T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ-HANKEL VE PELL-HANKEL MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Ali MERT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
MAYIS - 2012

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ-HANKEL VE PELL-HANKEL MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Ali MERT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd.Doç.Dr.Şerife BÜYÜKKÖSE

KIRŞEHİR
MAYIS - 2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Yrd.Doç.Dr.Şerife BÜYÜKKÖSE
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd.Doç.Dr.Baki YAĞBASAN
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd.Doç.Dr.Yasemin KIYMAZ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç.Dr.Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada Fibonacci ve Pell sayılarının özelliklerinden yararlanılarak Fibonacci-Hankel ve Pell-Hankel matrisleri tanımlanmıştır. Ayrıca bu matrislerin normları, bu sayıların özellikleri de dikkate alınarak incelenmiş ve sınırlar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Vektör normu, Matris normu, Spektral norm, Euclidean norm, Fibonacci-Hankel matrisi, Pell-Hankel matrisi

ABSTRACT

In this study, we defined Fibonacci-Hankel matrix and Pell-Hankel matrix by using Fibonacci and Pell numbers. In addition, we found new bounds of norms of these matrices, in accordance with specification these numbers.

Keywords: Vector norm, Matrix norm, Spektral norm, Euclid norm, Fibonacci-Hankel matrix, Pell-Hankel matrix

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Yrd.Doç.Dr Şerife BÜYÜKKÖSE'YE, benim bu günlere gelmemi sağlayan değerli aileme, öğrenim hayatım boyunca yanımda olan değerli öğretmenlerime teşekkürlerimi sunarım.

Ali MERT

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\|\|.\|\|$	Norm
$\|.\|$	Mutlak Değer
$\|\|.\|\|_1$	Toplam Normu
$\|\|.\|\|_2$	Spectral Norm
$\|\|.\|\|_F$	Frobenius Normu
$\|\|.\|\|_\infty$	Maksimum Normu
$c(A)$	Maksimum Sütün Normu
$r(A)$	Maksimum Satır Normu
A^H	Eşlenik Transpoze

1 ÖN BİLGİLER

1.1 Normlar

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan mutlak değer fonksiyonu ile; büyüklükleri, dizilerin yakınsaklığı, fonksiyonların sürekliliği, limitleri ve verilen bir reel sayı için bu sayıya en yakın asal ve tamsayıyı bulma gibi yaklaşım problemleri çözülebilir. Aynı şeyler bir vektör uzayı üzerinde tanımlanan bir norm için de geçerlidir. V reel vektör uzayı olmak üzere bu uzayda tanımlanan bir norm ile vektör normlarını karşılaştırabiliriz. Vektör dizilerinin yakınsaklığı irdelenebilir, dönüşümlerin sürek liligi ve limitleri çalışılabilir, verilen bir vektör için V vektör uzayının bir alt uzayı veya bir alt cümlesindeki en yakın elamanı bulmak gibi yaklaşım problemleri düşünülebilir. Bu problemler genellikle analiz, Lie teori, nümerik analiz, diferensiyel denklemlerde, Markov zincirlerinde, ekonometride, biyolojide ve sosyolojide, popülasyon modellemede, fizik ve kimyada denge durumlarında ortaya çıkar. Ayrıca normlar; singüler değer ayrışımında, $Ax = b$ probleminin analizinde ve şart sayısı kavramının tanımlanmasında önemli rol oynarlar. Bu bölümde vektör ve matris normları üzerinde duracağız.

Norm fonksiyonu $\|.\|$, $\|.\|_\alpha$ sembollerinden birisi ile gösterilecektir. α ise normun çeşidini belirten sabittir.

1.1.1 Vektör Normları

Tanım 1.1 [8] V,$\mathbb{F}$($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|.\| : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu;

1. $\forall x \in V$ için $\|x\| \geq 0$ (pozitif tanımlılık aksiyomu) ;
2. $x \in V$ olmak üzere $\|x\| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır;
3. $\forall x \in V$ ve $\alpha \in F$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (mutlak homojenlik aksiyomu) ;
4. $\forall x, y \in V$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona bir *vektör normu* denir.

Yani vektör normu, her x vektörüne karşılık gelen, $\|x\|$ şeklinde gösterilen negatif olmayan bir sayıdır.

Diğer bir ifade ile x vektörünün pozitif bir sayıya dönüştürülmesi işlemine norm denir.

Şimdi de vektör normlarının çeşitlerinden bahsedelim.

a) Toplam normu: [8] x bir vektör olmak üzere

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

şeklinde tanımlanır.

b) Euclid normu (Frobenius normu): [8] x bir vektör olmak üzere,

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır.

c) Maksimum normu : [8] x herhangi bir vektör olmak üzere,

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

ile tanımlanır.

(a) ve (b) de verilen normlar genel olarak $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Hölder normu (ℓ_p *normu*) olarak adlandırılır.
(1.1) eşitliği ile verilen Hölder (ℓ_p) normuna *p-normu* da denir. p-normlarının klasik bir sonucu olarak

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

$$\|(x, y)\| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

ile tanımlanan eşitsizliğe *Hölder Eşitsizliği* denir.

x herhangi bir vektör olmak üzere normlar arasında;

$a)\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_p$

$b)\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$

$c)\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

bağıntıları mevcuttur.

1.1.2 Matris Normları

Tanım 1.2 [8] $M_{m\times n}(F)$ $m \times n$ matrislerinin kümesini göstermek üzere,

$$M_N : M_{m\times n}(F) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm aşağıdaki şartları sağlarsa o zaman bu dönüşüme *matris normu* denir ve matris normu $A \in M_n(F)$ için $M_N(A) = \|A\|$ şeklinde gösterilir.

1. $A \in M_n(F)$ için $A \neq 0$ ise $\|A\| \geq 0$ ve $A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0$ dır.
2. $A \in M_n(F)$ ve $\alpha \in F$ için $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ dır.
3. $A, B \in M_n(F)$ için $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ dir.
4. $A, B \in M_n(F)$ için $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ dir.

Eğer sadece $(1), (2)$ ve (3) aksiyomları sağlanırsa, o zaman bu norma *genelleştirilmiş matris normu* , $(1), (2), (3)$ ve (4) aksiyomlarının hepsi sağlanırsa buna da *matris normu* denir.

Şimdi de kısaca bilinen matris norm çeşitlerini verelim.

Tanım 1.3 [8] $A = (a_{ij})_{m\times n}$ bir matris olmak üzere,

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanan norma *sütun normu* denir.

Tanım 1.4 [8] $A = (a_{ij})_{m\times n}$ bir matris olmak üzere,

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanan norma *satır normu* denir.

Tanım 1.5 [8] Herhangi bir A matrisinin A^T transpozesini alalım. A^T matrisinin elamanlarının her biri yerine elemanın kompleks konjugesini alarak elde edilen yeni $\left(\overline{A^T}\right)$ matrisine A matrisinin *hermitian* (eşlenik) transpozesi denir ve A^H ile gösterilir.

Tanım 1.6 [8] $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ve $A^H A$ nın özdeğerlerinin karaköküne A nın *singüler değerleri* denir ve A nın singüler değerleri kümesi

$$\sigma(A) = \{\sqrt{\lambda_i} \ : \lambda_i \ , A^H A \text{ nın özdeğerleri}\}$$

dir.

Tanım 1.7 [8] $A = (a_{ij})_{m\times n}$ matris ve A^H matrisi A matrisinin eşlenik transpozesi olmak üzere $A^H A$ çarpım matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğerinin kareköküne A matrisinin *spektral normu* denir ve $\|A\|_2$ ile gösterilir. Yani,
$\|A\|_2 = \{\lambda : \lambda, A^H A$ nın mutlak değerce en büyük özdeğerinin karekökü$\}$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)} = \sigma_{\max}(A)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.8 [8] $A = (a_{ij})_{m\times n}$ bir matris olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|A\|_E &= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.4) \\ &= \sqrt{\text{iz}(A^H A)} = \sqrt{\text{iz}(A A^H)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2(A)} \end{aligned}$$

ile verilen norma *Euclid normu* denir. Burada r rankı göstermektedir.

Bazen Euclid normu yerine *Frobenius normu, Schur norm* veya *Hilbert-Schmidt normu* ifadeleri de kullanılır.

Tanım 1.9 [8] $A = (a_{ij})_{m\times n}$ matris ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere;

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanan norma A matrisinin ℓ_p *normu* denir.

Tanım 1.10 [8] $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ve $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektörü için $1 \le p < \infty$ olmak üzere ℓ_p *operatör normu*

$$\|A\|_p = \max\{\|Ax\|_p : \|x\|_p = 1\} \tag{1.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.11 [8] $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisi için $1 \le p, q < \infty$ olmak üzere ℓ_{pq} *karma normu*

$$\|A\|_{pq} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Hemen belirtelim ki; ℓ_{pq} karma normunda $p = q$ durumunu göz önüne alırsak, o zaman bu norm ℓ_p matris normu olur.

Tanım 1.12 [8] $A = (a_{ij})_{m\times n}$ matris olsun. A matrisinin bütün satırlarının ve sütünlarının Euclid uzunlukları sırasıyla

$$r_i(A) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.8}$$

ve

$$c_j(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.9}$$

ile gösterilir. Ayrıca maksimum satır normu,

$$r(A) = \max_i \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2}$$

ve maksimum sütun normu,

$$c(A) = \max_j \sqrt{\sum_i |a_{ij}|^2}$$

şeklinde ifade edilir.

1.1.3 Matris Normları Arasındaki Bağıntılar

Matris normlarında $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_F$ ve $\|.\|_\infty$ sırasıyla satır, spectral, Frobenius (Euclid) ve sütun normlarını göstermek üzere, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ tipinde bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin normları arasında

- $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$
- $\|A\|_\triangle \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn}\|A\|_\triangle \qquad (\|A\|_\triangle = \max|a_{ij}|)$
- $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$
- $\dfrac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$

bağıntıları mecvuttur.

1.1.4 Hadamard Çarpımı

[8] $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$, $m \times n$ matrisler olsun. A ve B nin *Hadamard çarpımı*;

$$C = AoB = (a_{ij}b_{ij})$$

şeklinde bir $C = (a_{ij}b_{ij})$ $m \times n$ tipinde matristir ve

$$\|C\| \leq r_1(A)c_1(B) \qquad \textbf{[4]}$$

dir.

Hadamard çarpımı için uygun şartlar iki matrisin aynı mertebeye sahip olması gerektiğidir ve bilinen matris toplamında olduğu gibi karşılıklı aynı indisli elemanların çarpımı şeklindedir. Hadamard çarpımı alanındaki ilk sonuçlar Issai Schur tarafından elde edildiği için bu çarpım Schur çarpımı olarak da adlandırılır. Bu alandaki çalışmaların çoğunluğu Hadamard çarpımı altında pozitif yarı tanımlı matrislerin durumu ile alakalıdır.

1.2 Hankel Matrisi

Bir Hankel matrisi;

$$H_n = [h_{ij}]_{i,j=0}^{n-1}$$

şeklindedir ve burada $h_{ij} = h_{i+j}$ olarak tanımlanır. Yani

$$\mathbf{H_n} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \ldots & h_n \\ h_2 & h_3 & h_4 & \ldots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \ldots & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan da görüldüğü gibi Hankel matrisleri simetriktir.

1.3 Fibonacci Sayıları ve Özellikleri

[9] $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{1.10}$$

şeklinde tanımlanan sayılara *Fibonacci sayıları* denir. Bu sayılar Pisalı Leonardo Fibonacci tarafından tanımlanmıstır. Bazı Fibonacci sayıları;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	...

şeklinde verilebilir. Ayrıca Fibonacci sayılarının negatif indisli terimleri
$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ olmak üzere;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	...

şeklinde tanımlanır.

Fibonacci sayıları arasındaki bazı bağıntılar aşağıdaki gibidir.**[9]**

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1} \tag{1.11}$$

$$F_{n+1}F_{n-1} + F_n F_{n-1} = F_{n+1}^2 - F_n^2 \tag{1.12}$$

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1} \tag{1.13}$$

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1} \tag{1.14}$$

$$F_{n-1} + F_{n-2} = F_n \tag{1.15}$$

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{1.16}$$

$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n+2}F_{n-1} \tag{1.17}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} F_i F_{i-1} = F_{2n+1}^2 - 1 \tag{1.18}$$

1.4 Pell Sayıları ve Özellikleri

Pell dizisi $P_0 = 0, P_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ için

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Pell sayıları;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	...

şeklinde verilebilir. *Pell dizisinin* negatif indisli terimleri

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$$

olmak üzere,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P_{-n}	0	1	-2	5	-12	29	-70	169	...

şeklinde tanımlanır.

Pell sayıları arasındaki bazı bağıntılar aşağıdaki gibidir.**[4]**

$$P_{2n+1} = P_n^2 + P_{n+1}^2 \tag{1.19}$$

$$P_{n+r} = P_r P_{n+1} + P_{r-1} P_n \tag{1.20}$$

$$P_{2n} = P_n (P_{n+1} + P_{n-1}) \tag{1.21}$$

$$(-1)^n = P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 \tag{1.22}$$

$$-1 = 2P_n P_{n-1} + P_{n-1}^2 - P_n^2 \tag{1.23}$$

$$2P_{n-1} P_n = P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 - 2P_n P_{n+1} \tag{1.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^2 = \frac{P_n P_{n+1}}{2} \tag{1.25}$$

$$P_{2n+1} = 2P_{2n} + P_{2n-1} \tag{1.26}$$

2 FİBONACCİ-HANKEL MATRİSLERİ

2.1 Fibonacci-Hankel Matrisleri

Tanım 2.1 *Fibonacci-Hankel matrisi* $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i,j=0}^{n-1}$, $F_{ij} = F_{i+j}$ şeklinde tanımlanır ve burada F_n, n-inci Fibonacci sayısıdır.

Fibonacci-Hankel matrisi;

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{n-1} \\ F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_n \\ F_2 & F_3 & F_4 & \dots & F_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n-1} & F_n & F_{n+1} & \dots & F_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

2.2 Fibonacci Hankel Matrislerinin Normları İçin Sınırlar

Lemma 2.2 F_n, n-inci Fibonacci sayısı olmak üzere;

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{n-2}F_{n-1} = \begin{cases} F_n\left(F_n - F_{n-1}\right) - 1 & ; \ n \text{ tek} \\ \\ F_n\left(F_n - F_{n-1}\right) & ; \ n \text{ çift}\ . \end{cases}$$

İspat. $F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{n-2}F_{n-1}$ ifadesinin eşitini bulmak için; (1.17) eşitliğinde F_{n+2} yerine $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ değerini yazarsak,

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 - F_n^2 &= \left(F_{n+1} + F_n\right) F_{n-1} \\ &= F_{n+1}F_{n-1} + F_nF_{n-1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

elde edilir. (2.1) eşitliğinde n yerine sırasıyla 2,3,...,n-1 yazarsak

$$\begin{aligned}
F_3^2 - F_2^2 &= F_3F_1 + F_2F_1\\
F_4^2 - F_3^2 &= F_4F_2 + F_3F_2\\
F_5^2 - F_4^2 &= F_5F_3 + F_4F_3\\
\vdots \qquad &\qquad \vdots\\
F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2 &= F_{n-2}F_{n-4} + F_{n-3}F_{n-4}\\
F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 &= F_{n-1}F_{n-3} + F_{n-2}F_{n-3}\\
F_n^2 - F_{n-1}^2 &= F_nF_{n-2} + F_{n-1}F_{n-2}
\end{aligned}$$

ifadelerini buluruz. Bu ifadeyi taraf tarafa toplarsak;

$$F_n^2 - F_2^2 = F_1F_3 + F_2F_4 + \ldots + F_{n-2}F_n + \underbrace{F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{n-2}F_{n-1}}_{\mathbf{x}\text{ dersek}} \tag{2.2}$$

elde ederiz. Bu ifadede **x** i bulmak için, (1.16) eşitliğinde n yerine sırasıyla $2, 3, \ldots, n-1$ yazıp;

$$\begin{aligned}
F_3F_1 &= (-1)^2 + F_2^2\\
F_4F_2 &= (-1)^3 + F_3^2\\
F_5F_3 &= (-1)^4 + F_4^2\\
\vdots \qquad &\qquad \vdots\\
F_{n-1}F_{n-3} &= (-1)^{n-2} + F_{n-2}^2\\
F_nF_{n-2} &= (-1)^{n-1} + F_{n-1}^2
\end{aligned}$$

işlemlerini yapar taraf tarafa toplarsak;

$$F_1F_3 + F_2F_4 + \ldots + F_{n-2}F_n = F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_{n-1}^2 + \underbrace{(-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{n-1}}_{\mathbf{y}}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliğin (2.2) de yerine yazılmasıyla;

$$\begin{aligned}
F_n^2 - F_2^2 &= F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_{n-1}^2 + \mathbf{y} + \mathbf{x}\\
F_n^2 - 1^2 &= F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_{n-1}^2 + \mathbf{y} + \mathbf{x}\\
F_n^2 &= 1 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_{n-1}^2 + \mathbf{y} + \mathbf{x}
\end{aligned}$$

$F_1^2 = 1$ olduğundan,

$$F_n^2 = \underbrace{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_{n-1}^2}_{\mathbf{z}} + \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

bulunur. (1.11) eşitliğinden,

$$\mathbf{z} = F_{n-1}F_n$$

olarak bulunur. Buradan,

$$F_n^2 = F_{n-1}F_n + \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

olup, bu eşitlikte $\mathbf{y}$ değeri

$$(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & ; n \text{ tek ise} \\ 0 & ; n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklindedir ve dolayısıyla;

$$\mathbf{x} = F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{n-2}F_{n-1} = \begin{cases} F_n\left(F_n - F_{n-1}\right) - 1 & ; n \text{ tek ise} \\ \\ F_n\left(F_n - F_{n-1}\right) & ; \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olarak bulunur. ■

Her n doğal sayısı için $2n$ çift sayı olduğundan lemmada verilen eşitlik gereği,

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{2n-2}F_{2n-1} = F_{2n}(F_{2n} - F_{2n-1})$$

elde edilir. Yine lemmanın ifadesi kullanılarak her n doğal sayısı için $2n+1$ tek sayı olduğundan,

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n+1}(F_{2n+1} - F_{2n}) - 1$$

eşitlikleri doğrudur.

Teorem 2.3 $\mathbf{F}$, $n \times n$ tipinde bir Fibonacci-Hankel matrisi olmak üzere;

$$\|\mathbf{F}\|_2 \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}\{F_{2n}(F_{2n} - F_{2n-1}) - 2(F_n(F_n - F_{n-1}) - 1)\}} & ; n \text{ tek ise} \\ \\ \sqrt{\frac{1}{n}\{F_{2n}(F_{2n} - F_{2n-1}) - 2(F_n(F_n - F_{n-1}))\}} & ; \quad n \text{ çift ise} \end{cases} \tag{2.3}$$

şeklindedir.

İspat. Bir $\mathbf{F}$ Fibonacci-Hankel matrisi aşağıdaki şekilde olduğundan

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{n-1} \\ F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_n \\ F_2 & F_3 & F_4 & \dots & F_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n-1} & F_n & F_{n+1} & \dots & F_{2n-2} \end{bmatrix}$$

ve bu matrisin Euclidean normu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\|_E^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} F_k^2 + \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + \ldots + \sum_{k=n-1}^{2n-2} F_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} F_k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}^2 + \ldots + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+n-1}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} F_{k+i}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(F_k^2 + F_{k+1}^2 + \ldots + F_{k+n-1}^2)}_{a_k} \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade de a_k yı bulmak demek (1.11) formülünde sırasıyla n yerine $k+n-1$ ve n yerine $k-1$ yazıp aralarındaki farkı almak demektir. Buradan (2.4) eşitliği,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\|_E^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+n-1}F_{k+n} - \sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}F_k \\ &= \sum_{k=n}^{2n-1} F_{k-1}F_k - \sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}F_k \\ &= \sum_{k=n}^{2n-1} F_{k-1}F_k - \sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}F_k + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}F_k - \sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}F_k \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} F_{k-1}F_k - 2\sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}F_k \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{F}\|_E^2 = F_{-1}F_0 + F_0F_1 + F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{2n-2}F_{2n-1}$$
$$-2(F_{-1}F_0 + F_0F_1 + F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{n-2}F_{n-1})$$

$F_0 = 0$ olduğundan

$$\|\mathbf{F}\|_E^2 = F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{2n-2}F_{2n-1}$$
$$-2(F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{n-2}F_{n-1})$$

şeklindedir. Lemma(2.2) gereği bu toplam;

$$\|\mathbf{F}\|_E^2 = \begin{cases} \{F_{2n}(F_{2n} - F_{2n-1}) - 2(F_n(F_n - F_{n-1}) - 1)\} & ; n \text{ tek ise} \\ \\ \{F_{2n}(F_{2n} - F_{2n-1}) - 2(F_n(F_n - F_{n-1}))\} & ; \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olarak bulunur. Normlar arasında

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E \tag{2.5}$$

bağıntısı geçerli olduğundan;

$$\|\mathbf{F}\|_2 \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}\{F_{2n}(F_{2n} - F_{2n-1}) - 2(F_n(F_n - F_{n-1}) - 1)\}} & ; n \text{ tek ise} \\ \\ \sqrt{\frac{1}{n}\{F_{2n}(F_{2n} - F_{2n-1}) - 2(F_n(F_n - F_{n-1}))\}} & ; \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 2.4 F, $n \times n$ tipinde bir Fibonacci-Hankel matrisi olmak üzere;

$$\|\mathbf{F}\|_2 \leq \sqrt{R(1+S)} \tag{2.6}$$

dır. Burada

$$R = F_{2n-2}F_{2n-1} - F_{n-2}F_{n-1}$$

ve

$$S = F_{2n-3}F_{2n-2} - F_{n-2}F_{n-1}$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{cases} a_{ij} = 1 & ;\ i \neq n-1 \\ a_{ij} = F_{i+j} & ;\ i = n-1 \end{cases}$$

ve

$$\mathbf{B} = [b_{ij}] = \begin{cases} b_{ij} = F_{i+j} & ;\ i \neq n-1 \\ b_{ij} = 1 & ;\ i = n-1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa matris formları

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ F_{n-1} & F_n & \dots & F_{2n-2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_{n-1} \\ F_1 & F_2 & \dots & F_n \\ F_2 & F_3 & \dots & F_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{n-2} & F_{n-1} & \dots & F_{2n-3} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve **[4]** $\mathbf{F} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ dir.
Fibonacci sayılarının özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} r_1(\mathbf{A}) &\equiv \max_i \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=-1}^{n-2} F_{n+k}^2} \\ &= \sqrt{F_{n-1}^2 + F_n^2 + F_{n+1}^2 + \ldots + F_{2n-2}^2} \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n} {F_i}^2 = F_n F_{n+1}$ eşitliğinde n yerine sırasıyla $2n-2$ ve $n-2$ yazıp aralarındaki farkı alırsak; buradan

$$r_1(\mathbf{A}) = \sqrt{F_{2n-2}F_{2n-1} - F_{n-2}F_{n-1}}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} c_1(\mathbf{B}) &\equiv \max_j \sqrt{\sum_i |b_{ij}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{k=-1}^{n-3} F_{n+k}^2} \\ &= \sqrt{1 + F_{n-1}^2 + F_n^2 + \ldots + F_{2n-3}^2} \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n} {F_i}^2 = F_n F_{n+1}$ eşitliğinde n yerine sırasıyla $2n-3$ ve $n-2$ yazıp aralarındaki farkı alırsak buradan,

$$c_1(\mathbf{B}) = \sqrt{1 + F_{2n-3}F_{2n-2} - F_{n-2}F_{n-1}}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\|\mathbf{F}\|_2 \leq r_1(\mathbf{A})c_1(\mathbf{B}) \tag{2.7}$$

olduğundan

$$\|\mathbf{F}\|_2 \leq \sqrt{R(1+S)}$$

burada $R = F_{2n-2}F_{2n-1} - F_{n-2}F_{n-1}$ ve $S = F_{2n-3}F_{2n-2} - F_{n-2}F_{n-1}$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

3 PELL-HANKEL MATRİSLERİ

3.1 Pell-Hankel Matrisleri

Tanım 3.1 *Pell-Hankel matrisi* $\mathbf{P} = [P_{ij}]_{i,j=0}^{n-1}$, $P_{ij} = P_{i+j}$ şeklinde tanımlanır ve burada P_n, n-inci Pell sayısıdır.

Pell-Hankel matrisi;

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_n \\ P_2 & P_3 & P_4 & \dots & P_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n-1} & P_n & P_{n+1} & \dots & P_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3.2 Pell-Hankel Matrislerinin Normları İçin Sınırlar

Lemma 3.2 [4] P_n , n-inci Pell sayısı olmak üzere;

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-1}P_n = \frac{P_{2n-1} + 2P_nP_{n-1} - 1}{4}$$

dir.

İspat. $P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-1}P_n$ ifadesinin eşitini bulmak için (1.24) eşitliğinde n yerine sırasıyla $2, 3, \ldots, n-1, n$ yazıp

$$\begin{aligned}
2P_1P_2 &= P_3^2 - P_1^2 - 2P_2P_3 \\
2P_2P_3 &= P_4^2 - P_2^2 - 2P_3P_4 \\
2P_3P_4 &= P_5^2 - P_3^2 - 2P_4P_5 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
2P_{n-3}P_{n-2} &= P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2 - 2P_{n-2}P_{n-1} \\
2P_{n-2}P_{n-1} &= P_n^2 - P_{n-2}^2 - 2P_{n-1}P_n \\
2P_{n-1}P_n &= P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 - 2P_nP_{n+1}
\end{aligned}$$

bu ifadeyi taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned}
2(P_1P_2+P_2P_3+\ldots+P_{n-1}P_n) &= P_{n+1}^2+P_n^2 - P_1^2 - P_2^2 - 2P_nP_{n+1} \\
&\quad -2(P_2P_3+\ldots+P_{n-1}P_n) - 2P_1P_2 + 2P_1P_2 \\
&= P_{n+1}^2 + P_n^2 - P_1^2 - P_2^2 - 2P_nP_{n+1} \\
&\quad -2(P_1P_2+P_2P_3+\ldots+P_{n-1}P_n) + 2P_1P_2 \\
4(P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-1}P_n) &= \underbrace{P_{n+1}^2+P_n^2}_{P_{2n+1}} - (1)^2 - (2)^2 - 2P_nP_{n+1} + 2(1)(2)
\end{aligned}$$

$$(P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-1}P_n) = \frac{P_{2n+1} - 2P_nP_{n+1} - 1}{4} \tag{3.1}$$

(1.26) eşitliğinindeki P_{2n} yerine (1.21) eşitliğinin yazılmasıyla

$$P_{2n+1} = 2P_nP_{n+1} + 2P_nP_{n-1} + P_{2n-1}$$

şeklindedir. Bu eşitliğin (3.1) de yerine yazılmasıyla;

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-1}P_n = \frac{P_{2n-1} + 2P_nP_{n-1} - 1}{4}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 3.3 **P** bir Pell-Hankel matrisi olmak üzere;

$$\|\mathbf{P}\|_2 \geq \sqrt{\frac{1}{8n}\{P_{4n-3} + 2P_{2n-1}P_{2n-2} - 2P_{2n-3} - 4P_{n-1}P_{n-2} + 1\}} \tag{3.2}$$

İspat. Bir **P** Pell-Hankel matrisi aşağıdaki şekilde olduğundan

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_n \\ P_2 & P_3 & P_4 & \dots & P_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n-1} & P_n & P_{n+1} & \dots & P_{2n-2} \end{bmatrix}$$

ve bu matrisin Euclidean normu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}\|_E^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2+\sum_{k=1}^{n} P_k^2+\ldots+\sum_{k=n-1}^{2n-2} P_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2+\sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}^2+\ldots+\sum_{k=0}^{n-1} P_{k+n-1}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} P_{k+i}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(P_k^2+P_{k+1}^2+\ldots+P_{k+n-1}^2)}_{y_k} \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade de y_k ifadesini bulmak için (1.25) eşitliğinde n yerine $k+n-1$ ve $k-1$ yazıp aralarındaki farkı alırsak; (3.3) eşitliği

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} y_k &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_{k+n-1}P_{k+n}}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_{k-1}P_k}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} P_{k+n-1}P_{k+n}-\sum_{k=0}^{n-1} P_{k-1}P_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=n}^{2n-1} P_{k-1}P_k-\sum_{k=0}^{n-1} P_{k-1}P_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=n}^{2n-1} P_{k-1}P_k-\sum_{k=0}^{n-1} P_{k-1}P_k+\sum_{k=0}^{n-1} P_{k-1}P_k-\sum_{k=0}^{n-1} P_{k-1}P_k\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2n-1} P_{k-1}P_k - 2\sum_{k=0}^{n-1} P_{k-1}P_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(P_{-1}P_0 + P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{2n-2}P_{2n-1}\right)$$
$$-\left(P_{-1}P_0 + P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-2}P_{n-1}\right)$$

$P_0 = 0$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k = \frac{1}{2}\left(P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{2n-2}P_{2n-1}\right)$$
$$-\left(P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-2}P_{n-1}\right)$$

şeklindedir. Lemma(3.2) gereği bu toplam;

$$\|\mathbf{P}\|_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{P_{4n-3} + 2P_{2n-1}P_{2n-2} - 1}{4}\right) - \left(\frac{P_{2n-3} + 2P_{n-1}P_{n-2} - 1}{4}\right)$$

olarak bulunur. Normlar arasında

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E$$

bağıntısı geçerli olduğundan;

$$\|\mathbf{P}\|_2 \geq \sqrt{\frac{1}{8n}\{P_{4n-3} + 2P_{2n-1}P_{2n-2} - 2P_{2n-3} - 4P_{n-1}P_{n-2} + 1\}}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 3.4 **P** bir Pell-Hankel matrisi olmak üzere;

$$\|\mathbf{P}\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{2}R\left(1 + \frac{1}{2}S\right)} \tag{3.4}$$

dır. Burada

$$R = P_{2n-2}P_{2n-1} - P_{n-2}P_{n-1}$$

ve

$$S = P_{2n-3}P_{2n-2} - P_{n-2}P_{n-1}$$

şeklindedir.

İspat. **A** ve **B** matrislerini şu şekilde tanımlayalım.

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{cases} a_{ij} = 1 & , \ i \neq n-1 \\ a_{ij} = P_{i+j} & , \ i = n-1 \end{cases}$$

olup **A** nın matris formu;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ P_{n-1} & P_n & \ldots & P_{2n-2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{B} = [b_{ij}] = \begin{cases} b_{ij} = P_{i+j} & , \ i \neq n-1 \\ b_{ij} = 1 & , \ i = n-1 \end{cases}$$

olup **B** nın matris formu;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \ldots & P_{n-1} \\ P_1 & P_2 & \ldots & P_n \\ P_2 & P_3 & \ldots & P_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n-2} & P_{n-1} & \ldots & P_{2n-3} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve $\mathbf{P} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ dir.
Pell sayılarının özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} r_1(\mathbf{A}) &\equiv \max_i \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=-1}^{n-2} P_{n+k}^2} \\ &= \sqrt{P_{n-1}^2 + P_n^2 + P_{n+1}^2 + \ldots + P_{2n-2}^2} \end{aligned}$$

elde ederiz. (1.25) eşitliğinde n yerine $2n-2$ ve $n-2$ yazıp aralarındaki farkı alırsak buradan;

$$r_1(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{1}{2}(P_{2n-2}P_{2n-1} - P_{n-2}P_{n-1})}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
c_1(\mathbf{B}) &\equiv \max_j \sqrt{\sum_i |b_{ij}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{k=-1}^{n-3} P_{n+k}^2} \\
&= \sqrt{1 + P_{n-1}^2 + P_n^2 + \ldots + P_{2n-3}^2}
\end{aligned}
$$

(1.25) eşitliğinde n yerine $2n-3$ ve $n-2$ yazıp aralarındaki farkı alırsak;

$$
c_1(\mathbf{B}) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}(P_{2n-3}P_{2n-2} - P_{n-2}P_{n-1})}
$$

olarak bulunur. Böylece

$$
\|\mathbf{P}\|_2 \leq r_1(\mathbf{A})c_1(\mathbf{B}) \tag{3.5}
$$

olduğundan

$$
\|\mathbf{P}\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{2}R(1 + \frac{1}{2}S)}
$$

elde edilir. Burada

$$
R = P_{2n-2}P_{2n-1} - P_{n-2}P_{n-1}
$$

ve

$$
S = P_{2n-3}P_{2n-2} - P_{n-2}P_{n-1}
$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

KAYNAKLAR

[1] *Eylem G., Ateş F., Güngör A.D., Cangül İ.N., Çevik A.S., On The Norms of Teopliz and Hankel Matrices with Pell Numbers, ICNAAM Numerical Analysis and Applied Mathematics, International Conference Vol.2,* **2010**.

[2] *Horn R.A, Johnson C.R., Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press,* **1991**.

[3] *Horodam, A.F., Pell Identities , Fibonacci Quarterly, 9(3): 245-252* (**1971**).

[4] *Kılıc E. and D.Tascı, The Linear Algebra of the Pell Matrix, Bol.Soc.Mat.Mexicana (3), Vol. 11,* **2005**.

[5] *Mathias R., The Spectral Norm of Nonnegative Matrix, Linear Algebra and Its Appl. 131,269-284,* **1990**.

[6] *Reams R., Hadamard Inverses, Square Roots and Products of Almost Semidefinite Matrices, Linear Algebra Abd its Appl. 288, 35-43,* **1999**.

[7] *Solak S., D. Bozkurt, On the spectral norms of Cauchy-Teoplitz and Cauchy-Hankel matrices, Applied Mathematics and Computation 140, 231-238,*(**2003**).

[8] *Taşçı D., Lineer Cebir, Ankara* **2011**.

[9] *Vajda S., Fibonacci and Lucas Numbers, And the Golden Section Theory and Applications ,Ellis Horwood Limited* **(1989)** *England.*

[10] *Zielke G., Some Remarks on Matrix Norms, Condition Numbers and Error Estimates for Linear Equations, Linear Algebra and Its Appl. 110, 29-41,* **1998**.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Ali MERT
Doğum Tarihi	:	17.09.1987
Doğum Yeri	:	Kırşehir
Ünvanı	:	Yüksek Lisans Öğrencisi
Anabilim Dalı	:	Cebir ve Sayılar Teorisi

Eğitim

Orta Öğrenimi	:	Ankara Lisesi
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2006
Yüksek Lisans	:	2010 -