uzayıdır. $(G, U_1) \times (H, U_2) = (T, U_1 \times U_2)$ olduğundan $\forall (u, v) \in U_1 \times U_2$ için $T(u, v) = G(u) \times H(v)$ dir. Bu durumda $\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U_1 \times U_2$ ve $(\alpha_1, \alpha_2) \in F \times F$,

$$
\begin{aligned}
T((u_1, v_1) + (u_2, v_2)) &= T(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \\
&= G(u_1 + u_2) \times H(v_1 + v_2) \\
&\supseteq (G(u_1) \cap G(u_2)) \times (H(v_1) \cap H(v_2)) \\
&= (G(u_1) \times H(v_1)) \cap (G(u_2) \times H(v_2)) \\
&= T(u_1, v_1) \cap T(u_2, v_2)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
T((\alpha_1, \alpha_2)(u_1, v_1)) &= T(\alpha_1 u_1, \alpha_2 v_1) \\
&= G(\alpha_1 u_1) \times H(\alpha_2 v_1) \\
&\supseteq G(u_1) \times H(v_1) = T(u_1, v_1).
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $G_{U_1} \times H_{U_2} = T_{U_1 \times U_2} \widetilde{<}_i V_1 \times V_2$ elde edilir. ■

Tanım 3.7. G_{U_1} ve H_{U_2}, V nin iki IS-alt uzayı olsun. Eğer $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ ise, G_{U_1} ve H_{U_2} IS-altuzaylarının toplamı $G_{U_1} + H_{U_2} = W_{U_1+U_2}$, $\forall v + t \in U_1 + U_2$ için $W(v+t) = G(v) + H(t)$ ile tanımlanır.

Teorem 3.8. $G_{U_1}, H_{U_2} \widetilde{<}_i V$ ve $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ ise o zaman $G_{U_1} + H_{U_2} \widetilde{<}_i V$ dir.

İspat. U_1 ve U_2, V nin alt uzayı olduğundan dolayı $U_1 + U_2$, V nin alt uzayıdır. $G_{U_1} + H_{U_2} = (G, U_1) + (H, U_2) = (W, U_1 + U_2)$ özelliğinden dolayı $\forall v + t \in U_1 + U_2$ için $W(v+t) = G(v) + H(t)$, $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ dir. O zaman toplam iyi tanımlıdır. Bu durumda $\forall v_1 + t_1, v_2 + t_2 \in U_1 + U_2$ ve $\alpha \in F$

$$\begin{aligned} W((v_1+t_1)+(v_2+t_2)) &= W((v_1+v_2)+(t_1+t_2)) \\ &= G(v_1+v_2)+H(t_1+t_2) \\ &\supseteq (G(v_1)\cap G(v_2))+(H(t_1)\cap H(t_2)) \\ &= (G(v_1)+H(t_1))\cap(G(v_2)+H(t_2)) \\ &= W(v_1+t_1)\cap W(v_2+t_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(\alpha(v_1+t_1)) &= W(\alpha v_1+\alpha t_1) \\ &= G(\alpha v_1)+H(\alpha t_1) \\ &\supseteq G(v_1)+H(t_1) \\ &= W(v_1+t_1). \end{aligned}$$

dir. Böylece $G_{U_1} + H_{U_2} \widetilde{<}_i V$ sonucuna ulaşılır. ■

Aşağıdaki tanımla cebirsel kavramlardan bilinen aşikar yapılar esnek kesişimsel alt uzaylara aktarılmış ve esnek işlemler altında özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.9. G_U, V nin bir kesişimsel esnek alt uzayı olsun.

i) $\forall x \in U$ için $G(x) = 0_V$ ise G_U aşikar kesişimsel esnek alt uzay ve

ii) $\forall x \in U$ için $G(x) = V$ ise G_U tam kesişimsel esnek alt uzay olarak adlandırılır.

Önerme 3.10. G_{U_1} ve H_{U_2}, V nin iki kesişimsel esnek alt uzayı olsun. Bu durumda

i) G_{U_1} ve H_{U_2}, V nin aşikar kesişimsel esnek alt uzayları ise bu durumda $G_{U_1} \cap_R H_{U_2}$ de V nin aşikar kesişimsel esnek alt uzayıdır.

ii) G_{U_1} ve H_{U_2}, V nin tam kesişimsel esnek alt uzayları ise bu durumda $G_{U_1} \cap_R H_{U_2}$ de V nin tam kesişimsel esnek alt uzayıdır.

iii) G_{U_1}, V nin aşikar kesişimsel alt uzayı ve H_{U_2}, V nin tam kesişimsel alt uzayı ise, o zaman$G_{U_1} \cap_R H_{U_2}$ de V nin aşikar kesişimsel esnek alt uzayıdır.

iv) G_{U_1} ve H_{U_2}, V nin aşikar kesişimsel esnek alt uzayları ve $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ ise o zaman $G_{U_1} + H_{U_2}$ de V nin aşikar kesişimsel esnek alt uzayıdır.

v) G_{U_1} ve H_{U_2}, V nin tam kesişimsel esnek alt uzayları ve $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ ise o zaman $G_{U_1} + H_{U_2}$ de V nin tam kesişimsel esnek alt uzayıdır.

vi) G_{U_1}, V nin aşikar kesişimsel alt uzayı ve H_{U_2}, V nin tam kesişimsel alt uzayı ise o zaman $G_{U_1} + H_{U_2}$ de V nin tam kesişimsel esnek alt uzayıdır.

Önerme 3.11. G_{U_1} ve H_{U_2}, sırasıyla V_1 ve V_2 nin nin iki kesişimsel esnek alt uzayı olsun. O zaman,

i) $G_{U_1} \times H_{U_2}$, $V_1 \times V_2$ nin aşikar kesişimsel esnek alt uzayıdır.

ii) $G_{U_1} \times H_{U_2}$, $V_1 \times V_2$ nin tam kesişimsel esnek alt uzayıdır.

3.1.1. ESNEK KESİŞİMSEL ALT UZAYLARIN UYGULAMALARI

Bu bölümde esnek kesişimsel alt uzayların; esnek görüntüsünü, esnek ters görüntüsünü, üst α - içereni ve vektör uzayı dönüşümlerini açıklayacağız.

Teorem 3.12. $G_{U_1} \widetilde{<}_i V$ ise o zaman $U_G = \{x \in U \mid G(x) = G(0_V)\}$, U nun alt uzayıdır.

İspat. $0_V \in U_G$ ve $\emptyset \neq U_G \subseteq U$. $\forall x, y \in U_G$ ve $\alpha \in F$ için $x + y \in U_G$ ve $\alpha x \in U_G$ olduğunu göstermeliyiz, yani $G(x+y) = G(0_V)$ ve $G(\alpha x) = G(0_V)$ sağlanmalıdır. Buradan $x, y \in U_G$ ve G_U, V nin esnek kesişimsel alt uzayıdır. Bu durumda $G(x) = G(y) = G(0_V)$, $\forall x, y \in U_G$ ve $\alpha \in F$ için $G(x + y) \supseteq G(x) \cap G(y) = G(0_V)$, $G(\alpha x) \supseteq G(x) = G(0_V)$. Ayrıca $G(0_V) \supseteq G(x + y)$ ve $G(0_V) \supseteq G(\alpha x)$ olduğundan eşitlik elde edilir. ■

Teorem 3.13. H_U, V üzerinde esnek küme ve α, V nin alt kümesi yani $H(0_V) \supseteq \alpha$ olsun. H_U, V nin esnek kesişimsel alt uzayı ise, H_U^{α}, V nin alt uzayıdır.

İspat. $H(0_V) \supseteq \alpha$ olduğundan $0_V \in H_U^{\alpha}$ ve $\emptyset \neq H_U^{\alpha} \subseteq V$. Buradan $v, t \in H_U^{\alpha}$dir. O zaman $H(v) \supseteq \alpha$ ve $H(t) \supseteq \alpha$ dir.
$\forall v, t \in H_U^{\alpha}$ ve $m \in F$ için $v + t \in H_U^{\alpha}$ ve $mv \in H_U^{\alpha}$ olduğu gösterilmelidir. H_U, V üzerinde esnek küme olduğundan devamında $H(v + t) \supseteq H(v) \supseteq H(t) \supseteq \alpha \supseteq \alpha = \alpha$ dir.
Ayrıca, $H(mv) \supseteq H(v) \supseteq \alpha$ olup ispat tamamlanır. ■

Tanım 3.14. F_A ve G_B, U üzerinde esnek kümeler ve Ψ: $A \to B$ olsun. Bu durumda U üzerinde $\Psi(F_A)$ esnek kümesi, $\forall b \in B$ için
$\Psi(F_A) : B \to P(U)$ küme değerli fonksiyonu

$$\Psi(F_A)(b) = \begin{cases} \cup\{F(a) \mid a \in A \text{ ve } \Psi(a) = b\} & , \Psi^{-1}(b) \neq \emptyset \\ \emptyset & ,\text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. Burada $\Psi(F_A)$, F_A altında Ψ esnek görüntüsü olarak adlandırılır. Ayrıca U üzerinde $\Psi^{-1}(G_B)$ esnek kümesi olarak tanımlanabilir. $\Psi^{-1}(G_B) : A \to P(U)$ küme değerli fonksiyonu $\forall a \in A$ için $\Psi^{-1}(G_B)(a) = G(\Psi(a))$ olarak tanımlanır. Bu durumda, $\Psi^{-1}(G_B)$, G_B altında Ψ nin ters görüntüsü olarak adlandırılır.

Tanım 3.15. F_A ve G_B, U üzerinde esnek kümeler ve Ψ: $A \to B$ olsun. Bu durumda U üzerinde $\Psi^*(F_A)$ esnek kümesi, $\forall b \in B$ için $\Psi^*(F_A) : B \to P(U)$ küme değerli fonksiyonu

$$\Psi^*(F_A)(b) = \begin{cases} \cap\{F(a) \mid a \in A \text{ ve } \Psi(a) = b\} & , \Psi^{-1}(b) \neq \emptyset \\ \emptyset & ,\text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. Burada $\Psi^*(F_A)$, F_A altında Ψ esnek ters görüntüsü olarak adlandırılır.

Teorem 3.16. Q ve W, V nin alt uzayları olmak üzere H_Q ve T_W, V üzerinde esnek küme ve Ψ, Q dan W ye bir lineer izomorfizma olsun. Eğer H_Q, Vde esnek kesişimsel alt uzay ise o zaman $\Psi(H_Q)$ da V nin esnek kesişimsel alt uzayıdır.

İspat. $w_1, w_2 \in W$ olsun. Ψ örten lineer dönüşüm olduğundan dolayı $q_1, q_2 \in Q$ yani $\Psi(q_1) = w_1$ ve $\Psi(q_2) = w_2$ dir. O zaman

$$\begin{aligned}
(\Psi(H_Q))(w_1 + w_2) &= \cup\{H(q) : q \in Q, \Psi(q) = w_1 + w_2\} \\
&= \cup\{H(q) : u \in Q, q = \Psi^{-1}(w_1 + w_2)\} \\
&= \cup\{H(q) : u \in Q, q = \Psi^{-1}(\Psi(q_1 + q_2)) = q_1 + q_2\} \\
&= \cup\{H(q_1 + q_2) : q_i \in Q, \Psi(q_i) = w_i, i = 1, 2\} \\
&\supseteq \cup\{H(q_1) \cap H(q_2) : q_i \in Q, \Psi(q_i) = w_i, i = 1, 2\} \\
&= (\cup\{H(q_1) : q_1 \in Q, \Psi(q_1) = w_1\}) \cap (\cup\{H(q_2) : q_2 \in Q, \Psi(q_2) = w_2\}) \\
&= (\Psi(H_Q))(w_1) \cap (\Psi(H_Q))(w_2)
\end{aligned}$$

dir. Şimdi, $\alpha \in F$ ve $w \in W$ olsun. Ψ örten lineer dönüşüm olduğundan dolayı $\tilde{q} \in Q$ yani $\Psi(\tilde{q}) = w$ dir. O zaman

$$\begin{aligned}
(\Psi(H_Q))(\alpha.w) &= \cup\{H(q) : q \in Q, \Psi(q) = \alpha.w\} \\
&= \cup\{H(q) : q \in Q, q = \Psi^{-1}(\alpha.w)\} \\
&= \cup\{H(u) : q \in Q, q = \Psi^{-1}(\Psi(\alpha.\tilde{q})) = \alpha.\tilde{q}\} \\
&= \cup\{H(\alpha.\tilde{q}) : \alpha.\tilde{q} \in Q, \Psi(\tilde{q}) = w\} \\
&\supseteq \cup\{H(\tilde{q}) : \tilde{q} \in Q, \Psi(\tilde{q}) = w\} \\
&= (\Psi(H_U))(w)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\Psi(H_Q)$, V de bir esnek kesişimsel alt uzaydır. ■

Teorem 3.17. Q ve W, V nin alt uzayları olmak üzere H_Q ve T_W, V üzerinde esnek küme ve Ψ, Q dan W ye bir lineer izomorfizma olsun. T_W, V nin esnek kesişimsel alt uzayı ise o zaman $\Psi^{-1}(T_W)$ de V nin esnek kesişimsel alt uzayıdır.

İspat. $q_1, q_2 \in Q$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\Psi^{-1}(T_W))(q_1 + q_2) &= T(\Psi(q_1 + q_2)) \\
&= T(\Psi(q_1) + \Psi(q_2)) \\
&\supseteq T(\Psi(q_1)) \cap T(\Psi(q_2)) \\
&= (\Psi^{-1}(T_W))(q_1) \cap (\Psi^{-1}(T_W))(q_2)
\end{aligned}$$

dir. Şimdi $\alpha \in F$ ve $q \in Q$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
(\Psi^{-1}(T_W))(\alpha.q) &= T(\Psi(\alpha.q)) \\
&= T(\alpha.\Psi(q)) \\
&\supseteq T(\Psi(q)) \\
&= (\Psi^{-1}(T_W))(q)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\Psi^{-1}(T_W)$, V de bir esnek kesişimsel alt uzaydır. ■

Teorem 3.18. V_1 ve V_2 iki vektör uzayı ve $(G_1, U_1)\widetilde{<}_i V_1$, $(G_2, U_2)\widetilde{<}_i V_2$ olsun. Eğer $f : U_1 \to U_2$ bir lineer dönüşüm ise, bu durumda

i) f örten ise $(G_1, f^{-1}(U_2))\widetilde{<}_i V_1$,

ii) $(G_2, f(U_1))\widetilde{<}_i V_2$,

iii) $(G_1, Kerf)\widetilde{<}_i V_1$

İspat.

i) $U_1 < V_1, U_2 < V_2$ ve $f : U_1 \to U_2$ örten bir lineer dönüşüm olduğundan dolayı $f^{-1}(U_2) < V_1$ olduğu açıktır. $(G_1, U_1)\widetilde{<}_i V_1$ ve $f^{-1}(U_2) \subseteq U_1$, $\forall x, y \in f^{-1}(U_2)$ ve $\alpha \in F$ için $G_1(x + y) \supseteq G_1(x) \cap G_1(y)$ ve $G_1(\alpha x) \supseteq G_1(x)$ olur. Böylece $(G_1, f^{-1}(U_2))\widetilde{<}_i V_1$ dir.

ii) $U_1 < V_1, U_2 < V_2$ ve $f : U_1 \to U_2$ bir lineer dönüşüm olduğundan, bu durumda $f(U_1) < V_2$ olur. Burada $\forall x, y \in f^{-1}(U_2)$ ve $\alpha \in F$ için $G_2(x + y) \supseteq G_2(x) \cap G_2(y)$ ve $G_2(\alpha x) \supseteq G_2(x)$ dir. Böylece $(G_2, f(U_1))\widetilde{<}_i V_2$ olur.

iii) $Kerf < V_1$ ve $Kerf \subseteq U_1$ olduğunda $\forall x, y \in f^{-1}(U_2)$ ve $\alpha \in F$ için $G_1(x + y) \supseteq G_1(x) \cap G_1(y)$ ve $G_1(\alpha x) \supseteq G_1(x)$ dir. Böylece $(G_1, Kerf)\widetilde{<}_i V_1$ ispatı sağlanır.

■

Sonuç 3.19. $(G_1, U_1)\widetilde{<}_i V_1$, $(G_2, U_2)\widetilde{<}_i V_2$ ve $f : U_1 \to U_2$ lineer dönüşüm olsun. O zaman $(G_2, \{0_{U_2}\})\widetilde{<}_i V_2$ dir.

İspat. Teorem 3.18. den $(G_1, Kerf)\widetilde{<}_i V_1$ olur. O zaman $(G_2, f(U_1))\widetilde{<}_i V_2$ olup $(G_2, \{0_{U_2}\})\widetilde{<}_i V_2$ dir. ■

3.2. ESNEK BİRLEŞİMSEL ALT UZAYLAR

Bu bölümde ilk olarak esnek birleşimsel alt uzaylar tanımını vereceğiz. Daha sonra esnek kümeler ile ilgili bağlantılarını göstereceğiz.

Tanım 3.20. U, V nin alt uzayı ve T_U, V üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\forall v, t \in U$ ve $\alpha \in F$ için,

1) $T(v+t) \subseteq T(v) \cup T(t)$

2) $T(\alpha v) \subseteq T(v)$

şartları sağlanıyorsa, T_U esnek kümesi esnek birleşimsel alt uzay olarak adlandırılır, $T_U \widetilde{<}_u V$ ile gösterilir.

Örnek 3.21. $V = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$ ve $U = V$ alt uzayını ele alınsın.
T_U, V üzerinde esnek küme olsun. O zaman $T : U \to P(V)$;

$$T\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$

bu durumda, $T_U \widetilde{<}_u V$ dir. Fakat, V üzerinde W_U esnek kümesini,

$$W\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$

$$W\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$

$$W\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$

$$W\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$$

olarak tanımlarsak bu durumda,
$W\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = W\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) \nsubseteq W\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) \cup W\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$. Böylece, W_U, V nin esnek birleşimsel alt uzayı değildir.

Önerme 3.22. $T_U \widetilde{<}_u V$ ise o zaman $\forall q \in U$ için $T(0_V) \subseteq T(q)$ dir.

İspat. T_U, V nin esnek birleşimsel alt uzayı ise o zaman $\forall q, t \in U$ için, $T(q+t) \subseteq T(q) \cup T(t)$. Buradan $(U, +)$ bir grup ve $t = -q$ alırsak bu durumda, $\forall \in U$ için $T(q-q) = T(0_V) \subseteq T(q) \cup T(q) = T(q)$ dir. ■

Teorem 3.23. Eğer $G_{U_1} \widetilde{<}_u V$ ve $T_{U_2} \widetilde{<}_u V$ ise o zaman $G_{U_1} \cup_R T_{U_2} \widetilde{<}_u V$ dir.

İspat. $G_{U_1} \cup_R T_{U_2} \widetilde{<}_u V = (G, U_1) \cup_R (T, U_2) = (W, U_1 \cap U_2)$ olsun. Buradan $\forall q \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ için $W(q) = G(q) \cap T(q)$ olur. U_1 ve U_2 V de alt uzay olduğundan, $U_1 \cap U_2$ de V nin bir alt uzayıdır. $q, t \in U_1 \cap U_2$ ve $\alpha \in F$ olsun, bu durumda

$$\begin{aligned} W(q+t) &= G(q+t) \cup T(q+t) \\ &\subseteq (G(q) \cup G(t)) \cup (T(q) \cup T(t)) \\ &= (G(q) \cup T(q)) \cup (G(t) \cup T(t)) \\ &= W(q) \cup W(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} W(\alpha q) &= G(\alpha q) \cup T(\alpha q) \\ &\subseteq G(q) \cup T(q) \\ &= W(q) \end{aligned}$$

Öyleyse, $G_{U_1} \cup_R T_{U_2} = W_{U_1 \cap U_2} \widetilde{<}_u V$. ■

Tanım 3.24. T_U, V de esnek birleşimsel alt uzay olsun. Bu durumda,

a) $\forall x \in U$ için $T(x) = \{0_V\}$ ise T_U aşikar alt uzay olarak adlandırılır.

b) $\forall x \in U$ için $T(x) = V$ ise T_U tam alt uzay olarak adlandırılır.

Önerme 3.25. G_{U_1} ve T_{U_2} V de birleşimsel alt uzaylar olsun, bu durumda

i) G_{U_1} ve T_{U_2}, V de aşikar birleşimsel alt uzaylar ise, bu durumda $G_{U_1} \cup_R T_{U_2}$, V de aşikar birleşimsel alt uzaydır.

ii) G_{U_1} ve T_{U_2}, V de tam birleşimsel alt uzaylar ise, bu durumda $G_{U_1} \cup_R T_{U_2}$, V de tam birleşimsel alt uzaydır.

iii) G_{U_1}, V de aşikar birleşimsel alt uzay ve T_{U_2}, V de tam birleşimsel alt uzay ise $G_{U_1} \cup_R T_{U_2}$, V de tam birleşimsel alt uzaydır.

3.2.1. ESNEK BİRLEŞİMSEL ALT UZAYLARIN UYGULAMALARI

Bu bölümde esnek birleşimsel alt uzayların; esnek görüntüsünü, esnek ters görüntüsünü, üst α - içereni ve vektör uzayı dönüşümlerini açıklayacağız.

Teorem 3.26. W_U, V üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda W_U, V nin esnek birleşimsel alt uzayı olduğunda W_U^r, V nin esnek kesişimsel alt uzayıdır.

İspat. W_U, V nin esnek birleşimsel alt uzayı olsun. Bu durumda $\forall v, t \in U$ ve $\alpha \in F$ için

$$\begin{aligned} W^r(v+t) &= V \setminus W(v+t) \\ &\supseteq V \setminus ((W(v) \cup W(t)) \\ &= (V \setminus W(v)) \cap (V \setminus W(t)) \\ &= W^r(v) \cap W^r(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} W^r(\alpha v) &= V \setminus W(\alpha v) \\ &\supseteq V \setminus W(v) \\ &= W^r(v) \end{aligned}$$

dir. Böylece, W_U^r, V nin esnek kesişimsel alt uzayıdır.

Aksine, W_U^r, V nin esnek kesişimsel alt uzayı olsun. Bu durumda, $\forall v, t \in U$ ve $\alpha \in F$ için,

$$\begin{aligned} W(v+t) &= V \setminus W^r(v+t) \\ &\subseteq V \setminus ((W^r(v) \cup W^r(t)) \\ &= (V \setminus W^r(v)) \cap (V \setminus W^r(t)) \\ &= W(v) \cup W(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} W(\alpha v) &= V \setminus W^r(\alpha v) \\ &\subseteq V \setminus W^r(v) \\ &= W(v) \end{aligned}$$

dir. Böylece, W_U, V nin esnek birleşimsel alt uzayıdır. ■

Teorem 3.27. $W_U \widetilde{<}_u V$ ise o zaman $U_W = \{x \in U \mid W(x) = W(0_V)\}$, U nun alt uzayıdır.

İspat. $0_V \in U_W$ ve $\emptyset \neq U_W \subseteq U$ olduğu açıktır. $\forall v + t \in U$ ve $\alpha \in F$ için $v + t \in U_W$ ve $\alpha v \in U_W$ olduğunu göstermeliyiz. Buradan $v + t \in U_W$ ve W_U, V nin esnek birleşimsel alt uzayıdır, o halde $\forall v, t \in U$ ve $\alpha \in F$ için $W(v) = W(t) = W(0_V), W(v + t) \subseteq W(v) \cup W(t) = W(0_V)$ ve $\forall v, t \in U$ ve $\alpha \in F$ için $W(\alpha v) \subseteq W(v) = W(0_V)$. Önerme 3.22 den $W(0_V) \subseteq W(v + t)$ ve $W(0_V) \subseteq W(\alpha v)$. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.28. H_U, V üzerinde esnek küme ve α, V nin alt kümesi yani $\alpha \supseteq H(0_V)$ olsun. H_U, V nin esnek kesişimsel alt uzayı ise $H_U^{\subseteq\alpha}$, V de alt uzaydır.

İspat. $\alpha \supseteq H(0_V)$ olduğundan $0_V \in H_U^{\subseteq\alpha}$ ve $\emptyset \neq H_U^{\subseteq\alpha} \subseteq V$. $v, t \in H_U^{\subseteq\alpha}$ olsun. O zaman $H(x) \subseteq \alpha$ ve $H(v) \subseteq \alpha$. $\forall v, t \in H_U^{\subseteq\alpha}$ ve $m \in F$ için $v + t \in H_U^{\subseteq\alpha}$ ve $mv \in H_U^{\subseteq\alpha}$ olduğunu göstermeliyiz. H_U, V de esnek birleşimsel alt uzay olduğundan $H(v+t) \subseteq H(v) \cup H(t) \subseteq \alpha \cup \alpha = \alpha$. Dahası, $H(mv) \subseteq H(v) \subseteq \alpha$, böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.29. G_U ve T_W, V üzerinde esnek kümeler olsun, burada U ve W, V de alt uzay ve Ψ, U dan Wye bir lineer izomorfizmadır. Eğer T_W V de esnek birleşimsel alt uzay ise, bu durumda $\Psi^{-1}(T_W)$, V de esnek birleşimsel alt uzaydır..

İspat. T_W, V de esnek birleşimsel alt uzay olsun. O zaman Teorem 3.26 dan T_W^r, V de esnek kesişimsel alt uzay ve Teorem 3.17 den $\Psi^{-1}(T_W^r)$ de V de esnek kesişimsel alt uzaydır. Böylece, $\Psi^{-1}(T_W^r) = (\Psi^{-1}(T_W))^r$, V de esnek kesişimsel alt uzay olur. Öyleyse, Teorem 3.26 dan $\Psi^{-1}(T_W)$, V de esnek birleşimsel alt uzaydır. ■

Teorem 3.30. G_U ve T_W, V üzerinde esnek kümeler, U ve W, V de alt uzay ve Ψ, U dan Wye bir lineer izomorfizma olsun. G_U, V de esnek birleşimsel alt uzay ise bu durumda $\Psi^*(G_U)$ da esnek birleşimsel alt uzaydır.

İspat. G_U da esnek birleşimsel alt uzay olsun. O zaman Teorem 3.26 dan G_U^r ve Teorem 3.16 dan $\Psi(G_U^r)$, V nin esnek kesişimsel alt uzaylarıdır. Böylece $\Psi(G_U^r) = (\Psi^*(G_U))^r$, V nin esnek kesişimsel alt uzayıdır. Öyleyse Teorem 3.26 dan $\Psi^*(G_U)$, V nin esnek birleşimsel alt uzayıdır. ■

Teorem 3.31. V_1 ve V_2 iki vektör uzayı ve $(W_1, U_1)\widetilde{<}_u V_1$, $(W_2, U_2)\widetilde{<}_u V_2$ olsun. $f; U_1 \to U_2$ lineer dönüşüm ise o zaman

i) f örten ise bu durumda $(W_1, f^{-1}(U_2))\widetilde{<}_u V_1$ dir.

ii) $(W_2, f(U_1))\widetilde{<}_u V_2$ dir.

iii) $(W_1, Kerf)\widetilde{<}_u V_1$ dir.

İspat.

i) $U_1 < V_1$, $U_2 < V_2$ ve $f : U_1 \to U_2$ örten bir lineer dönüşüm olduğundan dolayı $f^{-1}(U_2) < V_1$ olduğu açıktır. $(W_1, U_1)\widetilde{<}_i V_1$ ve $f^{-1}(U_2) \subseteq U_1$, $\forall x, y \in f^{-1}(U_2)$ ve $\alpha \in F$ için $G_1(x + y) \supseteq W_1(x) \cap W_1(y)$ ve $W_1(\alpha x) \supseteq W_1(x)$ olur. Böylece $(W_1, f^{-1}(U_2))\widetilde{<}_i V_1$.

ii) $U_1 < V_1, U_2 < V_2$ ve $f : U_1 \to U_2$ bir lineer dönüşüm olduğundan dolayı$f(U_1) < V_2$ olur. Burada $\forall x, y \in f^{-1}(U_2)$ ve $\alpha \in F$ için $W_2(x+y) \supseteq W_2(x) \cap W_2(y)$ ve $W_2(\alpha x) \supseteq W_2(x)$ dir. Böylece $(W_2, f(U_1)) \widetilde{<}_i V_2$ olur.

iii) $Kerf < V_1$ ve $Kerf \subseteq U_1$ olduğunda $\forall x, y \in f^{-1}(U_2)$ ve $\alpha \in F$ için $W_1(x+y) \supseteq W_1(x) \cap W_1(y)$ ve $W_1(\alpha x) \supseteq W_1(x)$ dir. Böylece $(W_1, Kerf) \widetilde{<}_i V_1$ ispatı sağlanır.

■

Sonuç 3.32. $(W_1, U_1) \widetilde{<}_u V_1$, $(W_2, U_2) \widetilde{<}_u V_2$ ve $f; U_1 \to U_2$ lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $(W_2, \{0_{V_2}\}) \widetilde{<}_u V_2$ dir.

İspat. Teorem 3.31. $(W_1, Kerf) \widetilde{<}_i V_1$. Bu durumda $(W_2, f(U_1)) \widetilde{<}_i V_2$ olup $(W_2, \{0_{U_2}\}) \widetilde{<}_i V_2$ dir. ■

KAYNAKLAR

[1]. Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B. Soft sets and soft rings. *Computers and Mathematics with Applications* **2010**, *59*, 3458–3463.

[2]. Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., Shabir, M. On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications* , **2009**, *57*, 1547–1553.

[3]. Aktaş, H., Çağman, N. Soft sets and soft groups. *Information Science* **2007**, *177*, 2726–2735.

[4]. Aygünoğlu, A., Aygün, H. Introduction to fuzzy soft groups, *Computers and Mathematics with Applications* , **2009**, *58*, 1279–1286.

[5]. Çağman, N., Enginoğlu, S. Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research* , **2010**, *207*, 848–855.

[6]. Çağman, N., Çıtak, F., Enginoğlu S., Fuzzy parametized fuzzy soft set theory and its applications. *Turkish Journal of Fuzzy Systems*, **2010**, *1*, 21–35.

[7]. Çağman, N., Çıtak, F., Enginoğlu S., Fuzzy soft set theory and its applications, *Iranian Journal of Fuzzy System* , **2011**, *8/3*, 137–147.

[8]. Çağman, N., Çıtak, F., Aktaş, H., Soft int-groups and its applications to group theory, *Neural Computing and Applications*, **2012**, *21*, 151–158.

[9]. Çağman, N., Çıtak, F., Soft int-rings and its algebraic applications, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, *28*, **2015**, 1225–1233.

[10]. Feng, F., Jun Y.B., Zhao, X. Soft semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, **2008**, *56*, 2621–2628.

[11]. Jun Y.B., Soft BCK/BCI-algebras, *Computers and Mathematics with Applications* **2008**, *56*, 1408–1413.

[12]. Jun Y.B., Park, C.H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras, *Information Sciences*, **2008**, 1*178*, 2466–2475.

[13]. Jun Y.B., Lee, K.J., Zhan, J., Soft p-ideals of soft BCl-algebras, *Computers and Mathematics with Applications*, **2009**, *58*, 2060–2068.

[14]. Jun Y.B., Lee, K.J., Park, C.H., Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI-algebras, *Computers and Mathematics with Applications*, **2010**, *59*, 3180–3192.

[15]. Maji,P.K., Biswas, R., Roy, A.R., Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, **2003**, *45*, 555–562.

[16]. Sun, Q.M., Z.L. Z, LİU, J., Soft sets and soft modules, *Lecture Notes in Computer Science*, **2008**, *5009*, 403–409.

[17]. Kovkov, D.V., Kolbanov, V.M., Molodtsov D.A., Soft sets theory-based optimization, *Computer and Systems Sciences International*, **2007** , *46/6*, 872–880.

[18]. Molodtsov D.A., Soft sets theory-first results, *Computers and Mathematics with Applications*, **1999**, *37*,19–31.

[19]. Molodtsov D.A.,Leonov, V.Y., Kovkov, D.V., Soft sets technique and its application, *Nechetkie Sistemi i Myakie Vychisleniya*, **2006**, *1/1*, 8–39.

[20]. Atagün, A.O., Aygün, E., Groups of soft sets, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 30, **2016**, 729–733.

[21]. Atagün, A.O., Kamacı, H. ve Oktay, O., Reduced soft matrices and generalized products with applications in decision making, *Neural Computing and Applications*, 29, **2018**, 445–456.

[22]. Atagün, A.O., Sezgin Sezer, A. Soft substructures of rings fields and modules. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, **2011**, 592–601.

[23]. Kamacı, H., Atagün A.O. ve Toktaş, E., Bijective soft matrix theory and multi-bijective linguistic soft decision system, *Filomat*, 32(11), **2018**, 3799–3814.

[24]. Pei, D., Miao, D., From soft sets to information systems, in:Hu, X. , Liu, Q., Skowron, A. ; Lin, T.L., Yager, R.R., Zhang, B. (Eds:), *Proceedings of Granular Computing*, IEEE(2), **2005**, 617–621.

[25]. Sezer Sezgin A., Atagün A.O., Çağman N., Intersection Soft Subspaces and Union Soft Subspaces with their Applications, *Sohag Journal of Mathematics*,*2*, **2015**, 1–8.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler		
Adı Soyadı	Melike GÜVEN	
Doğum Yeri		
Doğum Tarihi		
Uyruğu	T.C.	
Telefon		
E-Posta Adresi		
Web Adresi		

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölüm	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2019

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	

Makale ve Bildiriler
2. ISPEC ULUSAL BİLİMSEL ARAŞTIRMALAR KONGRESİ 17-18 Ocak 2022, ADANA/ TÜRKİYE