T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENİŞLETİLMİŞ BETA FONKSİYONU İLE TANIMLANAN BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Özlem AYAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR - 2014

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENİŞLETİLMİŞ BETA FONKSİYONU İLE TANIMLANAN BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Özlem AYAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

KIRŞEHİR - 2014

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Üye:
Yrd. Doç. Dr. M. Baki YAĞBASAN

Üye:
Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölüm, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı önbilgileri ve tanımları içermektedir.

Üçüncü bölümde, genişletilmiş Beta fonksiyonunun tanımı verilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonun bazı özellikleri ve diğer fonksiyonlarla olan ilişkileri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, genişletilmiş Beta fonksiyonu yardımıyla tanımlanan genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu, genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu, genişletilmiş Appell hipergeometrik fonksiyonları ve bu fonksiyonların sağladığı bazı özellikler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Hipergeometrik fonksiyonlar, Appell hipergeometrik fonksiyonları, Genişletilmiş Beta fonksiyonu.

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, deals with some preliminaries and auxiliary definitions which will be used on the other chapters.

In the third chapter, definition of the extended Beta function are presented. Also, connections with other functions and some properties of this function are examined.

In the fourth chapter, extended Gauss hypergeometric function, extended confluent hypergeometric function, extended Appell hypergeometric functions which is defined in terms of extended Beta function and some properties of them are given.

Keywords: Gamma function, Beta function, Hypergeometric functions, Appell hypergeometric functions, extended Beta function.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA' ya ve değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ ile Yrd. Doç. Dr. M. Baki YAĞBASAN'a en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Gerek öğrenim hayatım süresince, gerekse tüm hayatım boyunca desteklerini ve sabırlarını esirgemeyen, haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim çok değerli aileme ve Orkun ORAL'a teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

Bu çalışma, Ahi Evran Üniversitesi tarafından PYO-FEN.4003.12.004 proje numarası ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
$\Gamma_p(x)$	: Genişletilmiş Gamma fonksiyonu
$B(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$B_p(x,y)$	: Genişletilmiş Beta fonksiyonu
${}_2F_1(a,b;c;z)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$F_p(a,b;c;z)$	: Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$\Phi(a;c;z)$	: Birinci çeşit konfluent hipergeometrik fonksiyonu
$\Phi_p(a;c;z)$	: Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu
$\Psi(a;c;z)$	: İkinci çeşit konfluent hipergeometrik fonksiyonu
$F_1(a,b,c;d;x,y)$	: Birinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu
$F_2(a,b,c;d,e;x,y)$	: İkinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu
$F_3(a,b,c,d;e;x,y)$	: Üçüncü çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu
$F_4(a,b;c,d;x,y)$	: Dördüncü çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu
$F_{1,p}(a,b,c;d;x,y)$	: Genişletilmiş birinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu
$F_{2,p}(a,b,c;d,e;x,y)$	: Genişletilmiş ikinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu
$(\lambda)_\nu$	: Pochhammer sembolü
$K_\nu(z)$	: Macdonald fonksiyonu
$W_{\lambda,\mu}(z)$	: Whittaker fonksiyonu
$L_n^{(\alpha)}(z)$	: Laguerre polinomları
$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$	: İki değişkenli Lagrange polinomları

1 GİRİŞ

Leonhard Euler (1707-1783) tarafından tanımlanan birinci çeşit Euler integrali olarak da bilinen Beta fonksiyonu, özel fonksiyonların en önemlilerinden biridir.

Bu fonksiyon günümüze kadar bir çok matematikçinin ilgi odağı olmuştur. Özellikle son yıllarda bu fonksiyonun genişletmeleri ile ilgili oldukça önemli çalışmalar yapılmıştır [4-6, 14-18, 24-26].

Bu tezde, 1997 yılında Chaudhry ve ark. [4] tarafından

$$B_p(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt$$
$$(\mathrm{Re}(p) > 0;\ p = 0\ \text{ için }\ \mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0)$$

şeklinde tanımlanan genişletilmiş Beta fonksiyonu ele alınmış ve aşağıdaki çalışmalar incelenmiştir.

Miller (1998) genişletilmiş Beta fonksiyonunun klasik Beta fonksiyonu, Whittaker fonksiyonu, Laguerre polinomları ve çarpımlarını içeren seri temsillerini elde etmiştir.

Chaudhry ve ark. (2004) genişletilmiş Beta fonksiyonu yardımıyla genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonunu ve genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonunu tanımlamışlardır. Ayrıca bu fonksiyonların integral gösterimlerini, türev formüllerini, bazı dönüşüm formüllerini ve rekürans ilişkilerini incelemişlerdir.

Özarslan ve Özergin (2010) genişletilmiş Beta fonksiyonu yardımıyla Appell' in ilk iki fonksiyonunun genişletmelerini ve integral gösterimlerini vermişlerdir.

Özarslan (2012) yukarıda bahsedilen genişletilmiş hipergeometrik fonksiyonların Gauss hipergeometrik fonksiyonu, konfluent hipergeometrik fonksiyonu, Whittaker fonksiyonu, Lagrange polinomlarını, Laguerre polinomlarını ve çarpımlarını içeren seri temsillerini sunmuştur.

2 TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER

2.1 GAMMA FONKSİYONU

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır ve

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \tag{2.2}$$

reküırans bağıntısını sağlar.

Bu rekürans bağıntısı kullanılarak, gamma fonksiyonu $z = 0, -1, -2, \ldots$ hariç reel kısmı negatif olan kompleks sayılara

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}$$

$$(\mathrm{Re}(z) > -n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-; \quad \mathbb{Z}_0^- = \mathbb{Z}^- \cup \{0\})$$

eşitliği yardımıyla genişletilir [1,13].

2.2 BETA FONKSİYONU

Beta fonksiyonu

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1} dt \tag{2.3}$$

$$(\mathrm{Re}(x) > 0, \quad \mathrm{Re}(y) > 0)$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Bu tanıma eş değer olarak

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}\,(\cos\theta)^{2y-1} d\theta$$

$$(\mathrm{Re}(x) > 0, \quad \mathrm{Re}(y) > 0)$$

ve

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$$

$$(\mathrm{Re}(x) > 0, \quad \mathrm{Re}(y) > 0)$$

yazılabilir. Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi ise

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.4}$$

$$(x, y \neq 0, -1, -2, ...)$$

şeklindedir. Ayrıca (2.4) eşitliğinden kolaylıkla görülebilir ki

$$B(x,y) = B(y,x)$$

olup, bu eşitlik Beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır [1,22].

Tanım 2.1 $\lambda \in \mathbb{C}$ için Pochhammer sembolü

$$\begin{aligned} (\lambda)_n &= \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1), \qquad n \in \mathbb{N} \\ (\lambda)_0 &= 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Ayrıca Pochhammer sembolü Gamma fonksiyonu kullanılarak $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ için

$$(\lambda)_\nu = \frac{\Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(\lambda)}$$

şeklinde de yazılabilir [23].

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $n, k \in \mathbb{N}_0$ için Pochhammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir [2, 22].

$$(\lambda)_{n+k} = (\lambda)_n \, (\lambda+n)_k \tag{2.5}$$

$$(\lambda)_{2n} = \left(\tfrac{\lambda}{2}\right)_n \left(\tfrac{\lambda+1}{2}\right)_n 2^{2n} \tag{2.6}$$

$$(-n)_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k \, n!}{(n-k)!}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \tag{2.7}$$

2.3 GAUSS HİPERGEOMETRİK FONKSİYONU

$c \neq 0, -1, -2, \ldots$ olmak üzere Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{2.8}$$

serisi ile tanımlanır ve

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dy}{dz} - aby = 0$$

hipergeometrik denkleminin bir çözümüdür. Bazen ${}_2F_1(a,b;c;z)$ yerine $F(a,b;c;z)$ gösterimi de kullanılır. Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$F(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt \qquad (2.9)$$
$$(\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0;\ |\arg(1-z)| < \pi)$$

integral gösterimine sahip olup,

$$\frac{d^k}{dz^k}F(a,b;c;z) = \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\,F(a+k,b+k;c+k;z), \qquad k\in\mathbb{N}_0 \qquad (2.10)$$

türev formülünü,

$$\begin{aligned} F(a,b;c;z) =&(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) \\ =&(1-z)^{-b}F\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right) \\ =&(1-z)^{c-a-b}F\left(c-a,c-b;c;z\right) \end{aligned}$$

dönüşüm formüllerini ve Gauss formülü olarak bilinen

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \qquad (2.11)$$
$$(\mathrm{Re}(c-a-b) > 0;\ \ c \neq 0,-1,-2,...)$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca $n = 0,1,2,3,...$ olmak üzere

$$F\left[\frac{-n}{2},\frac{-n+1}{2};\frac{1}{2};1-t\right] = 2^{n-1}F\left[\frac{-n}{2},\frac{-n+1}{2};1-n;t\right] \qquad (2.12)$$

dir.

Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile yukarıdaki özellikleri ve daha pek çok özelliği için [1-3,8,20,22,27] nolu referanslara bakılabilir.

2.4 KONFLUENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

$c \neq 0,-1,-2,\ldots$ olmak üzere birinci çeşit konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$${}_1F_1(b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \infty \qquad (2.13)$$

serisi ile tanımlanır ve

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (c-z)\frac{dy}{dz} - bz = 0 \qquad (2.14)$$

konfluent hipergeometrik denkleminin bir çözümüdür. Bazen ${}_1F_1(b;c;z)$ yerine $\Phi(b;c;z)$ veya $M(b;c;z)$ gösterimleri de kullanılır.

Konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\Phi(b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}dt \tag{2.15}$$

$$(\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0)$$

integral gösterimine sahip olup,

$$\frac{d^k}{dz^k}\Phi(b;c;z) = \frac{(b)_k}{(c)_k}\Phi(b+k;c+k;z), \qquad k\in\mathbb{N}_0 \tag{2.16}$$

türev formülünü ve birinci Kummer dönüşümü olarak bilinen

$$\Phi(b;c;z) = e^z\,\Phi(c-b;c;-z) \tag{2.17}$$

eşitliğini sağlar.

(2.14) konfluent hipergeometrik denkleminin diğer bir çözümü ise

$$\Psi(b;c;z) = \frac{\pi}{\sin c\pi}\left[\frac{\Phi(b;c;z)}{\Gamma(1+b-c)\Gamma(c)} - z^{1-c}\frac{\Phi(1+b-c;2-c;z)}{\Gamma(b)\Gamma(2-c)}\right]$$

şeklinde tanımlanır ve ikinci çeşit konfluent hipergeometrik (Tricomi) fonksiyonu olarak adlandırılır. Bazen $\Psi(b;c;z)$ yerine $U(b;c;z)$ gösterimi de kullanılır. Bu fonksiyon

$$\Psi(b;c;z) = \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^\infty t^{b-1}(1+t)^{c-b-1}e^{-zt}dt$$

$$(\mathrm{Re}(b) > 0, \quad \mathrm{Re}(z) > 0)$$

integral gösterimine ve

$$\frac{d^k}{dz^k}\Psi(b;c;z) = (-1)^k\,(b)_k\Psi(b+k;c+k;z), \qquad k\in\mathbb{N}_0$$

türev formülüne sahiptir. Ayrıca

$$\Psi(b;c;z) = z^{1-c}\Psi(1+b-c;2-c;z)$$

dönüşüm formülü sağlanır.

Konfluent hipergeometrik fonksiyonu hakkında daha fazla bilgi ve özellik için [1,2,8,12,22,27] nolu referanslara bakılabilir.

2.5 GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERGEOMETRİK FONSİYONLAR

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n \ldots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!} \qquad (2.18) $$

ile tanımlanır. Burada p ve q sıfır ya da pozitif bir tamsayı, $\alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$ ve $\beta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, q)$ kompleks parametreler olup, $\beta_j \neq 0, -1, -2, \ldots$ dır.

(2.18) de $p = 2, q = 1$ alınırsa

$$ {}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1; z) = F(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n}{(\beta_1)_n} \frac{z^n}{n!} $$

Gauss hipergeometrik fonksiyonu ve $p = q = 1$ alınırsa

$$ {}_1F_1(\alpha_1; \beta_1; z) = \Phi(\alpha_1; \beta_1; z) = M(\alpha_1; \beta_1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n}{(\beta_1)_n} \frac{z^n}{n!} $$

konfluent hipergeometrik fonksiyonu elde edilir.

(2.18) deki seri

i) $p \leq q$ ise $|z| < \infty$ için yakınsak

ii) $p = q + 1$ ise $|z| < 1$ için yakınsak

iii) $p > q + 1$ ise $z = 0$ hariç tüm z ler için ıraksak

dır.

Üstelik (2.18) deki seri $p = q + 1$ durumunda $|z| = 1$ çemberi üzerindeki noktalarda,

$$ \omega = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j $$

olmak üzere, $\mathrm{Re}(\omega) > 0$ ise mutlak yakınsak, $\mathrm{Re}(\omega) \leq -1$ ise ıraksak olup, $-1 < \mathrm{Re}(\omega) \leq 0$ ise $z = 1$ hariç koşullu yakınsaktır.

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar

$$ \begin{aligned} &{}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; z) \\ &\quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{\infty} t^{\alpha_1 - 1} e^{-t} \, {}_{p-1}F_q(\alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; zt) dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha_1) > 0 \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
&{}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1},b;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{q-1},c;z)\\
&\quad=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\ {}_{p-1}F_{q-1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta_1,\ldots,\beta_{q-1};zt)dt\\
&\qquad\qquad(\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0)
\end{aligned}
$$

integral gösterimlerini ve

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^k}{dz^k}\ {}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;z)\\
&\quad=\frac{(\alpha_1)_k\ldots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k\ldots(\beta_q)_k}{}_pF_q(\alpha_1+k,\alpha_2+k,\ldots,\alpha_p+k;\beta_1+k,\ldots,\beta_q+k;z),\ k\in\mathbb{N}_0
\end{aligned}
$$

türev formülünü sağlar.

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar hakkında daha fazla bilgi için [2,3,7,21,22,27] nolu referanslara bakılabilir.

2.6 APPELL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Tek değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar teorisindeki büyük gelişim, değişken sayısı arttırılarak benzer bir teorinin ortaya çıkmasını teşvik etmiştir. P. Appell 1880 yılında iki Gauss fonksiyonunun çarpımından yola çıkarak birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonlarını sırasıyla

$$F_1(a,b,c;d;x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}\,(b)_n\,(c)_m}{(d)_{m+n}}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \tag{2.19}$$

$$(\max\{|x|,|y|\}<1)$$

$$F_2(a,b,c;d,e;x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}\,(b)_n\,(c)_m}{(d)_n\,(e)_m}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \tag{2.20}$$

$$(|x|+|y|<1)$$

$$F_3(a,b,c,d;e;x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_m\,(c)_n\,(d)_m}{(e)_{m+n}}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \tag{2.21}$$

$$(\max\{|x|,|y|\}<1)$$

$$F_4(a,b;c,d;x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}\,(b)_{m+n}}{(c)_n\,(d)_m}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \tag{2.22}$$

$$(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}<1)$$

şeklinde tanımlamıştır.

Appell fonksiyonları ve özellikleri hakkında daha fazla bilgi için [3,8,12,22,27] nolu referanslara bakılabilir.

2.7 LAGUERRE POLİNOMLARI

Laguerre polinomları

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_1F_1(-n;\alpha+1;z), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.23}$$

olarak tanımlanır. Bu polinomlar (2.13) ve (2.7) eşitliklerinin dikkate alınmasıyla

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(z) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{z^k}{k!} \\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\, n!}{(\alpha+1)_k\,(n-k)!}\frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,(\alpha+1)_n}{(\alpha+1)_k\,(n-k)!}\frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\alpha+n+1)}{(n-k)!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+n}{n-k}\frac{(-z)^k}{k!} \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu polinomların ilk dördünün açık ifadesi

$$\begin{aligned} L_0^{(\alpha)}(z) &= 1 \\ L_1^{(\alpha)}(z) &= -z+\alpha+1 \\ L_2^{(\alpha)}(z) &= \frac{1}{2}\left[z^2-2(\alpha+2)z+(\alpha+1)(\alpha+2)\right] \\ L_3^{(\alpha)}(z) &= -\frac{1}{6}\left[z^3-3(\alpha+3)z^2+3(\alpha+2)(\alpha+3)z-(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\right] \end{aligned}$$

dir. Laguerre polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(z)\, t^n = (1-t)^{-\alpha-1}\ \exp\left[-\frac{zt}{1-t}\right], \qquad |t|<1 \tag{2.24}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahip olup,

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+(\alpha+1-z)\frac{dy}{dz}+ny=0$$

Laguerre diferensiyel denklemini sağlar.

Ayrıca $\alpha = 0$ özel halinde, $L_n^{(0)}$ yerine kısaca L_n gösterimi kullanılır, yani

$$L_n^{(0)}(z) = L_n(z) = {}_1F_1(-n; 1; z)$$

dir.

Laguerre polinomları hakkında daha fazla bilgi ve özellik için [2,9,12,19] nolu referanslara bakılabilir.

2.8 LAGRANGE POLİNOMLARI

İki değişkenli polinomlar ailesinden olan $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları

$$(1-xt)^{-\alpha}(1-yt)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\, t^n \tag{2.25}$$

$$(|t| < \min\{|x|^{-1}, |y|^{-1}\})$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla tanımlanmaktadır. Bu doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılarak $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
(1-xt)^{-\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!}(xt)^n, & |xt| < 1 \\
(1-yt)^{-\beta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!}(yt)^n, & |yt| < 1
\end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılır ve ikinci tarafta Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
(1-xt)^{-\alpha}(1-yt)^{-\beta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha)_k}{k!}\,(xt)^k\,\frac{(\beta)_{n-k}}{(n-k)!}\,(yt)^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha)_k\,(\beta)_{n-k}}{k!\,(n-k)!} x^k\, y^{n-k}\right] t^n
\end{aligned} \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.25) ve (2.26) eşitliklerinden

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha)_k\,(\beta)_{n-k}}{k!\,(n-k)!} x^k\, y^{n-k}\right] t^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) t^n$$

olup, t^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha)_k\,(\beta)_{n-k}}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k} \tag{2.27}$$

şeklinde elde edilir [10,11,22].

2.9 GENİŞLETİLMİŞ GAMMA FONKSİYONU

Genişletilmiş Gamma fonksiyonu

$$\Gamma_p(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \, \exp\left[-t - \frac{p}{t}\right] \, dt \tag{2.28}$$

$$(\mathrm{Re}(p) > 0; \; p = 0, \mathrm{Re}(z) > 0)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\begin{aligned} \Gamma_p(z+1) &= z\,\Gamma_p(z) + p\,\Gamma_p(z-1) \\ \Gamma_p(-z) &= p^{-z}\,\Gamma_p(z), \qquad\qquad \mathrm{Re}(p) > 0 \end{aligned}$$

özelliklerine sahiptir [6].

$p = 0$ için genişletilmiş Gamma fonksiyonu, klasik Gamma fonksiyonuna indirgenir.

3 GENİŞLETİLMİŞ BETA FONKSİYONU

Bu bölümde genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanan Beta fonksiyonuna ekstra bir p parametresi eklenerek tanımlanan genişletilmiş Beta fonksiyonu ele alınacaktır. Ayrıca bu fonksiyonun bazı özellikleri, integral gösterimleri, seri gösterimleri ve diğer özel fonksiyonlarla ilişkileri verilecektir [4, 6, 14].

Tanım 3.1 Genişletilmiş Beta fonksiyonu

$$B_p(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \tag{3.1}$$

$$(\mathrm{Re}(p) > 0;\ p = 0 \text{ için } \mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0)$$

şeklinde tanımlanır [4].

Genişletilmiş Beta fonksiyonu

$$B_p(x,y) = B_p(y,x) \tag{3.2}$$

simetri özelliği başta olmak üzere klasik Beta fonksiyonunun birçok özelliğini taşır ve $p = 0$ için klasik Beta fonksiyonuna indirgenir.

3.1 BAZI ÖZELLİKLERİ

Teorem 3.2 Genişletilmiş Beta fonksiyonunun p parametresine göre türevleri

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} B_p(x,y) = (-1)^n B_p(x-n, y-n) \tag{3.3}$$

$$(\mathrm{Re}(p) > 0, n \in \mathbb{N}_0)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır. $n = 0$ için (3.3) aşikârdır. (3.1) in her iki yanının p parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p} B_p(x,y) &= \frac{\partial}{\partial p}\left\{\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt\right\} \\
&= \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]\right\} dt \\
&= -\int_0^1 t^{x-2}\,(1-t)^{y-2}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\
&= -B_p(x-1, y-1)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur ki, bu $n = 1$ için (3.3) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir. Şimdi (3.3) eşitliğinin $n = k$ için geçerli olduğunu kabul edelim, yani

$$\frac{\partial^k}{\partial p^k} B_p(x,y) = (-1)^k B_p(x-k, y-k) \tag{3.5}$$

eşitliği sağlansın. (3.5) in her iki yanının p paramatresine göre türevi alınır ve (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1}}{\partial p^{k+1}} B_p(x,y) &= \frac{\partial}{\partial p}\left[(-1)^k B_p(x-k, y-k)\right] \\
&= (-1)^k \frac{\partial}{\partial p} B_p(x-k, y-k) \\
&= (-1)^{k+1} B_p(x-k-1, y-k-1)
\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da (3.3) eşitliğinin $n = k+1$ içinde doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3 Genişletilmiş Beta fonksiyonu

$$B_p(x, y+1) + B_p(x+1, y) = B_p(x,y) \tag{3.6}$$

bağıntısını sağlar.

İspat. (3.1) integral gösteriminin kullanılmasıyla kolayca

$$\begin{aligned}
B_p(x, y+1) + B_p(x+1,\, y) &= \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^y\, \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\
&\quad + \int_0^1 t^x\,(1-t)^{y-1} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\
&= \int_0^1 \left\{t^{x-1}\,(1-t)^y + t^x\,(1-t)^{y-1}\right\}\, \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\
&= \int_0^1 t^x\,(1-t)^y \left\{t^{-1} + (1-t)^{-1}\right\} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\
&= \int_0^1 t^x\,(1-t)^y \frac{1}{t(1-t)} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\
&= \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\, \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\
&= B_p(x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

(3.6) da $p = 0$ alınırsa klasik Beta fonksiyonu için

$$B(x, y+1) + B(x+1, y) = B(x,y)$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.4 Genişletilmiş Beta fonksiyonu

$$B_p(\alpha,-\alpha-n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_p(\alpha+k,-\alpha-k),\qquad n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.7}$$

toplam formülünü sağlar.

İspat. n üzerinden tümevarımla yapılır. $n=0$ için (3.7) aşikârdır. (3.7) de $x=\alpha$ ve $y=-\alpha-1$ alınırsa

$$\begin{aligned}B_p(\alpha,-\alpha-1)&=B_p(\alpha,-\alpha)+B_p(\alpha+1,-\alpha-1)\\&=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}B_p(\alpha+k,-\alpha-k)\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da $n=1$ için (3.7) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir. (3.7) eşitliğinin $n=m$ için geçerli olduğunu kabul edelim, yani

$$B_p(\alpha,-\alpha-m)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_p(\alpha+k,-\alpha-k) \tag{3.8}$$

sağlansın. (3.7) de $x=\alpha$ ve $y=-\alpha-m-1$ alınırsa

$$B_p(\alpha,-\alpha-m-1)=B_p(\alpha,-\alpha-m)+B_p(\alpha+1,-\alpha-m-1)$$

elde edilir. Son eşitlikte (3.8) kabulü kullanılırsa

$$\begin{aligned}&B_p(\alpha,-\alpha-m-1)\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_p(\alpha+k,-\alpha-k)+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_p(\alpha+k+1,-\alpha-k-1)\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_p(\alpha+k,-\alpha-k)+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}B_p(\alpha+k,-\alpha-k)\\&=B_p(\alpha,-\alpha)+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}B_p(\alpha+k,-\alpha-k)\\&+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}B_p(\alpha+k,-\alpha-k)+B_p(\alpha+m+1,-\alpha-m-1)\\&=B_p(\alpha,-\alpha)+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}B_p(\alpha+k,-\alpha-k)\\&+B_p(\alpha+m+1,-\alpha-m-1)\\&=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}B_p(\alpha+k,-\alpha-k)\end{aligned}$$

bulunur. Bu da (3.7) eşitliğinin $n=m+1$ içinde doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.5 Genişletilmiş Beta fonksiyonu

$$B_p(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_p(x+n, y+1), \qquad \text{Re}(p) > 0 \tag{3.9}$$

toplam formülünü sağlar.

İspat. $(1-t)^{y-1}$ ifadesinin

$$(1-t)^{y-1} = (1-t)^y \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

şeklinde yazılabileceği (3.1) de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} B_p(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y \sum_{n=0}^{\infty} t^n \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 t^{x+n-1} (1-t)^y \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_p(x+n, y+1) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.6 Genişletilmiş Beta fonksiyonu

$$B_p(x, 1-y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y)_n}{n!} B_p(x+n, 1), \qquad \text{Re}(p) > 0 \tag{3.10}$$

toplam formülünü sağlar.

İspat. (3.1) den

$$B_p(x, 1-y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{-y} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt$$

olup, burada

$$(1-t)^{-y} = \sum_{n=0}^{\infty} (y)_n \frac{t^n}{n!}$$

seri açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} B_p(x, 1-y) &= \int_0^1 t^{x-1} \sum_{n=0}^{\infty} (y)_n \frac{t^n}{n!} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y)_n}{n!} \left\{ \int_0^1 t^{x+n-1} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y)_n}{n!} B_p(x+n, 1) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

3.2 İNTEGRAL GÖSTERİMLERİ

Teorem 3.7 Genişletilmiş Beta fonksiyonu aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir.

$$B_p(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\ \theta)^{2x-1} (\sin\ \theta)^{2y-1}\ \exp[-p\ \sec^2\theta\ \csc^2\theta] d\theta, \tag{3.11}$$

$$B_p(x,y) = e^{-2p} \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\ \exp\left[-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right]\ du, \tag{3.12}$$

$$B_p(x,y) = 2^{1-x-y} \int_{-1}^{1} (1+u)^{x-1}\ (1-u)^{y-1}\ \exp\left[-\frac{4p}{1-u^2}\right]\ du, \tag{3.13}$$

$$B_p(x,y) = (c-a)^{1-x-y} \int_a^c (u-a)^{x-1} (c-u)^{y-1} \exp\left[-p\frac{(c-a)^2}{(u-a)(c-u)}\right] du, \tag{3.14}$$

$$B_p(x,y) = \frac{1}{2} e^{-2p} \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}\ \exp\left[-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right]\ du, \tag{3.15}$$

$$B_p(x,y) = 2^{1-x-y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[(x-y)t - 4p\ \cosh^2\ t\right]}{(\cosh t)^{x+y}} dt \tag{3.16}$$

$$B_p(x,y) = 2^{1-x-y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-(x-y)t - 4p\ \cosh^2\ t\right]}{(\cosh t)^{x+y}} dt \tag{3.17}$$

$$B_p(x,y) = 2^{2-x-y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh[(x-y)t]}{(\cosh t)^{x+y}} \exp(-4p\ \cosh^2 t) dt \tag{3.18}$$

$$(\mathrm{Re}(p)>0;\ p=0\ \text{için}\ \mathrm{Re}(x)>0,\ \mathrm{Re}(y)>0)$$

İspat. (3.1) integral gösteriminde; $t = \cos^2\theta$ dönüşümü yapılırsa (3.11), $t = \frac{u}{1+u}$ dönüşümü yapılırsa (3.12), $t = \frac{1+u}{2}$ dönüşümü yapılırsa (3.13) ve $t = \frac{u-a}{c-a}$ dönüşümü yapılırsa (3.14) elde edilir. (3.15) in ispatı için genişletilmiş Beta fonksiyonunun simetri özelliğinden dolayı

$$2B_p(x,y) = B_p(x,y) + B_p(y,x)$$

yazılabileceğini dikkate almak ve eşitliğin sağ yanında (3.12) integral gösterimini kullanmak yeterlidir. (3.13) de $u = \tanh t$ dönüşümü yapılırsa (3.16) elde edilir. (3.17) integral gösterimi (3.16) dan kolayca elde edilir. (3.16) ve (3.17) taraf tarafa toplanırsa

$$2B_p(x,y) = 2^{2-x-y}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cosh[(x-y)t]}{(\cosh t)^{x+y}}\exp(-4p\ \cosh^2 t)dt$$
$$= 2^{2-x-y}2\int_{0}^{\infty}\frac{\cosh[(x-y)t]}{(\cosh t)^{x+y}}\exp(-4p\ \cosh^2 t)dt$$

olup, bu eşitliğin her iki yanının ikiye bölünmesiyle (3.18) elde edilir. ■

Teorem 3.8 Genişletilmiş Beta fonksiyonu

$$B_p(x,y) = 2^{1-x-y}\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]F\left[\frac{x-y}{2},\frac{x-y+1}{2};\frac{1}{2};1-t\right]dt \tag{3.19}$$

integral gösterimine sahiptir.

İspat. Genişletilmiş Beta fonksiyonunun (3.13) integral gösteriminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$B_p(x,y) = 2^{1-x-y}\int_{-1}^{1}(1+u)^{x-y}\,(1-u^2)^{y-1}\ \exp\left[-\frac{4p}{1-u^2}\right]du$$

elde edilir. Burada $(1+u)^{x-y}$ nin binom açılımı kullanılıp integral ile toplam yer değiştirilirse

$$B_p(x,y) = 2^{1-x-y}\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(y-x)_k\,\frac{(-1)^k}{k!}\,u^k\right\}\,(1-u^2)^{y-1}\ \exp\left[-\frac{4p}{1-u^2}\right]du$$
$$= 2^{1-x-y}\sum_{k=0}^{\infty}(y-x)_k\,\frac{(-1)^k}{k!}\int_{-1}^{1}u^k\,(1-u^2)^{y-1}\ \exp\left[-\frac{4p}{1-u^2}\right]du$$

elde edilir ve

$$\int_{-1}^{1}u^{2k+1}\,(1-u^2)^{y-1}\ \exp\left[-\frac{4p}{1-u^2}\right]du = 0$$

olduğundan

$$B_p(x,y) = 2^{2-x-y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y-x)_{2k}}{(2k)!}\int_0^1 u^{2k}\,(1-u^2)^{y-1}\ \exp\left[-\frac{4p}{1-u^2}\right]du$$
$$= 2^{2-x-y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y-x)_{2k}}{(1)_{2k}}\int_0^1 u^{2k}\,(1-u^2)^{y-1}\ \exp\left[-\frac{4p}{1-u^2}\right]du \tag{3.20}$$

yazılabilir. (3.20) de $1-u^2=t$ dönüşümü yapıldıktan sonra toplam ile integral yer değiştirilirse

$$B_p(x,y) = 2^{1-x-y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y-x)_{2k}}{(1)_{2k}}\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{k-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]dt \tag{3.21}$$

$$= 2^{1-x-y}\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y-x)_{2k}}{(1)_{2k}}(1-t)^k\right\}dt$$

elde edilir. Pochhammer sembolünün (2.6) daki özelliği kullanılırsa

$$B_p(x,y) = 2^{1-x-y}\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{y-x}{2})_k\,(\frac{y-x+1}{2})_k}{(\frac{1}{2})_k\,(1)_k}(1-t)^k\right\}dt$$

$$= 2^{1-x-y}\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{y-x}{2})_k\,(\frac{y-x+1}{2})_k}{(\frac{1}{2})_k}\frac{(1-t)^k}{k!}\right\}dt$$

$$= 2^{1-x-y}\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]F\left[\frac{y-x}{2},\frac{y-x+1}{2};\frac{1}{2};1-t\right]dt$$

bulunur. Burada genişletilmiş Beta fonksiyonunun simetri özelliği dikkate alınırsa

$$B_p(x,y) = 2^{1-x-y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]F\left[\frac{x-y}{2},\frac{x-y+1}{2};\frac{1}{2};1-t\right]dt$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.9

$$B_p(x,x+n) = 2^{-2x}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]F\left[\frac{-n}{2},\frac{-n+1}{2};1-n;t\right]dt \tag{3.22}$$

$$B_p(x,x-n) = 2^{2n-2x}\int_0^1 t^{x-n-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]F\left[\frac{-n}{2},\frac{-n+1}{2};1-n;t\right]dt \tag{3.23}$$

İspat. (3.19) da $y=x+n$ $(n\in\mathbb{N}_0)$ alınırsa

$$B_p(x,x+n) = 2^{1-2x-n}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]F\left[\frac{-n}{2},\frac{-n+1}{2};\frac{1}{2};1-t\right]dt$$

olup, (2.12) nin kullanılmasıyla (3.22) elde edilir.

(3.22) de x yerine $x-n$ alınır ve genişletilmiş Beta fonksiyonunun simetri özelliği kullanılırsa (3.23) elde edilir. ■

3.3 SERİ GÖSTERİMLERİ

$W_{\lambda,\mu}(z)$ Whittaker fonksiyonu olmak üzere

$$\int_0^u t^{\nu-1}(u-t)^{\mu-1}e^{-\beta/t}dt = \Gamma(\mu)\beta^{(\nu-1)/2}u^{(2\mu+\nu-1)/2}e^{-\beta/2u}W_{(1-2\mu-\nu)/2,\nu/2}\left(\frac{\beta}{u}\right) \tag{3.24}$$

$$(\mathrm{Re}(\mu) > 0,\ \mathrm{Re}(\beta) > 0,\ u > 0)$$

eşitliği sağlanır [12]. Şimdi bu eşitlik kullanılarak aşağıdaki teoremler ispatlanabilir.

Teorem 3.10

$$B_p(x, x+n) = \frac{1}{2}n\sqrt{\pi}e^{-2p}2^{-x}p^{(x-1)/2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-\frac{1}{2}\sqrt{p})^k}{n-k}\binom{n-k}{k}W_{-\frac{x+k}{2},\frac{x+k}{2}}(4p) \tag{3.25}$$

$$B_p(x, x-n) = \frac{1}{2}n\sqrt{\pi}e^{-2p}2^{n-x}p^{(x-n-1)/2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-\frac{1}{2}\sqrt{p})^k}{n-k}\binom{n-k}{k}W_{-\frac{x+k-n}{2},\frac{x+k-n}{2}}(4p) \tag{3.26}$$

Burada

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift ise} \\ \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir.

İspat. (3.22) de Gauss hipergeometrik fonksiyonunun (2.8) seri gösterimi kullanılırsa

$$B_p(x, x+n) = 2^{-2x}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-\frac{n}{2})_k(\frac{-n+1}{2})_k}{(1-n)_k}\frac{t^k}{k!}\,dt$$

bulunur. Burada toplam ile integral yer değiştirilip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$B_p(x, x+n) = 2^{-2x}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-\frac{n}{2})_k(\frac{-n+1}{2})_k}{(1-n)_k\,k!}\int_0^1 t^{k+x-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]dt \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.24) eşitliğinde $u = 1$, $\nu = x+k$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\beta = 4p$ alınırsa

$$\int_0^1 t^{k+x-1}(1-t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{4p}{t}\right]dt = \sqrt{\pi}2^{k+x-1}p^{(k+x-1)/2}e^{-2p}W_{-\frac{x+k}{2},\frac{x+k}{2}}(4p)$$

olup, bu eşitlik (3.27) de yerine yazılırsa

$$B_p(x, x+n) = \sqrt{\pi} e^{-2p} 2^{-x-1} p^{(x-1)/2} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-\frac{n}{2})_k \, (\frac{-n+1}{2})_k}{(1-n)_k \, k!} (2\sqrt{p})^k W_{-\frac{x+k}{2}, \frac{x+k}{2}}(4p) \tag{3.28}$$

bulunur. Son olarak

$$\frac{(-\frac{n}{2})_k \, (\frac{-n+1}{2})_k}{(1-n)_k} \, \frac{(-1)^k \, 2^{2k}}{k!} = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$$

eşitliği dikkate alınarak (3.25) elde edilir.

(3.25) de x yerine $x-n$ alınır ve genişletilmiş Beta fonksiyonunun simetri özelliği kullanılırsa (3.26) bulunur. ■

Teorem 3.11

$$B_p(x, y) = \sqrt{\pi} \, 2^{-x} \, p^{(y-1)/2} \, e^{-2p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{y-x}{2})_k \, (\frac{y-x+1}{2})_k}{k!} \, W_{-\frac{y}{2}-k, \frac{y}{2}}(4p) \tag{3.29}$$

İspat. (3.24) de $u = 1$, $\nu = y$, $\mu = \frac{1}{2} + k$, $\beta = 4p$ alınırsa

$$\int_0^1 t^{y-1} \, (1-t)^{k-\frac{1}{2}} \, \exp\left[-\frac{4p}{t}\right] dt = \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) p^{(y-1)/2} 2^{y-1} \, e^{-2p} \, W_{-\frac{y}{2}-k, \frac{y}{2}}(4p)$$

olup, bu eşitlik (3.21) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} B_p(x, y) &= 2^{1-x-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-x)_{2k}}{(1)_{2k}} \int_0^1 t^{y-1} \, (1-t)^{k-\frac{1}{2}} \, \exp\left[-\frac{4p}{t}\right] dt \\ &= 2^{1-x-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-x)_{2k}}{(1)_{2k}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) p^{(y-1)/2} 2^{y-1} \, e^{-2p} \, W_{-\frac{y}{2}-k, \frac{y}{2}}(4p) \\ &= 2^{-x} p^{(y-1)/2} e^{-2p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-x)_{2k}}{(1)_{2k}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) W_{-\frac{y}{2}-k, \frac{y}{2}}(4p) \end{aligned}$$

bulunur. (2.6) özelliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} B_p(x, y) &= 2^{-x} p^{(y-1)/2} \, e^{-2p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{y-x}{2})_k \, (\frac{y-x+1}{2})_k}{(\frac{1}{2})_k \, (1)_k} \, \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) \, W_{-\frac{y}{2}-k, \frac{y}{2}}(4p) \\ &= 2^{-x} p^{(y-1)/2} \, e^{-2p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{y-x}{2})_k \, (\frac{y-x+1}{2})_k}{(1)_k} \, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \, W_{-\frac{y}{2}-k, \frac{y}{2}}(4p) \\ &= \sqrt{\pi} \, 2^{-x} p^{(y-1)/2} \, e^{-2p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{y-x}{2})_k \, (\frac{y-x+1}{2})_k}{k!} \, W_{-\frac{y}{2}-k, \frac{y}{2}}(4p) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.12

$$B_p(x,y) = 2^{-x}p^{(y-1)/2}e^{-2p}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x-y}{2k}\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)W_{-\frac{y}{2}-k,\frac{y}{2}}(4p) \tag{3.30}$$

İspat. (3.29) da

$$\binom{x-y}{2k} = \frac{(\frac{y-x}{2})_k\,(\frac{y-x+1}{2})_k}{(\frac{1}{2})_k\,k!} = \sqrt{\pi}\,\frac{(\frac{y-x}{2})_k\,(\frac{y-x+1}{2})_k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)\,k!}$$

eşitliğini dikkate almak yeterlidir. ■

Sonuç 3.13

$$B_p(x,x+n) = \sqrt{\pi}e^{-2p}2^{-x-n}p^{(x-1)/2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-\frac{n}{2})_k\,(\frac{-n+1}{2})_k}{k!}W_{-\frac{x}{2}-k,\frac{x}{2}}(4p) \tag{3.31}$$

$$B_p(x,x-n) = \sqrt{\pi}e^{-2p}2^{-x}p^{(x-n-1)/2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-\frac{n}{2})_k\,(\frac{-n+1}{2})_k}{k!}W_{-\frac{x-n}{2}-k,\frac{x-n}{2}}(4p) \tag{3.32}$$

İspat. (3.29) da genişletilmiş Beta fonksiyonunun simetri özelliği dikkate alınırsa

$$B_p(x,y) = \sqrt{\pi}\,2^{-y}\,p^{(x-1)/2}\,e^{-2p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x-y}{2})_k\,(\frac{x-y+1}{2})_k}{k!}\,W_{-\frac{x}{2}-k,\frac{x}{2}}(4p) \tag{3.33}$$

bulunur. $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere (3.33) de, $y = x+n$ alınarak (3.31) ve (3.31) de x yerine $x-n$ alınarak (3.32) kolayca elde edilir. ■

Teorem 3.14

$$B_p(x,y) = e^{-2p}\sum_{m,n=0}^{\infty}B(x+m+1,y+n+1)\,L_m(p)\,L_n(p) \tag{3.34}$$

$$(\mathrm{Re}(p)>0, \mathrm{Re}(x)>-1,\ \mathrm{Re}(y)>-1)$$

İspat. (2.24) doğurucu fonksiyon bağıntısı, $\alpha = 0$ için

$$\frac{1}{1-t}\exp\left[-\frac{pt}{1-t}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}L_n(p)t^n, \qquad |t|<1 \tag{3.35}$$

şeklinde yazılabilir. Burada t yerine $1-t$ alınırsa

$$\exp\left[-\frac{p(1-t)}{t}\right] = t\sum_{n=0}^{\infty}L_n(p)(1-t)^n, \qquad 0<t<2$$

$$\exp\left[-\frac{p}{t}\right] = e^{-p}\,t\sum_{n=0}^{\infty}L_n(p)\,(1-t)^n \tag{3.36}$$

bulunur. Burada da t yerine $1-t$ alınırsa

$$\exp\left[-\frac{p}{1-t}\right] = e^{-p}(1-t)\sum_{m=0}^{\infty} L_m(p)\, t^m, \qquad |t|<1 \tag{3.37}$$

elde edilir. O halde (3.36) ve (3.37) den

$$\begin{aligned}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] &= \exp\left[-\frac{p}{t}\right]\exp\left[-\frac{p}{1-t}\right] \\ &= e^{-2p}\sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p)\, t^{m+1}(1-t)^{n+1}, \quad 0<t<1\end{aligned} \tag{3.38}$$

yazılabilir. Bulunan bu eşitlik genişletilmiş Beta fonksiyonunun (3.1) integral gösteriminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}B_p(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\ \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}e^{-2p}\sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p)\, t^{m+1}(1-t)^{n+1}dt \\ &= e^{-2p}\sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p)\int_0^1 t^{x+m}(1-t)^{y+n}dt \\ &= e^{-2p}\sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p)B(x+m+1,y+n+1)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.15

$$B_p(x,y) = \Gamma(y+1)p^{(x-1)/2}e^{-3p/2}\sum_{m=0}^{\infty} p^{m/2}L_m(p)W_{-\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{x+m}{2},\frac{x+m}{2}}(p) \tag{3.39}$$

$$(\mathrm{Re}(p)>0,\ \mathrm{Re}(x)>-1,\ \mathrm{Re}(y)>-1)$$

İspat.

$$\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] = \exp\left[-\frac{p(1+t)}{t}\right]\exp\left[-\frac{pt}{1-t}\right]$$

yazılabilir. Burada (3.35) dikkate alınırsa

$$\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] = \exp\left[-\frac{p(1+t)}{t}\right](1-t)\sum_{m=0}^{\infty} L_m(p)t^m$$

bulunur. Bulunan bu eşitlik genişletilmiş Beta fonksiyonunun (3.1) integral gösteriminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
B_p(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\exp\left[-\frac{p(1+t)}{t}\right](1-t)\sum_{m=0}^{\infty} L_m(p)\,t^m dt \\
&= e^{-p}\sum_{m=0}^{\infty} L_m(p)\int_0^1 t^{x+m-1}(1-t)^y \exp\left[-\frac{p}{t}\right]dt \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

ifadesine ulaşılır. (3.24) eşitliğinde $u=1$, $\beta=p$, $\nu=x+m$, $\mu=y+1$ alınırsa

$$
\int_0^1 t^{x+m-1}(1-t)^y \exp\left[-\frac{p}{t}\right]dt = \Gamma(y+1)p^{(x+m-1)/2}e^{-p/2}W_{-\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{x+m}{2},\frac{x+m}{2}}(p)
$$

olup, bu eşitlik (3.40) da yerine yazılırsa

$$
B_p(x,y) = \Gamma(y+1)p^{(x-1)/2}e^{-3p/2}\sum_{m=0}^{\infty} p^{m/2}L_m(p)W_{-\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{x+m}{2},\frac{x+m}{2}}(p)
$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.4 BAZI ÖZEL FONKSİYONLARLA İLİŞKİSİ

Teorem 3.16 Genişletilmiş Beta fonksiyonu ile genişletilmiş Gamma fonksiyonu arasında

$$
\Gamma_p(\alpha)\,\Gamma_p(\beta) = 2\int_0^\infty r^{2(\alpha+\beta)-1}\,e^{-r^2}\,B_{p/r^2}(\alpha,\beta)dr \qquad (3.41)
$$

$$
(\mathrm{Re}(p)>0;\ p=0 \text{ için } \mathrm{Re}(\alpha)>0,\ \mathrm{Re}(\beta)>0)
$$

şeklinde bir ilişki vardır.

İspat. Genişletilmiş Gamma fonksiyonunun (2.28) integral gösteriminde $t=x^2$ dönüşümü yapılırsa

$$
\Gamma_p(\alpha) = 2\int_0^\infty x^{2\alpha-1}\exp\left[-x^2-\frac{p}{x^2}\right]dx
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
\Gamma_p(\beta) = 2\int_0^\infty y^{2\beta-1}\exp\left[-y^2-\frac{p}{y^2}\right]dy
$$

yazılabilir. Bu iki ifade taraf tarafa çarpılırsa

$$
\Gamma_p(\alpha)\,\Gamma_p(\beta) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}\exp\left[-(x^2+y^2)-p\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)\right]dxdy
$$

bulunur. Burada $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlarına geçilir ve genişletilmiş Beta fonksiyonunun (3.11) integral gösterimi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\Gamma_p(\alpha)\,\Gamma_p(\beta) &= 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} r^{2(\alpha+\beta)-1}(\cos\theta)^{2\alpha-1}(\sin\theta)^{2\beta-1}e^{-r^2}\exp\left[\frac{-p/r^2}{\cos^2\theta\sin^2\theta}\right]d\theta dr\\ &= 2\int_0^\infty r^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-r^2}\left\{2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2\alpha-1}(\sin\theta)^{2\beta-1}\exp\left[-\frac{p}{r^2}\sec^2\theta\csc^2\theta\right]d\theta\right\}dr\\ &= 2\int_0^\infty r^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-r^2}B_{p/r^2}(\alpha,\beta)dr\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.17 (3.41) de $p = 0$ alınırsa klasik Beta fonksiyonu ile klasik Gamma fonksiyonu arasındaki (2.4) ilişkisi elde edilir.

Teorem 3.18

$$\int_0^\infty p^{s-1}B_p(x,y)dp = \Gamma(s)B(x+s,y+s) \tag{3.42}$$

$(\mathrm{Re}(s) > 0,\ \mathrm{Re}(x+s) > 0,\ \mathrm{Re}(y+s) > 0)$

İspat. (3.1) in her iki yanı p^{s-1} ile çarpılır ve $(0,\infty)$ aralığında p ye göre integrallenirse

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p^{s-1}B_p(x,y)dp &= \int_0^\infty p^{s-1}\left\{\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt\right\}dp\\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\left\{\int_0^\infty p^{s-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dp\right\}dt\end{aligned} \tag{3.43}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\int_0^\infty p^{s-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dp$$

integralinde $p = t\,(1-t)\,u$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p^{s-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dp &= t^s(1-t)^s\int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}\,du\\ &= t^s\,(1-t)^s\,\Gamma(s), \qquad \mathrm{Re}(s) > 0,\ 0 < t < 1\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (3.43) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p^{s-1}B_p(x,y)dp &= \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,t^s\,(1-t)^s\Gamma(s)dt\\ &= \Gamma(s)\int_0^1 t^{x+s-1}(1-t)^{y+s-1}dt\\ &= \Gamma(s)\,B(x+s,y+s), \qquad \mathrm{Re}(x+s) > 0,\ \mathrm{Re}(y+s) > 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.19 (3.42) de $s = 1$ alınarak genişletilmiş Beta fonksiyonu ile klasik Beta fonksiyonu arasında

$$\int_0^\infty B_p(x,y)dp = B(x+1, y+1)$$

$$(\mathrm{Re}(x) > -1,\ \mathrm{Re}(y) > -1)$$

şeklinde bir ilişki elde edilir.

Teorem 3.20 Genişletilmiş Beta fonksiyonu ile Macdonald fonksiyonu arasında

$$B_p(\alpha, -\alpha) = 2\, e^{-2p}\, K_\alpha(2p), \qquad \mathrm{Re}(p) > 0 \tag{3.44}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

İspat. Genişletilmiş Beta fonksiyonunun (3.12) integral gösteriminde $x = \alpha$ ve $y = -\alpha$ alınırsa

$$B_p(\alpha, -\alpha) = e^{-2p} \int_0^\infty u^{\alpha-1} \exp\left[-p\left(u + \frac{1}{u}\right)\right] du \tag{3.45}$$

olur. Diğer taraftan Macdonald fonksiyonu

$$K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$$

özelliğine ve

$$\int_0^\infty u^{\nu-1} \exp\left[-\gamma u - \frac{\beta}{u}\right] du = 2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{\beta\gamma}), \quad \mathrm{Re}(\beta) > 0, \mathrm{Re}(\gamma) > 0$$

integral gösterimine sahiptir [12, s. 368]. Burada $\nu = \alpha$, $\beta = \gamma = p$ alınırsa

$$\int_0^\infty u^{\alpha-1} \exp\left[-p\left(u + \frac{1}{u}\right)\right] du = 2\, K_\alpha(2p), \quad \mathrm{Re}(p) > 0$$

bulunur. Bu son eşitlik (3.45) de dikkate alınırsa ispat tamamlanır ■

Sonuç 3.21

$$B_p(\alpha, -\alpha - n) = 2\, e^{-2p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} K_{\alpha+k}(2p) \tag{3.46}$$

İspat. İspat için (3.7) de (3.44) eşitliğini dikkate almak yeterlidir. ■

Teorem 3.22 Genişletilmiş Beta fonksiyonu ile Whittaker fonksiyonu arasında

$$B_p(\alpha, \alpha) = \sqrt{\pi}\, 2^{-\alpha}\, p^{(\alpha-1)/2}\, e^{-2p}\, W_{-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}}(4p), \qquad \mathrm{Re}(p) > 0 \tag{3.47}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

İspat. Genişletilmiş Beta fonksiyonunun (3.13) integral gösteriminde $x = \alpha$, $y = \alpha$ alındıktan sonra $1 - u^2 = t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} B_p(\alpha,\alpha) &= 2^{1-2\alpha} \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\alpha-1} \exp\left[-\frac{4p}{1-u^2}\right] du \\ &= 2^{2-2\alpha} \int_{0}^{1} (1-u^2)^{\alpha-1} \exp\left[-\frac{4p}{1-u^2}\right] du \\ &= 2^{1-2\alpha} \int_{0}^{1} t^{\alpha-1} (1-t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{4p}{t}\right] dt \end{aligned} \tag{3.48}$$

elde edilir. (3.24) eşitliğinde $u = 1$, $\beta = 4p$, $\nu = \alpha$, $\mu = 1/2$ alınırsa

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{4p}{t}\right] dt = \sqrt{\pi}\, p^{(\alpha-1)/2}\, 2^{\alpha-1}\, e^{-2p}\, W_{-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}(4p)$$

olup, bu eşitlik (3.48) de yerine yazılırsa

$$B_p(\alpha,\alpha) = \sqrt{\pi}\, 2^{-\alpha}\, p^{(\alpha-1)/2}\, e^{-2p}\, W_{-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}(4p), \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.23 Genişletilmiş Beta fonksiyonu ile ikinci çeşit konfluent hipergeometrik fonksiyonu arasındaki ilişki

$$B_p(\alpha,\alpha) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-2\alpha}\, e^{-4p}\, \Psi\left(\frac{1}{2}; 1-\alpha; 4p\right), \qquad \mathrm{Re}(p) > 0 \tag{3.49}$$

dir.

İspat. Whittaker fonksiyonu ile ikinci çeşit konfluent hipergeometrik fonksiyonu arasında

$$W_{\lambda,\mu}(z) = z^{\mu+1/2}\, e^{-z/2}\, \Psi\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}; 2\mu+1; z\right)$$

şeklinde bir ilişki vardır [22]. Burada $\lambda = -\frac{\alpha}{2}$, $\mu = -\frac{\alpha}{2}$, ve $z = 4p$ alınırsa

$$W_{-\frac{\alpha}{2},-\frac{\alpha}{2}}(4p) = e^{-2p} 2^{1-\alpha} p^{(1-\alpha)/2} \Psi\left(\frac{1}{2}; 1-\alpha; 4p\right)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte Whittaker fonksiyonunun

$$W_{\lambda,\mu}(z) = W_{\lambda,-\mu}(z)$$

özelliği kullanılırsa

$$W_{-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}}(4p) = e^{-2p} 2^{1-\alpha} p^{(1-\alpha)/2} \Psi\left(\frac{1}{2}; 1-\alpha; 4p\right) \tag{3.50}$$

bulunur. (3.50) eşitliği (3.47) de yerine yazılırsa, (3.49) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4 GENİŞLETİLMİŞ HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde genişletilmiş Beta fonksiyonu yardımıyla tanımlanan bazı hipergeometrik fonksiyonlar ele alınacaktır. Ayrıca bu fonksiyonların integral gösterimlerine ve bazı özelliklerine yer verilecektir.

4.1 GENİŞLETİLMİŞ GAUSS HİPERGEOMETRİK FONKSİYONU

Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$F_p(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{B_p(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!} \tag{4.1}$$

$$(p \geq 0;\ |z| < 1;\ \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0)$$

şeklinde tanımlanır [5].

$p = 0$ için genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu klasik Gauss hipergeometrik fonksiyonuna indirgenir.

Teorem 4.1 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dz}\left\{F_p(a,b;c;z)\right\} = \frac{ab}{c} F_p(a+1, b+1; c+1; z) \tag{4.2}$$

dir [5].

İspat. (4.1) in her iki yanının z ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left\{F_p(a,b;c;z)\right\} &= \frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{B_p(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!}\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a)_n \frac{B_p(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a)_{n+1} \frac{B_p(b+n+1, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

olup, burada

$$\begin{aligned} (a)_{n+1} &= a(a+1)_n \\ B(b, c-b) &= \frac{c}{b} B(b+1, c-b) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left\{F_p(a,b;c;z)\right\} &= \frac{a\,b}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(a+1)_n \frac{B_p(b+1+n,c-b)}{B(b+1,c-b)}\frac{z^n}{n!} \\
&= \frac{a\,b}{c}\,F_p(a+1,b+1;c+1;z)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonunun k. basamaktan türevi

$$
\frac{d^k}{dz^k}\left\{F_p(a,b;c;z)\right\} = \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\,F_p(a+k,b+k;c+k;z), \qquad k\in\mathbb{N}_0 \qquad (4.3)
$$

şeklindedir [5].

İspat. Bu ifadenin ispatı için tümevarım yöntemini kullanmak yeterlidir. ■

Ayrıca dikkat edilmelidir ki bu ifadede $p=0$ alınarak klasik Gauss hipergeometrik fonksiyonu için (2.10) da ifade edilen türev formülü elde edilir.

Teorem 4.3 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$
F_p(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-zt)^{-a}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt \qquad (4.4)
$$

$$
(p>0;\ p=0 \ \text{ve}\ |\arg(1-z)|<\pi;\ \mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0)
$$

integral gösterimine sahiptir [5].

İspat. (4.1) de genişletilmiş Beta fonksiyonunun (3.1) integral gösterimi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
F_p(a,b;c;z) &= \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{z^n}{n!}\left\{\int_0^1 t^{b+n-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt\right\} \\
&= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]\,\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{(zt)^n}{n!}dt
\end{aligned}
$$

$$
(p>0;\ p=0\ \text{ve}\ |z|<1;\ \mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0)
$$

olup, burada

$$
(1-zt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{(zt)^n}{n!}
$$

eşitliği dikkate alınırsa

$$F_p(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt$$

$$(p > 0;\ p = 0 \text{ ve } |\arg(1-z)| < \pi;\ \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir [5].

$$F_p(a,b;c;z) = \frac{e^{-2p}}{B(b,c-b)} \int_0^\infty u^{b-1}(1+u)^{a-c}[1+u(1-z)]^{-a} \exp\left[-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right] du \tag{4.5}$$

$$F_p(a,b;c;z) = \frac{2}{B(b,c-b)} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin\ \vartheta)^{2b-1}(\cos\ \vartheta)^{2c-2b-1}}{(1-z\sin^2\ \vartheta)^a} \exp(-p\ \sec^2\vartheta\ \csc^2\vartheta) d\vartheta \tag{4.6}$$

$$F_p(a,b;c;z) = \frac{2}{B(b,c-b)} \int_0^\infty \frac{(\sin h\ \vartheta)^{2b-1}(\cos h\ \vartheta)^{2a-2c+1}}{(\cos h^2\ \vartheta - z\sin h^2\ \vartheta)^a} \exp(-p\cos h^2\vartheta\ \cot h^2\vartheta) d\vartheta \tag{4.7}$$

$$(p > 0;\ p = 0 \text{ ve } |\arg(1-z)| < \pi;\ \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0)$$

İspat. (4.4) integral gösteriminde, $u = \frac{t}{1-t}$ dönüşümü yapılırsa (4.5), $t = \sin^2\ \vartheta$ dönüşümü yapılırsa (4.6) ve $t = \tan h^2\ \vartheta$ dönüşümü yapılırsa (4.7) elde edilir. ■

Teorem 4.5 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$F_p(a,b;c;z) = (1-z)^{-a} F_p\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \tag{4.8}$$

dönüşüm formülünü sağlar [5].

İspat. (4.4) integral gösteriminde $t = 1-u$ dönüşümü yapılırsa

$$F_p(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 (1-u)^{b-1}\ u^{c-b-1}\ [1-z(1-u)]^{-a}\ \exp\left[-\frac{p}{u(1-u)}\right] du$$

elde edilir. Burada

$$[1-z(1-u)]^{-a} = (1-z)^{-a}\left(1-\frac{z}{z-1}u\right)^{-a}$$

eşitliği ve Beta fonksiyonunun simetri özelliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
F_p(a,b;c;z) &= \frac{(1-z)^{-a}}{B(b,c-b)} \int_0^1 u^{c-b-1}(1-u)^{b-1} \left(1-\frac{z}{z-1}u\right)^{-a} \exp\left[-\frac{p}{u(1-u)}\right] du \\
&= \frac{(1-z)^{-a}}{B(c-b,b)} \int_0^1 u^{c-b-1}(1-u)^{b-1} \left(1-\frac{z}{z-1}u\right)^{-a} \exp\left[-\frac{p}{u(1-u)}\right] du \\
&= (1-z)^{-a} F_p\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.6 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$\Delta_a F_p(a,b;c;z) = \frac{b\,z}{c}\, F_p(a+1,b+1;c+1;z) \tag{4.9}$$

rekürans bağıntısını sağlar. Burada Δ_a,

$$\Delta_a F_p(a,b;c;z) = F_p(a+1,b;c;z) - F_p(a,b;c;z) \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanan bir fark operatörüdür [5].

İspat. (4.10) da (4.4) integral gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Delta_a F_p(a,b;c;z) &= F_p(a+1,b;c;z) - F_p(a,b;c;z) \\
&= \frac{z}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^b\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-zt)^{-a-1}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\
&= \frac{b\,z}{c}\frac{1}{B(b+1,c-b)} \int_0^1 t^b\,(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a-1} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\
&= \frac{b\,z}{c}\, F_p(a+1,b+1;c+1;z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.7

$$a\,\Delta_a F_p(a,b;c;z) = z\,\frac{d}{dz}\,\{F_p(a,b;c;z)\}$$

İspat. (4.9) da (4.2) nin dikkate alınmasıyla kolayca görülür. ■

Sonuç 4.8 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$$F_p(a,b;c;1) = \frac{B_p(b,c-a-b)}{B(b,c-b)} \tag{4.11}$$

$$(p>0; p=0 \text{ ve } \mathrm{Re}(c-a-b)>0)$$

eşitliği geçerlidir [5].

İspat. (4.4) integral gösteriminde $z = 1$ alınırsa (4.11) bulunur. ■

(4.11) de $p = 0$ alınırsa klasik Gauss hipergeometrik fonksiyonu için (2.11) de ifade edilen Gauss formülü elde edilir.

Sonuç 4.9 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$$F_p(a, b; a; 1) = \frac{B_p(b, -b)}{B(b, a-b)} = \frac{2\, e^{-2p}}{B(b, a-b)}\, K_b(2p) \tag{4.12}$$

eşitliği geçerlidir [5].

İspat. (4.11) de $c = a$ alınırsa

$$F_p(a, b; a; 1) = \frac{B_p(b, -b)}{B(b, a-b)}$$

elde edilir. Burada (3.44) ile verilen

$$B_p(b, -b) = 2\, e^{-2p}\, K_b(2p)$$

eşitliğinin dikkate alınmasıyla ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.10 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$$F_p(a, b; a+2b; 1) = \frac{B_p(b, b)}{B(b, a+b)} = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{-b}\, p^{(b-1)/2}\, e^{-2p}}{B(b, a+b)}\, W_{-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}}(4p) \tag{4.13}$$

eşitliği geçerlidir [5].

İspat. (4.11) de $c = a + 2b$ alınırsa

$$F_p(a, b; a+2b; 1) = \frac{B_p(b, b)}{B(b, a+b)}$$

elde edilir. Burada (3.47) ile verilen

$$B_p(b, b) = \sqrt{\pi}\, 2^{-b}\, p^{(b-1)/2}\, e^{-2p} W_{-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}}(4p)$$

eşitliğinin dikkate alınmasıyla ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.11 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$$e^{2p} F_p(a, b; c; z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(b)_{m+1}\, (c-b)_{n+1}}{(c)_{n+m+2}} L_m(p) L_n(p) F(a, b+m+1; c+n+m+2; z) \tag{4.14}$$

$$(p > 0;\ p = 0 \ \text{ve}\ |arg(1-z)| < \pi;\ \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0)$$

eşitliği geçerlidir [15].

İspat. (4.4) integral gösteriminde (3.38) ile verilen

$$\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] = e^{-2p}\sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p)\, t^{m+1}(1-t)^{n+1}, \qquad 0<t<1$$

eşitliği dikkate alınırsa

$$F_p(a,b;c;z)$$
$$= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}e^{-2p}\sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p)\, t^{m+1}(1-t)^{n+1}dt$$

olup, integral ile toplam işlemlerinin sırası değiştirilirse

$$F_p(a,b;c;z) = \frac{e^{-2p}}{B(b,c-b)}\sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p)\int_0^1 t^{m+b}(1-t)^{n+c-b}(1-zt)^{-a}dt \tag{4.15}$$

elde edilir. Diğer taraftan Gauss hipergeometrik fonksiyonunun (2.9) integral gösterimi dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{m+b}(1-t)^{n+c-b}(1-zt)^{-a}dt = \frac{B(m+b+1,n+c-b+1)}{B(b,c-b)}$$
$$\cdot\frac{1}{B(m+b+1,n+c-b+1)}\int_0^1 t^{m+b}(1-t)^{n+c-b}(1-zt)^{-a}dt$$
$$= \frac{(b)_{m+1}\,(c-b)_{n+1}}{(c)_{n+m+2}}F(a,b+m+1;c+n+m+2;z)$$

ifadesine ulaşılır. Bulunan bu ifade (4.15) de yerine yazılırsa

$$e^{2p}F_p(a,b;c;z) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(b)_{m+1}\,(c-b)_{n+1}}{(c)_{n+m+2}}L_m(p)L_n(p)F(a,b+m+1;c+n+m+2;z)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.12 Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$$(\sqrt{p})^{1-b}e^{3p/2}F_p(a,b;c;z) = \frac{(c-b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}(a)_n\, L_m(p)\,\frac{(\sqrt{p}z)^n\, p^{m/2}}{n!}$$
$$\cdot W_{\frac{b-1-n-m-2c}{2},\frac{n+m+b}{2}}(p) \tag{4.16}$$

$$(p\geq 0;\ \mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0;\ |z|<1)$$

eşitliği geçerlidir [15].

İspat.

$$\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]=\exp\left[-\frac{p}{t}\right]\exp\left[-\frac{p}{1-t}\right]$$

eşitliğinde (3.37) ile verilen

$$\exp\left[-\frac{p}{1-t}\right]=e^{-p}(1-t)\sum_{m=0}^{\infty}L_m(p)\,t^m,\qquad |t|<1$$

ifadesi dikkate alınırsa

$$\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]=e^{-p}\ \exp\left[-\frac{p}{t}\right](1-t)\sum_{m=0}^{\infty}L_m(p)\,t^m,\qquad |t|<1 \quad (4.17)$$

bulunur. Bu ifade (4.4) integral gösteriminde yerine yazılırsa

$$F_p(a,b;c;z)=\frac{e^{-p}}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}(1-zt)^{-a}\exp\left[-\frac{p}{t}\right]\sum_{m=0}^{\infty}L_m(p)\,t^m dt$$

elde edilir. $(1-zt)^{-a}$ nın seri açılımı kullanılır ve integral ile toplam işlemlerinin sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned}
&e^pF_p(a,b;c;z)\\
&=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}\exp\left[-\frac{p}{t}\right]\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{(zt)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}L_m(p)\,t^m dt\\
&=\frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}(a)_n\frac{z^n}{n!}L_m(p)\left\{\int_0^1 t^{n+m+b-1}(1-t)^{c-b}\exp\left[-\frac{p}{t}\right]dt\right\}
\end{aligned} \quad (4.18)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.24) eşitliğinde $u=1$, $\nu=n+m+b$, $\mu=c-b+1$, $\beta=p$ alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{n+m+b-1}(1-t)^{c-b}\exp\left[-\frac{p}{t}\right]dt&=\Gamma(c-b+1)\,p^{(n+m+b-1)/2}\,e^{-p/2}\\
&\cdot W_{\frac{b-1-n-m-2c}{2},\frac{n+m+b}{2}}(p)\end{aligned}$$

dır. Bu son eşitlik, (4.18) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}(\sqrt{p})^{1-b}e^{3p/2}F_p(a,b;c;z)&=\frac{(c-b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}(a)_n\,L_m(p)\,\frac{(\sqrt{p}z)^n\,p^{m/2}}{n!}\\
&\cdot W_{\frac{b-1-n-m-2c}{2},\frac{n+m+b}{2}}(p)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.2 GENİŞLETİLMİŞ KONFLUENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYONU

Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\Phi_p(b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_p(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!} \tag{4.19}$$

$$(p \geq 0;\ \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0)$$

şeklinde tanımlanır [5].

Ayrıca $p = 0$ için genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu klasik konfluent hipergeometrik fonksiyonuna indirgenir.

Teorem 4.13 Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dz}\{\Phi_p(b;c;z)\} = \frac{b}{c}\,\Phi_p(b+1;c+1;z) \tag{4.20}$$

dir [5].

İspat. (4.19) eşitliğinin her iki yanının z ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\{\Phi_p(b;c;z)\} &= \frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_p(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_p(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_p(b+n+1, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!} \\
&= \frac{b}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_p(b+1+n, c-b)}{B(b+1, c-b)} \frac{z^n}{n!} \\
&= \frac{b}{c}\,\Phi_p(b+1;c+1;z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.14 Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonunun k. basamaktan türevi

$$\frac{d^k}{dz^k}\{\Phi_p(b;c;z)\} = \frac{(b)_k}{(c)_k}\,\Phi_p(b+k;c+k;z), \qquad k \in \mathbb{N}_0 \tag{4.21}$$

dir [5].

İspat. Bu ifadeyi görmek için tümevarım yöntemini kullanmak yeterlidir. ■

Teorem 4.15 Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\Phi_p(b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \exp\left[zt - \frac{p}{t(1-t)}\right] dt \qquad (4.22)$$

$$(p > 0;\ p = 0 \text{ ve } \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0)$$

integral gösterimine sahiptir [5].

İspat. (4.19) da genişletilmiş Beta fonksiyonunun (3.1) integral gösterimi dikkate alınırsa

$$\Phi_p(b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left\{ \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \right\}$$

elde edilir. Burada toplam ile integral yer değiştirilirse

$$\begin{aligned}
\Phi_p(b;c;z) &= \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} dt \\
&= \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] \exp(zt) dt \\
&= \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \exp\left[zt - \frac{p}{t(1-t)}\right] dt
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.16 Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\Phi_p(b;c;z) = e^z\, \Phi_p(c-b;c;-z) \qquad (4.23)$$

dönüşüm formülünü sağlar [5].

İspat. (4.22) integral gösteriminde $t = 1-u$ dönüşümü uygulanır ve Beta fonksiyonunun simetri özelliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\Phi_p(b;c;z) &= \frac{e^z}{B(b,c-b)} \int_0^1 u^{c-b-1}(1-u)^{b-1} \exp\left[-zu - \frac{p}{u(1-u)}\right] du \\
&= \frac{e^z}{B(c-b,b)} \int_0^1 u^{c-b-1}(1-u)^{b-1} \exp\left[-zu - \frac{p}{u(1-u)}\right] du \\
&= e^z\, \Phi_p(c-b;c;-z)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.17 Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu için

$$e^{2p}\Phi_p(b;c;z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(b)_{m+1}\,(c-b)_{n+1}}{(c)_{n+m+2}} L_m(p)L_n(p)\Phi(b+m+1;c+n+m+2;z) \tag{4.24}$$

$$(p \geq 0;\ \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0)$$

eşitliği geçerlidir [15].

İspat. (3.38) ile verilen

$$\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] = e^{-2p} \sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p)\, t^{m+1}(1-t)^{n+1}, \qquad 0 < t < 1$$

eşitliği (4.22) integral gösteriminde dikkate alınırsa

$$\Phi_p(b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} e^{zt} e^{-2p} \sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p)\, t^{m+1}(1-t)^{n+1} dt$$

elde edilir. Burada integral ile toplam işlemlerinin sırası yer değiştirilirse

$$e^{2p}\Phi_p(b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \sum_{m,n=0}^{\infty} L_n(p)\, L_m(p) \int_0^1 t^{m+b}(1-t)^{n+c-b} e^{zt} dt \tag{4.25}$$

bulunur. Diğer taraftan konfluent hipergeometrik fonksiyonunun (2.15) integral gösterimi dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{m+b}(1-t)^{n+c-b} e^{zt} dt &= \frac{B(m+b+1, n+c-b+1)}{B(b,c-b)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{B(m+b+1, n+c-b+1)} \int_0^1 t^{m+b}(1-t)^{n+c-b} e^{zt} dt \\ &= \frac{(b)_{m+1}\,(c-b)_{n+1}}{(c)_{n+m+2}} \Phi(b+m+1;c+n+m+2;z)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitlik (4.25) de yerine yazılırsa

$$e^{2p}\Phi_p(b;c;z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(b)_{m+1}\,(c-b)_{n+1}}{(c)_{n+m+2}} L_m(p)L_n(p)\Phi(b+m+1;c+n+m+2;z)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.18 Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu için

$$(\sqrt{p})^{1-b} e^{3p/2} \Phi_p(b;c;z) = \frac{(c-b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{m,n=0}^{\infty} L_m(p)\, \frac{(\sqrt{p}z)^n\, p^{m/2}}{n!} W_{\frac{b-1-n-m-2c}{2},\frac{n+m+b}{2}}(p) \tag{4.26}$$

$$(p \geq 0,\ \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0)$$

eşitliği geçerlidir [15].

İspat. (4.17) ile verilen

$$\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] = e^{-p}\ \exp\left[-\frac{p}{t}\right](1-t)\sum_{m=0}^{\infty} L_m(p)\, t^m$$

eşitliği (4.22) integral gösteriminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi_p(b;c;z) &= \frac{e^{-p}}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b} \exp\left[-\frac{p}{t}\right] e^{zt} \sum_{m=0}^{\infty} L_m(p)\, t^m dt \\
&= \frac{e^{-p}}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b} \exp\left[-\frac{p}{t}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} L_m(p)\, t^m dt
\end{aligned}$$

olup, integral ile toplam yer değiştirilirse

$$e^p \Phi_p(b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} L_m(p) \int_0^1 t^{n+m+b-1}(1-t)^{c-b} \exp\left[-\frac{p}{t}\right] dt \tag{4.27}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.24) eşitliğinde $u = 1$, $\nu = n+m+b$, $\mu = c-b+1$, $\beta = p$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{n+m+b-1}(1-t)^{c-b} \exp\left[-\frac{p}{t}\right] dt = \Gamma(c-b+1)\, p^{(n+m+b-1)/2}\, e^{-p/2} \\
\cdot W_{\frac{b-1-n-m-2c}{2},\frac{n+m+b}{2}}(p)
\end{aligned}$$

dır. Bu son eşitlik (4.27) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\sqrt{p})^{1-b} e^{3p/2} \Phi_p(b;c;z) = \frac{(c-b)\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{m,n=0}^{\infty} L_m(p) \frac{(\sqrt{p}z)^n p^{m/2}}{n!} W_{\frac{b-1-n-m-2c}{2},\frac{n+m+b}{2}}(p)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.3 GENİŞLETİLMİŞ APPELL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Genişletilmiş birinci ve ikinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonları sırasıyla

$$F_{1,p}(a,b,c;d;x,y)=\sum_{n,m=0}^{\infty}(b)_n\,(c)_m\frac{B_p(a+m+n,d-a)}{B(a,d-a)}\,\frac{x^n}{n!}\,\frac{y^m}{m!} \tag{4.28}$$

$$(\max\{|x|,|y|\}<1)$$

$$F_{2,p}(a,b,c;d,e;x,y)=\sum_{n,m=0}^{\infty}(a)_{m+n}\frac{B_p(b+n,d-b)B_p(c+m,e-c)}{B(b,d-b)B(c,e-c)}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \tag{4.29}$$

$$(|x|+|y|<1)$$

şeklinde tanımlanır [16].

$p=0$ için genişletilmiş Appell hipergeometrik fonksiyonları klasik Appell hipergeometrik fonksiyonlarına indirgenir.

Teorem 4.19 Genişletilmiş birinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}&F_{1,p}(a,b,c;d;x,y)\\&=\frac{1}{B(a,d-a)}\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{d-a-1}\,(1-xt)^{-b}\,(1-yt)^{-c}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$(p>0;\ p=0\ \text{ve}\ |\arg(1-x)|<\pi,\ |\arg(1-y)|<\pi;\ \mathrm{Re}(d)>\mathrm{Re}(a)>0)$$

intgeral gösterimine sahiptir [16].

İspat.

$$(1-xt)^{-b}=\sum_{n=0}^{\infty}(b)_n\frac{(xt)^n}{n!}$$

$$(1-yt)^{-c}=\sum_{m=0}^{\infty}(c)_m\frac{(yt)^m}{m!}$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$(1-xt)^{-b}(1-yt)^{-c}=\sum_{n,m=0}^{\infty}(b)_n(c)_m\frac{(xt)^n}{n!}\frac{(yt)^m}{m!}$$

olur. Bu eşitlik (4.30) un sağ yanındaki integralde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{d-a-1}\,(1-xt)^{-b}\,(1-yt)^{-c}\,\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt \\
&= \int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{d-a-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]\sum_{n,m=0}^{\infty}(b)_n(c)_m\frac{(xt)^n}{n!}\frac{(yt)^m}{m!}dt \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty}(b)_n(c)_m\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}\int_0^1 t^{a+m+n-1}\,(1-t)^{d-a-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty}(b)_n(c)_m B_p(a+m+n,d-a)\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \\
&= B(a,d-a)\sum_{n,m=0}^{\infty}(b)_n(c)_m\frac{B_p(a+m+n,d-a)}{B(a,d-a)}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \\
&= B(a,d-a)F_{1,p}(a,b,c;d;x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler sırasında, $|x|<1, |y|<1$ için

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}(b)_n(c)_m\frac{(xt)^n}{n!}\frac{(yt)^m}{m!}$$

serisi düzgün yakınsak ve $\mathrm{Re}(d)>\mathrm{Re}(a)>0$, $p\geq 0$ için

$$\int_0^1 t^{a+m+n-1}\,(1-t)^{d-a-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt$$

integrali mutlak yakınsak olduğundan, integral ile toplam işlemlerinin sırası değiştirilmiştir. ■

Teorem 4.20 Genişletilmiş ikinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
F_{2,p}(a,b,c;d,e;x,y) &= \frac{1}{B(b,d-b)\,B(c,e-c)} \\
&\cdot\int_0^1\int_0^1\frac{t^{b-1}\,(1-t)^{d-b-1}\,s^{c-1}\,(1-s)^{e-c-1}}{(1-xt-ys)^a}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}-\frac{p}{s(1-s)}\right]dtds
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$(p>0;\ p=0 \text{ ve } |x|+|y|<1; \mathrm{Re}(d)>\mathrm{Re}(b)>0, \mathrm{Re}(e)>\mathrm{Re}(c)>0)$$

integral gösterimine sahiptir [16].

İspat.

$$\sum_{N=0}^{\infty}f(N)\frac{(x+y)^N}{N!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}f(n+m)\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}$$

formülünden [22]

$$\begin{aligned}(1-xt-ys)^{-a} &= \sum_{N=0}^{\infty}(a)_N \frac{(xt+ys)^N}{N!} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}(a)_{m+n}\frac{(xt)^n}{n!}\frac{(ys)^m}{m!}\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik (4.31) in sağ yanındaki integralde yerine yazılırsa

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{d-b-1}s^{c-1}(1-s)^{e-c-1}}{(1-xt-ys)^a}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}-\frac{p}{s(1-s)}\right]dtds$$

$$\begin{aligned}&=\int_0^1\int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{d-b-1}\,s^{c-1}\,(1-s)^{e-c-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}-\frac{p}{s(1-s)}\right] \\ &\qquad\cdot\sum_{n,m=0}^{\infty}(a)_{m+n}\frac{(xt)^n}{n!}\frac{(ys)^m}{m!}dtds \\ &=\sum_{n,m=0}^{\infty}(a)_{m+n}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}\int_0^1\int_0^1 t^{b+n-1}\,(1-t)^{d-b-1}\,s^{c+m-1}\,(1-s)^{e-c-1} \\ &\qquad\cdot\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}-\frac{p}{s(1-s)}\right]dtds \\ &=\sum_{n,m=0}^{\infty}(a)_{m+n}B_p(b+n,d-b)\,B_p(c+m,e-c)\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \\ &=B(b,d-b)\,B(c,e-c)\sum_{n,m=0}^{\infty}(a)_{m+n}\frac{B_p(b+n,d-b)\,B_p(c+m,e-c)}{B(b,d-b)\,B(c,e-c)}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \\ &=B(b,d-b)\,B(c,e-c)F_{2,p}(a,b,c;d,e;x,y)\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler sırasında, $|x|+|y|<1$ için

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}(a)_{m+n}\frac{(xt)^n}{n!}\frac{(ys)^m}{m!}$$

serisi düzgün yakınsak, $(\mathrm{Re}(d)>\mathrm{Re}(b)>0, p\geq 0)$ ve $(\mathrm{Re}(e)>\mathrm{Re}(c)>0, p\geq 0)$ için sırasıyla

$$\int_0^1 t^{b+n-1}\,(1-t)^{d-b-1}\exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right]dt$$

$$\int_0^1 s^{c+m-1}\,(1-s)^{e-c-1}\exp\left[-\frac{p}{s(1-s)}\right]ds$$

integralleri mutlak yakınsak olduğundan, integral ile toplam işlemlerinin sırası yer değiştirilmiştir. ■

Teorem 4.21 Genişletilmiş birinci çeşit Appell fonksiyonu için

$$F_{1,p}(a,b,c;d;x,y) = \frac{1}{B(a,d-a)} \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(b,c)}(x,y)\, B_p(n+a,d-a) \quad (4.32)$$

$$(p \geq 0 \text{ ve } |x| < 1,\ |y| < 1;\ \mathrm{Re}(d) > \mathrm{Re}(a) > 0)$$

eşitliği geçerlidir [15].

İspat. (4.30) da (2.25) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} &F_{1,p}(a,b,c;d;x,y) \\ &= \frac{1}{B(a,d-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{d-a-1} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(b,c)}(x,y)\, t^n dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|x| < 1,\ |y| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(b,c)}(x,y) t^n$$

serisi düzgün yakınsak ve $\mathrm{Re}(d) > \mathrm{Re}(a) > 0, p \geq 0$ için

$$\int_0^1 t^{a+n-1}(1-t)^{d-a-1} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt$$

integrali mutlak yakınsak olduğundan integral ile toplam yer değiştirilirse

$$\begin{aligned} &F_{1,p}(a,b,c;d;x,y) \\ &= \frac{1}{B(a,d-a)} \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(b,c)}(x,y) \int_0^1 t^{a+n-1}(1-t)^{d-a-1} \exp\left[-\frac{p}{t(1-t)}\right] dt \\ &= \frac{1}{B(a,d-a)} \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(b,c)}(x,y)\, B_p(a+n,d-a) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

KAYNAKLAR

[1] Altın, A. *Uygulamalı Matematik,* Gazi Kitabevi, Ankara, **2011**.

[2] Andrews, L.C. *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians*, Macmillan Company, New York, **1984**.

[3] Bailey, W. N. *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, New York, London, **1964**.

[4] Chaudhry, M. A.; Qadir, A.; Rafique, M.; Zubair, S. M. *Extension of Euler's beta function,* J. Comput. Appl. Math. **1997**, 78, 19-32.

[5] Chaudhry, M. A.; Qadir, A.; Srivastava, H. M.; Paris, R. B. *Extended hypergeometric and confluent hypergeometric function,* Appl. Math. Comput. **2004**, 159, 589-602.

[6] Chaudhry, M.A.; Zubair, S.M. *On a Class of Incomplete Gamma Functions with Applications,* CRC Press (Chapman and Hall), Boca Raton, FL, **2002**.

[7] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Tables Of Integral Transforms,* Vol.I. McGraw-Hill, Newyork, London, Toronto, **1954**.

[8] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions,* Vol.I. McGraw-Hill, Newyork, London, Toronto, **1953**.

[9] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions,* Vol.II. McGraw-Hill, Newyork, London, Toronto, **1953**.

[10] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions,* Vol.III. McGraw-Hill, Newyork, **1955**.

[11] Erkuş E. *Jacobi ve Lagrange Polinomlarının Özelliklerinde Bazı Genişletmeler*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 66s, **2005**.

[12] Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. *Table of integrals, Series and Products,* (Edited by Jeffrey A. and Zwillinger D.), seven ed., Academic Press, USA, **2007**.

[13] Kilbas, A.A.; Srivastava, H.M.; Trujillo, J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* North-Holland mathematics studies, vol.204. Elsevier, Amsterdam, **2006**.

[14] Miller, A.R. *Remarks on a generalized beta function,* J. Comput. Appl. Math. **1998**, 100, 23-32.

[15] Özarslan, M.A. *Some Remarks on Extended Hypergeometric, Extended Confluent Hypergeometric and Extended Appell's Functions,* J. Comput. Anal. Appl. **2012**, 14, 1148-1153.

[16] Özarslan, M.A.; Özergin, E. *Some generating relations for extended hypergeometric functions via generalized fractional derivative operator,* Math. Comput. Modelling **2010**, 52, 1825-1833.

[17] Özergin, E.; Özarslan, M.A.; Altın, A. *Extension of Gamma, Beta and Hypergeometric Functions*, J. Comput. Appl. Math. **2011**, 235, 4601-4610.

[18] Özergin, E. *Some Properties of Hypergeometric Functions*, Doktora Tezi, Eastern Mediterranean University, Gazimağusa, 62s, **2011**.

[19] Prudnikov, A.P.; Brychkov, Yu. A.; Marichev, O.I. *Integrals and series*, vol. II, Gordon and Breach Science Publishers, New York, **1971**.

[20] Prudnikov, A. P.; Brychkov, Yu. A.; Marichev, O.I. *İntegrals and Series,* Vol.III. Gordon and Breach, New York, **1990**.

[21] Rainville, E.D. *Special Functions*, Macmillan Company, New York, **1965**.

[22] Srivastava, H. M.; Manocha, H. L. *A Treatise on Generating Functions,* Halsted Press Wiley, New York, **1984**

[23] Srivastava, R. *Some Families of Combinatorial and Other Series Identities and Their Applications*, Appl. Math. Comput. **2011**, 218, 1077-1083.

[24] Srivastava, H.M.; Parmar, R.K.; Chopra, P. *A Class of Extended Fractional Derivative Operators and Associated Generating Relations Involving Hypergeometric Functions*, Axioms **2012**, 1, 238-258.

[25] Şahin, R.; Altın, A. *An Extension of F_1, F_2, F_3 Appell's Hypergeometric Functions*, Ars Combin **2011**, 100, 97-105.

[26] Şahin, R. *Çok Değişkenli Hipergeometrik Fonksiyonlar*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 69s, **2011**.

[27] Wang, Z.X.; Guo, D.R. *Special Functions*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong,**1989**.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı	: Özlem AYAZ
Doğum Yeri	: Gaziantep
Doğum Tarihi	: 25.05.1988
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim

Orta Öğrenim	: Gaziantep Lisesi, 2002-2005
Lisans	: Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2007-2011.
Yüksek Lisans	: Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2011-...