T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ VE UYGULAMALARI

Yusuf SÖKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
AĞUSTOS - 2012

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ VE UYGULAMALARI

Yusuf SÖKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
YRD. DOÇ. DR. İ. ONUR KIYMAZ

KIRŞEHİR
AĞUSTOS - 2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mahir KADAKAL
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Yasemin KIYMAZ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Özarslan ve Özergin 2010 yılında yayınladıkları bir makalelerinde [1], orijinal Riemann-Liouville kesirli türev operatörüne ekstra bir parametre ekleyerek operatörü genişletmişlerdir.

Biz bu tez çalışmasında, aynı fikirden etkilenerek, Caputo kesirli türev operatörünün bir genelleştirilmesini tanımlayacağız. Ayrıca bu operatörün bazı özelliklerini verecek ve elementer fonksiyonların bir sınıfının genelleştirilmiş türevlerini elde edeceğiz.

Anahtar Kelimeler: Kesirli türev operatörü, Hipergeometrik fonksiyonlar, Caputo kesirli türevi, Mellin Dönüşümü.

ABSTRACT

In 2010, Özarslan and Özergin give an extension of Riemann-Liouville fractional derivative operator with including an extra parameter to the original operator [1].

In this thesis, inspired by the same idea, we introduce an extension of Caputo fractional derivative operator. The extended Caputo fractional derivatives of some elementary functions and some properties of the extended fractional derivative operator are also presented.

Keywords: Fractional derivative operator, Hypergeometric functions, Caputo fractional derivative, Mellin transform.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim süresince değerli ve derin bilgileriyle bana yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek destek olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ'a, titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA'ya, eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yusuf SÖKMEN

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\Gamma(x)$	: Gama fonksiyonu
$\Gamma_p(x)$	: Genelleştirilmiş Gama fonksiyonu
$B(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$B_p(x,y)$	: Genelleştirilmiş Beta fonksiyonu
${}_2F_1$	: (Gauss) Hipergeometrik fonksiyon
F_p	: Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon
$(\alpha)_n$	: Pochhammer sembolü
I_z^{α}	: Riemann-Liouville kesirli integrali
$\mathbf{D}_z^{-\alpha}$	: Riemann-Liouville kesirli integrali
$\mathbf{D}_z^{\alpha}$	: Riemann-Liouville kesirli türevi
$\mathbf{D}_z^{-\alpha,p}$	: Genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli türevi
D_z^{α}	: Caputo kesirli türevi
$D_z^{\alpha,p}$	: Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi
$\mathfrak{M}$	: Mellin dönüşümü
$Re(x)$	: x kompleks değişkeninin reel kısmı

1 GİRİŞ

Kesirli mertebeden türev ve integral, Leibniz ve Newton tarafından ayrıntılı olarak incelenen klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmesidir. Kesirli mertebeden türev ile ifade edilmek istenen aslında herhangi bir mertebeden türevdir. Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları tamsayı mertebeden türev ve integral kavramları kadar eski olup, kesirli türev ifadesi birçok kaynakta da belirtildiği gibi ilk defa 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'a yazdığı mektupta geçmektedir [2]. Leibniz'in mektubunda L'Hospital'a yönelttiği "Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?" sorusu kesirli diferensiyel kavramının ilk ortaya çıkışı olarak gösterilebilir. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler ve Abel gibi birçok matematikçi de aynı konu üzerine çalışmışlardır [3].

Kesirli türev için literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir. Bunlardan bazıları Riemann-Liouville (R-L), Caputo, Grünwald-Letnikov, Wely, Riesz kesirli türevleridir [4-7]. Ancak, kesirli mertebeden türev nasıl tanımlanırsa tanımlansın türev, mertebesi tamsayıya eşit olacak şekilde seçildiğinde ortaya çıkan ifade tam sayı mertebeden türev ifadesi ile aynı olmaktadır. Yapılan bazı çalışmalarda belirli şartlar altında bu tanımların eşdeğer olduğu gösterilmiştir [4-7]. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen, tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları farklılık gösterir [4-7]. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının olması, problemin türüne göre en uygun olanının kullanılmasını ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar.

Caputo kesirli türev tanımı, Riemann-Liouville tanımının Laplace dönüşümü uygulamalarında ortaya çıkan başlangıç değerlerinin hesaplanması veya deneysel yolla ölçülmesi problemini ortadan kaldırmak için 1960'lı yıllarda İtalyan matematikçi M. Caputo tarafından önerilmiştir. Caputo yaklaşımının temel avantajı, Caputo türevli kesirli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır. Bu yüzden literatürde yer alan son çalışmalarda, kesirli diferensiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Riemann-Liouville kesirli türev operatörü yerine Caputo kesirli türev operatörü daha çok tercih edilmektedir.

Son yıllarda kesirli adi ve kısmi diferensiyel denklemler ile kesirli integral denklemlerinin çözümlerinin elde edilmesine yönelik çalışmalar artmıştır. Kesirli diferensiyel denklemlerin bir çoğunun analitik çözümü bulunamadığından yaklaşık ya da sayısal çözümlerinin bulunması için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin kesirli diferensiyel denklemlere uygulamalarında, kesirli integral ve türev operatörleri etkili bir şekilde kullanılmaktadır [8-12].

Literatürde, Riemann-Liouville kesirli türevi ile kastedilen sol türevdir. Keyfi bir $[a, b]$ aralığında tanımlanan ve fiziksel sistem sürecini ifade eden $f(t)$ fonksiyonunu ele alalım. Sol ve sağ kesirli türevler için kullanılan gösterimler sırasıyla ${}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}$, ${}_t\mathbf{D}_b^{\alpha}$ olmak üzere, sağ türev f fonksiyonunun gelecekteki durumunu ifade eder. Ancak, f sürecinin şimdiki durumu gelecekteki durumuna bağlı değildir. Bu yüzden fiziksel bir problemin tanımlanmasında sağ türev genellikle ihmal edilir [4]. Bu çalışmada kesirli türev tanımı olarak sol türev ve $\mathbf{D}_t^{\alpha}$ gösterimi kullanılacaktır.

Bu çalışmada genel olarak Riemann-Liouville kesirli türev ve integral tanımları ile Caputo kesirli türev tanımı ele alınmış ve genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli türevinden yola çıkılarak genelleştirilmiş Caputo kesirli türev tanımı verilmiştir.

Tez dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak bazı tanım, lemma ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Riemann-Liouville kesirli türev ve integral tanımlarının elde edilmesi, bunların ortak gösterimi, genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli türevi ve Caputo kesirli türev tanımı ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi tanımlanıp, bazı hipergeometrik fonksiyonlara hem klasik hem de genelleştirilmiş Caputo türevi uygulanarak elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılacak bazı temel bilgiler verilecektir.

2.1 GAMA FONKSİYONU

Gama fonksiyonunu ifade etmek için

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-ut} dt = \frac{1}{u} \tag{2.1}$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. Bu integral $c > 0$ olmak üzere her $c \leq u \leq d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ değerine düzgün yakınsaktır [13].

(2.1) eşitliğinden u değişkenine göre türevler alarak

$$\begin{aligned} -F'(u) &= \int_0^{\infty} te^{-ut} dt = \frac{1}{u^2} \\ F''(u) &= \int_0^{\infty} t^2 e^{-ut} dt = \frac{2!}{u^3} \\ -F'''(u) &= \int_0^{\infty} t^3 e^{-ut} dt = \frac{3!}{u^4} \end{aligned}$$

devam edilirse n. mertebeden türev için

$$\begin{aligned} (-1)^n F^{(n)}(u) &= \int_0^{\infty} t^n e^{-ut} dt \\ &= \frac{n!}{u^{n+1}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa;

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n değerinin herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır.

$x > 0$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere;

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{2.2}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanan fonksiyona *Gama fonksiyonu* denir [13].

Gama fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \\ &= x!\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan görülüyor ki, -1 değerinden büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı Gama fonksiyonuna *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denir.

$x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri

$$0! = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

olur. Bu sonuç $0!$ değerinin neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Matematikte n faktöriyel, $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.$, çarpımı ile verilir. Bu özellik, $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdiğinden, eğer $x = n$ bir tamsayı ise

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

yazılabilir. Eğer x bir tamsayı değilse

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} (-t^x e^{-t})\Big|_0^b + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

olacağından Γ fonksiyonu,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.3}$$

eşitliğini tüm $x > 0$ değerleri için sağlar [14].

(2.3) özelliği yardımıyla Gama fonksiyonu için, argümentin herhangi iki tamsayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçların bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri de kolayca hesaplanabilir.

Daha önce pozitif x değerleri için tanımlanan Gama fonksiyonu negatif x değerleri içinde tanımlanabilir. Yani $\Gamma(x)$ tüm reel sayılara genişletilebilir. $1 \leq x \leq 2$ için

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \tag{2.4}$$

özelliği kullanılarak Gama fonksiyonunun bilinen değerlerinden yararlanıp her $x \in \mathbb{R}$ için $\Gamma(x)$ değerleri elde edilebilir.

Negatif x değerleri için;
$-1 < x < 0$ ise (2.4) eşitliğinde $0 < x+1 < 1$ olacağından ve $(x+1) \in (0,1)$ aralığındaki $\Gamma(x+1)$ değerleri bilindiğinden, $\Gamma(x)$ değerleri $x \in (-1,0)$ için bulunabilir.

Benzer şekilde, $-2 < x < -1$ ise $0 < x+2 < 1$ olup, $\Gamma(x)$ değerleri

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}$$

yardımıyla bulunabilir.

Genellenerek, $-n < x < -n+1$ ise $0 < x+n < 1$ olduğundan

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$$

eşitliği ile $\Gamma(x)$ değerleri hesaplanabilir. Buradan Gama fonksiyonunun sıfır ve negatif tamsayılar için sınırsız yani değerinin sonsuz olduğu görülür.

2.2 BETA FONKSİYONU

$B(x,y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad Re(x) > 0, Re(y) > 0 \tag{2.5}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyon olup

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1}d\theta \tag{2.6}$$

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du \tag{2.7}$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.8}$$

biçimlerinde de ifade edilebilir. Beta fonksiyonunun yukarıda verilen dört tanımı eş anlamlıdır [13]. Şöyle ki: (2.5) tanımında $t = \sin^2\theta$ alınırsa $dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$ olup

$$
\begin{aligned}
B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{x-1}(1-\sin^2\theta)^{y-1}\sin 2\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} (sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1}d\theta
\end{aligned}
$$

(2.6) tanımı elde edilir.

(2.5) tanımında $t = \frac{u}{1+u}$ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\
&= \int_0^{\infty} (\frac{u}{1+u})^{x-1}(1-\frac{u}{1+u})^{y-1}\frac{du}{(1+u)^2} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du
\end{aligned}
$$

(2.7) tanımı bulunur.

Beta fonksiyonunun Gama fonksiyonu cinsinden ifadesini veren (2.8) tanımında, Gama fonksiyonunun tanımlandığı (2.2) integralinde $t = s^2$ dönüşümü yapılırsa

$$
\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = 2\int_0^{\infty} s^{2x-1}e^{-s^2}ds
$$

bulunur ve aynı şekilde

$$
\Gamma(y) = 2\int_0^{\infty} t^{2y-1}e^{-t^2}dt
$$

yazılabilir. Buradan,

$$
\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^{2x-1}t^{2y-1}e^{-(s^2+t^2)}dtds
$$

olup, $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} r^{2(x+y)-2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta \\ &= \left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta\right]\left[2\int_0^{\infty} r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}dr\right] \\ &= B(x,y)\Gamma(x+y)\end{aligned}$$

(2.8) tanımı bulunur. Ayrıca Beta fonksiyonunun Gama fonksiyonu ile ilişkisini veren (2.8) eşitliğinden

$$B(x,y) = B(y,x)$$

olduğu görülmektedir. Bu eşitlik Beta fonksiyonunun *simetri özelliği* olarak adlandırılır.

Beta fonksiyonunun (2.7) tanımında $x + y = 1$ alınırsa

$$B(x,1-x) = \int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{1+u}du$$

elde edilir. Bu integralin değeri rezidü yardımıyla hesaplandığında $0 < x < 1$ için

$$B(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

olur. Bu özellikten yararlanarak $x = \frac{1}{2}$ için,

$$\begin{aligned}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \\ &= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi\end{aligned}$$

olur ve böylece $\Gamma(\frac{1}{2})$ değeri

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

olarak hesaplanır.

2.3 GENELLEŞTİRİLMİŞ GAMA VE BETA FONKSİYONLARI

Özel fonksiyonların tanım kümesi genişletilerek elde edilen fonksiyonlardan, bu özel fonksiyonların önemli özelliklerini sağlaması beklenir. Elbette orijinal özel fonksiyon ve özellikleri, genelleştirmenin bir özel durumu olarak tekrar düzenlenmelidir.

Euler faktöriyel fonksiyonunu, doğal sayılardan kompleks düzlemin sağ yarısı üzerinde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad Re(\alpha) > 0 \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlı Gama fonksiyonuna genellemiştir.

Legendre (2.9) integralini parçalayıp sırasıyla üst ve alt sınırlarını x alarak Gama fonksiyonunu

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$
$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

şeklinde $\gamma(\alpha, x)$, $\Gamma(\alpha, x)$ parçalayarak *tam olmayan Gama fonksiyonlarını* tanımlamıştır [14,15].

Chaudhry ve Zubair, (2.9) integraline düzenleyici bir $e^{\frac{-p}{t}}$ çarpanı ekleyerek genelleştirilmiş Gama fonksiyonunu

$$\Gamma_p(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t-\frac{p}{t}} dt, \quad Re(p) > 0 \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlamış ve Gama fonksiyonunun tanım kümesini tüm kompleks düzleme genişletmişlerdir [17]. Bu çarpan, $Re(p) > 0$ için

$t = 0$ limitinden gelen tekilliği kaldırır ve $p = 0$ için genelleştirilmiş fonksiyonu orijinal Gama fonksiyonuna indirger.

Bu Γ_p genelleştirilmiş Gama fonksiyonunun Macdonald fonksiyonu $K_\alpha(2\sqrt{p})$ ile

$$\Gamma_p(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t-\frac{p}{t}} dt = 2p^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{p}) \quad Re(p) > 0 \qquad (2.11)$$

şeklinde bir ilişkisi vardır [16]. Ayrıca genelleştirilmiş Gama fonksiyonu aşağıdaki indirgeme bağıntısı ve yansıma formülünü sağlar:

$$\Gamma_p(\alpha+1) = \alpha\Gamma_p(\alpha) + p\Gamma_p(\alpha-1),$$

$$\Gamma_p(-\alpha) = p^{-\alpha}\Gamma_p(\alpha).$$

Burada dikkat edilmelidir ki genelleştirilmiş Macdonald ve Gama fonksiyonları arasındaki (2.11) ilişkisi orijinal Gama fonksiyonunda görülmez.

Literatür tarandığında genelleştirilmiş Gama fonksiyonunun çeşitli mühendislik ve fiziksel problemlerde oldukça etkili olduğu görülmüştür [17-20].

Ayrıca düzenleyici $e^{\frac{-p}{t}}$ çarpanının Riemann'ın Zeta fonksiyonunun tanım kümesinin genişletilmesinde de oldukça kullanışlı olduğu saptanmıştır [20].

Gama ve Zeta fonsiyonları için bu düzenleyici $e^{\frac{-p}{t}}$ çarpanının geçerliliği dikkate alınarak, başta Euler'in Beta fonksiyonu olmak üzere diğer özel fonksiyonların tanım kümelerinde de benzer şekilde genişletme yapmanın faydalı olabileceği düşünülmüştür.

Euler'in Beta fonksiyonu

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad Re(x)>0, Re(y)>0$$

şeklinde integral gösterimine sahiptir ve Gama fonksiyonu ile arasında

$$B(x,y)=B(y,x)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

kapalı bir ilişki vardır [14,15].

Beta fonksiyonu için de aynı şekilde genelleme düşünülürse, Gama fonksiyonu için kullanılan $e^{\frac{-p}{t}}$ düzenleyicisinin Beta fonksiyonu için çok önemli olan simetri özelliğini bozacağı görülür. Bu simetrinin korunması için t ve $1-t$ integrandı simetrik olmalıdır. Bu yüzden genelleştirilmiş Beta fonksiyonu, Beta fonksiyona $e^{\frac{-p}{t(1-t)}}$ çarpanı eklenmesiyle

$$B_p(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}e^{\frac{-p}{t(1-t)}}dt, \; Re(x)>0, Re(y)>0 \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanmıştır [16].

Genelleştirilmiş Beta fonksiyonu, Beta fonksiyonunun birçok özelliğini taşır. Hata ve Whittaker fonksiyonları ile olan ilişkilerini gerçekler. Açıkça görülebilir ki genelleştirilmiş Beta fonksiyonu $p=0$ durumunda orijinal Beta fonksiyonuna dönüşür [16].

2.4 HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+\dots \quad (2.13)$$

olarak ifade edilen seri matematikte büyük bir öneme sahiptir. Bu seri

$$1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

geometrik serisinin bir genelleştirmesi olduğundan *hipergeometrik seri* adını alır. (2.13) ifadesinden görülmektedir ki, γ değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır. (2.13) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ise ıraksaktır. $|x| = 1$ için eğer $\gamma > \alpha + \beta$ ise seri mutlak yakınsak olur. Ayrıca $x = -1$ iken $\gamma > \alpha + \beta - 1$ ise seri yakınsaktır [13,14].

α reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere $(\alpha)_n$ ifadesi

$$\begin{aligned}(\alpha)_n &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1) \\ (\alpha)_0 &= 1, \qquad \alpha \neq 0\end{aligned} \tag{2.14}$$

olarak tanımlanır. Bu ifade *Pochhammer sembolü* olarak bilinir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir [13]:

$$\begin{aligned}(\alpha)_n &= \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \\ (\alpha)_{n+1} &= \alpha(\alpha+1)_n\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pochhammer sembolünün (2.14) gösterimi dikkate alınarak, (2.13) hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{2.16}$$

şeklinde yazılabilir. (2.16) eşitliğinde görülen F fonksiyonunun her iki yanındaki 2 ve 1 alt indisleri yapısında biri α ve β diğeri γ olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder. (2.16) eşitliğinin genelleştirilmiş ifadesi

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \ldots (\gamma_q)_n} \frac{x^n}{n!} $$

şeklindedir. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterimi yerine genellikle sadece F kullanılır. Yani,

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x) $$

olup, bu fonksiyon *Gauss hipergeometrik fonksiyonu* olarak tanımlanır. (2.15) eşitliğinden hipergeometrik fonksiyonun α ve β değişkenlerine göre simetrik olduğu görülür.

Hipergeometrik fonksiyonun birinci mertebeden türevi

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma; x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)_n \beta(\beta+1)_n}{\gamma(\gamma+1)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_n (\beta+1)_n}{(\gamma+1)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; x) \end{aligned} $$

olup, benzer şekilde m. türevi

$$ \frac{d^m}{dx^m} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m} F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+m; x) \quad (2.17) $$

şeklinde bulunur [13,14].

Aşağıdaki teorem integral ve toplam sembollerinin yer değiştirmesi ile ilgilidir.

Teorem 2.1 $\sum f_n$ [a,b] üzerinde sınırlı, reel değerli ve integrallenebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsak ise

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

olur [24].

Lemma 2.2 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ fonksiyonu

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha} dt \quad (2.18)$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir [13,14].

İspat. Beta fonksiyonunun

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

tanımından ve Pochhammer sembolünün özelliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} &= \frac{B(\beta+n, \gamma-\beta)}{B(\beta, \gamma-\beta)} \\ &= \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 (t)^{\beta+n-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} dt \qquad (2.19) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan (2.19) ifadesi (2.16) ifadesinde yerine yazılırsa

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n \int_0^1 (t)^{\beta+n-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} dt$$

olur. Seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integrasyon işleminin sırası değiştirilirse

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 (t)^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} (xt)^n dt$$

elde edilir. Diğer taraftan $(1-xt)^{-\alpha}$ ifadesinin binom açılımından dolayı

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}(xt)^n=(1-xt)^{-\alpha}$$

olduğu dikkate alınırsa istenilen sonuç

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt$$

şeklinde elde edilir. Hipergeometrik fonksiyonun bir integral gösterimini veren bu formül $|x|<1$ ve $0<\beta<\gamma$ için geçerlidir. ■

Tanım 2.3 $Re(p)>0$, $Re(\gamma)>Re(\beta)>0$ ve $\mid z\mid<1$ olmak üzere

$$F_p(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}z^n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon* denir [21].

Tanım 2.4 Hipergeometrik serilerin parametre sayısı artırılarak elde edilen

$$F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

$$F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

$$F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_n(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

$$F_4(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_{m+n}}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

iki değişkenli hipergeometrik serilere *Appell hipergeometrik fonksiyonu* denir [22]. Burada F_1, F_2, F_3 ve F_4 sırasıyla birici, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonlardır.

3 KESİRLİ TÜREV ve İNTEGRALLER

Keyfi mertebeden diferensiyel ve integral kavramları, tamsayı mertebeli türev ve integralin tam olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş şeklidir. Bu kavramlar 17. yüzyıldan itibaren Liouville, Leibniz, Euler, Abel, Caputo ve diğer birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Son yıllarda matematik, fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça geniş uygulama alanı bulmuştur [25-28].

Literatürde kesirli türevin birçok tanımı mevcuttur. Birden fazla tanımının olması, problemin türüne göre en uygun olanının kullanılması ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. Bu tanımların bazıları Grünwald-Letnikov, Wely, Riesz, Riemann-Liouville (R-L) ve Caputo kesirli türevleridir [4-7].

Bu bölümde ilk olarak Riemann-Liouville kesirli türev ve integral tanımı, kesirli türev ve integralin ortak gösterimi, genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli türevini ele alacağız. Daha sonra klasik Caputo kesirli türev tanımı inceleyerek, Riemann-Liouville kesirli türevi arasındaki farklara değineceğiz.

3.1 RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRALİ

Kesirli integral tanımının ve buna bağlı olarak da kesirli türev tanımının ortaya çıkısına neden olan farklı yaklaşımlar mevcuttur. Bunların başlıcaları diferensiyel denklem yaklaşımı, kompleks değişken yaklaşımı ve tekrarlı integral yaklaşımıdır. Bu bölümde, tekrarlı integral yaklaşımının kesirli integral tanımını nasıl ortaya çıkardığı ele alınacak ve daha sonra Abel integrali yardımıyla Riemann-Liouville kesirli türevi elde edilecektir. Önce Abel integral denkleminin tanımını verelim.

Tanım 3.1 $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \phi(s)(x-t)^{\alpha-1}dt, \quad x > 0$$

şeklinde tanımlanan integral denklemine *Abel integral denklemi* denir [23].

Kesirli integralin çıkışına yardımcı olan n katlı

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \ldots d\sigma_2 d\sigma_1 \qquad (3.1)$$

integralini ele alalım. (3.1) integralinde integrasyon sırasını ve buna bağlı olarak sınırları

$$\begin{array}{ll} a < \sigma_1 < x & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ a < \sigma_2 < \sigma_1 & \sigma_3 < \sigma_2 < x \\ \vdots & \vdots \\ a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\ a < \sigma_n < \sigma_{n-1} & a < \sigma_n < x \end{array}$$

şeklinde değiştirilirse (3.1) n katlı integrali

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n \ldots d\sigma_1 &= \int_a^x \int_{\sigma_n}^x \cdots \int_{\sigma_2}^x f(\sigma_n) d\sigma_1 \ldots d\sigma_n \\ &= \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \cdots \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 \ldots d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n \qquad (3.2) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (3.2) ifadesinin sağ tarafı terim terim

$$\int_{\sigma_2}^{x} d\sigma_1 = (x-\sigma_2)$$

$$\int_{\sigma_3}^{x} (x-\sigma_2)d\sigma_2 = \frac{(x-\sigma_3)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$\int_{\sigma_n}^{x} (x-\sigma_{n-1})d\sigma_{n-1} = \frac{(x-\sigma_n)^{n-1}}{(n-1)!}$$

hesaplanırsa

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n)d\sigma_n \ldots d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1}d\sigma_n$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ eşitliği kullanılırsa

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n)d\sigma_n \ldots d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1}d\sigma_n$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki n pozitif bir tamsayıdır. Gama fonksiyonu tamsayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n değerinin tamsayı olmaması durumunda eşitliğinin sağ tarafı için aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.2 $\alpha \geq 0$ ve f, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$I_z^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^z f(t)(z-t)^{\alpha-1}dt \qquad (3.3)$$
$$I_z^{0} f(z) = f(z)$$

integrallerine α. *mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali* denir [4,29].

Teorem 3.3 $Re(\alpha) > 0$ ve $Re(\lambda) > -1$ olmak üzere $f(z) = z^{\lambda}$ fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_z^{\alpha}\left\{z^{\lambda}\right\} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\alpha+1)} z^{\lambda+\alpha} \tag{3.4}$$

şeklindedir.

İspat. (3.3) Riemann-Liouville kesirli integral tanımı kullanılarak istenilen eşitlik

$$\begin{aligned}
I_z^{\alpha}\left\{z^{\lambda}\right\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\lambda} dt \quad \{t = uz, dt = zdu\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1} u^{\lambda} z^{\lambda} z du \\
&= \frac{z^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\lambda} du \\
&= \frac{B(\alpha, \lambda+1)}{\Gamma(\alpha)} z^{\lambda+\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\alpha+1)} z^{\lambda+\alpha}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. ■

Örnek 3.4 $f(z) = z$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden integralini alalım. (3.4) eşitliğinde $\lambda = 1$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
I_z^{\frac{1}{2}}\{z\} &= \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(\frac{5}{2})} z^{1+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} z^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Aşağıdaki tanım kesirli türev kavramının tanımı için gerekli olacaktır.

Tanım 3.5 $\Omega_1 = [a,b]$, $\Omega_2 = [c,d]$, $f(x,y)$, $\Omega_1 \times \Omega_2$ kümesinde ölçülebilir fonksiyon ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ olsun. O zaman

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_c^d f(x,y)dx$$

eşitliğine *Dirichlet formülü* denir [23].

Kesirli türev için $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \phi(s)(t-s)^{\alpha-1} ds, \quad t > a \tag{3.5}$$

Abel integral denklemini göz önüne alalım. (3.5) ifadesinin her iki yanı $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarpılarak a değerinden x değişkenine kadar integrali alınırsa;

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int_a^t \frac{\phi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \tag{3.6}$$

elde edilir. Burada Dirichlet formülü kullanılarak sınır değişimi yapılırsa

$$\int_a^x \phi(s)ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \tag{3.7}$$

olduğu görülür. (3.7) ifadesindeki iç integralde $t = s + \tau(x-s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa bu integral

$$\begin{aligned} \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} &= \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha} d\tau \\ &= B(\alpha, 1-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak hesaplanır. Elde edilen (3.8) eşitliği (3.6) denkleminde kullanılırsa

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \phi(s)ds = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt$$

$$\int_a^x \phi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt \tag{3.9}$$

bulunur. (3.9) eşitliğinin x değişkenine göre türevini almak için Leibniz formülü kullanılırsa

$$\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt \tag{3.10}$$

elde edilir. Elde edilen (3.10) ifadesine *α. mertebeden kesirli türev* ya da *Riemann-Liouville kesirli türevi* denir.

Bu türev formülü daha genel olarak aşağıdaki şekilde de ifade edilir.

Tanım 3.6 f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in \mathbb{Z}^+$, $m-1 \leq \alpha < m$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$\mathbf{D}_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1}dt \tag{3.11}$$

şeklindedir [4,29].

3.2 KESİRLİ TÜREV ve İNTEGRALİN ORTAK GÖSTERİMİ

Bu bölümde ayrı gösterime sahip türev ve integral operatörleri aynı gösterim altında birleştirilecektir. Bu birleştirme işleminin sebebi, 3.1. Bölümde ifade edilen kesirli mertebeden türev ve integral tanımlarını tek bir operatör ile gösterilmesinin yazımda ve hesaplamada kolaylık sağlamasıdır. Bu birleştirme işlemi tamsayılar için yapılacaktır. Öncelikle ileride kullanacağımız aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.7 Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

olur [24].

Şimdi $y = f(t)$ şeklindeki sürekli bir fonksiyonu ele alalım. Türev tanımına göre $f(t)$ fonksiyonunun birinci basamaktan türevi

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{3.12}$$

şeklindedir. Bu ifadenin ardışık olarak türevleri alınır

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \tag{3.13}$$

ve (3.12), (3.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} &= \lim_{h\to 0} \frac{f''(t) - f''(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}\right. \\ &\quad \left. - \frac{f(t-h) - 2f(t-2h) + f(t-3h)}{h^2}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. Tümevarımla n pozitif tamsayı olmak üzere n. mertebeden türev

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \tag{3.15}$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. Burada,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \tag{3.16}$$

ifadesi binom sabitleri için genel gösterimdir. p herhangi bir tamsayıyı olmak üzere (3.12)-(3.15) eşitliklerindeki kesirlerin genel ifadesini

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \tag{3.17}$$

şeklinde yazalım. (3.16) ifadesinde $\binom{p}{p}$ teriminden sonraki bütün terimler sıfır olacağından $p \leq n$ için

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p}$$

olur. Şimdi p değişkeninin negatif değerlerini ele alalım. Yazma kolaylığı için

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{r!}$$

gösterimi kullanılırsa

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

şeklinde yazılabilir. (3.17) eşitliğinde p yerine $-p$ alarak (3.18) eşitliği bu ifadede yerine konulursa;

$$\begin{aligned} f_h^{(-p)}(t) &= \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \\ &= h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada p pozitif bir tam sayıdır.

Eğer n sonlu bir değer alınırsa, $f_h^{(-p)}(t)$, $h \to 0$ için sıfır değerine yakınsar. Sıfırdan farklı bir limit değerine ulaşmak için $h \to 0$ iken $n \to \infty$ kabul etmemiz gerekir. Böylece, a herhangi bir reel sabit olmak üzere $h = \frac{t-a}{n}$ alınabilir ve $f_h^{(-p)}(t)$ değerinin sonlu ya da sonsuz olan limit değeri düşünülebilir. Bunu

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_aD_t^{(-p)} f(t)$$

ile göstereceğiz. $p = 1$ için

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh)$$

olur. $t - nh = a$ olduğu göz önüne alınıp, $f(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğu kabul edilirse, Teorem 3.7 kullanılarak

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_aD_t^{(-1)} f(t) & \\ &= \lim_{h \to 0} h \sum_{r=0}^{n} f(t - rh) \\ &= \int_0^{t-a} f(t - z)dz \qquad (t - z = \tau) \\ &= \int_a^t f(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. Şimdi $p = 2$ alalım. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2.3.\ldots(2 + r - 1)}{r!} = r + 1$$

olup

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} (r + 1)hf(t - rh)$$

elde ederiz. $t+h=y$ alınırsa, $\{f(t-rh)=f(y-(r+1)h) \ \text{ olur}\}$

$$f_h^{(-2)}(t)=h\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh)$$

ve $h\to 0$ için

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) &= {}_aD_t^{(-2)}f(t)\\ &=\int_0^{t-a} zf(t-z)dz\\ &=\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir, çünkü $h\to 0$ iken $y\to t$ olur.

$p=3$ durumu ${}_aD_t^{(-p)}$ için genel ifadeyi gösterecektir.

$$\begin{bmatrix}3\\ r\end{bmatrix}=\frac{3.4.\ldots(3+r-1)}{r!}=\frac{1}{1.2}(r+1)(r+2)$$

olduğundan

$$f_h^{(-3)}(t)=\frac{h}{1.2}\sum_{r=0}^{n}(r+1)(r+2)h^2f(t-rh)$$

bulunur. Aynı şekilde $t+h=y$ alınırsa,

$$f_h^{(-3)}(t)=\frac{h}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1}(r)(r+1)h^2f(y-rh)$$

bulunur. Bu

$$f_h^{(-3)}(t)=\frac{h}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1}(rh)^2f(y-rh)+\frac{h^2}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1}(rh)f(y-rh)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, $h\to 0$ için $y\to t$ ve

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1}(rh)f(y-rh)=\lim_{h\to 0}h\int_a^t(t-\tau)f(\tau)d\tau=0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-3)}(t) &= {}_aD_t^{(-3)}f(t)\\
&= \frac{1}{2!}\int_0^{t-a} z^2 f(t-z)dz\\
&= \frac{1}{2!}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.19)-(3.21) eşitliklerindeki ilişkiden genel gösterim

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{(-p)}f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh)\\
&= \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (3.22) eşitliğinin p-katlı bir integral ifadesi olduğunu gösterelim. (3.22) ifadesinin her iki tarafının türevini alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{ {}_aD_t^{(-p)}f(t)\right\} &= \frac{1}{(p-2)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau)d\tau\\
&= {}_aD_t^{(-p+1)}f(t) \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

bulunur ve (3.23) ifadesinin a değerinden t değişkenine integralinin alınmasıyla

$$ {}_aD_t^{(-p)}f(t) = \int_a^t \left({}_aD_t^{(-p+1)}f(t)\right) dt \qquad (3.24)$$

$$ {}_aD_t^{(-p+1)}f(t) = \int_a^t \left({}_aD_t^{(-p+2)}f(t)\right) dt \qquad (3.25)$$

elde edilir. (3.24) ve (3.25) ifadeleri birleştirilirse

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{(-p)}f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \Big({}_aD_t^{(-p+2)}f(t)\Big)\, dt \\
&= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \Big({}_aD_t^{(-p+3)}f(t)\Big)\, dt \\
&= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \ldots \int_a^t f(t)dt}_{p \text{ defa}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece türev operatörü ile integral operatörü tek bir gösterim altında birleştirilmiş olur ve en genel halde

$$
{}_aD_t^{(p)}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \tag{3.26}
$$

biçiminde gösterilebilir. Burada m pozitif bir tamsayı olmak üzere $p = m$ olduğunda m. mertebeden türev elde edilir. $p = -m$ olduğunda ise m katlı integral elde edilir.

p değerinin tamsayı olmaması durumunda da türev ve integral operatörüne ilişkin ortak gösterimin geçerli olduğu [30] yayınında gösterilmiştir. Yani (3.3) ile ifade edilen Riemann-Liouville kesirli integrali $\alpha > 0$ ve $f \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$
I_z^{\alpha} f(z) = \mathbf{D}_z^{-\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^z f(t)(z-t)^{\alpha-1} dt \tag{3.27}
$$

ve Riemann Liouville kesirli türevi de $m-1 \leq \alpha < m$ olmak üzere

$$
\mathbf{D}_z^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dz^m} \int_a^z f(t)(z-t)^{m-\alpha-1} dt \tag{3.28}
$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.3 GENELLEŞTİRİLMİŞ RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREVİ

Kesirli türev ve integralin (3.27) ve (3.28) eşitliklerindeki ortak gösteriminden yararlanılarak $Re(\alpha) < 0$ olmak üzere α. mertebeden klasik Riemann-Liouville kesirli türevi

$$\mathbf{D}_z^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^z (z-t)^{-\alpha-1} f(t) dt \tag{3.29}$$

şeklinde tanımlanmıştır [1]. Burada integral yolu, kompleks t-düzleminde 0 değerinden z değişkenine bir çizgi boyuncadır.

$m-1 < Re(\alpha) < m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$ durumunda ise

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_z^{\alpha} f(z) &= \frac{d^m}{dz^m} D_z^{\alpha-m} f(z) \\ &= \frac{d^m}{dz^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)} \int_0^z (z-t)^{-\alpha+m-1} f(t) dt \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. $Re(\alpha) < 0,\ Re(p) > 0$ olmak üzere (3.29) eşitliğine yeni bir parametre eklenerek Riemann-Liouville kesirli türevinin genelleştirilmişi

$$\mathbf{D}_z^{\alpha,p} f(z) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^z (z-t)^{-\alpha-1} f(t) e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)} dt \tag{3.30}$$

ve $m-1 < Re(\alpha) < m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_z^{\alpha,p} f(z) &= \frac{d^m}{dz^m} D_z^{\alpha-m} f(z) \\ &= \frac{d^m}{dz^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)} \int_0^z (z-t)^{-\alpha+m-1} f(t) e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)} dt \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır [1]. Burada integral yolu, kompleks t-düzleminde 0 değerinden z değişkenine bir çizgi boyuncadır. $p = 0$ durumunda klasik Riemann-Liouville kesirli türev operatörü elde edilir.

Teorem 3.8 $Re(\lambda) > -1$, $Re(\mu) < 0$ ve $Re(p) > 0$ olmak üzere

$$\mathbf{D}_z^{\mu,p}\{z^\lambda\} = \frac{B_p(\lambda+1,-\mu)}{\Gamma(-\mu)} z^{\lambda-\mu}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (3.30) genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli türev ve genelleştirilmiş Beta fonksiyonu tanımları kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_z^{\mu,p}\{z^\lambda\} &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^z t^\lambda (z-t)^{-\mu-1} e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^1 (uz)^\lambda z^{-\mu-1} (1-u)^{-\mu-1} e^{\left(\frac{-pz^2}{uz(z-uz)}\right)} z du \\
&= \frac{z^{\lambda-\mu}}{\Gamma(-\mu)} \int_0^1 (u)^\lambda (1-u)^{-\mu-1} e^{\left(\frac{-p}{u(1-u)}\right)} du \\
&= \frac{B_p(\lambda+1,-\mu)}{\Gamma(-\mu)} z^{\lambda-\mu}
\end{aligned}$$

istenilen eşitlik elde edilir. ■

3.4 CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ

Riemann-Liouville (3.11) kesirli türev tanımı, kesirli türev ve integral teorisinin gelişmesinde ve bunların matematikteki uygulamalarında önemli bir rol oynar.

Uygulama problemleri, başlangıç koşulları fiziksel olarak yorumlanabilir kesirli türev tanımları gerektirir. Bu açıdan bakıldığında, Riemann-Liouville yaklaşımının problemlerin yorumlanmasında yetersiz kaldığı ortaya konmuştur [30]. Çünkü Riemann- Liouville yaklaşımı $t = a$ noktasında, Riemann- Liouville kesirli türevinin limit değerleri biçiminde tanımlanan başlangıç koşullarına sahiptir. Örneğin; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-1} f(z) &= b_1 \\
\lim_{t\to a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-2} f(z) &= b_2 \\
\ldots &= \ldots \\
\lim_{t\to a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-m} f(z) &= b_m
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan başlangıç koşulları meydana gelir. Bu tipteki başlangıç koşullarına sahip başlangıç-değer problemleri matematiksel olarak başarılı bir şekilde çözülmesine rağmen, bunların sonuçları kullanışlı değildir. Çünkü bu tipteki başlangıç koşullarının bilinen fiziksel yorumu yoktur.

Kesirli diferensiyel tekniğinde başlangıç koşullarını fiziksel yorumlara en uygun şekilde veren M. Caputo olmuştur. Caputo'nun tanımı; m pozitif tamsayı olmak üzere $m-1<\alpha<m$ için

$$ {}_aD_z^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^z (z-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)} dt \tag{3.31}$$

şeklindedir [29,30].

$f(z)$ fonksiyonunun normal koşullar altında, $\alpha \to m$ için Caputo türevi, $f(z)$ fonksiyonunun m. basamaktan klasik türevine eşittir.

Varsayalım ki,
$0 \le m-1 < \alpha < m$ ve $f(z)$ fonksiyonu her $T > a$ için $[a,T]$ aralığında $(m+1)$ kez sürekli ve sınırlı türeve sahip olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to m} {}_aD_z^\alpha f(z) &= \lim_{\alpha\to m}\left(\frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}+\int_a^z \frac{(z-t)^{m-\alpha}f^{(m+1)}(t)}{\Gamma(m-\alpha+1)}dt\right)\\
&= f^{(m)}(a)+\int_a^z f^{(m+1)}(t)dt\\
&= f^{(m)}, \quad (m=1,2,\dots)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Riemann-Liouville ve Caputo tanımları arasındaki önemli bir fark da sabitin türevidir. Sabit bir sayının Caputo türevi sıfırdır. Ancak sonlu bir alt sınır değeri için Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir. Bir problemin fiziksel olarak yorumunun yapılabilmesi için sabitin kesirli türevinin sıfıra eşit olması gerekir.

Eğer (3.31) eşitliğinde $\alpha=\mu$ ve $f(z)=z^\lambda$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
D_z^\mu\left\{z^\lambda\right\} &= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)}\int_0^z (z-t)^{m-\mu-1}\frac{d^m}{dt^m}\{t^\lambda\}dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)}\int_0^z (z-t)^{m-\mu-1}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)t^{\lambda-m}dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)}z^{\lambda-\mu}\int_0^1 (1-u)^{m-\mu-1}u^{\lambda-m}du\\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)B(m-\mu,\lambda-m+1)}{\Gamma(m-\mu)\Gamma(\lambda-m+1)}z^{\lambda-\mu}\\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}z^{\lambda-\mu} \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada m pozitif tamsayı, $m-1<\mu<m$ ve $Re(\lambda)>-1$ olur.

Örnek 3.9 $f(z)=z$ fonksiyonunun $m=1$ olmak üzere $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo türevini alalım. (3.31) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
D_z^{\frac{1}{2}}\{z\} &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_0^z (z-t)^{1-\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dt}\{t\}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^z (z-t)^{-\frac{1}{2}}dt \quad \{t=uz, \quad dt=zdu\} \\
&= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}du \\
&= \frac{B(\frac{1}{2},1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}z^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}z^{\frac{1}{2}} \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi elde edilen fonksiyonun tekrar $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo türevini alırsak

$$\begin{aligned}
D_z^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}z^{\frac{1}{2}}\right\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_0^z (z-t)^{1-\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dt}\{t^{\frac{1}{2}}\}dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^z (z-t)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du \\
&= \frac{B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2})} = 1 \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da görüldüğü gibi $f(z)=z$ fonksiyonunun iki defa $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevi, bu fonksiyonun birinci mertebeden klasik türevini verir.

4 GENELLEŞTİRİLMİŞ CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ

m pozitif bir tamsayı ve $m-1 < Re(\mu) < m$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun μ. mertebeden klasik Caputo kesirli türevi

$$D_z^{\mu} f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^z (z-t)^{m-\mu-1} \frac{d^m}{dt^m} f(t) dt \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır [29,30]. (4.1) klasik Caputo türev tanımına yeni bir parametre ekleyerek *Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi* $Re(p) > 0$ için

$$D_z^{\mu,p} f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^z (z-t)^{m-\mu-1} e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)} \frac{d^m f(t)}{dt^m} dt \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $m-1 < Re(\mu) < m \ (m = 1, 2, 3, \ldots)$ ve integral yolu kompleks t-düzleminde 0 değerinden z değişkenine bir çizgi boyuncadır. Burada $p = 0$ durumunda klasik Caputo kesirli türev operatörünü elde ederiz.

Teorem 4.1 m pozitif bir tamsayı, $m-1 < Re(\mu) < m$, $Re(p) > 0$ ve $Re(\lambda) > m-1$ olmak üzere

$$D_z^{\mu,p} \left\{ z^{\lambda} \right\} = \frac{\Gamma(\lambda+1) B_p(m-\mu, \lambda-m+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1) B(m-\mu, \lambda-m+1)} z^{\lambda-\mu} \tag{4.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $f(z) = z^{\lambda}$ fonksiyonuna (4.2) genelleştirilmiş Caputo kesirli türev tanımı uygulanırsa

$$D_z^{\mu,p} \left\{ z^{\lambda} \right\} = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^z (z-t)^{m-\mu-1} e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)} \frac{d^m t^{\lambda}}{dt^m} dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)} \int_0^z (z-t)^{m-\mu-1} t^{\lambda-m} e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)} dt \\
&= \frac{z^{\lambda-\mu}}{\Gamma(m-\mu)} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)} \int_0^1 (1-u)^{m-\mu-1} u^{\lambda-m} e^{\left(\frac{-p}{u(1-u)}\right)} du \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1) B_p(m-\mu, \lambda-m+1)}{\Gamma(m-\mu)\Gamma(\lambda-m+1)} z^{\lambda-\mu} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1) B_p(m-\mu, \lambda-m+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1) B(m-\mu, \lambda-m+1)} z^{\lambda-\mu} \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

istenilen eşitlik elde edilir. ■

(4.4) eşitliğinde $p = 0$ alınırsa genelleştirilmiş Beta fonksiyonunun $B_0(x,y) = B(x,y)$ özelliğinden dolayı (3.32) eşitliğinin aynısı

$$
D_z^{\mu,0}\left\{z^\lambda\right\} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} z^{\lambda-\mu}
$$

elde edilir.

Örnek 4.2 $f(z) = z$ fonksiyonunun $m = 1$ olmak üzere $\frac{1}{2}$. mertebeden genelleştirilmiş Caputo türevini alalım. (4.3) eşitliğinde $m = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$ ve $\lambda = 1$ alırsak

$$
\begin{aligned}
D_z^{\frac{1}{2},p}\{z\} &= \frac{\Gamma(2) B_p(\frac{1}{2}, 1)}{\Gamma(\frac{3}{2}) B(\frac{1}{2}, 1)} z^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{B_p(\frac{1}{2}, 1)}{B(\frac{1}{2}, 1)} z^{\frac{1}{2}} \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. $p = 0$ durumunda $B_0(x,y) = B(x,y)$ olduğundan

$$
D_z^{\frac{1}{2}}\{z\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}}
$$

bulunur. Bu sonuç klasik Caputo türevi ile elde edilen (3.33) eşitliğinin aynısıdır.

(4.5) eşitliğinin de $\frac{1}{2}$. mertebeden genelleştirilmiş Caputo türevini alalım. (4.3) eşitliğini tekrar kullanırsak

$$\begin{aligned}
D_z^{\frac{1}{2},p}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{B_p(\frac{1}{2},1)}{B(\frac{1}{2},1)}z^{\frac{1}{2}}\right\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{B_p(\frac{1}{2},1)}{B(\frac{1}{2},1)}D_z^{\frac{1}{2},p}\left\{z^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{B_p(\frac{1}{2},1)}{B(\frac{1}{2},1)}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})B_p(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma(1)B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{B_p(\frac{1}{2},1)B_p(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{B(\frac{1}{2},1)B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$p = 0$ durumunda klasik Caputo türevi ile elde edilen (3.34) eşitliğinin aynısını elde ederiz.

4.1 KLASİK ve GENELLEŞTİRİLMİŞ CAPUTO TÜREVİNİN BAZI FONKSİYONLARA UYGULANMASI

Bu bölümde bazı hipergeometrik fonksiyonlara klasik ve genelleştirilmiş Caputo türevleri ayrı ayrı uygulanmıştır. Genelleştirilmiş Caputo türeviyle elde edilen sonuçların $p = 0$ özel durumunda, klasik Caputo türevi ile elde edilen sonuçların aynısını verdiği gösterilmiştir.

Teorem 4.3 Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mid z \mid < \rho$ diskinde analitik ise

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \mid z \mid < \rho$$

şeklinde bir kuvvet serisine açılabilir. O halde $Re(p) > 0$, m pozitif tamsayı, $m-1 < Re(\mu) < m$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
D_z^{\mu,p}\left\{z^{\lambda-1}f(z)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_z^{\mu,p}\left\{z^{\lambda+n-1}\right\} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)z^{\lambda-\mu-1}}{\Gamma(\lambda-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n B_p(m-\mu,\lambda+n-m)a_n z^n}{(\lambda-\mu)_n B(m-\mu,\lambda+n-m)}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Burada $Re(\lambda) > Re(\mu) > 0$ ve $Re(\lambda) > m-n$ dir.

İspat.

$$
\begin{aligned}
D_z^{\mu,p}\left\{ z^{\lambda-1}f(z)\right\} &= D_z^{\mu,p}\left\{z^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_z^{\mu,p}\left\{z^{\lambda+n-1}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\lambda+n)B_p(m-\mu,\lambda+n-m)}{\Gamma(\lambda+n-\mu)B(m-\mu,\lambda+n-m)} z^{\lambda+n-\mu-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\lambda)(\lambda)_n B_p(m-\mu,\lambda+n-m)}{\Gamma(\lambda-\mu)(\lambda-\mu)_n B(m-\mu,\lambda+n-m)} z^{\lambda+n-\mu-1} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} z^{\lambda-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\lambda)_n B_p(m-\mu,\lambda+n-m)}{(\lambda-\mu)_n B(m-\mu,\lambda+n-m)} z^n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.4 $Re(\alpha) > 0$, $Re(\lambda) > Re(\mu) > 0$, m bir pozitif tamsayı ve $m-1 < Re(\lambda-\mu) < m$ olmak üzere

$$
D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\right\} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F(\alpha,\lambda;\mu;z) \tag{4.6}
$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (4.6) eşitliğinin sol tarafındaki $(1-z)^{-\alpha}$ ifadesinin seri açılımı kullanılır ve (4.1) klasik Caputo kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\right\} &= D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n\frac{z^n}{n!}\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda+n-1}\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\mu+n)}z^{\mu+n-1} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n}z^n \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}F(\alpha,\lambda;\mu;z) \end{aligned}$$

istenilen eşitlik elde edilir. ■

Teorem 4.5 $Re(p) > 0$, m pozitif tamsayı, $m-1 < Re(\lambda-\mu) < m$ ve $Re(\alpha) > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D_z^{\lambda-\mu,p}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\right\} &= D_z^{\lambda-\mu,p}\left\{z^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n\frac{z^n}{n!}\right\} \qquad (4.7) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n}\frac{B_p(\lambda-m+n,m-\lambda+\mu)}{B(\lambda-m+n,m-\lambda+\mu)}(\alpha)_n\frac{z^n}{n!} \\ &\quad [Re(\lambda) > Re(\mu) > 0, \quad Re(\lambda) > m-n] \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

İspat. (4.7) eşitliğinin sol tarafındaki $(1-z)^{-\alpha}$ ifadesinin seri açılımı kullanılır ve (4.2) genelleştirilmiş Caputo kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
D_z^{\lambda-\mu,p}\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\} &= D_z^{\lambda-\mu,p}\left\{z^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n\frac{z^n}{n!}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}D_z^{\lambda-\mu,p}\left\{z^{\lambda+n-1}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\mu+n)}\frac{B_p(\lambda-m+n,m-\lambda+\mu)}{B(\lambda-m+n,m-\lambda+\mu)}z^{\mu+n-1} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n}\frac{B_p(\lambda-m+n,m-\lambda+\mu)}{B(\lambda-m+n,m-\lambda+\mu)}\frac{(\alpha)_n z^n}{n!} \\
&\quad [Re(\lambda)>Re(\mu)>0, \quad Re(\lambda)>m-n]
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

(4.7) eşitliğinde $p = 0$ alınırsa, genelleştirilmiş Beta fonksiyonunun $B_0(x,y) = B(x,y)$ özelliği kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra klasik Caputo türevi ile elde edilen (4.6) eşitliğinin aynısı bulunur.

Teorem 4.6 $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\lambda) > Re(\mu) > 0$, m pozitif bir tamsayı ve $m-1 < Re(\lambda-\mu) < m$ olmak üzere

$$
D_z^{\lambda-\mu}\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}\}=\frac{\Gamma(\lambda)z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}F_1(\lambda,\alpha,\beta;\mu;az,bz) \quad (4.8)
$$

eşitliği yazılabilir. Burada F_1 birinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyondur.

İspat. (4.8) eşitliğinin sol tarafındaki $(1-az)^{-\alpha}$ ve $(1-bz)^{-\beta}$ ifadelerinin seri açılımı kullanılır ve (4.1) klasik Caputo kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
D_z^{\lambda-\mu}\big\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}\big\}
&= D_z^{\lambda-\mu}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{(\beta)_k}{k!}a^n b^k z^{\lambda+n+k-1}\right\}\\
&= \sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{(\beta)_k}{k!}a^n b^k D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda+n+k-1}\right\}\\
&= \sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{(\beta)_k}{k!}a^n b^k \frac{\Gamma(\lambda+n+k)}{\Gamma(n+k+\mu)}z^{n+k+\mu-1}\\
&= z^{\mu-1}\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{(\beta)_k}{k!}a^n b^k \frac{\Gamma(\lambda)(\lambda)_{n+k}}{\Gamma(\mu)(\mu)_{n+k}}z^{n+k}\\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{n+k}}{(\mu)_{n+k}}(\alpha)_n(\beta)_k\frac{(az)^n}{n!}\frac{(bz)^k}{k!}\\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}F_1(\lambda,\alpha,\beta;\mu;az,bz)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $Re(\alpha) > 0, Re(\mu) > 0$ dır. ■

Teorem 4.7 $Re(p) > 0$, m pozitif tamsayı, $m-1 < Re(\lambda-\mu) < m$, $Re(\alpha) > 0$ ve $Re(\beta) > 0$ olmak üzere

$$
D_z^{\lambda-\mu,p}\left\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}\right\} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1} \tag{4.9}
$$

$$
\times\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{n+k}}{(\lambda-m)_{n+k}}\frac{B_p(\lambda-m+n+k,m-\lambda+\mu)}{B(\lambda-m,m-\lambda+\mu)}(\alpha)_n(\beta)_k\frac{(az)^n}{n!}\frac{(bz)^k}{k!}
$$

eşitliği sağlanır. Burada $Re(\lambda) > Re(\mu) > 0$ ve $Re(\lambda) > m$ olur.

İspat. (4.9) eşitliğinin sol tarafındaki $(1-az)^{-\alpha}$ ve $(1-bz)^{-\beta}$ ifadelerinin seri açılımı kullanılır ve (4.2) genelleştirilmiş Caputo kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&D_z^{\lambda-\mu,p}\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}\} \\
&= D_z^{\lambda-\mu,p}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{(\beta)_k}{k!}a^n b^k z^{\lambda+n+k-1}\right\} \\
&= \sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{(\beta)_k}{k!}a^n b^k D_z^{\lambda-\mu,p}\left\{z^{\lambda+n+k-1}\right\} \quad A=\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{(\beta)_k}{k!} \\
&= \sum_{n,k=0}^{\infty}Aa^n b^k\frac{\Gamma(\lambda+n+k)B_p(\lambda-m+n+k,m-\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda-m+n+k)\Gamma(m-\lambda+\mu)}z^{\mu+n+k-1} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{n+k}A(az)^n(bz)^k}{(\lambda-m)_{n+k}}\frac{B_p(\lambda-m+n+k,m-\lambda+\mu)}{B(\lambda-m,m-\lambda+\mu)}
\end{aligned}
$$

bulunur. Elde edilen son eşitlikte $p=0$ alınıp,

$$(\lambda-m)_{n+k}=\frac{\Gamma(\lambda-m+n+k)}{\Gamma(\lambda-m)}$$

eşitliği kullanılır ve $B_0(x,y)=B(x,y)$ olduğundan Beta fonksiyonu Gama fonksiyonu cinsinden yazılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&D_z^{\lambda-\mu,0}\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}\} \\
&\qquad = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{n+k}}{(\mu)_{n+k}}(\alpha)_n(\beta)_k\frac{(az)^n}{n!}\frac{(bz)^k}{k!} \\
&\qquad = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}F_1(\lambda,\alpha,\beta;\mu;az,bz) \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece klasik Caputo türevi ile elde edilen (4.8) eşitliği elde edilmiş olur. ■

Teorem 4.8 m pozitif bir tamsayı, $m-1<Re(\mu)<m$ olmak üzere $F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun μ. mertebeden klasik

Caputo kesirli türevi $C = \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}$ olmak üzere

$$D_z^{\mu}\left\{F(a,b;c;z)\right\} = Cz^{m-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+m)_n(b+m)_n\ z^n}{(c+m)_n\Gamma(n+m-\mu+1)} \qquad (4.11)$$

şeklindedir.

İspat. $F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonuna (4.1) klasik Caputo türev operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
D_z^{\mu}\left\{F(a,b;c;z)\right\} &= D_z^{\mu}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}D_z^{\mu}\left\{z^n\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\mu+1)}z^{n-\mu} \\
&= \sum_{n=-m}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b)_{n+m}}{(c)_{n+m}(n+m)!}\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+m-\mu+1)}z^{n+m-\mu} \\
&= Cz^{m-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+m)_n(b+m)_n}{(c+m)_n}\frac{z^n}{\Gamma(n+m-\mu+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Burada $m = \mu$ alınırsa $F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun (2.17) eşitliği ile verilen klasik türevi elde edilir.

Teorem 4.9 $Re(p) > 0$, m pozitif bir tamsayı, $m-1 < Re(\mu) < m$ olmak üzere $F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun μ. mertebeden genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi

$$D_z^{\mu,p}\left\{\ F(a,b;c;z)\right\} = \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m} z^{m-\mu}$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+m)_n(b+m)_n}{(c+m)_n} \frac{B_p(m-\mu,n+1)\ z^n}{\Gamma(n+m-\mu+1)B(m-\mu,n+1)}$$

şeklindedir.

İspat. $F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonuna genelleştirilmiş Caputo türev operatörü uygulanırsa

$$D_z^{\mu,p}\{F(a,b;c;z)\} = D_z^{\mu,p}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\right\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} D_z^{\mu}\left\{z^n\right\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} \frac{\Gamma(n+1)B_p(m-\mu,n-m+1)}{\Gamma(n-\mu+1)B(m-\mu,n-m+1)} z^{n-\mu}$$
$$= \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{(a)_{n+m}(b)_{n+m}}{(c)_{n+m}(n+m)!} \frac{\Gamma(n+m+1)B_p(m-\mu,n+1)}{\Gamma(n+m-\mu+1)B(m-\mu,n+1)} z^{n+m-\mu}$$
$$= C z^{m-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+m)_n(b+m)_n}{(c+m)_n} \frac{B_p(m-\mu,n+1)\ z^n}{\Gamma(n+m-\mu+1)B(m-\mu,n+1)}$$

bulunur. Burada $p=0$ alınırsa (4.11) eşitliğindeki $F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun klasik Caputo türevi ve $p=0$, $m=\mu$ alınırsa (2.17) eşitliği ile verilen klasik türevi elde edilir. ■

Teorem 4.10 m bir pozitif tamsayı, $m-1 < Re(\lambda-\mu) < m$, $Re(\lambda) > Re(\mu) > 0$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\gamma) > Re(\beta)$ ve $\mid x \mid + \mid z \mid < 1$ olmak üzere

$$D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}F_p(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{1-z})\right\} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}$$
$$\times \sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_k}{(\mu)_k}\frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}(\alpha)_{n+k}\frac{x^n}{n!}\frac{z^k}{k!} \quad (4.12)$$

olur.

İspat. (4.12) eşitliğinde F_p genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun ve $(1-z)^{-\alpha}$ ifadesinin seri açılımı kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapılarak klasik Caputo kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}F_p(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{1-z})\right\}\\
&= D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}\left(\frac{x}{1-z}\right)^n\right\}\\
&= D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n\frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}\frac{x^n}{n!}(1-z)^{-\alpha-n}\right\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}\frac{x^n}{n!}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_k}{k!}D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda+k-1}\right\}\\
&= \sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}\frac{x^n}{n!}\frac{(\alpha)_{n+k}}{k!}\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\mu+k)}z^{\mu+k-1}\\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_k}{(\mu)_k}\frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}(\alpha)_{n+k}\frac{x^n}{n!}\frac{z^k}{k!}\\
&\quad (Re(\lambda)>Re(\mu)>0,\ Re(\gamma)>Re(\beta),\ \ |x|+|z|<1)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

$p=0$ durumunda Beta fonksiyonunun Gama fonksiyonu cinsinden ifadesi ve Pochhammer sembolünün (2.15) özelliği kullanılarak gerekli işlemler yapıldığında

$$
\begin{aligned}
D_z^{\lambda-\mu} & \left\{ z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha} F_0(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{1-z}) \right\} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_k}{(\mu)_k} \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} (\alpha)_{n+k} \frac{x^n}{n!} \frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_2(\alpha,\lambda,\beta;\mu,\gamma;x,z) \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Buradaki $F_2(\alpha,\lambda,\beta;\mu,\gamma;x,z)$ ikinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyondur.

Teorem 4.11 $Re(p) > 0$, m pozitif tamsayı, $m-1 < Re(\lambda-\mu) < m$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\gamma) > Re(\beta)$ ve $\mid x \mid + \mid z \mid < 1$ olmak üzere

$$
D_z^{\lambda-\mu,p} \left\{ z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha} F_p(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{1-z}) \right\} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} \qquad (4.14)
$$

$$
\times \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_k}{(\mu)_k} \frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)} \frac{B_p(\lambda-m+k,m-\lambda+\mu)}{B(\lambda-m+k,m-\lambda+\mu)} (\alpha)_{n+k} \frac{x^n}{n!} \frac{z^k}{k!}
$$

eşitliği sağlanır. Burada $Re(\lambda) > Re(\mu) > 0$ ve $Re(\lambda) > m-k$ olur.

İspat. (4.14) eşitliğinde F_p genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun ve $(1-z)^{-\alpha}$ ifadesinin seri açılımı yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak genelleştirilmiş Caputo kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
& D_z^{\lambda-\mu,p} \left\{ z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha} F_p(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{1-z}) \right\} \\
&= D_z^{\lambda-\mu,p} \left\{ z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} \frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)} (\frac{x}{1-z})^n \right\} \\
&= D_z^{\lambda-\mu,p} \left\{ z^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n \frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)} \frac{x^n}{n!} (1-z)^{-\alpha-n} \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)} \frac{x^n}{n!} \frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_k}{k!} D_z^{\lambda-\mu,p}\left\{z^{\lambda+k-1}\right\}$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} \left[\frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)} \frac{x^n}{n!} \frac{(\alpha)_{n+k}}{k!}\right.$$

$$\left.\times \frac{\Gamma(\lambda+k)B_p(\lambda-m+k,m-\lambda+\mu)}{\Gamma(m+k)B(\lambda-m+k,m-\lambda+\mu)} z^{\mu+k-1}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} \sum_{n,k=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda)_k}{(\mu)_k} \frac{B_p(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}\right.$$

$$\left.\times \frac{B_p(\lambda-m+k,m-\lambda+\mu)}{B(\lambda-m+k,m-\lambda+\mu)} (\alpha)_{n+k} \frac{x^n}{n!} \frac{z^k}{k!}\right]$$

elde edilir. ■

$p = 0$ durumunda gerekli işlemler yapıldığında

$$D_z^{\lambda-\mu,0}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha} F_0(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{1-z})\right\} = \frac{\Gamma(\lambda)z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} F_2(\alpha,\lambda,\beta;\mu,\gamma;x,z)$$

şeklinde (4.13) eşitliğinin aynısı elde edilmiş olur. Burada F_2 ikinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyondur.

Teorem 4.12 $Re(p) > 0$, m pozitif bir tamsayı ve $m-1 < Re(\mu) < m$ olmak üzere $f(z) = e^z$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi

$$D_z^{\mu,p}\{e^z\} = \frac{z^{m-\mu}}{\Gamma(m-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} B_p(m-\mu,n+1)$$

ifadesine eşittir.

İspat. $f(z) = e^z$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Caputo kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$D_z^{\mu,p}\{e^z\} = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^z (z-t)^{m-\mu-1} e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)} \frac{d^m e^t}{dt^m} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^z (z-t)^{m-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)} dt$$

$$= \frac{z^{m-\mu}}{\Gamma(m-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^1 (1-u)^{m-\mu-1} u^n e^{\left(\frac{-p}{u(1-u)}\right)} du$$

$$= \frac{z^{m-\mu}}{\Gamma(m-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} B_p(m-\mu, n+1)$$

elde edilir. ■

$p = 0$ için,

$$D_z^{\mu,0}\{e^z\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n-\mu+1)} z^{m-\mu}$$

klasik Caputo türevi elde edilir. $p = 0$ ve $m = \mu$ durumunda ise $f(z) = e^z$ fonksiyonunun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

klasik türevi elde edilmiş olur.

4.2 MELLİN DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde genelleştirilmiş Caputo türevlerini elde ettiğimiz iki fonksiyon sınıfının Mellin dönüşümlerini hesaplayacağız. Öncelikle Mellin dönüşümünün tanımını verelim.

Tanım 4.13 $(0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin.

$$\mathfrak{M}\left[f(x) : s\right] = F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx \tag{4.15}$$

ifadesine $f(x)$ in Mellin dönüşümü denir ve $\mathfrak{M}[f(x):s]$ ile gösterilir [29].

Örnek 4.14 $n>0$ olmak üzere $f(x)=e^{-nx}$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım. (4.15) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}[f(x):s] &= \mathfrak{M}\left[e^{-nx}:s\right] \\ &= \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $nx=t$ alınırsa ($x=\frac{t}{n}$, $dx=\frac{dt}{n}$)

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\left[e^{-nx}:s\right] &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^{s-1}\frac{e^{-t}}{n}dt \\ &= \frac{1}{n^s}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt \\ &= \frac{\Gamma(s)}{n^s}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.15 (4.3) eşitliğinin Mellin dönüşümü m pozitif tamsayı, $m-1<Re(\alpha)<m$, ve $Re(\lambda)>m-1$ olmak üzere

$$\mathfrak{M}\left[D_z^{\alpha,p}\left\{z^\lambda\right\}:s\right]=\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(s)B(m-\alpha+s,\lambda-m+s+1)z^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(\lambda-m+1)\Gamma(m-\alpha)}$$

şeklindedir. Burada $Re(p)>0$ ve $Re(s)>0$ olur.

İspat. (4.15) Mellin dönüşümü tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\left[D_z^{\alpha,p}\left\{z^\lambda\right\}:s\right] &= \int_0^\infty p^{s-1}D_z^{\alpha,p}\left\{z^\lambda\right\}dp \\ = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}&\int_0^\infty p^{s-1}\int_0^z (z-t)^{m-\alpha-1}e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)}\frac{d^m t^\lambda}{dt^m}dtdp\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty p^{s-1} \int_0^z (z-t)^{m-\alpha-1} t^{\lambda-m} e^{\left(\frac{-pz^2}{t(z-t)}\right)} dtdp$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda+1) \quad z^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(\lambda-m+1)\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty p^{s-1} \int_0^1 (1-u)^{m-\alpha-1} u^{\lambda-m} e^{\left(\frac{-p}{u(1-u)}\right)} dudp$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (1-u)^{m-\alpha-1} u^{\lambda-m} e^{\left(\frac{-p}{u(1-u)}\right)} du$$

ve

$$\int_0^\infty p^{s-1} e^{\left(\frac{-p}{u(1-u)}\right)} dp$$

integralleri düzgün yakınsak olduğundan integrasyon sırası yer değiştirilerek

$$\mathfrak{M}\left[D_z^{\alpha,p}\left\{z^\lambda\right\} : s\right] = \frac{\Gamma(\lambda+1) z^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(\lambda-m+1)\Gamma(m-\alpha)}$$
$$\times \int_0^1 (1-u)^{m-\alpha-1} u^{\lambda-m} \int_0^\infty p^{s-1} e^{\left(\frac{-p}{u(1-u)}\right)} dpdu$$

bulunabilir. Bu integralde $r = \frac{p}{u(1-u)}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\mathfrak{M}\left[D_z^{\alpha,p}\left\{z^\lambda\right\} : s\right] = \frac{\Gamma(\lambda+1) \quad z^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(\lambda-m+1)\Gamma(m-\alpha)}$$
$$\times \int_0^1 (1-u)^{m-\alpha-1} u^{\lambda-m} \int_0^\infty u^s (1-u)^s r^{s-1} e^{-r} drdu$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda+1) \quad z^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(\lambda-m+1)\Gamma(m-\alpha)}$$
$$\times \int_0^1 (1-u)^{m-\alpha+s-1} u^{\lambda-m+s} \int_0^\infty r^{s-1} e^{-r} drdu$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda+1) \quad z^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(\lambda-m+1)\Gamma(m-\alpha)} B(m-\alpha+s, \lambda-m+s+1)\Gamma(s)$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(s)}{\Gamma(\lambda-m+1)\Gamma(m-\alpha)} B(m-\alpha+s, \lambda-m+s+1) z^{\lambda-\alpha}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.16 m pozitif bir tamsayı, $m-1 < Re(\alpha) < m$, $Re(s) > 0$, $Re(p) > 0$ ve $\mid z \mid < 1$ olmak üzere

$$\mathfrak{M}\left[D_z^{\alpha,p}\left\{(1-z)^{-a}\right\}:s\right]=\frac{\Gamma(s)\ z^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(m-\alpha+s,n+s+1)}{\Gamma(n+1)}(\alpha)_n z^n$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $(1-z)^{-a}$ ifadesinin seri açılımı kullanılır ve 4.15. Teoremde $\lambda = n$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}\left[D_z^{\alpha,p}\left\{(1-z)^{-a}\right\}:s\right] &= \mathfrak{M}\left[D_z^{\alpha,p}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\right\}:s\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}\mathfrak{M}\left[D_z^{\alpha,p}\left\{z^n\right\}:s\right] \\
&= \frac{\Gamma(s)\ z^{-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(m-\alpha+s,n-m+s+1)}{\Gamma(n-m+1)}(\alpha)_n z^n \\
&= \frac{\Gamma(s)\ z^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(m-\alpha+s,n+s+1)}{\Gamma(n+1)}(\alpha)_n z^n
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. ■

KAYNAKLAR

[1] Özarslan, M. A.; Özergin, E. *Some generating relations for extended hypergeometric functions via generalized fractional derivative operator,* J. Comput. Appl. Math. **2010**, 52, 1825-1833.

[2] Dalir M.; Bashour M. *Applications of Fractional Calculus,* Applied Mathematical Sciences, **2010**, 21, 1021-1032.

[3] Loverro A. *Fractional Calculus. History, Defination and Applications for the Engineer,* USA, 2004.

[4] Podlubny, I. *Fractional differential equations,* Academic Pres, New York, 1999.

[5] Oldham, K.B.; Spanier, J. *The fractional calculus,* Academic Pres, New York, 1974.

[6] Miller, K.S.; Ross, B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations,* Wiley, New York, 1993.

[7] Hilfer, R. *Applications of fractional calculus in physics,* World Scientific, Singapore, 2000.

[8] Momani, S.; Odibat, Z. *Numerical approach to differential equations of fractional order,* J. Comput. Appl. Math. **2007**, 207, 96-110.

[9] Momani S.; Noor M. A. *Numerical methods for fourth-order fractional integro- differential equations,* Appl. Math. Comput. **2006**, 182, 754-760.

[10] Odibat Z.; Momani S. *Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order,* Internatioanal Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, **2006**, 1, 27-34.

[11] Momani, S. *Explicit and numerical solutions of the fractional KdV equation,* Math. Comput. Sim. **2005**, 70, 110-118.

[12] Kumar P.; Agrawal O. P. *An approximate method for numerical solution of fractional differential equations,* Signal Processing, **2006**, 86, 2602-2610.

[13] Altın, A. *Uygulamalı Matematik,* Gazi Kitapevi, Ankara, 2011.

[14] Andrews, L.C. *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians,* Macmillan, New York, 1985.

[15] Chaudhry, M. A.; Zubair, S.M. *Generalized incomplete gamma functions with applications,* J. Comput. Appl. Math. **1994**, 55, 99-124.

[16] Özarslan, M. A.; Özergin, E.; Altın, A. *Extension of gamma, beta and hypergeometric functions,* J. Comput. Appl. Math. **2010**, 235, 4601-4610.

[17] Qadir, A. *The generalization of special functions,* Appl. Math. Comput. **2007**, 187, 395-402.

[18] Chaudhry, M. A.; Zubair, S.M. *On the decomposition of generalized incomplete gamma functions with applications to Fourier transforms,* J. Comput. Appl. Math. **1995**, 59, 253-284.

[19] Chaudhry, M. A.; Zubair, S.M. *Analytic study of temperature solution due to gamma type moving point-heat sources lnternat* J. Heat Mass TransJer **1993**, 36, 1633-1637.

[20] Chaudhry, M. A.; Qadir, A.; Boudjelkha, M.T.; Rafique, M.; Zubair, S.M. *Extended Riemann zeta function,* Rocky Mountain J. Math. **2001**, 31, 237-1263.

[21] Chaudhry, M. A.; Qadir, A.; Srivastava, H. M.; Paris, R.B. *Extended hypergeometric and confluent hypergeometric function,* Appl. Math. Comput. **2004**, 159, 589-602.

[22] Bailey, W.N. *Generalized hpergeometric series,* Cambridge University Press, 1964.

[23] Samko, S.G.; Kilbas, A.A.; Marichev, O.I. *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications,* Gordon and Breach, Longhorne, 1993.

[24] Balcı, M. *Analiz,* Balcı Yayıncılık, Ankara, 2005.

[25] Magin, R.L. *Fractional Calculus in Bioengineering,* Critical Reviews in Biomedical Engineering, **2004**, 32, 11.

[26] Mainardi, F. *Fractional Calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics,* Fractals and Fractional Calculus in Continum Mechanics, 291, 1997.

[27] Distefano, J.J.; Stubberud, A.R.; Williams, I.J. *Schaum's outline of theory and problems of feedback and control systems,* McGraw-Hill, 1995.

[28] Giona, M.; Cerbelli, S.; Roman, H.E. *Fractional diffusion equation and relaxation in complex viscoelastic materials,* Physica A, **1992**, 191, 449.

[29] Kılbas, A.A.; Srivastiva H.M.; Trujillo, J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equation,* Elsevier B.V., Amsterdam, 2006.

[30] Podlubny I. *Fractional Order Systems and PID Controllers IEEE Transactions on Automatic Control* **1999**, 44, 208-214.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Yusuf SÖKMEN

Doğum Yeri : Denizli

Doğum Tarihi : 30.10.1986

Ünvanı : Yüksek Lisans Öğrencisi

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim

Orta Öğrenim : Acıpayam Anadolu Lisesi, 2002-2006.

Lisans : Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2006-2010.

Yüksek Lisans : Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2010-...