T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİN BAZI FONKSİYON UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI

İlkay BİLGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KIRŞEHİR 2018

T.C.

AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİN BAZI FONKSİYON UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI

İlkay BİLGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

KIRŞEHİR 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Üye
Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

Üye
Dr. Öğr. Ü. Fatih DERİNGÖZ

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

2018

Prof. Dr. Yılmaz ALTUN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum ”Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörlerinin Bazı Fonksiyon Uzaylarındaki Sınırlılığı” başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

İLKAY BİLGİN

ÖZET

Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörlerin Bazı Fonksiyon Uzaylarındaki Sınırlılığı

Yüksek Lisans Tezi

İLKAY BİLGİN

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Mart 2018

Bu tez dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lebesgue uzayları, Morrey uzayları, genelleştirilmiş Morrey uzayları ve genelleştirilmiş Campanato uzayları tanıtılarak temel özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Riesz potansiyeli ve genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerinin temel özellikleri verilmiş ve bu operatörlerin L_p Lebesgue uzaylarındaki sınırlılıklar detaylı bir şekilde araştırılmıştır ve genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerin Morrey uzayları ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Campanato uzaylarında modifiye genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerinin sınırlılığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri,
Genelleştirilmiş Morrey uzayları,
Riesz potansiyeli, L_p uzayları,
Morrey uzayları, Campanato uzayları:,

Tez Yöneticileri : Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Sayfa Adedi : **67**

ABSTRACT

The Boundedness of Generalized Fractional Integral Operators on Some Function Spaces

Master of Science Thesis

İLKAY BİLGİN

Ahi Evran University
Institute of Science
March 2018

This thesis is consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and theorems related to this study are given.

In the third chapter, Lebesgue spaces, Morrey spaces, generalized Morrey spaces and generalized Campanato spaces are introduced and their fundamental properties are given.

In the fourth chapter, fundamental properties of Riesz potential and generalized fractional integral operators are given and the boundedness of these operators in L_p Lebesgue spaces are investigated. The criteria for the boundedness of generalized fractional integral operators on Morrey spaces and generalized Morrey spaces is also given. Moreover, we also investigated the boundedness of the modified generalized fractional integral operators in generalized Campanato spaces.

Keywords : Generalized fractional integral operators,
Generalized Morrey spaces,
Riesz potential, L_p spaces,
Morrey spaces, Campanato Spaces:,

Tez Yöneticileri : Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Sayfa Adedi : **67**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, bana bilgileriyle yol gösteren ve kişiliğiyle hayran bırakan saygıdeğer danışmanım; Prof. Dr. Vagıf S. Guliyev'e ve düşünceleriyle beni etkileyen saygıdeğer hocam; Öğrt. Gör. Süleyman ÇELİK' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca beni bir an olsun bile yalnız hissetirmeyen değerli kardeşlerim Hüseyin BİLGİN'e, Çağla BİLGİN'e ve tüm zorlukları benimle göğüsleyen hayatımın her evresinde bana destek olan babam Ramazan BİLGİN ve annem Arife BİLGİN 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmamın son aşamasında tanıştığım sevgili nişanlım Eda ORUÇ'a desteklerinden ötürü çok teşekkür ederim.

İlkay BİLGİN

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$	: $n-$ **boyutlu Öklid uzay**
Ω	: $\mathbb{R}^n$ **de açık küme**
$B(x,r)$	: x **merkezli** r **yarıçaplı açık yuvar**
$\|B(x,r)\|$	: $B(x,r)$ **yuvarının Lebesgue ölçüsü**
M_α	: **Kesirli maksimal operatör**
I_α	: **Riesz potansiyeli operatörü**
T_ρ	: **Genelleştirilmiş kesirli integral operatörü**
$L_p(\Omega)$	: **Lebesgue uzayı**
$M_{p,\lambda}(\Omega)$	: **Morrey uzayı**
$\mathcal{M}_{p,\phi}$	: **Genelleştirilmiş Morrey uzayı**
$\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$	: **Campanato uzayı**
$\mathcal{L}_{p,\phi}$	: **Genelleştirilmiş Campanato uzayı**
$A \hookrightarrow B$	: A **nın** B **ye gömülmesi**

1 GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezinde, bir

$$\rho : (0, \infty) \to (0, \infty)$$

fonksiyonu için

$$T_\rho f\,(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

ile tanımlanan T_ρ genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerinin harmonik analizin bazı fonksiyon uzaylarındaki sınırlılığı incelenmiştir.

Genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerin kısmi türevli denklemler teorisi ile matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır. T_ρ operatöründe $\rho(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < n$ alınırsa

$$I_\alpha f(x) \equiv T_{t^\alpha} f(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

Riesz potansiyeli elde edilir. Riesz potansiyelinin veya klasik kesirli integral operatörlerin Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığı ile ilgili ilk çalışmalar 1920'li yıllarda Hardy ve Littlewood tarafından yapılmıştır ve bu çalışma 1930'lu yıllarda Sobolev tarafından geliştirilmiştir. Riesz potansiyeli için bilinen en iyi sonuçlardan biri Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliğidir. 1972 yılında Spanne tarafından Riesz potansiyelinin sınırlılığı Lebesgue uzaylarından Morrey uzaylarına genişletilmiştir. 1975 yılında Adams bu sınırlılık için daha güçlü bir sonuç elde etmiştir. Bu sonuç 1987 yılında Chiarenza ve Frasca tarafından farklı tekniklerle yeniden ispatlanmıştır. 1990-1994 yıllarında Nakai ve Guliyev Riesz potansiyelinin sınırlılığını genelleştirilmiş Morrey uzaylarında araştırmışlardır. Genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerle ilgili ilk çalışma 2001 yılında E. Nakai tarafından yapılmıştır. Son yıllarda genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerin genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığı ile ilgili H. Gunawan, Eridani, Y. Sawano, E. Nakai, V.S. Guliyev ve A. Serbetci gibi birçok matematikçiler tarafından çalışmalar yapılmaktadır ([**1, 11, 27, 10, 14, 38, 39**]).

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, harmonik analizin Lebesgue uzayları, Morrey uzayları, genelleştirilmiş Morrey uzayları ve genelleştirilmiş Campanato uzayları tanıtılmış ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Morrey ve Campanato uzaylarının Lebesgue uzayları ile ilişkisi incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Riesz potansiyeli ve genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerinin temel özellikleri verilmiş ve bu operatörlerin L_p Lebesgue uzaylarındaki sınırlılıkları detaylı bir şekilde araştırılmıştır. Genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerin Morrey uzayları ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Campanato uzaylarında modifiye genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerinin sınırlılığı incelenmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad x, y, z \in X \ ,$$

şeklinde ifade edilen d fonksiyonu

(d_1) $d(x, y) \geq 0$

(d_2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(d_3) $d(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$

(d_4) $d(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

özellikleri sağlıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir **metrik** (**uzaklık fonksiyonu**) adı verilir.

(X, d) ikilisine bir metrik uzay ve $(d_1) - (d_4)$ özelliklerine de **metrik aksiyomları** denir. Ayrıca bir küme üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir [18].

Tanım 2.0.2 (X, d) metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir sayı olsun;

$B(x_0, r) := \{x \in X : \mathrm{d}(x_0, x) < r\}$, ($x_0$ merkezli r yarıçaplı bir **açık yuvar**),

$D(x_0, r) := \{x \in X : \mathrm{d}(x_0, x) \leq r\}$, ($x_0$ merkezli r yarıçaplı bir **kapalı yuvar**),

$S(x_0, r) := \{x \in X : \mathrm{d}(x_0, x) = r\}$, ($x_0$ merkezli r yarıçaplı bir **yuvar yüzeyi**)

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(\alpha, r)$ olacak şekilde bir $B(\alpha, r)$ açık yuvarı varsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi X metrik uzayında sınırlıdır denir. Ayrıca $A \subset B(\alpha, r)$ olacak şekilde $B(\alpha, r)$ açık yuvarı varsa $A \subset X$ alt kümesine X metrik uzayında **sınırlıdır** denir [18].

Tanım 2.0.3 (X, d) metrik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, eğer $B(x_0, \varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa $x_0 \in A$ sayısına A nin bir **iç noktası** denir [18].

Tanım 2.0.4 (X, d) metrik uzay ve $\Omega \subset X$ olmak üzere, eğer Ω kümesinin her noktası Ω nin bir iç noktası ise Ω ye (X te) bir **açık küme** denir [18].

Tanım 2.0.5 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ni \forall m, n > n_\epsilon$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon \Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi X içinde bir **Cauchy dizisi** dir [4].

Lemma 2.0.6 X, metrik uzayında bir Cauchy dizisi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve alt dizisinde $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ olsun. Eğer alt dizi X uzayında $x_{n_k} \to x$ ise $x_n \to x$ olur [20].

Tanım 2.0.7 Bir (X, d) metrik uzayı sayılabilir ve yoğun bir altküme içerirse **ayrılabilir** adını alır. Boş küme ayrılabilir olarak kabul edilir [18].

Tanım 2.0.8 X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}, \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbf{K}$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir **normlu vektör uzayı** denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir [4].

Teorem 2.0.9 X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$$\| \cdot \| : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı her norm dönüşümü X vektör uzayı üzerinde süreklidir [4].

Tanım 2.0.10 Bir (X, $\|\cdot\|$) normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu (X, $\|\cdot\|$) normlu uzayına **Banach uzayı** adı verilir [4].

Tanım 2.0.11 (f_n) A üzerinde **düzgün sınırlı** $\Leftrightarrow \exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in A \ |f_n(x)| \leq M$ [5].

Tanım 2.0.12 X ve Y iki normlu uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in D(T)$ için,

$$\|Tx\| \leq C \|x\|$$

olacak şekilde bir C reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir. Bir T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır [4].

Teorem 2.0.13 Bir $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı herhangi bir X normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir [4].

Tanım 2.0.14 X, **K** cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in X$ için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

olacak şekilde $c,\ C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk normlar denir [36].

Tanım 2.0.15 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre **yakınsama** denir [36].

Tanım 2.0.16 (Gömme) X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun.

$$D_T(I) = \mathfrak{R}(I) = X$$

olmak üzere her $x \in X$ için $I(x) = x$ biçiminde tanımlanan

$$\mathrm{I} : X \to Y$$

operatörüne birim operatör denir. Bu operatör sürekli ise yani $\forall x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti var ise X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir. I operatörüne X uzayından Y uzayına bir gömme operatörü denir. Alternatif olarak bazen X uzayının Y uzayına bir sürekli(veya sınırlı) gömmesi mevcuttur denir.

$$\|\mathrm{I}\|_{X\hookrightarrow Y} := \sup_{f\neq 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

şeklinde gösterilen bu sayıya da I nın operatör normu denir. Eğer X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına bir sürekli gömme mevcut ise

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$X \hookrightarrow Y \text{ ve } Y \hookrightarrow X$$

aynı anda oluyorsa,

$$X \rightleftarrows Y$$

şeklinde gösterilir ve eğer bu gömme operatörü kompakt ise de

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir [32].

Teorem 2.0.17 X, Y Banach uzayları ve A X den Y ye bir lineer operatör olsun (Dom(A)=X ve Rng(A)=Y). Eğer A sürekli ve A^{-1} varsa bu durumda A^{-1} de süreklidir [32].

Tanım 2.0.18 (İç Çarpım Uzayı) $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de vektörler olmak üzere $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklidyen uzayı $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ iç çarpımı ile donatılmış, $n-$boyutlu reel uzayıdır. Burada x vektörünün mutlak değeri $|x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır [37].

Tanım 2.0.19 X kümesindeki $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X kümesi üzerinde bir **cebir** adı verilir.

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall \mathrm{E} \in \mathcal{A}, \quad \mathrm{E}^c = X \backslash \mathrm{E} \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, ..., n, \quad \mathrm{E}_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) yerine

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_k \in \mathcal{A} \tag{2.1}$$

şartı sağlanırsa bu durumda $\mathcal{A}$ cebirine bir **σ-cebir** adı verilir. [35].

Tanım 2.0.20 X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ- cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathcal{A}$ daki her kümeye **$\mathcal{A}$-ölçülebilir küme** (**ölçülebilir küme**) adı verilir [42].

Tanım 2.0.21 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \ \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona **ölçü** denir [42].

Tanım 2.0.22 X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0,$

(ii) $\forall \ A \in P(X), \ \mu^*(A) \geq 0,$

(iii) $A \subset B \subset X, \ \mu^*(A) \leq \mu^*(B),$

(iv) $\forall\, n \in \mathbb{N},\, A_n \in P(X) \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçü** denir [35].

Tanım 2.0.23 $M(\mathbb{R}, \lambda^*)$, λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir sınıfı olsun. λ^* Lebesgue dış ölçüsünün $M(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına **Lebesgue ölçüsü** denir, λ ile gösterilir [35].

Tanım 2.0.24 X boştan farklı bir küme ve $E \subset X$ olsun.

$$\chi_{A(x)} := \begin{cases} 1\,, & x \in A \\ 0\,, & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\chi_{A(x)} : X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna A kümesinin **karakteristik fonksiyonu** denir [32].

Tanım 2.0.25 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan küme veya kendisi $\mathcal{A}$ ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme **hemen hemen her yerde** doğrudur denir, kısaca **h.h.y** biçiminde yazılır.

Bir p(x) önermesinin doğru olmadığı x noktalarının kümesi sıfır ölçülü bir küme veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa, p(x) önermesi **hemen hemen her** x için doğrudur denir [6].

Teorem 2.0.26 (**Fubini**) $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, ölçülebilir ve $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ kümesi olsun. $f(x, y)$ Ω üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda h.h $x \in \Omega_1$ ve $y \in \Omega_2$ için

$$\int\limits_{\Omega_1} f(x, y)dx \quad \text{ve} \quad \int\limits_{\Omega_2} f(x, y)dy$$

integralleri var. Dolayısıyla

$$\int\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy = \int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} f(x, y)dy \right) dx = \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} f(x, y)dx \right) dy$$

olur [20].

Tanım 2.0.27 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Eğer $\int\limits_X f^+(x)d\mu(x)$ ve $\int\limits_X f^-(x)d\mu(x)$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde μ ye göre integrallenebilirdir denir ve bu integral

$$\int\limits_X f(x)d\mu(x) = \int\limits_X f^+(x)d\mu(x) = \int X f^-(x)d\mu(x)$$

biçiminde tanımlanır. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki integral tanımından $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçüsü olarak alınırsa elde edilen integrale **Lebesgue İntegrali** adı verilir. Bu integral $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ veya $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)d\lambda x$ ile gösterilir [6].

Teorem 2.0.28 (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ f fonksiyonuna yakınsak ise

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_n d\mu$$

dir [6].

Teorem 2.0.29 (**Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi**) (X, A, μ) bir ölçü uzayı, $g : X \to [0, +\infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve f,f_1,f_2... de X üzerinde A-ölçülebilir $[-\infty, +\infty]$ değerli fonksiyonlar olsun. Eğer h.h. x için

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

(ii) $\forall n \in N$, $|f_n(x)| \leq g(x)$

ise bu takdirde f ve f_n integrallenebilirdir ve

$$\lim \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu \tag{2.2}$$

dır [6].

Lemma 2.0.30 (**Fatou Lemması**) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$$

dır [6].

3 HARMONİK ANALİZDE BAZI FONKSİYON UZAYLARI

Bu bölümde, harmonik analizin Lebesgue uzayları, Morrey uzayları, genelleştirilmiş Morrey uzayları, Campanato uzayları ve genelleştirilmiş Campanato uzayları tanıtılmış ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Morrey ve Campanato uzaylarının Lebesgue uzayları ile ilişkisi incelenmiştir.

3.1 Lebesgue Uzayları

L_p uzayı, sonlu boyutlu vektör uzayı için p-normlu genelleşmesi kullanılarak tanımlanmış fonksiyon uzayıdır. Bourbaki grubuna göre, ilk olarak 1910 yılında Frigyes Riesz [34] tarafından çalışılmasına rağmen 1958 yılında Fransız matematikci Henri Lebesgue'nin [22] adını alır ve Lebesgue uzayları olarak ifade edilir. L_p uzayı fonksiyonel analiz'de Banach uzayı'nın ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını oluşturur. Lebesgue uzayı'nın fizik, istatistik, finans, mühendislik gibi önemli uygulamalarında kullanılmaktadır.

3.1.1 Bazı Elemanter Eşitsizlikler

Bu kısımda kullananılacak bazı elemanter eşitsizlikler verilmiştir.

Lemma 3.1.1 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $p \geq 1$ olsun.

$$|\alpha + \beta|^p \leq 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p)$$

dır [20].

İspat. Kabul edelim ki

$$|\alpha| \geq |\beta|$$

olsun.

$$z = \frac{\alpha}{\beta}$$

ve

$$|z| \geq 1$$

olmak üzere

$$\left|\frac{z+1}{2}\right|^p \leq \frac{|z|^p + 1}{2}$$

olduğunu ispatlayalım. Burada belirtelim ki,

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| \leq \frac{|z|+1}{2}$$

dır.

$t = |z| \geq 1$ olmak üzere

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^p \leq \frac{1+t^p}{2}$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir.
Yani bu eşitsizlik bir değişkenli bir analiz problemidir.

$$f(t) = \frac{1+t^p}{2} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^p$$

olarak alırsak,

$$f'(t) = \frac{pt^{p-1}}{2} - \frac{p(1+t)^{p-1}}{2^p}$$

dır. Böylece $\forall t \geq 1$ için

$$f'(t) = \frac{pt^{p-1}}{2} - \frac{p(1+t)^{p-1}}{2^p} > 0$$

dır.

O halde, $\forall t \geq 1$ için $f(t)$ artan ve $f(1) = 0$ dır. Dolayısıyla $f(t) \geq f(1) = 0$ olup $t = |z| \geq 1$ olduğundan

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^p \leq \frac{1+t^p}{2}$$

elde edilir

■

Lemma 3.1.2 $\lambda \in (0,1)$ olsun. Bu durumda

$$x^\lambda \leq (1-\lambda) + \lambda x$$

dir [20].

İspat.

$f(x) = (1-\lambda) + \lambda x - x^\lambda$ olsun.
Böylece;

$$f'(x) = \lambda - \lambda x^{\lambda-1} = 0 \Longleftrightarrow \lambda(1 - x^{\lambda-1}) = 0$$

olup $x = 1$ noktası f fonksiyonunu bir kritik noktasıdır. O halde f fonksiyonu $x = 1$ noktasında minumum değerini alır. Yani

$$f(1) = 0 \leq (1-\lambda) + \lambda x - x^{\lambda}$$

olduğundan

$$x^{\lambda} \leq (1-\lambda) + \lambda x.$$

■

Lemma 3.1.3 $a, b \geq 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ olsun. $a = b$ alınırsa

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

dir [20].

İspat. $a = 0$ veya $b = 0$ durumunda eşitsizlik doğrudur.
$a, b > 0$ olsun. Lemma 3.1.2 deki

$$x^{\lambda} \leq (1-\lambda) + \lambda x; \quad \lambda \in (0,1)$$

eşitsizliğinde $x = \frac{a}{b}$ seçilirse

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} \leq (1-\lambda) + \lambda \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow a^{\lambda} b^{-\lambda} \leq (1-\lambda) + \lambda (a b^{-1})$$

$$\Rightarrow a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

ispatlanmış olur. ■

Tanım 3.1.4 $1 < p < \infty$ için

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

bağıntısı ile q Lebesgue eşleniğini tanımlarız. Başka bir ifadeyle,

$$q = \frac{p}{p-1}$$

dır [20].

Teorem 3.1.5 (Young eşitsizliği) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun.
$\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ için $a, b > 0$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır [32].

3.1.2 $L_p(\Omega)$ Uzayı

Fonksiyonel analizde, Banach uzayı ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını (**Lebesgue uzayı**) $L_p(\Omega)$ uzayı oluşturur. Harmonik analizin önemli konularından biri olan Lebesgue uzayı, harmonik analizin iç problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde de uygulamalara sahiptir.

Tanım 3.1.6 $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & , \ 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in \Omega} |f(x)| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [32].

Ω bölgesinde h.h. x için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna hemen heryerde sınırlıdır denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin Ω bölgesindeki **esas supremumu** (veya esaslı sınırı) denir.

Tanım 3.1.7 $L_p(\Omega)$ uzayı,

$$L_p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \ \ \|f\|_{L_p(\Omega)} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

$L_p(\Omega)$ uzayının, vektör uzayı özellikleri aşağıdaki gibidir.

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f \in L_p(\Omega) \Longrightarrow \alpha f \in L_p(\Omega)$,

(ii) $f, g \in L_p(\Omega) \Longrightarrow |f + g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ ve $f + g \in L_p(\Omega)$ [20].

Teorem 3.1.8 (Hölder Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_q(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır [32].

Teorem 3.1.9 (Minkowski eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ ve $f, g \in L_p(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \tag{3.2}$$

dır [20].

Lemma 3.1.10 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $1 \leq p < q < \infty$ olsun.

(i) $\mu(\Omega) < \infty$ ve $f \in L_p(\Omega) \Longrightarrow f \in L_q(\Omega)$
ve

$$\|f\|_{L_q(\Omega)} \leq (\mu(\Omega))^{\frac{p-q}{pq}} \|f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{3.3}$$

(ii) $\mu(\Omega) = \infty$ ise bu durumda $L_p(\Omega)$ ve $L_q(\Omega)$ kümeleri arasında (3.3) eşitsizliği gerçekleşmez [20].

Teorem 3.1.11 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $L_p(\Omega)$ bir Banach uzayıdır [32].

İspat. Kabul edelim ki $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $L_p(\Omega)$ da bir Cauchy dizisi olsun. Bu dizinin, $L_p(\Omega)$ da yakınsak olduğunu ispatlayalım. Lemma 2.0.6 den dolayı $L_p(\Omega)$ uzayında $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ pozitif artan tamsayıların bir dizisi olduğundan $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L_p(\Omega)} < 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \Omega$ için

$$g_k(x) := |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=1}^{k} \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right| \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır ve $\forall x \in \Omega$ için $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ azalmayan bir dizidir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için (3.4) ifadesine Minskowski eşitsizliği uyarlanırsa

$$\begin{aligned} \|g_k\|_{L_p(\Omega)} &\leq \|f_{n_1}\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq \|f_{n_1}\|_p + 1 < \infty \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde eldilir. Dolayısıyla $\forall k \in \mathbb{N}$ için $g_k \in L_p(\Omega)$ olur ve ayrıca $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, $L_p(\Omega)$ da düzgün sınırlıdır.

$$g(x) := \lim_{k \to \infty} g_k(x), \quad x \in \Omega$$

olacak şekilde yani $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin monotonluğundan dolayı her noktada da limiti mevcut olup böylece bir g fonksiyonu tanımlıdır. Buradan (3.5) eşitsizliği ve Lemma 2.0.30 (**Fatou Lemma**) dan

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |g(x)|^p\, dx &= \int_{\Omega} \lim_{k\to\infty} |g_k(x)|^p\, dx \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega} |g_k(x)|^p\, dx \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\Omega} |g_k(x)|^p\, dx \\ &\leq \left(\|f_{n_1}\|_{L_p(\Omega)} + 1\right)^p \\ &< \infty\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$\|g\|_{L_p(\Omega)} < \infty \Rightarrow g \in L_p(\Omega)$$

dir. Ayrıca h.h $x \in \Omega$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$$

sonludur. Sonuç olarak,

$$f(x) := f_{n_1}(x) - \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)), \quad x \in \Omega$$

olacak şeklinde

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x), \quad \text{h.h } x \in \Omega. \tag{3.6}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \Omega$ için

$$f_{n_{k+1}}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)),$$

böylece

$$\left|f_{n_{k+1}}(x)\right| \leq g_k(x) \leq g(x)$$

ise

$$\left|f_{n_{k+1}}(x)\right|^p \leq (g(x))^p \tag{3.7}$$

dır. Bundan dolayı, Teorem 2.0.29 (**Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi**)'a göre (3.6) eşitliği ve (3.7) eşitsizliğinden

$$\infty > \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} |f_{n_{k+1}}(x)|^p dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} \lim_{n\to\infty} |f_{n_{k+1}}(x)|^p dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx$$

olur ve $f \in L_p(\Omega)$ dir. $\forall\, k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} f_{n_{k+1}}(x) - f(x) = \sum_{i=k+1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) & \\ \Rightarrow \left|f_{n_{k+1}}(x) - f(x)\right| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right| \leq g(x), & \\ \Rightarrow \left|f_{n_{k+1}}(x) - f(x)\right|^p \leq (g(x))^p & \qquad (3.8) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla Teorem 2.0.29 (**Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi**)'a göre (3.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left(\int |f_{n_k}|(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} &= \left(\int \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.12 Ω kümesi $\mathbb{R}^n$ de boştan farklı bir açık altküme olsun. Bu durumda $L_\infty(\Omega)$ ayrılabilir bir uzay değildir [32].

Teorem 3.1.13 $\mu(\Omega) < \infty$ ve $1 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda

$$L_\infty(\Omega) \subset L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega) \subset L_1(\Omega). \tag{3.9}$$

Bu kapsamalar Lebesgue integralinin temel özelliklerinden ve Hölder eşitsizliğinden elde edilir [32].

Teorem 3.1.14 $\mu(\Omega) < \infty$ olmak üzere $f \in L_\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)}$$

dır [32].

İspat. $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0$ olması durumunda aşikardır. Kabul edelim ki $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} > 0$ ve keyfi bir ε sayısı $(0, \frac{1}{2}\|f\|_{L_\infty(\Omega)})$ dan olsun.

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \le \|f\|_{L_\infty(\Omega)}(\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği olup

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} \le \|f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Bu durumda, $\forall x \in B, |f(x)| \ge \|f\|_{L_\infty(\Omega)} - \varepsilon$ için pozitif ölçülü bir $B \subset \Omega$ kümesi vardır. Ayrıca

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \ge \left(\int_B |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\ge (\mu(B))^{\frac{1}{p}}(\|f\|_{L_\infty(\Omega)} - \varepsilon).$$

Buradan,

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} \ge \|f\|_{L_\infty(\Omega)} - \varepsilon,$$

ve böylece

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} \ge \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

$$\ge \limsup_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

■

Teorem 3.1.15 $L_\infty(\Omega)$ bir Banach uzayıdır [32].

Lemma 3.1.16 g fonksiyonu Ω üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Herhangi $f \in L_1(\Omega)$ için

$$f.g \in L_1(\Omega)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ vardır.

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \le M\|f\|_{L_1(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Bu durumda

$$g \in L_\infty(\Omega) \ \ ve \ \ \|g\|_{L_\infty(\Omega)} \leq M$$

dir [32].

Teorem 3.1.17 Ω kümesi $\mathbb{R}^n$ de boştan farklı sınırlı bir altküme olsun. Bu durumda $L_1(\Omega)$ uzayı yansımalı değildir [32].

Teorem 3.1.18 Ω kümesi $\mathbb{R}^n$ de boştan farklı sınırlı bir altküme olsun. Bu durumda $L_\infty(\Omega)$ uzayı yansımalı değildir [32].

3.2 Morrey Uzayları

Morrey uzayları ismini taşıyan uzaylar 1938 yılında C.B Morrey [23] tarafından çalışıldı. Diferensiyel denklemlerin çözümlerini ve lokal davranışlarıyla ilgilenirken ortaya çıkmıştır. Modern analizde, Morrey-tipli uzaylar ve integral operatörlerin bu uzaylardaki sınırlılıklarının araştırılması çalışmaları her geçen gün önemi daha da artarak devam etmektedir. Çünkü bu konunun esneklik teorisi, akışkanlar mekaniği, varyasyon analizi ve kısmi diferansiyel denklemler teorisine geniş bir uygulama alanı vardır.

3.2.1 Morrey Uzayı

Tanım 3.2.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olmak üzere

$$\delta = diam \ \ \Omega = \sup\{|x-y|; x, y \in \Omega\}$$

olsun.

$$\mu(\Omega(x,\varrho)) \geq A\varrho^n \tag{3.11}$$

olmak üzere $\forall x \in \overline{\Omega}$ ve $\forall \varrho \in (0,\delta)$ için

$$\Omega(x,\varrho) = \{y \in \Omega; |x-y| < \varrho\}$$

olacak şekilde bir $A > 0$ sabiti mevcut ise $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bölgesi A tiplidir denir [32].

Tanım 3.2.2 (Morrey Uzayı) Ω_δ $=\Omega \times (0,\delta)$ olmak üzere $\lambda \geq 0$ ve $p \in (1,\infty)$ için

$$M_{p,\lambda}(\Omega) = \left\{u \in L_p(\Omega) : \sup_{x\in\Omega; r>0} \frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{\Omega(x,r)} |u(y)|^p dy < \infty\right\} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanan kümeye (**Morrey uzayı**) $M_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı denir.

$M_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayının normu;

$$\|u\|_{M_{p,\lambda}(\Omega)} := \left\{ \sup_{(x,r)\in\Omega_\delta} \frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{\Omega(x,r)} |u(y)|^p dy \right\}^{1/p} \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır [32].

Uyarı 3.2.3 $\|.\|_{M_{p,\lambda}}$ uzayı, $M_{p,\lambda}(\Omega)$ lineer uzay üzerinde bir normdur. Ω, A tipli olduğunu kabul edelim.

$$\left\{ \sup_{(x,r)\in\Omega_\delta} \mu(\Omega(x,r))^{-\frac{\lambda}{n}} \int_{\Omega(x,r)} |u(y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

ifadesi, $\|.\|_{M_{p,\lambda}(\Omega)}$ uzayına denk olan $M_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayında diğer bir norm tanımlanır.

3.3 Lebesgue Uzayları İçin Bağıntılar

Bu kısımda Morrey ve Campanato ve Lebesgue uzayları arasındaki bağıntıları, ve Morrey ve Campanato ve Lebesgue uzaylarının gömme özellikleri verilmiştir.

Teorem 3.3.1 $M_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı Banach uzaydır [32].

Teorem 3.3.2 (i) $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$M_{p,0}(\Omega) = L_p(\Omega)$$

(ii) $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$M_{p,n}(\Omega) = L_\infty(\Omega), \quad n \in \mathbb{N}$$

(iii) $1 \le p \le q < \infty$, λ ve v negatif olmayan sayılar olsun. Eğer

$$\frac{\lambda - n}{p} \le \frac{v - n}{q}$$

ise bu durumda

$$M_{q,v}(\Omega) \hookrightarrow M_{p,\lambda}(\Omega)$$

[32].

İspat.

(i) $M_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayında, $\lambda = 0$ olduğunda $\|f\|_{M_{p,0}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)}$ eşitliğinden

$$M_{p,0}(\Omega) = L_p(\Omega)$$

elde edilir.

(ii) $M_{p,n}(\Omega)$ uzayı, Banach uzayı olduğundan tamdır. Dolayısıyla $L_\infty(\Omega)$ uzayı da tamdır.

$$Id : L_\infty(\Omega) \to M_{p,n}(\Omega)$$

birim operatörün sürekli olduğu Teorem 2.0.17 kullanılarak ispatlanacaktır. $u \in L_\infty(\Omega)$ olsun. c_n, $\mathbb{R}^n$ uzayında birim yuvar hacmi ve $\|.\|_{L_\infty(\Omega)}$, $L_\infty(\Omega)$ da bir norm olmak üzere $\forall\ (x,r) \in \Omega_\delta$ sıralı çifti için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^n} \int\limits_{\Omega(x,\tau)} |u(y)|^p dy &\le \frac{\mu(\Omega(x,\tau))}{\tau^n} \|u\|^p_{L_\infty(\Omega)} \\ &\le c_n \|u\|^p_{L_\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\|u\|_{M_{p,n}(\Omega)} \le c_n^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L_\infty(\Omega)} \tag{3.14}$$

dır. Böylece Id birim operatörü (3.14) eşitsizliğinden sürekli olduğu görülür.
Şimdi kabul edelim ki, Id operatörü $M_{p,n}(\Omega)$ üzerinde tanımlı olmasın.

$$u \in M_{p,n}(\Omega) \setminus L_\infty(\Omega)$$

olsun. $u \in L_p(\Omega)$ olduğuna göre Ω nın h.h.y. $|u(x)|^p$ nin Lebesgue noktaları vardır. $u \in L_1(\Omega)$ olsun. $\forall\ x \in \Omega$ için $|u(x)|^p$ fonksiyonun Lebesgue noktalar kümesi $\mathcal{G}$ olmak üzere $u \notin L_\infty(\Omega)$ olduğundan h.h.y. $\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \infty$ eşitliği gerçeklenir. $\forall\ K > 0$ için $S(u,K) = \{|u(x)| > K\}$ kümesi pozitif ölçülebilirdir. Böylece

$$\mathcal{G} \cap S(u,K) \neq \emptyset$$

dır. Eğer $x \in \mathcal{G} \cap S(u,K)$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \to 0^+} \frac{1}{\mu(\Omega(x,\tau))} \int\limits_{\Omega(x,\tau)} |u(y)|^p dy &= |u(x)^p \\ &> K^p \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı kolayca görülür ki $\forall\ C > 0$ için

$$\frac{1}{\mu(\Omega(x,\tau))} \int\limits_{\Omega(x,\tau)} |u(x)|^p dx > C,$$

ve $\|u\|_{M_{p,n}(\Omega)} = \infty$ olacak şekilde $(x,\tau) \in \Omega_\delta$ vardır. Böylece Uyarı 3.2.3 den dolayı $u \in M_{p,n}(\Omega)$ olması hipotez ile çelişir.

Lebesgue noktaları: $B(x,\tau)$, x merkezli τ yarıçaplı bir yuvardır. $\mathcal{G}$ kümesi, u nun Lebesgue kümesi veya kendi elemanları u nun Lebesgue noktaları olarak tanımlanır ve

$$\mu(\Omega \setminus \mathcal{G}) = 0 \tag{3.15}$$

şeklinde gösterilir.

(iii) Lebesgue normları için Teorem 3.1.8 (**Hölder Eşitsizliği**)'den $p \leq q$ ve $(x,\tau) \in \Omega_\delta$ için

$$\int\limits_{\Omega(x,\tau)} |u(y)|^p dy \leq (\mu(\Omega(x,\tau)))^{1-\frac{p}{q}} \left(\int\limits_{\Omega(x,\tau)} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\leq c_n^{1-\frac{p}{q}} \tau^{n(1-\frac{p}{q})+v\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{\tau^v} \int\limits_{\Omega(x,\tau)} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} \quad (3.16)$$

elde edilir.

$$\lambda \leq n\left(1-\frac{p}{q}\right) + v\frac{p}{q}$$

eşitsizliğine göre

$$\left(\frac{\tau}{\delta}\right)^{n(1-\frac{p}{q})+v\frac{p}{q}} \leq \left(\frac{\tau}{\delta}\right)^{\lambda}$$

vardır. Böylece

$$\tau^{n(1-\frac{p}{q})+v\frac{p}{q}} \leq \tau^{\lambda}\delta^{n(1-\frac{p}{q})+v\frac{p}{q}-\lambda} \quad (3.17)$$

eşitsizliği gerçeklenir. (3.17) eşitsizliği kullanılarak

$$\left(\frac{1}{\tau^\lambda} \int\limits_{\Omega(x,\tau)} |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\frac{1}{\tau^v} \int\limits_{\Omega(x,\tau)} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve eşitsizliğin her iki tarafının supremumu alınırsa

$$\left(\sup_{(x,r)\in\Omega_\delta} \frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{\Omega(x,r)} |u(y)|^p dy \right) \leq c \left(\sup_{(x,r)\in\Omega_\delta} \frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{\Omega(x,r)} |u(y)|^p dy \right)^{1/p} \quad (3.18)$$

olmak üzere

$$\|u\|_{M_{p,\lambda}(\Omega)} \leq c\|u\|_{M_{q,v}(\Omega)}$$

olur ve (iii) deki gömme ispatlanmış olur.

$\blacksquare$

Teorem 3.3.3 $1 \leq p \leq q < \infty$ ve λ, ν negatif olmayan sayılar olsun.

i) $|\Omega|$ sonlu ise

$$\frac{\lambda - n}{p} \leq \frac{\nu - n}{q} \tag{3.19}$$

ii) $|\Omega|$ sonsuz ise

$$\frac{\lambda - n}{p} = \frac{\nu - n}{q}. \tag{3.20}$$

şartları altında

$$M_{q,\nu}(\Omega) \hookrightarrow M_{p,\lambda}(\Omega) \tag{3.21}$$

dir [33].

Teorem 3.3.4 (Morrey Uzaylarında Hölder eşitsizliği) $f \in M_{p,\lambda}(\Omega)$ ve $g \in M_{q,\mu}(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$$

ve

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad \frac{\nu}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\mu}{q}$$

olmak üzere

$$\|fg\|_{M_{r,\nu}(\Omega)} \leq \|f\|_{M_{p,\lambda}(\Omega)} \|g\|_{M_{q,\mu}(\Omega)}. \tag{3.22}$$

[33].

3.4 Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

$0 < p < \infty$ olmak üzere, $\phi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ ikinci değişkene göre azalan (x üzerinde düzgün) ve

$$t \in (0,\ \infty) \mapsto t^{\frac{n}{p}} \phi(x,\ t) \in (0,\ \infty)$$

ikinci değişkenine göre artan (x üzerinde düzgün) olan fonksiyonlar kümesi $\mathcal{G}_p$ kümesi ile gösterilir. Böylece $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ ve
$0 < s \leq r < \infty$ için

$$\phi(x,\ r) \leq \phi(x,\ s)\ ,\ C\phi(x,\ r) r^{\frac{n}{p}} \geq \phi(x,\ s) s^{\frac{n}{p}}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

$\mathbb{R}^n$ deki kenarları koordinat eksenlerine paralel tüm küplerin kümesi $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ile ve $Q \in \mathcal{Q}$ küpünün kenar uzunluğu ise

$$\ell(Q) \equiv |Q|^{\frac{1}{n}}$$

ile gösterilir. Burada $|E|$, ölçülebilir bir E kümesinin Lebesgue ölçüsünü göstermektedir.

Ayrıca $c(Q)$, Q küpünün merkezi olmak üzere

$$\phi(Q) \equiv \phi(c(Q), \ell(Q))$$

ile gösterilir.

$0 < p < \infty$ ve $\phi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ olmak üzere

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \equiv \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{\phi(Q)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

sonlu quasi normuna sahip tüm ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine (**genelleştirilmiş Morrey uzayı**) $\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir [3].

Nakai, $1 \le p < \infty$ olması durumunda

$$\rho(t)t^{\frac{n}{p}} \le \rho(T)T^{\frac{n}{p}}, \quad \forall\ 0 < t \le T < \infty$$

şartını sağlayan azalan bir ρ fonksiyonu için

$$\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$$

olduğunu gösterdi (**Bkz., [26]**).

$0 < p \le 1$ olması durumu ise 2011 yılında Sawano tarafından incelenmiştir (**Bkz., [38]**).

$\phi(x,\ r) \equiv r^{-\frac{n}{p}}$ ise bu durumda

$$\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n).$$

Özel olarak,
$\phi(x,\ r) \equiv r^{\frac{\lambda}{p} - \frac{n}{p}}$ ise bu durumda

$$\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n).$$

3.4.1 Genelleştirilmiş Morrey Uzayların Özellikleri

Lemma 3.4.1 $0 < p < \infty$ olmak üzere $\phi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ bir fonksiyon olsun.

$$\psi(y,\ s)s^{\frac{n}{p}} \le \psi(x,\ r)r^{\frac{n}{p}}, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \ \ ve \ \ r, s > 0 \tag{3.23}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\psi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ fonksiyonu vardır. Yani

$$\|x-y\|_\infty \le r-s$$

eşitsizliği altında

$$\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$$

norm denkliği sağlanır [3].

İspat.

$$\psi(x,\ r) \equiv \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{v\in[r+\|x-y\|_\infty,\infty)} \phi\left(y,\ v\right)\left(\frac{v}{r}\right)^{\frac{n}{p}}\right), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ r>0 \tag{3.24}$$

kümesi olsun. Bu durumda $\phi \ge \psi$ eşitsizliği aşikar olup ve herhangi bir ölçülebilir f fonksiyonu için

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Ölçülebilir f fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\psi}} &= \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{1}{\psi(c(Q),\ell(Q))}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{Q\in\mathcal{Q}}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\sup_{v\in[\ell(Q)+\|c(Q)-y\|_\infty,\infty)} \frac{1}{\phi(y,v)}\left(\frac{1}{v^n}\int\limits_Q |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\le \sup_{Q\in\mathcal{Q}}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\sup_{v\in[\ell(Q)+\|c(Q)-y\|_\infty,\infty)} \frac{1}{\phi(y,v)}\left(\frac{1}{v^n}\int\limits_{Q(y,v)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$$

norm denkliği sağlanır. ψ nin tanımından dolayı (3.23) eşitsizliği gerçeklenir. ■

Lemma 3.4.2 $0 < p < \infty$ ve $\phi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ olmak üzere (3.23) eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$\psi(x,\ r) \le \psi(x,\ s), \qquad \forall\ x\in\mathbb{R}^n\ \ ve\ \ 0 < s \le r < \infty \tag{3.25}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\psi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ fonksiyonu vardır. Yani

$$\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$$

norm denkliği sağlanır [3].

İspat.

$$\psi(x,\ r) \equiv \inf_{0<s\leq r}\left(\sup_{y\in Q(x,r)} \phi(y,\ s)\right); \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ r>0$$

kümesi olsun. (3.23) eşitsizliğinden

$$\psi(x,\ r) \leq \sup_{y\in Q(x,r)} \phi(y,\ r) \leq 3^{\frac{n}{p}}\phi(x,\ 3r), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ r>0$$

ve dolayısıyla

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)} \leq 3^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Ayrıca

$$\forall\ Q\in\mathcal{Q}\ \ ve\ \ 0<s\leq\ell(Q)$$

için

$$\log_2(s\ell(Q)^{-1})\in\mathbb{Z}.$$

Q da $\ell(R)=s$ içeren bir $R=R_Q(s)$ küpü bulunur ve güvercin yuvası prensibinden

$$\left(\frac{1}{|R|}\int\limits_R |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \geq 2^{-\frac{n}{p}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Böylece

$$\forall\ Q\in\mathcal{Q}\ \ ve\ \ 0<s\leq\ell(Q)$$

Q da $\ell(R)=s$ içeren bir $R=R_Q(s)$ küpü bulunur ve

$$\left(\frac{1}{|R|}\int\limits_R |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \geq 4^{-\frac{n}{p}}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bundan dolayı

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\psi}} &= \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{1}{\psi(c(Q),\ell(Q))}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \sup_{0<s<r}\left(\inf_{y\in Q}\frac{1}{\phi(y,s)}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leq 4^{\frac{n}{p}} \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \sup_{0<s<r}\left(\inf_{y\in Q}\frac{1}{\phi(y,s)}\left(\frac{1}{|R_Q(s)|}\int\limits_{R_Q(s)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leq 4^{\frac{n}{p}} \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \sup_{0<s<r}\left(\frac{1}{\phi(R_Q(s))}\left(\frac{1}{|R_Q(s)|}\int\limits_{R_Q(s)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leq 4^{\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}.
\end{aligned}
$$

Güvercin Yuvası Prensibi: *N elemandan oluşturulmuş bir küme, arakesitleri boş olmayan $n < N$ sayıda alt kümeye bölündüğünde, bu alt kümelerin en az birinde elemanların sayısı birden fazladır,* ■

Lemma 3.4.3 $0 < p < \infty$ ve $\phi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ olmak üzere

$$\phi(x,\ r) \leq \phi(x,\ s), \quad 0 < s \leq \tau < \infty \quad ve \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.26}$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda (3.23) ve (3.25) eşitsizliklerini sağlayan $\psi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ fonksiyonu vardır. Yani

$$\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$$

norm denkliği sağlanır [3].

İspat. ψ fonksiyonu (3.24) ifadesi ile tanımlansın. Bu durumda Lemma 3.4.1 de görüldüğü gibi,
$\psi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ kümesi,

$$\psi(y,\ s)s^{\frac{n}{p}} \leq \psi(x,\ r)r^{\frac{n}{p}}$$

eşitsizliği ve norm denkliği ile

$$\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$$

sağlanır. $R < R'$ olsun. Bu durumda (3.26) eşitsizliğinden

$$\psi(x,\ R') = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{v\in[R+\|x-y\|_\infty,\infty)}\phi\,(y,\ v)\left(\frac{v}{R'}\right)^{\frac{n}{p}}\right)$$

$$\leq \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{v\in[R+R\|x-y\|_\infty/R,\infty)}\phi\,(y,\ v)\left(\frac{v}{R'}\right)^{\frac{n}{p}}\right)$$

$$= \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{v\in[R+\|x-y\|_\infty,\infty)}\phi\left(y,\ \frac{R'v}{R}\right)(\frac{v}{R})^{\frac{n}{p}}\right)$$

$$\leq \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{v\in[R+\|x-y\|_\infty,\infty]}\phi\left(y,\ v)(\frac{v}{R}\right)^{\frac{n}{p}}\right)$$

$$= \psi(x,\ R)$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki durum benzer şartı

$$\psi(x,\ r) \sim \psi(y,\ r), \qquad |x-y| \leq r \tag{3.27}$$

doğal olarak gösterilebilir.

Önerme 3.4.4 $0 < p < \infty$ ve $\psi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$, (3.23) ve (3.25) eşitsizliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. Böylece ψ fonksiyonu (3.27) koşulunu sağlar [3].

İspat. (3.25) den $\psi(x,\tau) \geq \psi(x,3\tau)$ ve (3.23) den $\psi(x,3\tau) \geq \psi(y,\tau)$ elde edilir. ■

Lemma 3.4.3 gözönünde bulundurularak her zaman $\phi \in \mathcal{G}_p$ fonksiyonunun (3.23) koşulunu sağladığı varsayılır. Sonuc olarak aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.4.5 $0 < p < \infty$ ve $\phi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda (3.23), (3.25) ve (3.27) koşullarını sağlayan bir $\psi : \mathbb{R}^n \times (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ fonksiyonu vardır. Yani

$$\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$$

norm denkliği sağlanır [3].

Tanım 3.4.6 $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_p$ olmak üzere

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int\limits_{B(a,r)}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir f fonksiyonlar kümesine **(genelleştirilmiş Morrey)** $\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir.

Eğer $1 \leq p \leq q < \infty$ ve $\phi(r) := r^{\frac{-n}{q}}$ ise bu durumda **(klasik Morrey)** $\mathcal{M}_{p,\phi} = \mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayıdır [15].

Lemma 3.4.7 $1 \leq p < \infty$ ve $\phi \in \mathcal{G}_p$ olsun. Bu durumda her $B := B(0, \tau_0)$ için

$$\frac{1}{\phi(\tau_0)} \leq \|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \leq \frac{C}{\phi(\tau_0)}$$

olacak şekilde bir $C > 1$ vardır [15].

İspat. $r_0 > 0$ olsun. $\|.\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$ tanımından

$$\begin{aligned}
\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} &= \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \sup_{r>0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B(\alpha,r)|} \int\limits_{B(\alpha,r)} |\chi_{B_0(x)}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \frac{1}{\phi(r_0)} \left(\frac{|B_0 \cap B_0|}{|B_0|} \right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{\phi(r_0)}.
\end{aligned}$$

Eşitsizliklerin ispatı iki durumda gerçeklenir.
İlk olarak, eğer $r < \tau_0$ ise bu durumda $\phi(\tau) \geq C\phi(r_0)$. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B(\alpha,r)|} \int\limits_{B(\alpha,r)} |\chi_{B_0(x)}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{C}{\phi(r_0)} \left(\frac{|B(\alpha,r) \cap B_0|}{|B(\alpha,r)|} \right)^{1/p} \\
&\leq \frac{C}{\phi(r_0)}.
\end{aligned}$$

İkinci durum içinde kabul edelim ki, $r \geq r_0$ olsun.

$$r_0^{\frac{n}{p}} \phi(\tau_0) \leq C \tau^{\frac{n}{p}} \phi(r)$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B(\alpha,r)|} \int\limits_{B(\alpha,r)} |\chi_{B_0(x)}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C \frac{\tau^{\frac{n}{p}} r_0^{-\frac{n}{p}}}{\phi(r_0)} \left(\frac{|B(\alpha,r) \cap B_0|}{|B(\alpha,r)|} \right)^{1/p} \\
&\leq C \frac{\tau^{\frac{n}{p}} r_0^{-\frac{n}{p}}}{\phi(r_0)} \left(\frac{|B_0|}{|B(\alpha,r)|} \right)^{1/p} \\
&= \frac{C}{\phi(\tau_0)}.
\end{aligned}$$

Bu iki durumdan

$$\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \leq \frac{C}{\phi(r_0)}$$

eşitsizliği ispatlanır. ■

Teorem 3.4.8 $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\phi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$ ve $\phi_2 \in \mathcal{G}_{p_2}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $\phi_2 \leq C\phi_1$.

(ii) $\mathcal{M}_{p_2,\phi_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}_{p_1,\phi_1}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Öyle bir $C > 0$ vardır ki her $f \in \mathcal{M}_{p_2,\phi_2}(\mathbb{R}^n)$ için $\|f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\phi_1}} \leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p_2,\phi_2}}$ dır [15].

İspat. Kabul edelim ki (i) eşitsizliği sağlasın, $f \in \mathcal{M}_{p_2,\phi_2}$ olmak üzere $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\phi_1(\tau)}\left(\frac{1}{|B(\alpha,r)|}\int\limits_{B(\alpha,r)} |f(x)|^{p_1}dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq \frac{C}{\phi_2(\tau)}\left(\frac{1}{|B(\alpha,r)|}\Big(\int\limits_{B(\alpha,r)} |(f(x)|^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}}dx\Big)^{\frac{p_1}{p_2}}\Big(\int\limits_{B(\alpha,r)} dx\Big)^{1-\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq \frac{C}{\phi_1(\tau)}\left(\frac{1}{|B(\alpha,r)|}\int\limits_{B(\alpha,r)} |f(x)|^{p_1}dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p_2,\phi_2}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $f \in \mathcal{M}_{p_1,\phi_1}(\mathbb{R}^n)$ olur. Böylece

$$f \in \mathcal{M}_{p_2,\phi_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq f \in \mathcal{M}_{p_1,\phi_1}(\mathbb{R}^n)$$

dır.

$(\mathcal{M}_{p_2,\phi_2}(\mathbb{R}^n), f \in \mathcal{M}_{p_1,\phi_1}(\mathbb{R}^n))$ bir Banach çiftidir. [19] (ii) şıkkı ve (iii) şıkkı denktir. Bu nedenle (iii) şıkkı, (i) şıkkından görülür.
Şimdi kabul edelim ki (iii) doğru olsun. $r_0 > 0$ olmak üzere, $B_0 := B(0, r_0)$ olsun. Bu durumda $\forall\ B := B(0, \tau_0)$ için

$$\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}_{p_1,\phi_1}} \leq C\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}_{p_2,\phi_2}} \tag{3.28}$$

olacak şekilde bir $C > 1$ vardır. Lemma 3.4.7 den dolayı

$$\frac{1}{\phi_1(\tau_0)} \leq \|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}_{p_1,\phi_1}} \tag{3.29}$$

ve

$$\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}_{p_2,\phi_2}} \leq \frac{C}{\phi_2(r_0)} \tag{3.30}$$

olduğu görülür.

(3.28), (3.29) ve (3.30) eşitsizlikleri $\phi_2(r_0) \leq C\phi_1(r_0)$ eşitsizliğini sağlar. r_0 keyfi bir pozitif reel sayı olduğu için $\phi_2 \leq C\phi_1$ elde edilir. ■

3.5 Campanato Uzayları

$\lambda \geq 0$ ve $p \in (1, \infty)$ olsun.

$$u_{x,r} = \frac{1}{\mu(\Omega(x,r))} \int\limits_{\Omega(x,r)} u(y)dy$$

olmak üzere,

$$\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega) := \left\{ u \in L_p(\Omega);\ \sup_{(x,r)\in\Omega_\delta} \frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{\Omega(x,r)} |u(y) - u_{x,r}|^p dy < \infty \right\}$$

şekinde tanımlansın.

$$[u]_{p,\lambda} := \left\{ \sup_{(x,r)\in\Omega_\delta} \frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{\Omega(x,r)} |u(y) - u_{x,r}|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.31}$$

olmak üzere $\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı üzerindeki norm

$$\|u\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)} := \|u\|_p + [u]_{\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)} \tag{3.32}$$

ile tanımlanır. Bu norm ile birlikte tanımlanan kümeye (**Campanato uzayı**) $\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı denir [32].

Campanato uzayları için Gömme Teoremi aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 3.5.1 (i) $p \in (1, \infty)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}_{p,0}(\Omega) = L_p(\Omega)$

(ii) $1 \leq p \leq q < \infty$ ve λ, ν negatif olmayan sayılar olsun. Eğer $|\Omega|$ sonlu ise bu durumda

$$\frac{\lambda - n}{p} \leq \frac{\nu - n}{q} \tag{3.33}$$

şartı altında

$$\mathcal{L}_{q,\upsilon}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega) \tag{3.34}$$

dır [32].

İspat. Teoremin ispatı Teorem 3.3.2'nin ispatına benzer olarak yapılır. ■

Lemma 3.5.2 Bir u fonksiyonunun $\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayından olması için gerek ve yeter şart $u \in L_p(\Omega)$ ve

$$|||u|||^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{(x,r)\in\Omega_\delta} \frac{1}{\tau^\lambda} \left(\inf_{c\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\Omega(x,r)} |u(y) - c|^p dy \right) < \infty \tag{3.35}$$

[32].

İspat. $\lambda \geq 0$ ve $p \in (1,\infty)$ olsun.

$$|||u|||^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda(\Omega)}} \leq [u]^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda(\Omega)}}$$

eşitsizliği (3.31) den aşikardır. Kabul edelim ki (3.35) ifadesi ve $u \in L_p(\Omega)$ olsun. Bu durumda $\forall\ c \in \mathbb{R}$ için

$$\int\limits_{\Omega(x,r)} |u(y) - u_{x,r}|^p dy \leq 2^{p-1} \left(\int\limits_{\Omega(x,r)} |u(y) - c|^p dy + \int\limits_{\Omega(x,r)} (\mu(\Omega(x,r)))^{-p} \left| \int\limits_{\Omega(x,r)} (c - u(y)) dy \right|^p dz \right)$$

$$\leq 2^p \int_{\Omega(x,r)} |u(y) - c|^p dy.$$

eşitsizliğini sağlar. Bundan dolayı

$$[u]_{p,\lambda} \leq 2|||u|||_{\mathcal{L}_{p,\lambda(\Omega)}}.$$

∎

Uyarı 3.5.3 Lemma 3.5.2 ün ispatından, $\mathcal{L}_{p,\lambda(\Omega)}$ uzayı üzerinde

$$c\|u\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda(\Omega)}}$$

ve

$$|||u|||_{\mathcal{L}_{p,\lambda(\Omega)}} + \|u\|_p$$

normları denktir [32].

Lemma 3.5.4 A, (3.11) ifadesindeki sabit sayı olmak üzere $\forall u \in \mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$ ve $\forall x \in \Omega$ için

$$0 < \sigma < \varrho < \delta \Rightarrow |u_{x,\varrho} - u_{x,\sigma}| \leq C(p,A) \left(\frac{\varrho^\lambda + \sigma^\lambda}{\sigma^n} \right)^{\frac{1}{p}} [u]_{p,\lambda}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C = C(p,A)$ sabiti vardır [32].

Lemma 3.5.5 $u \in \mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$, $(x,\varrho) \in \Omega_\delta$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$|u_{x,\varrho} - u_{x,\frac{\varrho}{2^n}}| \leq C(p,\lambda,A)[u]_{p,\lambda}\varrho^{\frac{\lambda-n}{p}} \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m\frac{n-\lambda}{p}}$$

olacak şekilde $C = C(p,\lambda,A)$ sabiti vardır [32].

Lemma 3.5.6 $\lambda > n$ olsun. Bu durumda her $u \in \mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$ için $\overline{\Omega}$ üzerinde tanımlı bir $\tilde{u}$ fonksiyonu vardır öyle ki u, Ω üzerinde hemen her yerde $\tilde{u}$ ya eşit ve her $x \in \overline{\Omega}$ için

$$\lim_{\varrho \to 0^+} u_{x,\varrho} = \tilde{u}(x)$$

ve bu yakınsama $\overline{\Omega}$ üzerinde düzgündür [32].

Lemma 3.5.7 $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$u_\Omega = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int\limits_\Omega u(x)dx$$

olmak üzere, $\exists\ u \in \mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$ ve $\forall\ (x,\varrho) \in \Omega_\delta$ için

$$|u_{x,\varrho}| \leq |u_\Omega| + C(A,p,\lambda,n)[u]_{p,\lambda}\varrho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

olacak şekilde bir $C(A,p,\lambda,n) > 0$ sabiti vardır [32].

Lemma 3.5.8 $\forall\ u \in \mathcal{L}_{1,\lambda}(\Omega)$ ve $\forall\ x,y \in \overline{\Omega}$ için

$$\varrho = 2|x-y| \Rightarrow |u_{x,\varrho} - u_{y,\varrho}| \tag{3.36}$$

$$\leq \overline{C}(A,n,\lambda)[u]_{1,\lambda}|x-y|^{\lambda-n} \tag{3.37}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $\overline{C} = \overline{C}(A,n,\lambda)$ sabiti vardır [32].

3.6 Morrey ve Campanato Uzayları Arasındaki Bağıntılar

Teorem 3.6.1 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega) = M_{p,\lambda}(\Omega), \quad \lambda \in [0,n)$$

dir [32].

İspat. $\lambda \in [0,n)$ ve $u \in M_{p,\lambda}(\Omega)$ olsun. Uyarı 3.5.3' e göre, $\mathcal{Q} > 0$ olmak üzere,

$$\|u\|^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda}} \leq \mathcal{Q}(\|u\|^p_p + |||u|||^p_p)$$

$$= \mathcal{Q}\left(\|u\|^p_p + \sup_{(x,r)\in\Omega_\delta} \frac{1}{\tau^\lambda}\left(\inf_{c\in R}\int_{\Omega(x,r)} |u(y)-c|^p dy\right)\right)$$

$$\leq \mathcal{Q}(\|u\|^p_p + \|u\|^p_{M_{p,\lambda}(\Omega)})$$

$$\leq \mathcal{Q}_1\|u\|^p_{M_{p,\lambda}(\Omega)}.$$

Böylece $u \in \mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$ ve

$$M_{p,\lambda}(\Omega) \to \mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$$

şeklinde tanımlı operatör süreklidir.
$u \in \mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)$ olsun.

$$\int_{\Omega(x,r)} |u(y)|^p dy \leq 2^{p-1}\left(\int_{\Omega(x,r)} |u(y)-u_{x,r}|^p dy + \int_{\Omega(x,r)} |u_{x,r}|^p dy\right)$$

$$\leq 2^{p-1}(r^\lambda [u]^p_{p,\lambda} + Cr^n(r^{\lambda-n}[u]^p_{p,\lambda} + |u_\Omega|^p))$$

$$\leq C_1(r^\lambda [u]^p_{p,\lambda} + r^n\|u\|^p_p).$$

Dolayısıyla

$$\|u\|^p_{M_{p,\lambda}(\Omega)} \leq C_2\|u\|^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $u \in M_{p,\lambda}(\Omega)$ ve

$$\mathcal{L}_{p,\lambda}(\Omega) \to M_{p,\lambda}(\Omega)$$

tanımlı operatörü süreklidir. ■

3.6.1 Genelleştirilmiş Campanato Uzayları

$1 \leq p < \infty$ ve $\phi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ fonksiyonu için

$$f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx$$

ve

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B=B(\alpha,\tau)} \frac{1}{\phi(\tau)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-f_B|^P dx\right)^{1/p}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} < +\infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye (**Genelleştirilmiş Campanato uzayı**) $\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir. ϕ fonksiyonunun doubling şartını sağladığı ve $\phi(\tau)\tau^{n/p}$ fonksiyonunun neredeyse artan olduğu kabul edilecektir. $0 \leq \lambda \leq n+1$ olmak üzere eğer $\phi(\tau) = \tau^{(\lambda-n)/p}$ ise bu durumda (**klasik Campanato uzayı**) $\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayıdır.

Eğer ϕ, neredeyse artan ise bu durumda $\forall p > 1$ için $\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{1,\phi}(\mathbb{R}^n)$. $BMO_\phi(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathcal{L}_{1,\phi}(\mathbb{R}^n)$ ifade edilir. Eğer $\phi \equiv 1$ ise bu durumda $BMO_\phi(\mathbb{R}^n) = BMO(\mathbb{R}^n)$. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere eğer $\phi(r) = r^\alpha$ ise bu durumda $BMO_\phi(\mathbb{R}^n) = Lip_\alpha(\mathbb{R}^n)$ dır [28].

4 GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Bu bölümde kesirli integral operatör (Riesz potansiyeli) ve genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerle ilgili temel bilgiler verilmiştir.

4.1 Riesz potansiyeli

Tanım 4.1.1 $0 < \alpha < n$ ve Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

olmak üzere

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \qquad \gamma_n(\alpha) = \frac{\Pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2)}{((n-\alpha)/2)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **(Riesz potansiyeli)** $I_\alpha f(x)$ potansiyeli denir [40].

Tanım 4.1.2 $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olmak üzere $B(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı yuvar olsun.

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlanan operatöre (**Hardy-Littlewood maksimal operatör**) M operatörü denir. M operatörü için klasik bir sonuç, $1 < p \leq \infty$ için L_p üzerinde sınırlıdır [40].

Teorem 4.1.3 $1 < p < \infty$ için ϕ doubling şartını ve $\forall \tau > 0$ için

$$\int_\tau^\infty \frac{\phi(t)^p}{t} dt \leq C\phi(\tau)^p, \tag{4.1}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \leq C_p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}},$$

olacak şekilde bir $C_p > 0$ vardır. Yani M operatörü, $\mathcal{M}_{p,\phi}$ uzayı üzerinde sınırlıdır [25].

$\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ tanımlı fonksiyonu eğer Φ konveks,

$$\lim_{\tau \to 0^+} \Phi(\tau) = \Phi(0) = 0 \quad ve \quad \lim_{\tau\to\infty} \Phi(\tau) = \Phi(\infty) = \infty$$

ise (**Young fonksiyonu**) Φ fonksiyonu denir. Young fonksiyonu azalmayan fonskiyondur. Bir Φ fonksiyonu için ($\inf \emptyset = \infty$ eşitliği ile)

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf\{s : \Phi(s) > \tau\}$$

şeklinde tanımlanır. Φ fonksiyonu sürekli, birebir ve örten ise bu durumda Φ^{-1} fonksiyonu adi ters fonskiyonudur. Eğer bir Φ fonksiyonu

$$0 < \tau < \infty \quad \text{için} \quad 0 < \Phi(\tau) < \infty \tag{4.2}$$

sağlarsa bu durumda Φ fonksiyonu sürekli ve $[0, \infty)$ dan kendisine birebir ve örtendir. Bu durumda Φ^{-1} ters fonskiyonu artan, sürekli, konkav, birebir ve örtendir ve dolayısıyla doubling şartınıda sağlar [8].

Lemma 4.1.4 $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ olsun. Bu durumda $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|I_\alpha f(x)| \leq C \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} [Mf(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}}$$

eşitsizliği sağlanır [17]

Teorem 4.1.5 (**Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi**)
$0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

(i) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\frac{n}{\alpha} > p > 1$ ise bu durumda $\|I_\alpha f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ olacak şekilde f den bağımsız bir C sabiti vardır.

(ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $C = C(\alpha, n, p)$ olmak üzere $\forall\lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır [40].

Teorem 4.1.6 (Spanne) $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ve $0 < \lambda < n - \alpha p$ olsun. Ayrıca

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} \quad ve \quad \frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$$

olmak üzere bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{M_{q,\lambda}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buna göre I_α operatörü $M_{p,\lambda}$ dan $M_{q,\lambda}$ ya sınırlıdır [16].

Teorem 4.1.7 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ve $0 < \lambda < n - \alpha p$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için I_α operatörü $M_{p,\lambda}$ den $M_{q,\lambda}$ ya sınırlıdır [1].

4.2 Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörleri ve Özellikleri

$\rho : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ olmak üzere

$$T_\rho f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

şeklinde tanımlanan operatöre (**Genelleştirilmiş Kesirli İntegral operatörü**) $T_\rho f(x)$ operatörü denir.

ρ üzerinde aşağıdaki şartları

$$\int_0^1 \frac{\rho(t)}{t} dt < +\infty, \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{s}{\tau} \leq 2 \;\text{ için }\; \frac{1}{A_1} \leq \frac{\rho(s)}{\rho(\tau)} \leq A_1, \tag{4.4}$$

$$s \leq \tau \;\text{ için }\; \frac{\rho(\tau)}{\tau^n} \leq A_2 \frac{\rho(s)}{s^n}, \tag{4.5}$$

olmak üzere, burada $A_1, A_2 > 0$ sabitleri $\tau, s > 0$ dan bağımsızdır. $0 < \alpha < n$ olmak üzere $\rho(\tau) = \tau^\alpha$ ise T_ρ operatörü, (**Riesz potansiyel**) I_α operatörü ile ifade edilir.

Ayrıca, ρ fonksiyonu için, $C > 0$ sabitleri ve $0 < 2k_1 < k_2 < \infty$ için

$$\sup_{r/2 < s \leq r} \rho(s) \leq C \int_{k_1 r}^{k_2 r} \rho(t) \frac{dt}{t}, \quad r > 0 \tag{4.6}$$

büyüme koşulunu gözönüne alalım. Bu koşul $\rho(t)$ fonksiyonu için bilinen doubling koşulundan, yani, (4.4) koşulundan daha zayıf (genel) bir koşuldur.

Modifiye T_ρ operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{T}_\rho f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} - \frac{\rho(|y|)(1 - \chi_{B_0}(y))}{|y|^n} \right) dy.$$

ρ üzerinde aşağıdaki şartlar (4.3), (4.4) ve

$$s \leq \tau \;\text{ için }\; \frac{\rho(\tau)}{\tau^{n+1}} \leq A_2' \frac{\rho(s)}{s^{n+1}}, \tag{4.7}$$

$$\int_\tau^{+\infty} \frac{\rho(t)}{t^2} dt \leq A_2'' \frac{\rho(\tau)}{\tau}, \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{s}{\tau} \leq 2 \text{ için } \left| \frac{\rho(\tau)}{\tau^n} - \frac{\rho(s)}{s^n} \right| \leq A_3 |\tau - s| \frac{\rho(\tau)}{\tau^{n+1}} \tag{4.9}$$

vardır. Burada $A_2', A_2'', A_3 > 0$ sabitleri $\tau, s > 0$ dan bağımsızdır. Eğer $\rho(\tau)\tau^{\alpha}$ fonksiyonu bir $\alpha \geq 0$ için artan ve $\rho(\tau)/\tau^{\beta}$ fonksiyonu bir $\beta \geq 0$ için azalan ise bu durumda ρ fonksiyonu (4.4) ve (4.9) eşitsizliklerini sağlar.
$0 < \alpha < n+1$ olmak üzere eğer $\rho(\tau) = \tau^{\alpha}$ ise $\tilde{T}_{\rho} = \tilde{I}_{\alpha}$ sağlanır. Eğer $\tilde{T}_{\rho}f$ ve $T_{\rho}f$ iyi tanımlanmış ise $\tilde{T}_{\rho}f$-$T_{\rho}f$ bir sabittir [27].

$\forall R > 0$ için $B_R := B(0,R)$, 0 merkezli, R yarıçaplı yuvar, ve χ_{B_R}, B_R nin karekteristik fonksiyonu olsun.

$$\tilde{\rho} = \int_0^{\tau} \frac{\rho(s)}{s} ds$$

olup ayrıca

$$B(x,R) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < R\}$$

dir [10].
Lemma 4.2.1 $x \in B_{R/2}$ ve $R > 0$ olmak üzere

$$\tilde{p}(R/2) \leq C T_{\rho}\chi_{B_R}(x) \tag{4.10}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sabiti vardır [10].

İspat. $x \in B_{R/2}$ olsun.

$$T_{\rho}\chi_{B_R}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} \chi_{B_R}(y) dy$$

$$= \int_{B_R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy.$$

$B(x,R/2) \subseteq B(0,R)$ olmak üzere

$$T_{\rho}\chi_{B_R}(x) \geq \int_{B(x,R/2)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$= C \int_0^{R/2} \frac{\rho(s)}{s} ds.$$

Son eşitlik küresel koordinatlar kullanılırak elde edilmiştir. ∎

Lemma 4.2.2 $\forall R > 0$ için ve

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\phi(s)}{\phi(r)} \leq C, \qquad 0 < r/2 \leq s \leq 2r \tag{4.11}$$

doubling şartını sağlayan ölçülebilir bir $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu için

$$g_R(x) := \phi(|x|)\chi_{B_R^c}(x)$$

olmak üzere $x \in B_{R/3}$ için

$$C^{-1} \int\limits_{2R}^{\infty} \frac{\phi(t)p(t)}{t} dt \leq T_{\rho} g_R(x)$$

$$\leq C \int\limits_{2R/3}^{\infty} \frac{\phi(t)p(t)}{t} dt$$

eşitsizliği sağlanır [10].

İspat. Önce sağ tarafdaki eşitsizlik ispatlanacaktır. Sol taraftaki eşitsizliğin ispatı benzer şekilde elde edilir. $\forall x \in B_{R/3}$ ve $y \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R/3}$ için $|x-y| \sim |y|$ şeklinde gösterilir. ϕ fonksiyonu (4.11) eşitsizliğini sağladığı için bu durumda

$$T_{\rho} g_R(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B_R} \frac{\phi(|y|)\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B(x, 2R/3)} \phi(|y|) \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n \backslash B_{2R/3}} \phi(|x-y|) \frac{\rho(|y|)}{|y|^n} dy$$

$$\leq C \int\limits_{2R/3}^{\infty} \frac{\phi(t)\rho(t)}{t} dt, \qquad x \in B_{R/3}$$

eşitsizliği gerçeklenir. ■

Lemma 4.2.3 $1 \leq p < \infty$ ve $\phi \in \mathcal{G}_p$ olsun. Burada

$$\int\limits_{0}^{R} \phi(t) t^{n/p-1} dt \leq C\phi(R) R^{n/p}, \qquad R > 0. \tag{4.12}$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir C sabiti olsun. Bu durumda $x \mapsto \phi(|x|)$ fonksiyonu, $\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir [10].

Lemma 4.2.4 $0 \leq r_* < \infty$ ve $0 \leq r^* < \infty$ olsun. Eğer bir $C > 0$ sabiti var ise bu durumda

$$\int_{r_*}^{r} \frac{\phi(x,t)}{t} dt \leq C_p \phi(x,r), \quad x \in X, \quad r_* < r < \infty,$$

$0 < p \leq 1$ için

$$\int_{r_*}^{r} \frac{\phi(x,t)^p}{t} dt \leq C_p \phi(x,r)^p, \quad x \in X, \quad r_* < r < \infty$$

eşitsizliği vardır. Burada $C_p > 0$ sabiti, C ve p ye bağlıdır.

İspat. İlk olarak (4.12) eşitsizliği, [30] deki Lemma 4.2.4 de göre

$$\frac{1}{r^n} \int_0^r \phi(t)^p t^{n-1} dt \leq C\phi(r)^p, \qquad r > 0$$

eşitsizliğine denktir. $\phi_1(r) = \inf_{t \leq r} \phi(t)$ olsun. Bu durumda $\phi_1(r)$ artmayan fonksiyondur. $\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{M}_{p,\phi_1}(\mathbb{R}^n)$ izomorfiktir [26]. Kabul edelim ki ϕ kendisi azalandır. Bu durumda $x \to \phi(|x|)$ yarıçap olarak azalandır. Böylece $\alpha \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left[\frac{1}{|B(\alpha,r)|} \int_{B(\alpha,r)} \phi(|x|)^p dx\right]^{1/p} \leq \left[\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \phi(|x|)^p dx\right]^{1/p} \tag{4.13}$$

dır. (4.12) ve (4.13) ifadeleri birleştirerek küresel koordinat kullanılarak sonuç elde edilir.

■

Lemma 4.2.5 $1 \leq p < q < \infty$ ve $\phi \in \mathcal{G}_p$ olsun.

$$\int_r^\infty \frac{\phi(s)\rho(s)}{s} ds \leq C\phi(r)\rho(r), \quad r > 0 \tag{4.14}$$

ve

$$\tilde{\rho}(r) \leq C'\phi(r)^{p/q-1}, \quad r > 0 \tag{4.15}$$

veya

$$\phi(r) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt + \int_r^\infty \frac{\phi(t)\rho(t)}{t} dt \leq C'\phi(r) r^{p/q}, \quad r > 0 \tag{4.16}$$

koşulları sağlansın. Eğer f fonksiyonun normunu $\|f : \mathcal{M}_{p,\phi}\| = 1$ olarak normalleştirilirse bu durumda, $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|T_\rho f(x)| \leq C\left([Mf(x)]^{p/q} + \inf_{r>0} \phi(r)^{p/q}\right), \tag{4.17}$$

eşitsizliği vardır [10].

İspat. Kabul edelim ki ϕ fonskiyonunu sürekli ve kesin azalan olsun. k_1 ve k_2 ρ nun (4.6) şartındaki sabitler olmak üzere $\rho^*(r) = \int\limits_{k_1 r}^{k_2 r} \frac{\rho(s)}{s} ds$ olsun. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$|T_\rho f(x)| \leq C\left[\sum_{j=-\infty}^{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p^*(2^j r)}{(2^j r)^n} \int\limits_{|x-y|<2^j r} |f(y)| dy\right]$$

Yukarıdaki $\sum_1$ ve $\sum_2$ toplamları olmak üzere

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} \rho^*(2^j r) \leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int\limits_{2^j k_1 r}^{2^j k_2 r} \frac{\rho(s)}{s} ds$$

$$= \int\limits_0^{k_2 r} \left(\sum_{j=-\infty}^{-1} \chi_{[2^j k_1 r, 2^j k_2 r]}(s) \right) \frac{\rho(s)}{s} ds$$

$$\leq C \int\limits_0^{k_2 r} \frac{\rho(s)}{s} ds$$

$$\leq C \tilde{\rho}(k_2 r)$$

ve

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^*(2^j r)\phi(2^j r) = \int\limits_{k_1 r}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \chi_{[2^j k_1 r, 2^j k_2 r]}(s) \frac{\rho(s)}{s} \phi(2^j r) \right) ds$$

$$\leq C \int\limits_{k_1 r}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \chi_{[2^j k_1 r, 2^j k_2 r]}(s) \right) \frac{\rho(s)}{s} \phi(s) ds$$

$$\leq C \int\limits_{k_1 r}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s} \phi(s) ds$$

Bu durumda,

$$\sum_{I} \leq C \sum_{j=-\infty}^{-1} \rho^*(2^j r) Mf(x)$$

$$\leq C\tilde{\rho}(k_2 r) Mf(x)$$

$$\leq C\phi(r)^{p/q-1} Mf(x),$$

$$\sum_{II} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} \rho^*(2^j r)\phi(2^j r)\|f : \mathcal{M}_{p,\phi}\|$$

$$\leq C \int_{k_1 r}^{\infty} \frac{\rho(s)\phi(s)}{s} ds.$$

Burada (4.14) veya (4.16) eşitsizlikleri kullanılır. ϕ doubling özelliğinden $\sum_{II} \leq C\phi(r)^{p/q}$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla, $r > 0$ için

$$|T_\rho f(x)| \leq C\phi(r)^{p/q-1}[Mf(x) + \phi(r)] \tag{4.18}$$

İlk olarak, kabul edelim ki

$$Mf(x) \leq \inf_{r>0} \phi(r)$$

dir. Bu durumda, (4.18) eşitsizliğinden (4.17) eşitsizliği elde edilir.
İkinci durum için kabul edelim ki

$$Mf(x) > \inf_{r>0} \phi(r)$$

olsun. $\|f : \mathcal{M}_{p,\phi}\| = 1$ olduğu için

$$1 \geq \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$$\geq \frac{1}{\phi(r)} . \frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

Dolayısıyla $\forall r > 0$ için

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \leq \phi(r).$$

Bunun anlamı $\forall r > 0$ için

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|dy \leq \sup_{R>0} \phi(R).$$

Herhangi bir $r > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$Mf(x) \leq \sup_{r>0} \phi(r)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $Mf(x) \sim\ 2\phi(R)$ olacak şekilde $R > 0$ bulunur ve burada ki R ile (4.17) eşitsizliği elde edilir. ∎

4.3 Genelleştirilmiş Morrey Uzaylar Üzerinde Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörün Sınırlılığı

Teorem 4.3.1 ρ ve ϕ doubling şartlarını sağlasın. Aynı zamanda ϕ fonksiyonu, örten ve (4.1) koşulu ile $1 < p < q < \infty$ için

$$\phi(r) \int\limits_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt + \int\limits_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\phi(r)^{p/q}, \quad \forall \tau > 0$$

sağlansın. Bu durumda

$$\|T_\rho f\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \leq C_{p,q} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

olacak şekilde $C_{p,q} > 0$ vardır. Yani T_ρ operatörü, $\mathcal{M}_{p,\phi}$ uzayından $\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}$ uzayına sınırlıdır [8].

İspat. T_ρ operatörü iki parçadan oluşmaktadır.

$$T_\rho f(x) = \int\limits_{|x-y|<R} f(y) \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy + \int\limits_{|x-y|\geq R} f(y) \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$= I_1(x) + I_2(x).$$

Bu durumda her iki integralde ayrışırsa, yani $I_1(x)$ için, ρ ve ϕ nin üzerindeki hipoetezleri ve

$$|I_1(x)| \leq CMf(x)\phi(R)^{(p-q)/q}$$

eşitsizliğini elde etmek için M Hardy-Littlewood maximal operatörün özellikleri kullanılır.

I_2 için ρ ve ϕ üzerindeki hipotezleri ve $f \in \mathcal{M}_{p,\phi}$ olmak üzere

$$|I_2(x)| \leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \phi(R)^{p/q}$$

eşitsizliğini elde etmek için kullanılır. $I_2(x)$ için ϕ fonksiyonunun örtenliğinden dolayı

$$\phi(R) = Mf(x).\|f\|^{-1}_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

olacak şekilde $R > 0$ seçilir. $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f \neq 0 \ \ ve \ \ Mf(x) < \infty.$$

$\phi(R)$ nin bu değeriyle $I_1(x)$ ve $I_2(x)$ eşittir ve dolayısıyla $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|T_\rho f(x)|^q \leq CMf(x)^p \|f\|^{q-p}_{\mathcal{M}_{p\phi}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. M operatörü $\mathcal{M}_{p,\phi}$ üzerinde sınırlıdır.

■

Teorem 4.3.2 ρ fonksiyonu, (4.3) ve (4.4) sağlansın. Ayrıca

$$\frac{\rho(r)}{r^n} \qquad ve \qquad r^{-n/p}\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt$$

her daim azalan olsun,

$$\int_r^\infty \frac{\rho(t)t^{-n/p}}{t}dt \leq Cr^{-n/p}\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt$$

eşitsizliği sağlansın ve $1 < p \leq q < \infty$ için

$$r^{-n/p}\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt \sim \Phi_1^{-1}(r^{-n}) \ \ ve \ \ \Phi_1^{-1}(r^{-n})\Phi_2^{-1}(r^{-n}) \sim r^{-n/q}$$

olacak şekilde (4.2) koşulunu sağlayan Φ_1 ve Φ_2 fonksiyonları vardır. Eğer ϕ, doubling şartını ve

$$\phi(r)\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt + \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t}dt \leq C\psi(r), \qquad \forall r > 0$$

koşulunu sağlarsa bu durumda T_ρ operatörü, $\mathcal{M}_{p,\phi}$ uzayından $\mathcal{M}_{q,\psi}$ uzayına sınırlıdır [8].

İspat. $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir yuvarı $B = B(a,\ r)$ ve $\tilde{B} = B(a, 2\tau)$ olsun.

$$T_\rho f(x) = \int_{\tilde{B}} f(y)\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}dy + \int_{\tilde{B}^C} f(y)\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}dy$$

$$= I_B^1(x) + I_B^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

I_B^1 için $\tilde{f} = f\chi_B$ kümesi olsun. Bu durumda

$$\left(\int\limits_B |I_B^1(x)|^q dx\right)^{1/q} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |T_\rho \tilde{f}(x)\chi_B(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leq C\|T_\rho \tilde{f}\|_{L_{\Phi_1}} \|\chi_B\|_{L_{\Phi_2}}.$$

Fakat T_ρ operatörü, L_p den L_{Φ_1} ye sınırlıdır ve

$$\|\chi_B\|_{L^{\Phi_2}} \leq (\Phi_2^{-1}(|B|^{-1}))^{-1}$$

şeklinde gösterilir. Dolayısıyla

$$\left(\int\limits_B |I_B^1(x)|^q dx\right)^{1/q} \leq C\|\tilde{f}\|_{L^p}(\Phi_2^{-1}(|B|^{-1}))^{-1}$$

$$\leq Cr^{n/p}\phi(r)\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}(\Phi_1^{-1}(r^{-n})r^{n/q})$$

$$\leq Cr^{n/q}\phi(r)\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \int\limits_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt$$

$$\leq Cr^{n/q}\psi(r)\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

eşitsizliği elde edilir.
$\forall\ x \in B$ için

$$|I_B^2(x)| \leq \int\limits_{|x-y|\geq r} |f(y)|\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}dy$$

dir.

$$\left(\int\limits_B |I_B^2(x)|^q dx\right)^{1/q} \leq Cr^{n/q}\psi(r)\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

eşitsizliğinden dolayı

$$|I_B^2(x)| \leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \int\limits_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t}dt$$

$$\leq C\psi(r)\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

elde edilir. Sonuç olarak her iki durumdan dolayı, T_ρ operatörü için ilgili eşitsizlik ispatlanmış olur. ∎

Teorem 4.3.3 Eğer $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın.

(i) $\frac{1}{2} \leq \frac{t}{\tau} \leq 2 \quad \text{ise} \quad \frac{1}{A_1} \leq \frac{\phi(t)}{\phi(\tau)} \leq A_1$

(ii) $\int\limits_{\tau}^{\infty} \frac{\phi(t)^p}{t} dt \leq A_2 \phi(\tau)^p, \quad \forall\, \tau > 0$

burada $A_i > 0$ sabitleri, $t, \tau > 0$ dan bağımsızdır. Bu durumda $\forall\, p \in (1,\infty)$ için

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \leq C_p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

olacak şekilde $C_p > 0$ vardır [25].

Teorem 4.3.4 Eğer $\rho, \phi, \psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\frac{1}{2} \leq \frac{t}{\tau} \leq 2 \ \ ise \ \ \frac{1}{A_1} \leq \frac{\phi(t)}{\phi(\tau)} \leq A_1 \quad ve \quad \frac{1}{A_2} \leq \frac{\rho(t)}{\rho(\tau)} \leq A_2 \tag{4.19}$$

$$\forall \ \ r > 0 \ \ \text{için} \quad \int\limits_0^1 \frac{\rho(t)}{t} dt < \infty, \quad ve \quad \int\limits_r^{\infty} \frac{\phi(t)^p}{t} dt \leq A_3 \phi(r)^p, \tag{4.20}$$

$$\forall \ \ r > 0 \ \ \text{için} \quad \phi(r) \int\limits_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt + \int\limits_r^{\infty} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq A_4 \psi(r), \tag{4.21}$$

burada $A_i > 0$ sabitleri, $t, \tau > 0$ dan bağımsızdır. Bu durumda $\forall\, p \in (1,\infty)$ için

$$\|T_\rho f\|_{\mathcal{M}_{p,\psi}} \leq C_p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

olacak şekilde $C_p > 0$ vardır [9].

İspat. $x \in \mathbb{R}^n$ için ve $\tau > 0$ olmak üzere

$$T_\rho(x) = \int\limits_{|x-y|<\tau} \frac{f(y)\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy + \int\limits_{|x-y|\geq\tau} \frac{f(y)\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$= I_1(x) + I_2(x)$$

$t \in [2^k\tau, 2^{k+1}\tau]$ için

$$\rho(2^k r) \leq C_1 \int\limits_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)}{t} dt$$

ve

$$\rho(2^k r)\phi(2^k r) \leq C_2 \int\limits_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt.$$

olacak şekilde $C_i > 0$ sabitleri vardır. Böylece

$$
\begin{aligned}
|I_1(x)| &\leq \int\limits_{|x-y|<r} \frac{|f(y)|\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int\limits_{2^k r \leq |x-y| < 2^{k+1} r} \frac{|f(y)|\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy \\
&\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \int\limits_{|x-y|<2^{k+1} r} |f(y)| dy \\
&\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \rho(2^k r) Mf(x) \\
&\leq CMf(x) \sum_{k=-\infty}^{-1} \int\limits_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)}{t} dy \\
&\leq CMf(x) \int\limits_{0}^{r} \frac{\rho(t)}{t} dy \\
&\leq C \frac{\psi(r)}{\phi(r)} Mf(x) \ .
\end{aligned}
$$

Aynı zamanda,

$$|I_2(x)| \leq \int\limits_{|x-y|\geq r} \frac{|f(y)|\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^k r \leq |x-y| < 2^{k+1} r} \frac{|f(y)|\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^{k+1}r)}{(2^k r)^n} \int\limits_{|x-y|<2^{k+1}r} |f(y)| dy$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \rho(2^{k+1}r)\phi(2^{k+1}r)\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

$$\leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}r}^{2^{k+2}r} \frac{\phi(t)\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \int\limits_{r}^{\infty} \frac{\phi(t)\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq C\psi(r)\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}.$$

$1 \leq p < \infty$ için

$$|T_\rho f(x)|^p \leq 2^{p-1}(|I_1(x)|^p + |I_2(x)|^p),$$

ve Teorem 4.3.3 den $\forall\ B = B(\alpha, \tau)$ yuvarları için

$$\frac{1}{\psi(r)^p|B|} \int\limits_{B} |I_1(x)|^p dx \leq \frac{C}{\phi(r)^p|B|} \int\limits_{B} Mf(x)^p dx$$

$$\leq C\|Mf\|^p_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

$$\leq C_p\|f\|^p_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

ve

$$\frac{1}{\psi(r)^p|B|} \int\limits_{B} |I_2(x)|^p dx \leq C\|f\|^p_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{\psi(r)^p|B|}\int\limits_B |T_\rho f(x)|^p dx \leq C_p\|f\|^p_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

eşitsizliği ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.3.5 $1 < p < q < \infty$ ve $\phi \in \mathcal{G}_p$ olsun (4.14) koşulu sağlansın. Bu durumda T_ρ operatörü, $\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter şart (4.15) koşuludur [10].

İspat. (Yeterlilik) $\|f : \mathcal{M}_{p,\phi}\| = 1$ olsun. $B = B(z,s)$ herhangi bir yuvar olsun. (4.17) eşitsizliğinde integral alınırsa

$$\frac{1}{|B|}\int\limits_B |T_\rho f(x)|^q dx \leq C\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B [Mf(x)]^p dx + \inf_{r>0}\phi(r)^p\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

her iki taraf $\phi(s)^p$ ile bölünürse, bu durumda $\mathcal{M}_{p,\phi}$ üzerindeki M (Maksimal) operatörün sınırlılığı sayesinde

$$\frac{1}{\phi(s)^p|B|}\int\limits_B |T_\rho f(x)|^q dx \leq C\left(\frac{1}{\phi(s)^p|B|}\int\limits_B [Mf(x)]^p dx + 1\right) \leq C$$

elde edilir. B yuvarı keyfi olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

(Gereklilik) Lemma 4.2.1 den

$$\tilde{\rho}(R/2) \leq C\left[\frac{1}{|B_{R/2}|}\int\limits_{B_{R/2}} |T_\rho \chi_{B_R(x)}|^q dx\right]^{1/q} \tag{4.22}$$

elde edilir. T_ρ sınırlı olduğu için

$$\|T_\rho\chi_{B_R} : \mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}\| \leq C\|\chi_{B_R} : \mathcal{M}_{p,\phi}\|. \tag{4.23}$$

Eğer (4.22), (4.23), Lemma 3.4.7 ve ϕ nin doubling özellikleri birleştirilirse $\forall\ R > 0$ için

$$\begin{aligned}
\rho(R/2) &\leq C\phi(R/2)^{p/q}\phi(R/2)^{-p/q}\left[\frac{1}{|B_{R/2}|}\int_{B/2} |T_\rho\chi_{B_R}(x)|^q dx\right]^{1/q} \\
&\leq C\phi(R/2)^{p/q}\|T_\rho\chi_{B_R} : \mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}\| \\
&\leq C\phi(R/2)^{p/q}\phi(R)^{-1} \\
&\leq C\phi(R/2)^{p/q-1}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 4.3.6 $1 < p < q < \infty$ ve $\phi \in \mathcal{G}_p$ olsun ve $\exists\, C > 0$ için

$$\int_0^r \frac{\phi(s)s^{n/p}}{s} ds \leq C\phi(r)r^{n/p}, \quad r > 0 \tag{4.24}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda T_ρ operatörünün $\mathcal{M}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter şart (4.16) koşuludur [10].

İspat. (Yeterlilik) $\|f : \mathcal{M}_{p,\phi}\| = 1$ olsun. $B = B(z, s)$ herhangi bir yuvar olsun. (4.17) eşitsizliği birleştirilirse, bu durumda

$$\frac{1}{|B|}\int_B |T_\rho f(x)|^q dx \leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B [Mf(x)]^p dx + \inf_{r>0}\phi(r)^p\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

her iki taraf $\phi(s)^p$ ile bölünürse, bu durumda $\mathcal{M}_{p,\phi}$ üzerindeki M (Maksimal) operatörün sınırlılığı sayesinde

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi(s)^p|B|}\int_B |T_\rho f(x)|^q dx &\leq C\left(\frac{1}{\phi(s)^p|B|}\int_B [Mf(x)]^p dx + 1\right)\\ &\leq C\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

(Gereklilik) Teorem 4.3.5 den ve $r > 0$ için

$$\int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt \leq C\phi(r)^{p/q-1}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca Lemma 4.2.2 den

$$\int_{2R}^\infty \frac{\phi(t)\rho(t)}{t} dt \sim \left(\frac{1}{R^d}\int_{B_{R/3}} T_\rho g(x)^q dx\right)^{1/q} \leq C\phi(R)^{p/q}\|T_\rho g_R : \mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}\|.$$

T_ρ sınırlı olduğu için

$$\int_{2R}^\infty \frac{\phi(t)\rho(t)}{t} dt \leq C\phi(R)^{p/q}\|g_R : \mathcal{M}_{p,\phi}\|$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 4.2.3 den

$$\begin{aligned}\int_{2R}^\infty \frac{\phi(t)\rho(t)}{t} dt &\leq C\phi(R)^{p/q}\\ &\leq C\phi(2R)^{p/q}.\end{aligned}$$

■

Teorem 4.3.7 $\phi, \psi \in \mathcal{G}_1$ olsun ve $\exists\ C > 0$ için

$$\int_0^r \frac{\phi(s)s^n}{s} ds \leq C\phi(r)r^n, \quad r > 0 \tag{4.25}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda T_ρ operatörünün, $\mathcal{M}_{1,\phi}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter şart

$$\phi(r)\int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt + \int_r^\infty \frac{\phi(t)\rho(t)}{t} dt \leq C'\psi(r), \quad r > 0 \tag{4.26}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C' > 0$ sabiti olmasıdır [10].

İspat. (Yeterlilik) $\|f : \mathcal{M}_{p,\phi}\| = 1$ olsun. $B(z, r)$ yuvarı için

$$f_1 = f_{\chi_{B(x,2r)}} \quad ve \quad f_2 = f - f_1.$$

Bu durumda $\forall y \in B(z, 2r)$ için $B(z, r) \subset B(y, 3r)$. Dolayısıyla Fubini teoremi ve normalleşmesinden

$$\begin{aligned}
\int_{B(z,r)} |T_\rho f_1(x)|dx &\leq \int_{B(z,r)} \left(\int_{B(z,2r)} |f(y)| \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy \right) dx \\
&\leq \int_{B(z,2r)} \left(\int_{B(y,3r)} |f(y)| \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dx \right) dy \\
&\leq C\tilde{\rho}(3r)\phi(3r)r^n \\
&\leq C\psi(r)r^n
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada son eşitsizlik için (4.26) ifadesi ve ψ nin doubling şartı kullanılır. Böylece f_1 içinde gerçeklenir.

f_2 için $x \in B(z, r)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|T_\rho f_2(x)| &\leq \int_{B(z,2r)^c} |f(y)| \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy \\
&\leq \int_{B(z,r)^c} |f(y)| \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy
\end{aligned}$$

ve Teorem 4.3.5 ispatında olduğu gibi sağ taraf ikili olarak ayrıştırılarak

$$|T_\rho f_2(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B(x,2^j r)\setminus B(x,2^{j-1}r)} |f(y)| \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$\leq \int\limits_{2k_1 r}^{\infty} |f(y)| \frac{\phi(t)\rho(t)}{t} dt$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer (4.26) ifadesi ve ψ nin doubling şartı kullanılırsa bu durumda

$$|T_\rho f_2(x)| \leq C\psi(r)$$

elde edilir. Böylece f_2 içinde geçeklenir.

(Gereklilik) Kabul edelim ki T_ρ operatörü, $\mathcal{M}_{1,\phi}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı olsun. Lemma 4.2.1 den

$$\tilde{\rho}(r) \sim \int\limits_{B_{r/2}} T_\rho \chi_{B_r}(x) dx \leq \psi\left(\frac{r}{2}\right) \|T_\rho \chi_{B_r} : \mathcal{M}_{1,\psi}\|$$

eşitsizliği elde edilir. $\psi \in \mathcal{G}_1$ olduğu için ve T_ρ operatörü, $\mathcal{M}_{1,\phi}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$' e sınırlıdır.

$$\tilde{\rho}(r) \leq C\psi(r)\|\chi_{B_r} : \mathcal{M}_{1,\phi}\|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$$\|\chi_{B_r} : \mathcal{M}_{1,\phi}\| \sim \phi(r)^{-1}$$

için $\tilde{\rho}(r) \leq C\frac{\psi(r)}{\phi(r)}$. Ayrıca Lemma 4.2.2 den

$$\int\limits_{r}^{\infty} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\psi\left(\frac{r}{6}\right) \|T_\rho g_r : \mathcal{M}_{1,\psi}\|$$

$$\leq C\psi(r)\|g_r : \mathcal{M}_{1,\phi}\|$$

$$\leq C\psi(r)$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 4.3.8 $1 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda T_ρ operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\forall r > 0$ için

$$\rho(r) \leq Cr^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \tag{4.27}$$

olacak şekilde $C > 0$ olmasıdır [10].

4.3.1 Genelleştirilmiş Morrey Uzaylar Üzerinde Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörün Guliyev-Spanne Tipli Sınırlılığı

Bu kısımda T_ρ genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerinin $\mathcal{M}_{p,\phi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Spanne tipli sınırlılığı Guliyev metodu ile ispatlanacaktır.

$T_\rho f$ operatörünün iyi tanımlı olması için

$$f(x) = \frac{\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)}(x)}{|x|^{2n}}$$

olmak üzere

$$\int_1^\infty \frac{\rho(t)}{t^n} \frac{dt}{t} < \infty, \tag{4.28}$$

koşulunun sağlandığını kabul edelim. Ayrıca, ρ fonksiyonu için $C > 0$ sabitleri ve $0 < 2k_1 < k_2 < \infty$ için

$$\sup_{r<s\le 2r} \frac{\rho(s)}{s^n} \le C \int_{k_1 r}^{k_2 r} \frac{\rho(t)}{t^n} \frac{dt}{t}, \qquad r > 0 \tag{4.29}$$

büyüme koşulu sağlansın. Bu koşul $\rho(t)/t^n$ fonksiyonu için bilinen doubling koşulundan, yani, $r, t > 0$ ve $1/2 \le r/t \le 2$ koşulunu sağlayan herhangi r, t ler için

$$\frac{1}{C} \frac{\rho(t)}{t^n} \le \frac{\rho(r)}{r^n} \le C \frac{\rho(t)}{t^n},$$

eşitsizliğini sağlayan sabit bir C vardır, daha zayıf (genel) bir koşuldur.

T_ρ genelleştirilmiş kesirli integral operatörü için ρ nun (4.29) koşulunu daima sağlandığını kabul edilecektir Böylece $\widetilde{G_0}$ ile bu koşuulu sağlayan tüm fonksiyonların sınıfı tanımlanıp ve $\rho \in \widetilde{G_0}$ olduğunda

$$\widetilde{\rho}(r) := C r^n \int_r^\infty \frac{\rho(t)}{t^n} \frac{dt}{t}.$$

Uyarı 4.3.9 $0 < \alpha < n$ olmak üzere ρ fonksiyonu için

$$\rho(t) \equiv \begin{cases} t^\alpha \log(e/t), & 0 < t \le 1, \\ \frac{t^\alpha}{\log(et)}, & 1 \le t < \infty, \end{cases}$$

ve

$$\rho(t) \equiv \begin{cases} t^\alpha, & 0 < t \le 1, \\ e^c e^{-ct^2}, & 1 \le t < \infty. \end{cases}$$

örnekleri alınabilir. Burada $c > 0$ bir sabit sayıdır. İkinci örnek Bessel potansiyeli için kullanılır [39].

Teorem 4.3.10 (T_ρ için Guliyev lokal eşitsizliği) $1 < p < q < \infty$ olmak üzere ρ fonksiyonu için (4.28) ve (4.29) koşullarını sağlansın. Bu durumda, (4.27) koşulu ise bu durumda $p > 1$ için

$$\|T_\rho f\|_{L_q(B(x,t))} \leq \|f\|_{L_p(B(x,2t))} + t^{\frac{n}{q}} \int\limits_{2t}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \frac{\rho(r)}{r^{\frac{n}{p}}} \frac{dr}{r}$$

eşitsizliği $\forall f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için ve $\forall B(x_0,r)$ yuvarı için sağlar. [14].

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2$ olmak üzere,

$$f_1(y) = f(y)\,\chi_{B(x,2t)}(y) \quad ve \quad f_2(y) = f(y)\,\chi_{B^c(x,2t)}(y),$$

$t > 0$ olarak alınırsa

$$T_\rho f(x) = T_\rho f_1(x) + T_\rho f_2(x)$$

için norm eşitsizliğinden

$$\|T_\rho f(x)\|_{L_q(B(x,t))} \leq \|T_\rho f_1(x)\|_{L_q(B(x,t))} + \|T_\rho f_2(x)\|_{L_q(B(x,t))}$$

elde edilir.

$1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$ olmak üzere Teorem 4.1.6 den

$$\begin{aligned} \|T_\rho f_1\|_{L_q(B(x,t))} &\leq \|T_\rho f_1\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\,\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|f\|_{L_p(B(x,2t))} \end{aligned} \tag{4.30}$$

eşitsizliğinde $C > 0$ dan bağımsızdır.

$$\begin{aligned} z &\in B(x,t) \Rightarrow |x-z| < t \\ y &\in B^c(x,2t) \Rightarrow |x-y| \geq 2t \\ &< t + |y-z| \\ |x-y| - t &< |y-z| \\ 2t &\leq |x-y| \\ &\Rightarrow t \leq \frac{1}{2}|x-y| \\ |x-y| - \frac{1}{2}|x-y| &\leq |y-z| \\ \frac{1}{2}|x-y| &\leq |y-z| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|y-z| &\leq |x-z| + |x-z| \\
&\leq t + |x-y| \\
&\leq \frac{1}{2}|x-y| + |x-y| \\
&= \frac{3}{2}|x-y|
\end{aligned}
$$

olur ve buradan

$$\frac{1}{2}|x-y| \leq |y-z| \leq \frac{3}{2}|x-y|$$

elde edilir. Buna göre

$$\frac{1}{2}t \leq r \leq \frac{3}{2}t \Rightarrow \rho(t) \approx \rho(r)$$

yazılabilir. Ayrıca $T_\rho f_2$ için

$$
\begin{aligned}
\|T_\rho f_2\|_{L_q(B(x,t))} &= \left\| \int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{\rho(|y-z|)}{|y-z|^n} f(y)dy \right\|_{L_q(B(x,t))} \\
&= \left(\int\limits_{B(x,t)} \left| \int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{\rho(|y-z|)}{|y-z|^n} f(y)dy \right|^q dz \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int\limits_{B(x,t)} \left(\int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{\rho(|y-z|)}{|y-z|^n} |f(y)|\, dy \right)^q dz \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\approx \left(\int\limits_{B(x,t)} \left(\int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)|\, dy \right)^q dz \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğiini uygulayarak ve (4.29) den

$$\left(\int\limits_{B(x,t)}\left(\int\limits_{B^c(x,2t)}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}\left|f\left(y\right)\right|dy\right)^q dz\right)^{\frac{1}{q}} \leq \int\limits_{B^c(x,2t)}\left(\left|\int\limits_{B(x,t)}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}\left|f\left(y\right)\right|\right|^q dz\right)^{\frac{1}{q}} dy$$

$$= \int\limits_{B^c(x,2t)}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}\left|f\left(y\right)\right|\left(\int\limits_{B(x,t)} 1dz\right)^{\frac{1}{q}} dy$$

$$= |B(x,t)|^{\frac{1}{q}}\int\limits_{B^c(x,2t)}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}\left|f\left(y\right)\right|dy$$

$$= t^{\frac{n}{q}}\int\limits_{B^c(x,2t)}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}\left|f\left(y\right)\right|dy$$

$$\lesssim t^{\frac{n}{q}}\int\limits_{B^c(x,2t)}\left|f\left(y\right)\right|\left(\int\limits_{|x-y|}^{\infty}\frac{\rho(r)}{r^n}\frac{dr}{r}\right)dy$$

elde edilir ve Hölder eşitsizliğinden

$$= t^{\frac{n}{q}}\int\limits_{2t}^{\infty}\frac{\rho(r)}{r^{n+1}}dr\int\limits_{2t\leq|x-y|<t}\left|f\left(y\right)\right|dy$$

$$\lesssim t^{\frac{n}{q}}\int\limits_{2t}^{\infty}\frac{\rho(r)}{r^{n+1}}\left\|f\right\|_{L_1(B(x,r))}dr$$

$$\lesssim t^{\frac{n}{q}}\int\limits_{2t}^{\infty}\frac{\rho(r)}{r^{n+1}}\left\|f\right\|_{L_p(B(x,r))}\left\|1\right\|_{L_q(B(x,r))}dr$$

$$= t^{\frac{n}{q}}\int\limits_{2t}^{\infty}\frac{\rho(r)}{r^{n+1}}\left\|f\right\|_{L_p(B(x,r))}r^{\frac{n}{q}}dr$$

$$= t^{\frac{n}{q}}\int\limits_{2t}^{\infty}\frac{\rho(r)}{r^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)+1}}\left\|f\right\|_{L_p(B(x,r))}dr, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$= t^{\frac{n}{q}}\int\limits_{2t}^{\infty}r^{-\frac{n}{p}-1}\rho(r)\left\|f\right\|_{L_p(B(x,r))}dr. \tag{4.31}$$

eşitsizliği elde edilir.

■

$L_{\infty,v}(0,\infty)$ uzayı, $t>0$ için

$$\|g\|_{L_{\infty,v}(0,\infty)} = \sup_{t>0} v(t)g(t)$$

sonlu normu ile tüm g fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlıdır. Ayrıca,

$$L_\infty(0,\infty) \equiv L_{\infty,1}(0,\infty)$$

dır. $\mathfrak{M}(0,\infty)$ uzayı, $(0,\infty)$ da tanımlı Lebesgue-ölçülebilir tüm fonksiyonların kümesi ve $\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ uzayı, $(0,\infty)$ da tanımlı negatif olmayan fonksiyonları kapsayan alt kümesi olsun. $\mathfrak{M}^+(0,\infty;\uparrow)$ uzayı, $(0,\infty)$ da tanımlı azalmayan $\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ uzayındaki tüm fonksiyonların konisi olsun ve

$$\mathbb{A} = \left\{\varphi \in \mathfrak{M}^+(0,\infty;\uparrow) : \lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0\right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu durumda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.3.11 $\forall t > 0$ için v_1 ve v_2, $0 < \|v_1\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty$ koşulunu sağlayan negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\mathbb{A}$ konisi üzerinde T özdeşlik operatörünün $L_{\infty,v_1}(0,\infty)$ dan $L_{\infty,v_2}(0,\infty)$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\left\| v_2\left(\|v_1\|^{-1}_{L_\infty(\cdot,\infty)}\right)\right\|_{L_\infty(0,\infty)} < \infty \tag{4.32}$$

olmasıdır [14].

Teorem 4.3.12 v_1, v_2 ve w, $(0,\infty)$ da tanınlı ağırlık fonksiyonları ve $v_1(t)$ orijinin komşuluğunun dışında sınırlı olsun. Bu durumda $(0,\infty)$ da tanımlı negatif olmayan ve azalmayan tüm g fonksiyonlarının $\exists\, C > 0$ sabitleri için

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t>0} v_2(t) H_w g(t) \le C \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} v_1(t) g(t) \tag{4.33}$$

koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$B := \sup_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \frac{w(s)ds}{\operatorname{ess\,sup}_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty \tag{4.34}$$

olmasıdır. Ayrıca $C = B$ değeri verilen koşul için en iyi sabittir [14].

Teorem 4.3.13 $1 < p < \infty$ olmak üzere ρ fonskiyonu (4.27), (4.28) ve (4.29) şartlarını sağlasın. Ayrıca $(\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonları için

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \phi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}} \le C\, \phi_2\big(x, \frac{t}{2}\big)\, t^{\frac{n}{q}}, \tag{4.35}$$

$$\int_r^\infty \Big(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \phi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}\Big) \frac{\rho(t)}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \le C\, \phi_2(x,r), \tag{4.36}$$

koşulları sağlansın. Burada C, x ve r den bağımsızdır. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|T_\rho\|_{\mathcal{M}_{q,\phi_2}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_{q,\phi_1}}$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre $p > 1$ için T_ρ operatörü $\mathcal{M}_{p,\phi_1}$ den $\mathcal{M}_{q,\phi_2}$ ye sınırlıdır [14].

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2$ olmak üzere

$$f_1\,(y) = f\chi_{B(x,2t)}(y) \quad ve \quad f_2(y) = f\chi_{B^c(x,2t)}(y),$$

$t > 0$ olarak alınırsa

$$T_\rho f\,(x) = T_\rho f_1(x) + T_\rho f_2(x)$$

için norm eşitsizliğinden

$$|T_\rho f(x)|_{L_q(B(x,t))} \lesssim |T_\rho f_1(x)|_{L_q(B(x,t))} + |T_\rho f_2(x)|_{L_q(B(x,t))}$$

elde edilir. Teorem 4.3.12 de

$$v_1(t) = \phi_1(x,t)^{-1}, v_2(t) = \phi_2(x,t)^{-1}$$

$$g(t) = \|f\|_{L_p(B(x,t))}\,, w(t) = t^{-\frac{n}{p}-1}\rho(t)$$

seçilerek ve T_ρ operatörünün L_p den L_q ye sınırlılığından $p > 1$ için Teorem 3.1.1, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.3.12 den

$$\begin{aligned}
\|T_\rho f\|_{W\mathcal{M}_{q,\phi_2}} &= \sup_{r>0} \phi_2(x,r)^{-1} r^{-\frac{n}{q}} \|I_\rho f\|_{L_q(B(x,r))} \\
&\lesssim \sup_{r>0} \phi_2(x,r)^{-1} r^{-\frac{n}{q}} \left(\|f\|_{L_p(B(x,2r))} + t^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \rho(t) \|f\|_{L_p(B(x,t))}\, dt \right) \\
&\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} r^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L_p(B(x,2r))} \\
&\quad + \sup_{r>0} \phi_2(x,r)^{-1} \int_{r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \rho(t) \|f\|_{L_p(B(x,t))}\, dt \\
&\lesssim \sup_{r>0} \phi_2(x,r)^{-1} \int_{r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \rho(t) \|f\|_{L_p(B(x,t))}\, dt \\
&\quad + \sup_{r>0} \phi_2(x,r)^{-1} \int_{r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \rho(t) \|f\|_{L_p(B(x,t))}\, dt \\
&= \sup_{r>0} \phi_2(x,r)^{-1} \int_{r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \rho(t) \|f\|_{L_p(B(x,t))}\, dt \\
&\lesssim \sup_{r>0} \phi_1(x,r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi_1}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

4.3.2 Genelleştirilmiş Morrey Uzaylar Üzerinde Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörün Guliyev-Adams Tipli Sınırlılığı

Teorem 4.3.14 $1 < p < \infty$ ve (ϕ_1, ϕ_2)

$$\sup_{r<t<\infty} \phi_1(x,t) \leq C\,\phi_2(x,r), \tag{4.37}$$

şartını sağlasın. Bu durumda M operatörü M_{p,ϕ_1} den M_{p,ϕ_2} ye sınırlıdır [2].

Teorem 4.3.15 $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $q > p$ ve $\phi(x,t)$ fonksiyonu

$$\sup_{r<t<\infty} \phi(x,t) \leq C\,\phi(x,r) \tag{4.38}$$

ve

$$\int_r^\infty t^\alpha\, \phi(x,t)^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}}, \tag{4.39}$$

koşullarını sağlasın. Burada C, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ dan bağımsız bir sabittir. Bu durumda I_α operatörü $\mathcal{M}_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}$ den $\mathcal{M}_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}$ ya sınırlıdır [13].

Teorem 4.3.16 $1 < p < \infty$, $q > p$, $\rho(t)$ fonksiyonu (4.29) şartını sağlansın. Ayrıca $\phi(x,t)$ fonksiyonu (4.38) ve

$$\int_r^\infty \phi(x,t)^{\frac{1}{p}} \frac{\rho(t)}{t} dt \leq C\rho(r)^{-\frac{p}{q-p}}, \tag{4.40}$$

koşullarını sağlansın. Burada C, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ den bağımsız bir sabittir. Bu durumda

$$\|T_\rho f\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{\frac{1}{q}}}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}}$$

eşitsizlikleri sağlanur. T_ρ operatörü için $\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}$ den $\mathcal{M}_{q,\phi^{\frac{1}{q}}}$ ye sınırlıdır [14].

İspat. $1 < p < \infty$, $\quad 0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\quad q > p$ olmak üzere $f \in \mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}$ olsun. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2$ için

$$f_1\,(y) = f\chi_{B(x,2t)}(y) \quad ve \quad f_2(y) = f\chi_{B^c(x,2t)}(y)$$

$t > 0$ olarak alınırsa

$$T_\rho f\,(z) = T_\rho f_1\,(z) + T_\rho f_2\,(z)$$

için mutlak değer eşitsizliğinden

$$|T_\rho f(z)| \lesssim |T_\rho f_1\,(z)| + |T_\rho f_2\,(z)|$$

yazılabilir. $T_\rho f_1(z)$ için, $z \in B(x,r)$ olmak üzere Hedberg eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|T_\rho f_1(z)| &\le \int\limits_{B(x,2r)} \frac{\rho(|z-y|)}{|z-y|^n}|f(y)|dy \\
&\approx \sum_{k=-\infty}^{0} \int\limits_{B(x,2^{k+1}r)\setminus B(x,2^k r)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}|f(y)|dy \\
&\lesssim \sum_{k=-\infty}^{0} \int\limits_{2^k k_1 r}^{2^k k_2 r} \frac{\rho(s)}{s^{n+1}}ds \int\limits_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)|dy \\
&\approx Mf(x) \sum_{k=-\infty}^{0} \int\limits_{2^k k_1 r}^{2^k k_2 r} \frac{\rho(s)}{s}ds \\
&\lesssim Mf(x) \int\limits_{0}^{k_2 r} \frac{\rho(s)}{s}ds \\
&= Mf(x)\widetilde{\rho}(k_2 r) \\
&\lesssim Mf(x)\rho(r) \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

elde edilir. $T_\rho f_2(z)$ için, $z \in B(x,r)$ olmak üzere (4.31) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|T_\rho f_2(z)| &\lesssim \int\limits_{\complement B(x,2r)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}|f(y)|dy \\
&\lesssim \int\limits_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \frac{\rho(t)}{t^{\frac{n}{p}+1}}dt \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda (4.38) koşulundan ve (4.42) eşitsizliğinden $\forall\ z \in B(x,r)$ için

$$\begin{aligned}
|T_\rho f(z)| &\lesssim \rho(r)Mf(x) + \int\limits_{r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \frac{\rho(t)}{t^{\frac{n}{p}+1}}dt \\
&\le \rho(r)Mf(x) + \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}} \int\limits_{r}^{\infty} \phi(x,t)^{\frac{1}{p}} \frac{\rho(t)}{t}dt \\
&\lesssim \rho(r)Mf(x) + \rho(r)^{-\frac{p}{q-p}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}} \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\forall\ z \in B(x,r)$ için $\rho(r) = \left(\frac{\|f\|_{M_{p,\phi^{1/p}}}}{Mf(x)}\right)^{\frac{q-p}{q}}$ seçilerek

$$|T_\rho f(z)| \lesssim (Mf(x))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}} \qquad (4.44)$$

yazılabilir. Sonuç olarak M maksimal operatörün $\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}$ uzayındaki sınırlılığından ve (4.38) koşulundan aradığımız ifade sağlanır. Eğer $1 < p < q < \infty$ ise (4.44) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|T_\rho f\|_{M_{q,\phi^{\frac{1}{q}}}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, t>0} \phi(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|T_\rho f\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\lesssim \|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, t>0} \phi(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mf\|^{\frac{p}{q}}_{L_p(B(x,t))} \\
&= \|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n, t>0} \phi(x,t)^{-\frac{1}{p}} t^{-\frac{n}{p}} \|Mf\|_{L_p(B(x,t))} \right)^{\frac{p}{q}} \\
&= \|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}} \|Mf\|^{\frac{p}{q}}_{\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}} \\
&\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi^{\frac{1}{p}}}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

■

4.4 Genelleştirilmiş Campanato Uzaylar Üzerinde Modifiye Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörün Sınırlılığı

Teorem 4.4.1 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere ϕ doubling şartını ve $\int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt < \infty$ koşulunu sağlasın. $C > 0$ sabiti yalnızca n ye ve ϕ nin doubling sabitine bağlı olmak üzere

$$\tilde{\phi}(r) = \int_r^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt$$

olsun. Eğer $f \in \mathcal{L}_{p,\phi}$ ise bu durumda

$$\lim_{r\to\infty} f_{B(0,r)} < \infty$$

ve

$$\|f - \lim_{r\to\infty} f_{B(0,r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\tilde{\phi}}} \leq C\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}},$$

dır [8].

Teorem 4.4.2 $1 < p < \infty$, ρ fonksiyonu, $(4.3), (4.4), (4.8), (4.9)$ ve ϕ fonksiyonun doubling şartını ve $\int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt < \infty$ şartını sağlasın.

$$\int_r^\infty \frac{\phi(t)}{t}dt \int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt + r\int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t^2}dt \le C\psi(r) \quad (\forall r > 0)$$

eşitsizliği gerçeklenirse $\tilde{T}_p$ operatörü, $\mathcal{L}_{p,\phi}$ den $\mathcal{L}_{p,\psi}$ ye sınırlıdır [8].

İspat. $f \in \mathcal{L}_{p,\phi}$ olsun. $\mathbb{R}^n$ de, herhangi bir $B = B(a,\ r)$ yuvarı için $B = B(a,\ 2r)$ olsun. $\forall x \in B$ için

$$I_B(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (f(y) - f_B)\left(\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} - \frac{\rho(|a-y|)(1-\chi_{\tilde{B}}(y))}{|a-y|^n}\right)dy$$

$$I_B^1(x) := \int_{\tilde{B}} (f(y) - f_B)\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}dy$$

$$I_B^2(x) := \int_{\tilde{B}^C} (f(y) - f_B)\left(\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} - \frac{\rho(|a-y|)}{|a-y|^n}\right)dy$$

$$C_B^1 := \int_{\mathbb{R}^n} (f(y) - f_B)\left(\frac{\rho(|a-y|)(1-\chi_{\tilde{B}}(y))}{|a-y|^n} - \frac{\rho(|y|)(1-\chi_{B_0}(y))}{|y|^n}\right)dy$$

$$C_B^2 := \int_{\mathbb{R}^n} f_B\left(\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} - \frac{\rho(|y|)(1-\chi_{B_0}(y))}{|y|^n}\right)dy.$$

O halde

$$\tilde{T}_\rho f(x) - (C_B^1 + C_B^2) = I_B(x) = I_B^1(x) + I_B^2(x)\ ,$$

ve C_B^1 ve C_B^2 sabitleri iyi tanımlıdır. I_B^1 hesaplamak için

$$\tilde{f} := (f - f_B)\chi_B \quad ve \quad \tilde{\phi}(r) := \int_r^\infty \frac{\phi(t)}{t}dt.$$

O halde [7] den

$$\begin{aligned} |I_B^1(x)| &\le \int_{\tilde{B}} |\tilde{f}(y)|\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}dy \\ &\le CM\tilde{f}(x)\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt \\ &\le C\frac{\psi(r)}{\tilde{\phi}(r)}M\tilde{f}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. M ve Teorem 4.4.1 den

$$\sigma(f) = \lim_{r\to\infty} f_{B(0,r)}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{\psi(r)}\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B |I_B^1(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{C}{\tilde{\phi}(r)|B|^{1/p}}\left(\int\limits_B [M\tilde{f}(x)]^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{C_p}{\tilde{\phi}(r)|B|^{1/p}}\|\tilde{f}\|_{L^p}$$

$$\leq \frac{C_p}{\tilde{\phi}(r)|B|^{1/p}}\left(f - \sigma(f)\chi_{\tilde{B}}\|_{L^p} + |\tilde{B}|^{1/p}|f_B - \sigma(f)|\right)$$

$$\leq C_p(\|f - \sigma(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\overline{\phi}}} + \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}})$$

$$\leq C_p\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}$$

elde edilir.

Sonra, I_B^2 hesaplamak kalır. (4.4) ve (4.9) ile

$$|I_B^2(x)| \leq \int\limits_{\tilde{B}^{\mathrm{C}}} |f(y) - f_{\tilde{B}}|\left|\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} - \frac{\rho(|y-a|)}{|y-a|^n}\right| dy$$

$$\leq C|x-a| \int\limits_{|y-a|\geq 2r} |f(y) - f_{\tilde{B}}|\frac{\rho(|y-a|)}{|y-a|^{n+1}}dy$$

$$= C|x-a|\sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{2^{k-1}r\leq|y-a|<2^k r} \frac{|f(y) - f_{\tilde{B}}|\rho(|y-a|)}{|y-a|^{n+1}}dy$$

$$\leq C|x-a|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^{n+1}} \int\limits_{|y-a|<2^k r} |f(y) - f_{\tilde{B}}|dy$$

$$\leq C|x-a|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\rho(2^k r)}{2^k r}\left(\frac{1}{(2^k r)^n}\int\limits_{|y-a|<2^k r} |f(y) - f_{\tilde{B}}|^p dy\right)^{1/p}$$

Fakat $\forall\ k \geq 2$ için

$$\left(\frac{1}{|B(a,2^kr)|}\int\limits_{B(a,2^kr)}|f(y)-f_B|^p dy\right)^{1/p}\leq C\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}\int\limits_{2r}^{2^kr}\frac{\phi(s)}{s}ds$$

Böylece (4.4), (4.8) ile ve ϕ ve ψ fonksiyonları üzerindeki varsayım

$$|I_B^2(x)|\leq C|x-a|\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\rho(2^kr)}{2^kr}\int\limits_{2r}^{2^kr}\frac{\phi(s)}{s}ds$$

$$\leq C|x-a|\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{2^kr}^{2^{k+1}r}\frac{\rho(t)}{t^2}\left(\int\limits_{2r}^{t}\frac{\phi(s)}{s}ds\right)dt$$

$$\leq C|x-a|\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{\rho(t)}{t^2}\left(\int\limits_{2r}^{t}\frac{\phi(s)}{s}ds\right)dt$$

$$= C|x-a|\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}\int\limits_{2r}^{\infty}\left(\int\limits_{s}^{\infty}\frac{\rho(t)}{t^2}dt\right)\frac{\phi(s)}{s}ds$$

$$\leq Cr\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{\rho(s)\phi(s)}{s^2}d\mathcal{S}\leq C\psi(r)\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}},$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat

$$\frac{1}{\psi(r)}\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_{B}|I_B^2(x)|^p dx\right)^{1/p}\leq C\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}$$

gerçeklenir.

■

Teorem 4.4.3 $\rho,\phi,\psi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonları aşağıdaki koşullarrı sağlasın:

$$\frac{1}{2}\leq\frac{t}{\tau}\leq 2\Rightarrow\frac{1}{A_1}\leq\frac{\phi(t)}{\phi(\tau)}\leq A_1\quad ve\quad\frac{1}{A_2}\leq\frac{\rho(t)}{\rho(\tau)}\leq A_2 \tag{4.45}$$

$$\forall\ \ \tau>0\ \ \text{için}\quad\int\limits_0^1\frac{\rho(t)}{t}dt<\infty,\quad\int\limits_r^{\infty}\frac{\phi(t)^p}{t}dt\leq A_3\phi(r)^p, \tag{4.46}$$

$$\frac{1}{2}\leq\frac{t}{\tau}\leq 2\ \ \text{için}\left|\frac{\rho(\tau)}{\tau^n}-\frac{\rho(\tau)}{t^n}\right|\leq A_4|\tau-t|\frac{\rho(\tau)}{\tau^{n+1}} \tag{4.47}$$

$$\forall \tau > 0 \ \text{ için } \ \phi(r)\int\limits_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt + \tau \int\limits_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t}dt \le A_5\psi(r) \tag{4.48}$$

burada $A_i > 0$ sabitleri $t, \tau > 0$ den bağımsızdır. Bu durumda $1 < p < \infty$ için

$$\|\tilde{T}_\rho f\|_{\mathcal{L}_{p,\psi}} \le C_p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}.$$

olacak şekilde $C_p > 0$ vardır [9].

İspat. $\tilde{B} = B(\alpha, 2\tau)$ olsun. $x \in B = B(\alpha, \tau)$ için

$$\tilde{T}_\rho f(x) - C_B = E_B^1(x) + E_B^2(x)$$

ve

$$C_B = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\frac{\rho(|\alpha - y|)(1 - \chi_{\tilde{B}}(y))}{|\alpha - y|^n} - \frac{\rho(|y|)(1 - \chi_{B_0}(y))}{|y|^n}\right)dy,$$

$$I_B^1(x) = \int\limits_{\overline{B}} f(y)\frac{\rho(|x - y|)}{|x - y|^n}dy,$$

ve

$$I_B^2(x) = \int\limits_{\overline{B}^c} f(y)\left(\frac{\rho(|x - y|)}{|x - y|^n} - \frac{\rho(|a - y|)}{|a - y|^n}\right)dy.$$

(4.47) den

$$|C_B| \le C\left(\int\limits_{|a-y|<k} |f(y)|dy + |a| \int\limits_{|a-y|\ge k} |f(y)|\frac{\rho(|a - y|)}{|a - y|^{n+1}}dy\right),$$

$k = \max(2|\alpha|, 2\tau)$, ve bu yüzden C_B nin $\forall\ B(\alpha, \tau)$ yuvarı için sonlu olduğu bilindiğinden benzer teknik ile önceki teoremin ispatında olduğu gibi,

$$|I_B^1(x)| \le \int\limits_{|a-y|<2r} \frac{|f(y)|\rho(|x - y|)}{|x - y|^n}dy$$

$$\le \int\limits_{|x-y|<3r} \frac{|f(y)|\rho(|x - y|)}{|x - y|^n}dy$$

$$\le CMf(x)\int\limits_0^{3r} \frac{\rho(t)}{t}dt$$

$$\le CMf(x)\int\limits_0^{r} \frac{\rho(t)}{t}dt,$$

ve (4.47) ile

$$|I_B^2(x)| \leq \int\limits_{|a-y|\geq 2r} |f(y)| \left| \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} - \frac{\rho(|a-y|)}{|a-y|^n} \right| dy$$

$$\leq C|x-a| \int\limits_{|a-y|\geq 2r} |f(y)| \frac{\rho(|a-y|)}{|a-y|^{n+1}} dy$$

$$\leq C\|f\|_{\mathrm{M}_{p,\phi}} r \int\limits_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t^2} dt$$

ispat gerçeklenir.

■

KAYNAKLAR

[1] Adams, D. R., *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. 42, (**1975**), 765-778.

[2] Akbulut, A.; Guliyev, V.S.; Mustafayev, R.; *Boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces*, Mathematica Bohemica, 137 (1) (**2012**), 27-43.

[3] Akbulut, A.; Guliyev, V.S.; Noi, T.; Sawano, Y. *Generalized Morrey spaces* Z. Anal. Anwend., (**2017**), 36, 129-149, 17-35.

[4] Alp, M. ; Musayev, B. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, (**2000**).

[5] Balcı, M. *Analiz II*, Balcı Yayınları, (**1997**), 56.

[6] Balcı, M. *Reel Analiz*, Balcı Yayınları, (**1998**), 93.

[7] Eridani, *On the boundedness of a generalized fractional integral on generalized Morrey spaces*, Tamkang J. Math. 33 (**2002**), 335-340.

[8] Eridani, Gunawan, H.; Nakai, E. *On Generalized Fractional Integral Operators*, Scientiae Mathematicae Jopanicae, Vol. 10, (**2004**), 307-318

[9] Eridani, *On the Boundedness of a Generalized Fractional Integral on Generalized Morrey Spaces*, J. Math. and Its Appl. Vol. 3, (**2006**), 11-17

[10] Eridani, Gunawan, H.; Nakai, E.; Sawano, *Y. Characterizations For The Generalized Fractional Integral Operators On Morrey Spaces*, Mathematical Inequalities Applications, (**2014**)

[11] F. Chiarenza and M. Frasca, *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Mat. **7** (**1987**), 273-279

[12] Guliyev, V.S. *Integral Operators, Function Spaces and Questions of Approximation on the Heisenberg Group (Russian).* Elm, Baku, (**1996**).

[13] Guliyev, V.S.; Shukurov, P. S. *On the boundedness of the fractional maximal operator, Riesz potential and their commutators in generalized Morrey spaces.* Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory, Series: Operator Theory: Advances and Applications, (**2013**), 175, 194

[14] Guliyev, V. S.; Ismayilova, A. F.; Kucukaslan, A.; Serbetci, A. *Generalized fractional integral operators on generalized local Morrey spaces* J. Funct. Spaces, Art. 8, (**2015**)

[15] Gunawan, H.; Denny I. Hakim,; Kevin M. Limanta,; Al A. Masta, *Inclusion properties of generalized Morrey spaces*, Math. Nachr. 290, (**2017**), 332-340

[16] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces, J. Funct. Anal.* 4, (**1969**), 71-87.

[17] Hedberg, L. I., *Bounded point evaluations and capacity*, J. Funct. Anal. 10, (**1972**)

[18] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with applications.* John Willey and Sons, New York, (**1987**).

[19] Kreĭ, S. G. ; I Petunīn and Semënov, *Interpolation of Linear Operators, Translations of Mathematical Monographs 54* (American Mathematical Societhy, Providence, R. I.) (**1982**).

[20] Kuttler, K. *Topics In Analysis*, http://tomlr.free.fr/Math

[21] Lu, S.; Ding, Y.; Yan, D. *Singular Integrals and Related Topics.* World Sci. Pub., Beijing, (**2006**).

[22] Lebesgue H., *Notices d'histoire des mathematiques. French avec une introduction de L. Felix. Monographies de L'Enseignement Mathematique*, no.4 L' Enseignement mathematique, Geneva, (**1958**)

[23] Morrey, C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equation, Trans. Amer. Math. Soc., (**1938**), 43, 126-166.

[24] Mizuhara, T., *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces.* In: Harmonic Analysis Proceedings Sendai (Japan), (**1990**).

[25] E. Nakai, *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators on generalized Morrey spaces and the Riesz poptentials on generalized Morrey spaces, Math. Nachr.* 166 **(1994)**, 95-103.

[26] Nakai, E. *A characterization of pointwise multipliers on the Morrey spaces.* Sci. Math. 3 **(2000)**, 445-454.

[27] Nakai, E. *On generalized fractional integrals*, Taiwanes J. Math., 5, 38, (**2001**), 587-602.

[28] Nakai, E. *On generalized fractional integrals on the weak Orlicz spaces, BMO_ϕ the Morrey spaces and the Campanato spaces. Function spaces, interpolation theory and related topics* Lund, (**2000**), 389-401, de Gruyter, Berlin, (**2002**).

[29] Nakai, E. *Recent Topics Of Fractional Integrals*, Sugaku Expositions 20, (**2007**).

[30] Nakai, E. *Orlicz- Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function*, Studia Math. 188, 3 (**2008**), 193-221.

[31] Nakai, E. *A generalization of Hardy spaces H^p by using atoms*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 24, 8 (**2008**), 1243-1268

[**32**] Pick, L.; Kufner, A.; John, O.; *Fučik, S. Function Spaces*, Walter de Gruyter publishing, (**2013**)

[**33**] Rafeiro, H.; Samko, N.; Samko, S. *Morrey-Campanato Spaces*, Advances and Applications, (**2013**), 293-323

[**34**] Riesz, F. *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen.* (German) math. Ann. no. 4, 69 (**1910**) 449-497.

[**35**] Royden, *H. L. Real Analysis, MacMillan, New York, 2nd ed.*, (**1968**).

[**36**] Rudin, W.; *Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York,* (**1991**).

[**37**] Sadosky, *C. Interpolation of operators and Singular integrals: An Introduction to Harmonic Analysis,* Marcel Dekker Inc., (**1979**).

[**38**] Sawano, Y.; Sugano, S. and Tanaka, H., *Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the frame of Morrey Spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 363 **(2011)** (12), 6481-6503.

[**39**] Sawano, Y.; Sugano, S. and Tanaka, H., *Orlicz-Morrey spaces and fractional operators*, Potential Anal. 36, 4 **(2012)**, 517-556.

[**40**] Stein, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, Princeton, (**1970**).

[**41**] Stein, E. M. *Harmonic Analysis: real variable methods, orthogonality, and oscillatory integralsi,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (**1993**).

[**42**] Stein, E. M.; Shakarchi, *R.; Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, (**2005**).

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	İlkay Bilgin
Doğum Yeri	:	Kıbrıscık / Bolu
Doğum Tarihi	:	28.02.1989
Yabancı Dili	:	İngilizce

İletişim Bilgileri

Adres	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
E-mail	:	bilginilkay@gmail.com

Eğitim Durumu

İlköğretim	:	Canip Baysal İlköğretim Okulu, 1995-2003
Ortaöğretim	:	Canip Baysal Anadolu Lisesi (YDA - Süper Lise), 2003-2007
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2009-2014