T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Nihat TÜYSÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİKANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2015

T.C.

AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Nihat TÜYSÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİKANABİLİM DALI

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ali AKBULUT

KIRŞEHİR 2015

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Üye
Prof. Dr. Vagıf Sabir GULİYEV

Üye
Doç. Dr. Ali AKBULUT

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2015

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum ”Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Harmonik Analizin İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı” başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Nihat TÜYSÜZ

ÖZET

Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Harmonik Analizin İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

Yüksek Lisans Tezi

Nihat TÜYSÜZ

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
May 2015

Bu yüksek lisans tezinde, Genelleştirilmiş Morrey uzayları ve harmonik analizin integral operatörlerinin bu uzaydaki sınırlılığı hakkında bilgi verilecektir. Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmıdır.

İkinci bölümde, bundan sonraki bölümlerde incelenecek olan konuları yakından ilgilendiren Lebesgue uzayları, Morrey uzayları, Genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanım ve özellikleri ve operatörler hakkında bazı temel kavram, notasyon ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayında maksimal operatörünün, singüler integral operatörünün, Riesz potansiyelinin sınırlılığı ile ilgili teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, Guliyev [11] tarafından elde edilen lokal Guliyev eşitsizlikleri kullanılarak ispat edilen $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığı, Spanne ve Adams tipli I_α Riesz potansiyelinin $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı incelenmiştir. Guliyev [11] tarafından I_α sınırlılığı için ispatlanan iki farklı teoreme yer verilmiştir. Son olarak, Calderon-Zygmund integral operatörü için $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlılık koşullarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: L_p uzayları, Morrey uzayları, Genelleşmiş Morrey uzayı, maksimal operatör, singüler integral operatör, Riesz potansiyeli.

Sayfa Adedi: 37

Danışman: Doç. Dr. Ali AKBULUT

ABSTRACT

Boundedness of the Integral Operators of the Harmonic Analysis in Generalized Morrey Spaces

Master Thesis

Nihat TÜYSÜZ

Ahi Evran University

Institute of Science

May 2015

In this master thesis, information about the generalized Morrey spaces and the boundedness of integral operators of harmonic analysis in these spaces will be given. This thesis consists of three chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts, notations and theorems about the operators, definitions and properties of the Lebesgue spaces, Morrey space, Generalized Morrey space that is closely related to the topics that will be explored in the next section are included. Also the theorems about the boundedness of the maximal operator, singular integral operator, Riesz potentials in the $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue spaces are given without proof.

In the third chapter, the boundedness of Hardy-Littlewood maximal operator in the $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ spaces is shown with the help of the Gulyev's lokal inequalities which was given by Guliyev [11]. The boundedness of I_α Riesz potential from the space $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ to $M_{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ is shown as Spanne and Adams type boundedness with two different ways. For this aim two different theorems which were given by Guliyev [11] are used. Finally, the boundedness conditions are given for T Calderon-Zygmund singular integral operator in the $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ spaces.

Keywords: L_p spaces, Morrey spaces, Generalized Morrey spaces, maximal operator, singular integral operator, Riesz potential.

Number of Pages: 37

Supervisor: Doç. Dr. Ali AKBULUT

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca hem mesleğine hem de hayata yaklaşımıyla bizlere örnek olan, bilgisini ve deneyimlerini her zaman cömertce paylaşan her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyip çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Ali AKBULUT'a ve her ihtiyaç duyduğumda bana yardımcı olan, değerli ve derin bilgileriyle ışık tutan, kişilik ve karekteriyle bizlere örnek olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Vagif S.GULIYEV'e;
bu zorlu süreçte her zaman yanımda olan ve sonsuz desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşime ve çocuklarıma teşekkürlerimi sunarım.

Nihat TÜYSÜZ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

TEZ BİLDİRİMİ . . . i
ÖZET . . . ii
ABSTRACT . . . iii
TEŞEKKÜR . . . iv
SİMGELER VE KISALTMALAR . . . vi
1 GİRİŞ . . . 1
2 TEMEL KAVRAMLAR, UZAYLAR VE OPERATÖRLER . . . 2
2.1 Temel Tanım, Teorem ve Kavramlar . . . 2
2.2 Lebesgue Uzayı . . . 4
2.3 Morrey Uzayı . . . 9
2.4 $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayı . . . 11
2.5 Hardy-Littlewood Maksimal Operatör . . . 13
2.6 Singüler İntegral Operatör . . . 15
2.7 Riesz Potansiyeli . . . 16
3 HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYINDA SINIRLILIKLARI . . . 19
3.1 Maksimal Operatörün Genelleştirilmiş Morrey Uzayında Sınırlılığı . . . 19
3.2 Riesz Potansiyelinin Genelleştirilmiş Morrey Uzayında Sınırlılığı . . . 22
3.3 Singüler İntegral Operatörlerinin Genelleştirilmiş Morrey Uzayında Sınırlılığı . . . 28
KAYNAKLAR . . . 31
ÖZGEÇMİŞ . . . 34

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$L_1^{loc}(E^n)$	E^n de lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$WL_p(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Lebesgue uzayı
$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
M_α	Kesirli maksimal operatörü
T	Singüler integral operatörü
I_α	Kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli)

1 GİRİŞ

Klasik Morrey uzayları 1938 yılında C.B. Morrey [22] tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları araştırılırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenilirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzayları Lebesgue uzaylarının bir uzantısı olarak değerlendirileceğinden klasik operatörlerin sınırlılıklarının Morrey uzaylarında araştırılması oldukça doğal ve önemlidir. D.R. Adams [1] tarafından Riesz potansiyelin sınırlılığı çalışılmıştır. Harmonik analizde bu operatörlerin ağırlıklı eşitsizliklerini çalışmak önemli bir yere sahip olup, $L_p(\omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılıklar R. Coifman ve C. Fefferman [5], B. Muckenhoupt [23], B. Muckenhoupt ve R. Wheeden [24] tarafından elde edilmiştir. 1994 yılında E. Nakai [26] tarafından harmonik analizde önemli bir yere sahip olan maksimal integral operatörünün, Riesz potansiyelinin ve singüler integral operatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarınaki sınırlılığı araştırılmıştır.

Aynı yıllarda V.S. Guliyev [13] tarafından Yüksek Lisans Tezinde, harmonik analizin integral operatörlerinin genişletilmiş lokal Morrey uzayındaki sınırlılığı E. Nakai'nin şartlarından daha geniş şartlar ile araştırılmıştır. 2009 yılında V.S Guliyev, matematik literatüründe önem verilen $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normunu tanımlayarak, $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığını Mizuhara ve Nakai'ye göre daha geniş şartlar altında araştırmıştır.

Ayrıca V.S. Guliyev [14], [15], [16] tarafından $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında maksimal, potansiyel ve singüler integral operatörlerin sınırlılıkları ortaya koyduğu lokal Guliyev eşitsizlikleri ile elde edilmiştir.

Tezde Guliyev [11] tarafından elde edilen lokal Guliyev eşitsizlikleri kullanılarak ispat edilen $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığı, Spanne ve Adams tipli I_α Riesz potansiyelinin $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı incelenmiştir. Guliyev [11] tarafından I_α sınırlılığı için ispatlanan iki farklı teoreme yer verilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR, UZAYLAR VE OPERATÖRLER

2.1 Temel Tanım, Teorem ve Kavramlar

Bu bölümde ölçü, ölçülebilir uzay gibi fonksiyonel ve reel analizdeki temel tanım, teorem ve kavramlar ifade edilmiştir. Ayrıca Riemann integralinden daha geniş ve kullanılışlı olan Lebesgue integrali hakkında bilgi verilmiştir.

Tanım 2.1.1 X bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde bir **σ-cebir** olarak adlandırılır.

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A}, \quad {}^{c}E = X - E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall n = 1, 2, ...$ için $\quad E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$

Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathcal{A}$ deki her bir kümeye de **ölçülebilir küme** adı verilir.

Tanım 2.1.2 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. Bir $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$,

(iii) $\mathcal{A}$ nin her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$

özelliklerin sağlıyorsa bu fonksiyona $\mathcal{A}$ üzerinde bir **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** adı verilir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu\left(A\right) < \infty$ ise μ ölçüsüne **sonlu ölçü** denir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü **σ-sonlu** olarak adlandırılır. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** denir. Ayrıca $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **ölçü uzayı** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$ oluyorsa f fonksiyonu **ölçülebilirdir** denir. Ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}\left(X, \mathcal{A}\right)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir kümenin tümleyeni üzerinde veya kendisi $\mathcal{A}$ ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme **hemen hemen her yerde** doğrudur denir.

Tanım 2.1.5 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $x \in D(T)$ için,

$$\|Tx\| \leq A\|x\|$$

olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne **sınırlıdır** denir.

Tanım 2.1.6 Bir T **operatörünün normu**

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T), x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.7 $\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1 \cdots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstersin. $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun **(Lebesgue) integrali**

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int \cdots \int f(x_1, ..., x_n)dx_1 \cdots dx_n$$

ile gösterilir.

$B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$, merkezi x, yarıçap uzunluğu r olan açık yuvarı ve ${}^cB(x, r)$ onun tümleyenini göstersin. $|B(x, r)|$, $B(x, r)$ açık yuvarının Lebesgue ölçüsü ve $\nu_n = |B(0, 1)|$ olmak üzere

$$|B(x, r)| = \nu_n r^n = \frac{2\pi^{n/2} r^n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{1}{n}|S^{n-1}|r^n$$

biçimindedir.

Burada $\mathbb{R}^n$ de $n \geq 1$ için yarıçapı 1 olan $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ küresinin yüzey alanı

$$|S^{n-1}| := 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2),$$

ve $\Gamma(z)$ gamma fonksiyonu ve bir z kompleks sayısı için Re$z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

ile tanımlanır.

Bu tezde, $B = B(x_0, r)$ ile x_0 merkezli ve kenar uzunluğu r olan küp ifade edilmiştir. Verilen bir B küpü ve $\lambda > 0$ için λB ile B nin merkezine sahip ve kenar uzunluğu B nin kenar uzunluğunun λ katı olan küpü gösterilmiştir. Ayrıca $A \lesssim B$ gösterimini $A \leq CB$, $C > 0$ eşitsizliğinin yerine kullanılmıştır.

Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir.

Burada C farklı sabitleri göstermektedir. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ nin her bir kompakt alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayı $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Bu uzay $p = 1$ için $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) \equiv L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfını gösterir.

2.2 Lebesgue Uzayı

Tanım 2.2.1 (L_p **Uzayı**) $0 < p \leq \infty$ ve f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere Lebesgue uzayı

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f - \text{ölçülebilir } : \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

ile verilir, burada $0 < p < \infty$ için

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ durumunda ise

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

biçiminde verilir.

Tanım 2.2.2 (Zayıf L_p Uzayı) $WL_p(\mathbb{R}^n)$ zayıf L_p uzayı $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} t \left| \{ y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > t \} \right|^{1/p} < \infty$$

quasi-normuna sahip f ölçülebilir fonksiyonlarının uzayıdır. Kolayca gösterilebilir ki $1 \leq p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n) \subset WL_p(\mathbb{R}^n)$ dir.

Örnek 2.2.3

(1) $f(x) = |x|^{\alpha} \notin L_p(\mathbb{R}^n)$

(2) $f(x) = |x|^{\alpha}\chi_{B(0,1)}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha > -\frac{n}{p}$

(3) $f(x) = |x|^{\alpha}\chi_{^cB(0,1)}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha < -\frac{n}{p}$

(4) $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \notin L_p(\mathbb{R}^n)$, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \in WL_p(\mathbb{R}^n)$

Teorem 2.2.4 [30] Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise L_p bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.5 [27]**(Hölder Eşitsizliği)** $p > 1$ ve $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere $f \in L_p(X)$, $g \in L_q(X)$ olsun. Bu durumda

$$\|fg\|_{L_1(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)}\|g\|_{L_q(X)}$$

eşitsizliğine **Hölder eşitsizliği** denir.

Tanım 2.2.6 [27]**(Minkowski Eşitsizliği)** Eğer $p \geq 1$ için $f, g \in L_p(X)$ ise bu durumda

$$\|f + g\|_{L_p(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)}$$

eşitsizliğine **Minkowski eşitsizliği** denir.

Teorem 2.2.7 [10] $L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $1 \leq p \leq \infty$ için bütün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının birleşimlerini içerir. Daha genel olarak $0 < p < q < \infty$ için

$$L_q(\mathbb{R}^n) \subseteq L_q^{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir

Teorem 2.2.8 (Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi) Eğer $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

sağlanır.

Tanım 2.2.9 Bir f fonksiyonunun desteği

$$\text{supp}f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır. Yani f nin desteği onun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapanışıdır. Eğer supp$f$ sınırlı bir küme ise f **kompakt desteğe sahiptir** denir.

Tanım 2.2.10 (Kuvvetli ve Zayıf Tipli Sınırlılık) $1 \leq p, q \leq \infty$, (X, μ) ve (Y, ν) iki ölçü uzayı ve T, $L_p(X, \mu)$ den tanım ve görüntü kümeleri sırasıyla Y ve $\mathbb{C}$ olan ölçülebilir fonksiyonların uzayına bir operatör olsun. Eğer $q < \infty$ olmak üzere

$$\nu\left(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

ise T zayıf (p, q) tipinden ve eğer $q = \infty$ iken $L_p(X, \mu)$ den $L_\infty(Y, \nu)$ ye sınırlı bir operatör ise zayıf (p, ∞) tipindedir denir.

Eğer T, $L_p(X, \mu)$ den $L_q(Y, \nu)$ ya sınırlı ise kuvvetli (p, q) tiplidir denir. Yani, her $f \in L_p(X, \mu)$ için

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Buradan $q = \infty$ olması durumunda zayıf ve kuvvetli tip çakışmaktadır.

Eğer T, kuvvetli (p, q) tipli ise aynı zamanda zayıf (p, q) tiplidir. Gerçekten, eğer

$$E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$$

olarak alırsak, bu durumda

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{Tf(x)}{\lambda}\right|^q d\nu \leq \frac{\|Tf\|_q^p}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

olur.

Eğer $(X, \mu) = (Y, \nu)$ ve T özdeşlik operatörü olursa zayıf (p, p) klasik Chebyshev eşitsizliği olur.

Tanım 2.2.11 (Lineer ve Quasilineer Operatör) T, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir (X, μ) ölçü uzayı üzerinde tanımlanmış ve bir (Y, ν) ölçü uzayı üzerinde bütün kompleks değerli hemen her yerde sonlu ölçülebilir fonksiyonların kümesinde değerler alan bir operatör olsun. Bu durumda her f, g ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$T(f + g) = T(f) + T(g) \quad \text{ve} \quad T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

ise T ye lineer operatör,

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \quad \text{ve} \quad |T(\lambda f)| \leq |\lambda|\,|T(f)|$$

ise T ye altlineer operatör, bir $K>0$ sabiti için

$$|T(f+g)| \leq K\left(|T(f)| + |T(g)|\right) \quad \text{ve} \quad |T(\lambda f)| \leq |\lambda|\,|T(f)|$$

ise T ye quasilineer operatör denir. Altlineerlik, quasilinerliğin özel bir durumudur.

Tanım 2.2.12 [23](A_p **Muckenhoupt Sınıfı**) Eğer $1<p<\infty$ olmak üzere herhangi bir $B=B(x,r)$ yuvarı için

$$\begin{aligned}[\omega]_{A_p} &= \sup_B [\omega]_{A_p(B)} \\ &= \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1} < \infty \end{aligned} \tag{2.1}$$

ise ω ağırlık fonksiyonu A_p Muckenhoupt sınıfındandır denir. Burada supremum bütün B yuvarları üzerinden alınmaktadır ve $1/p+1/p'$ biçimindedir. Burada Hölder eşitsizliğini kullanarak bütün B yuvarları için

$$[w]_{A_p(B)}^{1/p} = |B|^{-1}\|w\|_{L_1(B)}^{1/p}\,\|w^{-1/p}\|_{L_{p'}(B)} \geq 1. \tag{2.2}$$

olur. $p=1$ iken, hemen hemen her x için

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \tag{2.3}$$

olacak şekilde $C>1$ varsa $\omega \in A_1$ dir ve (2.3) eşitsizliğini sağlayan C nin infimumu $[\omega]_{A_1}$ ile gösterilir.

p ve p' üsleri ile Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$1 = \frac{1}{|B|}\int_B dx = \frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{1/p}\omega(x)^{-1/p}dx \leq [\omega]_{A_p}^{1/p}$$

elde edilir.

(2.1) eşitsizliğinde $p\to\infty$ iken limite geçilirse

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx \leq C\exp\left(\frac{1}{|B|}\int_B \log w(x)dx\right)$$

elde edilir ve eşitsizlik sağlandığında $w\in A_\infty$ denir. Ayrıca, $p=\infty$ iken

$$A_\infty := \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p$$

ile tanımlanır. A_∞ için verilen bu iki tanım eşdeğerdir; [8].

A_p sınıfı 1972 yılında Muckenhoupt [23] tarafından ağırlıklı $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ uzayı üzerinde tanımlı Hardy-Littlewood maximal operatörünün sınırlılıkla ilgili çalışmalarında tanımlanmıştır.

$\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$ Muckenhoupt ağırlıklarının en önemli örneklerinden biri $-n < \alpha < n(p-1)$ iken $\omega(x) = |x|^\alpha$ fonksiyonudur. Eğer $-n < \alpha \leq 0$ olarak alınırsa $w \in A_1$ elde edilir. $0 < \delta < 1$ ise bu durumda $\omega(x) = |x|^{-n(1-\delta)} \in A_1$ ve $\omega(x) = |x|^{-n(p-1)(1-\delta)} \in A_p$ elde edilir.

Muckenhoupt, [23] deki çalışmasında $\varepsilon > 0$ için

$$A_p \subset A_{p-\varepsilon}$$

olduğunu göstermiştir.

Lemma 2.2.13 [8] Eğer $\omega \in A_p$ ise bu durumda $w \in A_{p-\varepsilon}$ sağlanır ve

$$[\omega]_{A_p-\varepsilon} \leq C[\omega]_{A_p}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır ve burada $\varepsilon \sim [\omega]_{A_p}^{-\frac{1}{p-1}}$ şeklindedir.

Tanım 2.2.14 (Ağırlıklı L_p Uzayı) $1 \leq p \leq \infty$, ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, $L_p(\omega) \equiv L_p(\mathbb{R}^n, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{L_{p,\omega}} \equiv \|f\|_{L_{p,\omega(\mathbb{R}^n)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normuna sahip bütün bütün ölçülebilir f fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır. $p = \infty$ durumunda ise $L_\infty(\omega) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n, \omega)$ de norm

$$\|f\|_{L_{\infty,\omega}} \equiv \|f\|_{L_{\infty,\omega(\mathbb{R}^n)}} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \ \omega(x)$$

ile tanımlanır.

2.3 Morrey Uzayı

Klasik Morrey uzayları 1938 yılında C.B. [22] Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının önemli uygulamaları Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride ortaya çıkmıştır.

Tanım 2.3.1 $1 \leq p < \infty,\ 0 \leq \lambda \leq n,\ f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $M_{p,\lambda} \equiv M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$M_{p,\lambda} := \left\{ f :\ ||f||_{M_{p,\lambda}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $||f||_{M_{p,\lambda}}$ normu

$$||f||_{M_{p,\lambda}} \equiv ||f||_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde verilir.

$\lambda = 0$ için $M_{p,0} \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $M_{p,\lambda} = \theta$ olur. Burada θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir.

$WM_{p,\lambda} \equiv WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile bütün $f \in WL_p^{loc}$ fonksiyonlarının uzayı olan zayıf Morrey uzayını göstereceğiz. Burada,

$$\|f\|_{WM_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WM_{p,\lambda}(B(x,r))} < \infty$$

şeklindedir.

Lemma 2.3.2 [20] $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $M_{p,\lambda} \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} = v_\lambda^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olup, burada $v_\lambda = |B(0,1)|$ dır.

İspat. $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq v_\lambda^{1/p} ||f||_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olur. Buradan $f \in M_{p,\lambda}$ ve

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} \leq v_\lambda^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

şeklindedir. $f \in M_{p,\lambda}$ olmak üzere Lebesgue yakınsaklık teoreminden (bkz. [32])

$$\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

olur. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq v_n^{-1/p} \|f\|_{M_{p,n}}$$

şeklindedir. Buradan $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dır ve

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq v_n^{-1/p} \|f\|_{M_{p,n}}$$

olur. ■

Lemma 2.3.3 [11] $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\alpha = \frac{n-\lambda}{p}$ için

$$\|f\|_{M_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/p'} \|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

dır ve buradan $M_{p,\lambda} \subset M_{1,n-p}$ olur. Burada $1/p + 1/p' = 1$ dır.

İspat. $f \in M_{p,\lambda}$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ ve $\alpha p = n - \lambda$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy &\leq \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{B(x,t)} dy \right)^{1/p'} \\ &= v_n^{1/p'} t^{n/p'} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} t^{\alpha-n} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy &\leq v_n^{1/p'} t^{\alpha-n/p} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= v_n^{1/p'} \left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq v_n^{1/p'} \|f\|_{M_{p,\lambda}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $f \in M_{1,n-\alpha}$ ve

$$\|f\|_{M_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/p'} \|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

şeklindedir ■

Tanım 2.3.4 $1 \leq p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $M_{p,\kappa}(\omega) \equiv M_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, \omega)$ ağırlıklı Morrey uzayı

$$\|f\|_{M_{p,\kappa}(\omega)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \omega\left(B(x,r)\right)^{-\frac{\kappa}{p}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))} < \infty$$

ile bütün lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WM_{p,\kappa}(\omega) \equiv WM_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, \omega)$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,\kappa}(\omega)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \omega\left(B(x,r)\right)^{-\frac{\kappa}{p}} \|f\|_{WL_{p,\omega}(B(x,r))} < \infty$$

olmak üzere bütün lokal integrallenebilir fonksiyonların zayıf ağırlıklı Morrey uzayı gösterilir.

2.4 $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

Morrey uzaylarının genişlemesi olan $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı 1991 yılında Mizuhara [21] tarafından tanımlanmış ve singüler integral operatörünün bu uzaylardaki sınırlılığı araştırılmıştır. 1994 yılında Nakai [26] tarafından harmonik analizde önemli bir yere sahip olan maksimal integral operatörünün, Riesz potansiyelinin ve singüler integral operatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı araştırılmıştır. $M_{p,\varphi}$ geneleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normlu hali ilk olarak 2009 yılında Guliyev [13] tarafından tanımlanmış ve harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığı Mizuhara ve Nakai'ye göre daha geniş şartlar altında araştırılmıştır. Ayrıca Guliyev [14], [15] tarafından $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında maksimal, potansiyel ve singüler integral operatörlerin sınırlılıkları ortaya koyduğu yeni metot ile elde edilmiştir.

$M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı Mizuhara [21] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.4.1 [21] $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ ile

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır. Burada $WL_p(B(x,r))$ uzayı ile

$$\|f\|_{WL_p(B(x,r))} \equiv \|f\chi_{B(x,r)}\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

şeklindeki bütün ölçülebilir f fonksiyonlarını içeren zayıf L_p uzayı ifade edilir.

Ayrıca doğal topoloji ile verilen $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayları her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için $f\chi_B \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_B \in WL_p(\mathbb{R}^n)$ şeklindeki bütün f fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda}{p}}$ için

$$L_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda}{p}}}, \qquad WL_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda}{p}}}$$

olduğu görülür.

$M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleşmiş normlu hali Guliyev [13] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.4.2 [13] $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ ile

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

normalleşmiş normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

normalleşmiş normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda}{p}}$ için

$$L_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}, \qquad WL_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

olduğu görülür.

2.5 Hardy-Littlewood Maksimal Operatör

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ilk olarak Hardy ve Littlewood tarafından bir boyutlu durumda, kompleks analizin uygulamalarına yönelik olarak tanımlanmıştır. Maksimal fonksiyon analizde pek çok operatörün sınırlılığında çok önemli bir role sahiptir. Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun farklı tanımları [9, 17, 34] tarafından aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.5.1 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{-1} \int_{B(0,r)} |f(x-y)|dy$$

ile tanımlanır. Bu fonksiyon $+\infty$ a eşit olabilir.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu yuvar yerine küp alınarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 2.5.2 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer B_r, $[-r,r]^n$ kübü ise $M'f$ merkezli Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{B_r} |f(x-y)|\, dy$$

ile tanımlanır. $n = 1$ iken M ve M' çakışır. Eğer $n > 1$ ise bu durumda

$$c_n M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_n M'f(x)$$

olacak şekilde sadece n ye bağlı c_n ve C_n sabitleri vardır. Bu eşitsizlikten dolayı M ve M' operatörleri uygun koşullara göre değiştirilebilir.

Tanım 2.5.3 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. M^*f merkezli olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M^*f(x) = \sup_{B(x_0,r)\ni x} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y)|dy$$

ile tanımlanır. Burada supremum x i içeren ve kenarları eksenlere paralel olan bütün $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarları üzerinden alınmaktadır. M ve M^* noktasal olarak eşdeğerdir.

M maksimal operatörü altlineer ve homojendir. Yani,

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \quad \text{ve} \quad M(\lambda f) = \lambda(Mf), \quad \forall \lambda \geq 0$$

sağlanır.

Aşağıdaki teorem M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün hemen hemen her yerde sonlu, zayıf $(1,1)$ ve $1 < p \leq \infty$ için (p,p) tipinden bir operatör olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2.5.4 [19]

(1) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) < \infty$ dır.

(2) $p = 1$ ise, bu durumda her $\lambda > 0$ ve $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \; Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

(3) $1 < p \leq \infty$ ise, her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n,p) > 0$ sabiti vardır.

Teorem 2.5.5 [6]

(i) $1 \leq p < \infty$ için

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, \omega(x)dx$$

zayıf (p,p) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\omega \in A_p$ olmasıdır.

(ii) $1 < p < \infty$ iken M, operatörünün $L_p(\omega)$ da sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\omega \in A_p$ olmasıdır.

Teorem 2.5.6 [4] $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{M_{p,\lambda}} \leq C\|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WM_{1,\lambda}} \leq C\|f\|_{M_{1,\lambda}}$$

sağlanır. Burada C, f den bağımsızdır.

Ayrıca $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $f \in M_{p,\lambda}$ için $\mathbb{R}^n$ de Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

Teorem 2.5.7 [18] $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $M_{p,\kappa}(\omega)$ üzerinde sınırlıdır. Eğer $p = 1$, $0 < \kappa < 1$ ve $\omega \in A_1$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ ve herhangi bir B küpü için

$$\omega\left(\{x \in B : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_{1,\kappa}(\omega)}\omega(B)^{\kappa}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.6 Singüler İntegral Operatör

Bu kısımda, singüler integral operatör ve sınırlılıkları hakkında, birçok matematikçi tarafından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.[6, 7, 9, 18]

Tanım 2.6.1 Singüler integraller $y' = y/|y|$ olmak üzere

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)dy$$

biçimindeki operatörlerdir. Burada Ω, $\mathbb{R}^n$ deki S^{n-1} birim küresi üzerinde tanımlanmış olup sıfır ortalamalı, integrallenebilir bir fonksiyondur.

Tanım 2.6.2 $C_\infty^c(\mathbb{R}^n)$ den $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ tanımlı T operatörü aşağıdaki şartları sağlarsa Calderón-Zygmund operatörü olarak adlandırılır.

(a) T, $L_2(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı lineer operatördür.

(b) Her $f \in L_\infty^c(\mathbb{R}^n)$, için

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy \qquad x \in \{\text{supp} f\}^c,$$

şeklinde bir K çekirdeği vardır.

(c) K çekirdeği $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x \neq y$ olduğunda $C > 0$ ve bazı $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} |K(x,y)| &\leq \frac{C}{|x-y|^n}, \\ |K(x+h,y) - K(x,y)| &\leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \\ |K(x,y+h) - K(x,y)| &\leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Calderón-Zygmund eşitsiziklerini sağlar. Burada $|h| < |x-y|/2$ dır; [31].

Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır ve zayıf $(1,1)$ tiplidir.

Teorem 2.6.3 ([6],[9]) Eğer $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ ise T Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\omega)$ üzerinde sınırlıdır. Eğer $p = 1$ ve $\omega \in A_1$ ise her $\lambda > 0$ için

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_1(\omega)}$$

ifadesi sağlanır.

Teorem 2.6.4 [7] $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için T Calderón-Zygmund operatörü $M_{p,\lambda}$ üzerinde sınırlıdır. Ayrıca $p = 1$ için $M_{1,\lambda}$ uzayından $WM_{1,\lambda}$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 2.6.5 [18] $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda T Calderón-Zygmund operatörü $M_{p,\kappa}(\omega)$ üzerinde sınırlıdır. Eğer $p = 1$, $0\kappa < 1$ ve $w \in A_1$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ ve herhangi bir B küpü için

$$\omega\left(\{x \in B : |Tf(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_{1,\kappa}(\omega)}\omega(B)^{\kappa}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.7 Riesz Potansiyeli

Riesz potansiyeli, Macar matematikçi Marcel Riesz tarafından ortaya koyulmuş ve matematik dünyasında önemli bir konu haline gelmiştir. Riesz potansiyelleri yardımıyla eliptik ve hipoeliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için ön eşitsizlikler elde edilebilmektedir.

Tanım 2.7.1 (**Riesz Potansiyeli**) $0 < \alpha < n$ için I_α Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki ispatsız olarak verilen teorem I_α Riesz potansiyelinin $0 < \alpha < n$ için (L_p, L_q) sınırlılığını ifade etmektedir.

Teorem 2.7.2 [9] $1 \leq p < q < \infty$, $0 < \alpha < n$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

ve $p = 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde $C = C(n, \alpha, p) < \infty$ sabiti vardır ve burada $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ biçimindedir.

Aşağıdaki ispatsız olarak verilen teoremler I_α Riesz potansiyelinin $0 < \alpha < n$ ve $\omega \in A_{p,q}$ için $(L_p(\omega^p), L_q(\omega^q))$ sınırlılığını ifade etmektedir.

Teorem 2.7.3 [25] $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$, $1/p - 1/q = \alpha/n$ ve $\omega \in A_{p,q}$ olsun. Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $p > 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_{q(\omega^q)}} \leq C\|f\|_{L_p(\omega^p)}$$

ve $p = 1$, $q = n/(n - \alpha)$, $\omega \in A_{1,q}$ ve $\lambda > 0$ için

$$\omega^q(\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^q}\|f\|^q_{L_{1(\omega)}}$$

olacak şekilde λ ve f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır.

Teorem 2.7.4 ([1], [29])

$0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$ ve $1/q < 1/p - \alpha/n$ olsun. Bu durumda $0 < \lambda < n$ için I_α Riesz potansiyeli $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 2.7.5 [18] $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $1/q < 1/p - \alpha/n$, $0 < \kappa < p/q$ ve $\omega \in A_{p,q}$ olsun. Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $p > 1$ için $L_{p,\kappa}(\omega^p, \omega^q)$ uzayından $L_{q,\kappa q/p}(\omega^p, \omega^q)$ uzayına sınırlıdır. Eğer $p = 1$ ise herhangi bir B küpü için

$$\omega^q(\{x \in B : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^q}\|f\|^q_{L_{1,\kappa}(\omega,\omega^q)}\omega^q(B)^{\kappa q}$$

olacak şekilde λ ve f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır.

Aşağıdaki teorem 1994 yılında Nakai [26] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.7.6 [26] $1 \leq p < \infty$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olsun. $r \leq t \leq 2r$ iken $c \geq 1$ sayısı t, r, $x \in \mathbb{R}^n$ den, C sayısı da x ve r den bağımsız olmak üzere $\varphi(x, r)$

$$c^{-1}\varphi(x,r) \leq \varphi(x,t) \leq c\varphi(x,r)$$

ve

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq C\varphi(x,r)^p$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda I_α operatörü $p > 1$ için $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında ve $M_{1,\varphi}$ uzayından $WM_{1,\varphi}$ uzayına sınırlıdır.

3 HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYINDA SINIRLILIKLARI

Bu bölümde operatörlerin sınırlılıkları ile ilgili özellik ve sonuçlara yer verilmiş ve $r \leq t \leq 2r$ olmak üzere, $\varphi(x,r)$ fonksiyonu $C \geq 1$; t ve r ye bağlı olmayan bir sabit ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$C^{-1}\varphi(x,r) \leq \varphi(x,t) \leq C\varphi(x,r) \tag{3.1}$$

koşulunun sağlandığı ve yine $C > 0; r$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ ye bağlı olmayan bir sabit olmak üzere maksimal operatörler için

$$\int_r^\infty \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq C\varphi(x,r)^p \tag{3.2}$$

ve potansiyel operatörü için

$$\int_r^\infty t^{\alpha p}\varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq Cr^{\alpha p}\varphi(x,r)^p \tag{3.3}$$

koşullarının sağlandığı kabul edilmiştir.

3.1 Maksimal Operatörün Genelleştirilmiş Morrey Uzayında Sınırlılığı

Bu bölümde, M maksimal operatörünün genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığı Guliyev [11] tarafından verilmiş olan lokal Guliyev eşitsizliği yardımıyla gösterilmiştir. Burada kullanılan $\varphi(x;r), \varphi_1(x;r)$ ve $\varphi_2(x;r)$ fonksiyonları $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ da negatif olmayan, ölçülebilir fonksiyonlardır.

Teorem 3.1.1 [11]**(Maksimal Operatör için Lokal Guliyev Eşitsizliği)**

$1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr \tag{3.4}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,t))} \leq Ct^n \int_t^\infty r^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x,r))} dr, \tag{3.5}$$

sağlanır. Burada C, f e bağlı olmayan bir sabittir, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ dır.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. f yi

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2t)}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{B(x,2t)}}(y), \quad t > 0, \tag{3.6}$$

şeklinde gösterelim ve

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,t))} \leq \|Mf_1\|_{L_p(B(x,t))} + \|Mf_2\|_{L_p(B(x,t))}.$$

olsun.

$1 < p < \infty$ için M operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ deki sınırlılığından

$$\|Mf_1\|_{L_p(B(x,t))} \leq \|Mf_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L_p(B(x,2t))}, \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada C, f den bağımsız bir sabittir. (3.7) den

$$\begin{aligned} \|Mf_1\|_{L_p(B(x,t))} &\leq Ct^{\frac{n}{p}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}dr \\ &\leq Ct^{\frac{n}{p}} \int_{t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}dr \end{aligned} \tag{3.8}$$

ve $\|f\|_{L_p(B(x,2t))}$ nin t ye göre azalmayan olmasından kolayca elde ederiz, öyleki (3.7) in sağ tarafındaki $\|f\|_{L_p(B(x,2t))}$ den (3.8) eşitsizliği görülür.

$$\int_{\complement_{B(x,t)}} |x-y|^{-n}|f(y)|dy \leq C\int_t^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))}ds, \quad 0 < t < \infty. \tag{3.9}$$

Bu sonuca, $\beta > \frac{n}{p}$ seçerek aşağıdaki gibi devam edelim

$$\begin{aligned} &\int_{\complement_{B(x,t)}} |x-y|^{-n}|f(y)|dy \\ &\qquad \leq \beta \int_{\complement_{B(x,t)}} |x-y|^{-n+\beta}|f(y)|dy \int_{|x-y|}^{\infty} s^{-\beta-1}ds \\ &\qquad = \beta \int_t^{\infty} s^{-\beta-1}ds \int_{\{y\in\mathbb{R}^n: t\leq|x-y|\leq s\}} |x-y|^{-n+\beta}|f(y)|dy \\ &\qquad \leq C\int_t^{\infty} s^{-\beta-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))}\||x-y|^{-n+\beta}\|_{L_{p'}(B(x,s))}ds. \end{aligned}$$

$z \in B(x,t)$ için

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &= \sup_{r>0} |B(z,r)|^{-1}\int_{B(z,r)} |f_2(y)|dy \\ &\leq C\sup_{r\geq 2t} \int_{(\complement_{B(x,2t)})\cap B(z,r)} |y-z|^{-n}|f(y)|dy \\ &\leq C\sup_{r\geq 2t} \int_{(\complement_{B(x,2t)})\cap B(z,r)} |x-y|^{-n}|f(y)|dy \\ &\leq C\int_{\complement_{B(x,2t)}} |x-y|^{-n}|f(y)|dy. \end{aligned}$$

elde ederiz. (3.9) yoluyla, C, x ve r den bağımsız olmak üzere

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &\leq C \int_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \\ &\leq C \int_{t}^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds, \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise, $Mf_2(z)$ fonksiyonunun z ye bağlı olmayan, x ve t sabitleriyle ifadesidir. Sonra

$$\|Mf_2\|_{L_p(B(x,t))} \leq C \int_{t}^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \, \|1\|_{L_p(B(x,t))}. \tag{3.10}$$

$\|1\|_{L_p(B(x,t))} = Ct^{\frac{n}{p}}$ den, (3.8) ve (3.10) den (3.4) elde edilir.

$p = 1$ ve $B = B(x, r)$ yuvarı için açıktır.

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,t))} \leq \|Mf_1\|_{WL_1(B(x,t))} + \|Mf_2\|_{WL_1(B(x,t))}.$$

M operatörünün $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\|Mf_1\|_{WL_1(B(x,t))} \leq C\|f\|_{L_1(B(x,2t))},$$

burada C, x ve t ye bağlı olmayan sabittir.

Dikkat edilecek olursa (3.10) eşitsizliği $p = 1$ olması durumunda doğrudur. Böylece (3.10) den, (3.5) elde edilir. ■

Teorem 3.1.2 [11](**Guliyev Teoremi)** $1 \leq p < \infty$ olsun. $\varphi_1(x,r)$ ve $\varphi_2(x,r)$ fonksiyonları

$$\int_{t}^{\infty} \varphi_1(x,r) \frac{dr}{r} \leq C \varphi_2(x,t) \tag{3.11}$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve t ye bağlı olmayan bir sabittir. Bu durumda, $p > 1$ için M maksimal operatörü $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için, $M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Aşağıda verilen teorem Nakai [26] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.3 [26] $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(x,r)$, (3.1) ve (3.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için M ve T operatörleri $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı ve $p = 1$ için $M_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $f \in M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.1.1 den

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{M_{p,\varphi_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t)t^{-\frac{n}{p}}\|Mf\|_{L_p(B(x,t))}\\ &\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t)\int_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}dr.\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{M_{p,\varphi_2}} &\leq C\|f\|_{M_{p,\varphi_1}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)}\int_t^\infty \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r}\\ &\leq C\|f\|_{M_{p,\varphi_1}}\end{aligned}$$

olup $1 < p < \infty$ için (3.11) den ispat tamamlanır.

$p = 1$ ve $f \in M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.1.1 den

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{WM_{1,\varphi_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t)t^{-n}\|Mf\|_{WL_1(B(x,t))}\\ &\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t)\int_t^\infty r^{-n-1}\|f\|_{L_1(B(x,r))}dr.\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{WM_{1,\varphi_2}} &\leq C\|f\|_{M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)}\int_t^\infty \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r}\\ &\leq C\|f\|_{M_{1,\varphi_1}}\end{aligned}$$

$p = 1$ için (3.11) den ispat tamamlanır. ■

3.2 Riesz Potansiyelinin Genelleştirilmiş Morrey Uzayında Sınırlılığı

Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır. I_α Riesz potansiyelinin $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı iki farklı yönden Spanne ve Adams tipi sınırlılık olarak gösterilmiştir. Bunun için Guliyev [11] tarafından verilmiş olan iki farklı teorem kullanılmıştır.

Teorem 3.2.1 [11]**(Lokal Guliyev Eşitsizliği)**

$$1 \leq p < \infty, \quad 0 < \alpha < \frac{n}{p}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $p > 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \leq C t^{\frac{n}{q}} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr \tag{3.12}$$

ve $p = 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{WL_q(B(x,t))} \leq C t^{\frac{n}{q}} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_1(B(x,r))} dr, \tag{3.13}$$

sağlanır. Burada C, f e bağlı olmayan bir sabit, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ dır.

İspat. Teorem 3.1.1 ün ispatında, f fonksiyonunu (3.6) deki gibi alırsak

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha f_1(x) + I_\alpha f_2(x).$$

olur. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. I_α operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f_1\|_{L_q(B(x,t))} &\leq \|I_\alpha f_1\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L_p(B(x,2t))}.\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|I_\alpha f_1\|_{L_q(B(x,t))} \leq C\|f\|_{L_p(B(x,2t))},$$

olur, burada C, f den bağımsız sabittir.

$$\|f\|_{L_p(B(x,2t))} \leq C t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr,$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\|I_\alpha f_1\|_{L_q(B(x,t))} \leq C t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr. \tag{3.14}$$

elde edilir.

$|x - z| \leq t$, $|z - y| \geq 2t$ olduğunda, $\frac{1}{2}|z - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|z - y|$ olur, ve buradan

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f_2\|_{L_q(B(x,t))} &\leq \left\| \int_{\complement_{B(x,2t)}} |z - y|^{\alpha - n} f(y) dy \right\|_{L_q(B(x,t))} \\ &\leq C \int_{\complement_{B(x,2t)}} |x - y|^{\alpha - n} |f(y)| dy \|\chi_{B(x,t)}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

olur.

$\beta > \frac{n}{q}$ seçersek

$$\begin{aligned}
\int_{\complement_{B(x,2t)}} & |x-y|^{\alpha-n}|f(y)|dy \\
&= \beta \int_{\complement_{B(x,2t)}} |x-y|^{\alpha-n+\beta}|f(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} s^{-\beta-1}ds\right) dy \\
&= \beta \int_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \left(\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:2t\le|x-y|\le s\}} |x-y|^{\alpha-n+\beta}|f(y)|dy\right) ds \\
&\le C \int_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))}\||x-y|^{\alpha-n+\beta}\|_{L_{p'}(B(x,s))}ds \\
&\le C \int_{2t}^{\infty} s^{\alpha-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))}ds.
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan

$$\|I_\alpha f_2\|_{L_q(B(x,t))} \le C t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{q}-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))}ds \tag{3.15}$$

(3.14) ile (3.12) sağlar.

$p = 1$ ve $B = B(x,r)$ yuvarı için

$$\|I_\alpha f\|_{WL_1(B(x,t))} \le \|I_\alpha f_1\|_{WL_1(B(x,t))} + \|I_\alpha f_2\|_{WL_1(B(x,t))}.$$

olur.

I_α operatörünün $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\|I_\alpha f_1\|_{WL_1(B(x,t))} \le C\|f\|_{L_q(B(x,2t))},$$

elde ederiz, burada C, x ve t ye bağlı olmayan bir sabittir.

Dikkat edilecek olursa (3.15) eşitsizliği $p = 1$ için doğrudur. Dolayısıyla (3.15) den (3.13) elde edilir.

■

Teorem 3.2.2 [11] **(Guliyev Teoremi)** $1 < p < \infty, 0 < \alpha < n/p, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\varphi_1(x,r)$ ve $\varphi_2(x,r)$ fonksiyonları

$$\int_r^{\infty} t^{\alpha}\varphi_1(x,t)\frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r) \tag{3.16}$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve r ye bağlı olmayan bir sabittir.
Bu durumda, $p > 1$ için M_α ve I_α operatörleri $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için, $M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $f \in M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.2.1 den

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f\|_{M_{q,\varphi_2}} &\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr \\ &\le C\|f\|_{M_{p,\varphi_1}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)} \int_t^\infty r^\alpha \varphi_1(x,r) \frac{dr}{r},\end{aligned}$$

elde edilir. $1 < p < \infty$ için (3.16) den ispat tamamlanır.

$p = 1$ ve $f \in M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.2.1 den

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f\|_{WM_{q,\varphi_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t) t^{-\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_{WL_q(B(x,t))} \\ &\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t) \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_1(B(x,r))} dr.\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f\|_{WM_{q,\varphi_2}} &\le C\|f\|_{M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)} \int_t^\infty r^\alpha \varphi_1(x,r) \frac{dr}{r} \\ &\le C\|f\|_{M_{1,\varphi_1}}\end{aligned}$$

olup, $p = 1$ için (3.16) den ispat tamamlanır. ■

$\varphi_1(x,r) = \varphi_2(x,r) = \varphi(x,r)$ olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.3 $1 \le p < \infty, 0 < \alpha < n/p, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\varphi(x,t)$, (3.1) ve (3.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda, $p > 1$ için M_α ve I_α operatörleri $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için, $M_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 3.2.4 [11] $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$|I_\alpha f(x)| \leq Ct^\alpha Mf(x) + C\int_t^\infty r^{\alpha-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}dr, \tag{3.17}$$

olur. Burada C, f, x ve t den bağımsız bir sabitdir.

İspat. Teorem 3.1.1 ün ispatında, f fonksiyonunu (3.6) şeklinde alırsak

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha f_1(x) + I_\alpha f_2(x).$$

olur. $I_\alpha f_1(x)$ için, Hedberg yönteminden (bkz. [33], p. 354)

$$|I_\alpha f_1(x)| \leq C_1 t^\alpha Mf(x).$$

elde ederiz. $I_\alpha f_2(x)$ için

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f_2(x)| &\leq \int_{\complement_{B(x,2t)}} |x-y|^{\alpha-n}|f(y)|dy \\
&\leq C\int_{\complement_{B(x,2t)}} |f(y)|dy \int_{|x-y|}^\infty r^{\alpha-n-1}dr \\
&\leq C\int_{2t}^\infty \left(\int_{2t<|x-y|<r} |f(y)|dy\right) r^{\alpha-n-1}dr \\
&\leq C\int_t^\infty r^{\alpha-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}dr,
\end{aligned}$$

(3.17) ispatlanır. ■

Teorem 3.2.5 [11] $1 \leq p < \infty, 0 < \alpha < n/p, \varphi(x,t)$ (3.11) koşulunu ve

$$t^\alpha\varphi(x,t) + \int_t^\infty r^\alpha\varphi(x,r)\frac{dr}{r} \leq C\varphi(x,t)^{p/q} \tag{3.18}$$

koşulunu sağlasın, burada $q \geq p$ ve $C, x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ a bağlı olmayan bir sabittir. Ayrıca kabul edelimki, hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x,r)$ için $\varphi(x,\cdot) : [0,\infty) \to [a,\infty)$ koşulunu sağlayacak biçimde herhangi bir $a = a(x) > 0$ örten fonksiyonu vardır. Bu durumda, M_α ve I_α operatörleri, $p > 1$ için $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,\varphi^{p/q}}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için, $M_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{1/q}}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $1 \leq p < \infty$ ve $f \in M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.2.4 den

$$|I_\alpha f(x)| \leq Cr^\alpha Mf(x) + C\|f\|_{M_{p,\varphi}} \int_r^\infty t^\alpha(x,t)\frac{dt}{t}.$$

elde ederiz. (3.18) den $r^\alpha\varphi(x,r) \leq C\varphi(x,r)^{\frac{p}{q}}$ olur. Ayrıca (3.18) kullanılarak

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\varphi(x,r)^{\frac{p}{q}-1} Mf(x) + C\varphi(x,r)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p,\varphi}}.$$

elde ederiz. $\varphi(x,r)$ örten olduğundan,

$$\varphi(x,r) = Mf(x)\,\|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}^{-1}$$

olacak şekilde $r > 0$ seçebiliriz, farzedelimki f 0 a özdeş olmasın. Böylece, her $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$|I_\alpha f(x)| \le C(Mf(x))^{\frac{p}{q}}\,\|f\|_{M_{p,\varphi}}^{1-\frac{p}{q}}.$$

sağlanır.

Teorem 3.1.2 deki (3.11) koşulu nedeniyle M maksimal operatörünün $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ deki sınırlılığından teorem ispatlanır.

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi(x,t)^{-\frac{p}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\le C\,\|f\|_{M_{p,\varphi}}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi(x,t)^{-\frac{p}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mf\|_{L_p(B(x,t))}^{\frac{p}{q}} \\
&\le C\,\|f\|_{M_{p,\varphi}},
\end{aligned}$$

eğer $1 < p < q < \infty$ ise,

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_{WL_q(B(x,t))} \\
&\le C\,\|f\|_{M_{1,\varphi}}^{1-\frac{1}{q}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mf\|_{WL_1(B(x,t))}^{\frac{1}{q}} \\
&\le C\,\|f\|_{M_{1,\varphi}},
\end{aligned}$$

eğer $p = 1 < q < \infty$ ise,

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{WM_{q,w^{\frac{1}{q}}}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} w(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}}\, \|I_\alpha f\|_{WL_{q(B(x,t))}} \\
&\le C\,\|f\|_{M_{p,w}}^{1-\frac{1}{q}} \sup_{x\in R^n, t>0} w(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}}\, \|Mf\|_{WL_{1(B(x,t))}}^{\frac{1}{q}} \\
&\le C\,\|f\|_{M_{p,w}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

■

3.3 Singüler İntegral Operatörlerinin Genelleştirilmiş Morrey Uzayında Sınırlılığı

Bu bölümde, singüler integral operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olmasından yararlanarak $M_{p,\varphi}$ uzayında sınırlılığı hakkındaki teorem ve sonuçlara yer verilmiştir.

Teorem 3.3.1 [11] **(Singüler İntegral Operatörleri için Lokal Guliyev Eşitsizliği)**

$1 \le p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $p > 1$ için

$$\|Tf\|_{L_p(B(x,t))} \le Ct^{\frac{n}{p}} \int_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr \tag{3.19}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Tf\|_{WL_1(B(x,t))} \le Ct^{n} \int_t^{\infty} r^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x,r))} dr, \tag{3.20}$$

elde edilir. Burada C, f ye bağlı olmayan bir sabit, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ dır.

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. f fonksiyonu (3.6) deki gibi ifade edildiğinde

$$\|Tf\|_{L_p(B(x,t))} \le \|Tf_1\|_{L_p(B(x,t))} + \|Tf_2\|_{L_p(B(x,t))}$$

elde edilir. T operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ deki sınırlılığından, $1 < p < \infty$ için

$$\|Tf_1\|_{L_p(B(x,t))} \le \|Tf_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

elde edilir, böylece

$$\|Tf_1\|_{L_p(B(x,t))} \le C\|f\|_{L_p(B(x,2t))}$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\|f\|_{L_p(B(x,t))} \le Ct^{\frac{n}{p}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr,$$

olup

$$\|Tf_1\|_{L_p(B(x,t))} \le Ct^{\frac{n}{p}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr. \tag{3.21}$$

elde edilir. $\|Tf_2\|_{L_p(B(x,t))}$ hesaplamak için,

$$|Tf_2(z)| \le C \int l_{\complement_{B(x,2t)}} \frac{|f(y)|\, dy}{|y-z|^n}$$

eşitsizliği göz önüne alınır, burada $z \in B(x,t)$ ve $|x-z| \leq t$, $|z-y| \geq 2t$ eşitsizliklerinden $\frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$ dersek, ve buradan

$$\|Tf_2\|_{L_p(B(x,t))} \leq C \int_{\complement_{B(x,2t)}} |x-y|^{-n}|f(y)|dy\|\chi_{B(x,t)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.22}$$

elde edilir. Böylece (3.9) eşitsizliğinden,

$$\|Tf_2\|_{L_p(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}dr. \tag{3.23}$$

olur. (3.21) ve (3.23) den (3.19) yi elde ederiz.

$p = 1$ ve $B(x,r)$ yuvarı için

$$\|Tf\|_{WL_1(B(x,t))} \leq \|Tf_1\|_{WL_1(B(x,t))} + \|Tf_2\|_{WL_1(B(x,t))}.$$

olur. T operatörünün $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\|Tf_1\|_{WL_1(B(x,t))} \leq C\|f\|_{L_1(B(x,2t))},$$

elde edilir, burada C, x ve t den bağımsız sabittir.

(3.23) eşitsizliği $p = 1$ durumu için doğrudur. Böylece (3.10) den, (3.20) eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 3.3.2 [11] $1 \leq p < \infty$ olsun. $\varphi_1(x,t)$ ve $\varphi_2(x,r)$ fonksiyonları (3.16) koşulunu sağlasın. $p > 1$ için T singüler integral operatorü $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için T singüler integral operatorü $M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $f \in M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.3.1 den

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_{p,\varphi_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t)t^{-\frac{n}{p}}\|Tf\|_{L_p(B(x,t))} \\ &\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t) \int_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}dr.\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_{p,\varphi_2}} &\leq C\|f\|_{M_{p,\varphi_1}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)} \int_t^{\infty} \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r} \\ &\leq C\|f\|_{M_{p,\varphi_1}}\end{aligned}$$

$1 < p < \infty$ için (3.16) dan ispat tamamlanır.

$p = 1$ ve $f \in M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.3.1 den

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{WM_{1,\varphi_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t)t^{-n}\|Tf\|_{WL_1(B(x,t))} \\ &\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t)\int_t^\infty r^{-n-1}\|f\|_{L_1(B(x,r))}dr.\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{WM_{1,\varphi_2}} &\leq C\|f\|_{M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)}\int_t^\infty \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r} \\ &\leq C\|f\|_{M_{1,\varphi_1}}\end{aligned}$$

$p = 1$ için (3.16) dan ispat tamamlanır. ■

$\varphi_1(x,r) = \varphi_2(x,r) = \varphi(x,r)$ olması durumunda aşağıdaki sonuçlar Nakai [26] tarafından elde edilmiştir.

Sonuç 3.3.3 $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(x,t)$, (3.1) ve (3.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda, $p > 1$ için T operatörü $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır ve $p = 1$ için, $M_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 3.3.4 $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçilmesi durumunda $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı elde edildiği için $1 \leq p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ durumunda T operatörü $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayında ve $p = 1$ durumunda da $M_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

KAYNAKLAR

[1] Adams, D.R. *A note on Riesz potentials*, Duke Math., 42 **1975**, 765-778.

[2] Akbulut, A.; Guliyev, V.S.; Mustafayev, R. *On Boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces*, Mathematica Bohemica, **2012**, 137 1, 27-43.

[3] Calderón, A.P.; Zygmund, A. *Singular integral operators and differential equations*, American Journal of Mathematics, **1957**, 79, 4, 901-921.

[4] Chiarenza, F.; Frasca, M. *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Math. Appl. **1987**, 7, 7, 273-279.

[5] Coifman, R.; Fefferman C. *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **1974**, 51, 241-250.

[6] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode. Island, **2000**, 29.

[7] Fazio, G.Di.; Ragusa, M.A.; *Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients*, J. Funct. Anal., **1993**, 112, 241-256.

[8] Garcia-Cuerva, J.; Rubio de Francia, J.L. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Math. 116, Amsterdam, **1985**.

[9] Grafakos, L. *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, **2004**.

[10] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis*, Axler, S.; Ribet, K.A., Springer, NY USA, **2008**.

[11] Guliyev, V.S. *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces*, J. Inequal. Appl., (2009)**2009**, Art. ID 503948, 20.

[12] Guliyev, V.S.; *Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators*, Eurasian Math. J., **2012**, 3, 3, 33-61.

[**13**] Guliyev, V.S. *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in* $\mathbb{R}^n$, Doctoral degree dissertion, Mat. Inst. Steklov, Moscow, **1994**, 329.

[**14**] Guliyev, V.S.; Aliyev, S.S.; Karaman, T. *Boundedness of a class of sublinear operators and their commutators on generalized Morrey spaces*, Abstract and Applied Analysis, **2011** , Article ID 356041, 18.

[**15**] Guliyev, V.S.; Aliyev, S.S.; Karaman, T.; Shukurov, P.S. *Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey spaces*, Integral. Equ. Oper. Theory, **2011**, 71, 3, 327-355.

[**16**] Guliyev, V.S.; Shukurov, P.S. *On the boundedness of the fractional maximal operator, Riesz potential and their commutators in generalized Morrey spaces*, Advances in harmonic analysis and operator theory, **2013**, 175-199, Oper. Theory Adv. Appl., 229, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel.

[**17**] Hardy, G. H.; Littlewood, L. E. *A maximal theorem with functio theoretic applications*, Acta Math., **1930**, 54, 81-116.

[**18**] Komori, Y.; Shirai, S. *Weighted Morrey spaces and a singular integral operator*, Math. Nachr. **2009**, 282, 2, 219-231.

[**19**] Krantz, S.G.; Parks, H. R. *Geometric integration theory.* 1st ed. Birkhäuser Boston, **2008**.

[**20**] Long, R.L.; *The spaces generated by blocks*, Sci. Sinica, Ser.A, 27, **1984**, 16-26.

[**21**] Mizuhara, T. *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces*, Harmonik analysis (Sendai, 1990), ICM-90 Satellite Conference Proceedings, **1991**, 183-189.

[**22**] Morrey, C.B. *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **1938**, 43, 126-166.

[**23**] Muckenhoupt, B. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Soc., **1972**, 165, 207-226.

[24] Muckenhoupt, B.; Wheeden, R. *Weighted bounded mean oscilation and the Hilbert transform*, Studia Math., **1976**, 54, 221-237.

[25] Muckenhoupt, B.; Wheeden, R. *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **1974**, 192, 261-274.

[26] Nakai, E. *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr. **1994**, 166, 95-103.

[27] Neri U, *Singular Integrals*, Springer Verlag, New York, **1971**.

[28] Palagachev, D.K.; Softova, L.G. *Singular İntegral Operators, Morrey Spaces and Fine Regularity of Solutions to PDE's*, Potential Analysis, **2004**, 20, 237-263.

[29] Peetre, J. *On the theorey of* $L_{p,\lambda}$ *spaces*, J. Funct. Anal., **1969**, 4, 71-87.

[30] Pick, L.; Kufner, A.; John, O.; Fucik, S. *Function Spaces*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, Volume 1, Second edition, **2013**, 72-73.

[31] Shen, Z., L_p *estimates for Schrödinger operators with certain potentials*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **1995**, 45, 2, 513-546.

[32] Stein, E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, **1970**, 304.

[33] Stein, E.M. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, **1993**.

[34] Stein, E.M. *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, **1970**.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Nihat Tüysüz
Doğum Yeri	:	Aksaray/Ortaköy
Doğum Tarihi	:	1976
Yabancı Dili	:	İngilizce

İletişim Bilgileri

Adres	:	Kırşehir Yusuf Demir Bilim ve Sanat Merkezi Kırşehir
E-mail	:	nihatemine@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lisans	:	Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü