T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Fatih DERİNGÖZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2015

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Fatih DERİNGÖZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

KIRŞEHİR 2015

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Üye
Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Üye
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Üye
Prof. Dr. Levent KULA

Üye
Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2015

Prof. Dr. Levent KULA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Doktora tezi olarak sunduğum "Harmonik Analizin İntegral Operatörlerinin Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey Uzaylarında Sınırlılığı" başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Fatih DERİNGÖZ

HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Doktora Tezi

Fatih DERİNGÖZ

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Haziran 2015

ÖZET

Bu çalışmada harmonik analizin integral operatörlerinin genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığı incelenmiş ve birçok yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, literatürde bu konu ile ilgili araştırmaları olan birçok matematikçi hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmamız ile ilgili olan temel kavramlar, uzaylar ve operatörler hakkında genel bilgilere ve bazı temel tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde maksimal, singüler ve potansiyel operatörlerin Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarının tanımı ve Orlicz, Morrey ve genelleştirilmiş Morrey uzayları ile olan ilişkisi verilmiştir.

Çalışmamızın sonuncu bölümü olan beşinci bölümde, "Guliyev metodu" yardımıyla elde edilen maksimal, singüler ve potansiyel operatörlerin genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Orlicz Uzayları, Morrey Uzayları, Genelleştirilmiş Morrey Uzayları, Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey Uzayları, Maksimal Operatör, Singüler Operatör, Potansiyel Operatör.

Sayfa Adedi: 59

Danışman: Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

BOUNDEDNESS OF INTEGRAL OPERATORS OF HARMONIC ANALYSIS ON GENERALIZED ORLICZ-MORREY SPACES

Ph.D. Thesis

Fatih DERİNGÖZ

Ahi Evran University

Institute of Science

June 2015

ABSTRACT

In this study, the boundedness of integral operators of harmonic analysis on generalized Orlicz-Morrey spaces is investigated and many new results are obtained.

This study is arranged in five chapters, in the first chapter, information is given about many mathematicians studying in this field in the literature and also about purpose of this study.

In the second chapter, some basic definitions and general informations about basic concepts, spaces and operators related to this study are given.

In the third chapter, the boundedness of maximal, singular and potential operators on Orlicz spaces is investigated with all details.

In the fourth chapter, the definition of generalized Orlicz-Morrey spaces and the relation of these spaces with Orlicz, Morrey and generalized Morrey spaces is given.

In the fifth chapter which is last part of this study, the results about the boundedness of maximal, singular and potential operators on generalized Orlicz-Morrey spaces that are obtained by "Guliyev's method" is given.

Keywords: Orlicz Spaces, Morrey Spaces, Generalized Morrey Spaces, Generalized Orlicz-Morrey Spaces, Maximal Operator, Singular Operator, Potential Operator.

Number of Pages 59

Supervisor: Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmalarımın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e ve her ihtiyaç duyduğumda bana yardımcı olan, değerli ve derin bilgileriyle ışık tutan, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ali AKBULUT'a minnetlerimi sunarım.

Doktora öğrenimim boyunca manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen başta saygıdeğer hocam Prof. Dr. Levent KULA olmak üzere bölümümüzün değerli hocalarına şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan kıymetli anne ve babama, beni bu tarz çalışmalara teşvik eden değerli kardeşime, bu zorlu süreçte her zaman yanımda olan ve sonsuz desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşime ve biricik oğluma teşekkürlerimi iletirim.

Ayrıca doktora süresince maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (BAP [1]) teşekkür ederim.

Fatih DERİNGÖZ

[1]Tezin yazarı Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi kapsamında PYO-FEN 4003.13.003 ve PYO-FEN 4001.13.012 proje numaraları ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de p-lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$WL^p(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Lebesgue uzayı
$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$	Orlicz uzayı
$WL^\Phi(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Orlicz uzayı
$\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$W\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Morrey uzayı
$\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$W\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı
$\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı
$W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
T	Calderón-Zygmund operatörü
I_α	Riesz potansiyeli

1 GİRİŞ

Harmonik analizin klasik operatörlerinin-maksimal, singüler, potansiyel operatörler vs.- çeşitli fonksiyon uzaylarındaki sınırlılığı yoğun bir şekilde araştırılmaktadır. Bu operatörlerin Lebesgue uzaylarındaki zayıf ve güçlü tipli sınırlılıkları klasiktir ve [4, 49, 51] kaynaklarında bulunabilir. Bu elde edilen sonuçlar Lebesgue uzaylarının genelleştirilmesi olan birçok fonksiyon uzayına genişletilmiştir. Örneğin Orlicz uzayları, Morrey uzayları, Lorentz Uzayları, Herz uzayları vs. Bu operatörlerin Orlicz uzaylarındaki zayıf ve güçlü tipli sınırlılıkları [11, 26, 27] çalışmalarında, Morrey uzaylarındaki zayıf ve güçlü tipli sınırlılıkları ise [1, 9, 17, 41] çalışmalarında elde edilmiştir.

Birnbaum ve Orlicz [6] ve Orlicz [40] tarafından tanıtılan Orlicz uzayları, Lebesgue uzaylarının bir genelleştirilmesidir ve olasılık teorisi, istatistik, potansiyel teori, harmonik analizde olduğu gibi analizin bazı diğer alanlarında da kullanılan önemli bir araçtır. Orlicz uzayları ayrıca $L^1(\mathbb{R}^n)$ uzayı çalışmadığında onun yerini dolduran uygun bir alternatiftir. Örneğin Hardy-Littlewood maksimal operatörü $1 < p \leq \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır fakat $L^1(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı değildir. Orlicz uzayları kullanılarak bu operatörün $p = 1$ yakınındaki sınırlılığı araştırılabilmektedir.

Klasik Morrey uzayları, ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırma çalışmalarında Morrey [34] tarafından ortaya konulmuştur.

Maksimal, singüler ve potansiyel operatörlerin, Morrey uzaylarının genişlemesi olan genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı Nakai [36] tarafından araştırılmıştır. Guliyev [21], matematik literatüründe önem verilen genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normunu tanımlamış ve doktora tezinde [19] ortaya koyduğu "Guliyev metodu" olarak adlandırılan metot yardımıyla genelleştirilmiş Morrey uzayında harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığını Nakai'ye göre daha zayıf şartlar altında araştırmıştır. Sonrasında bu şartlar Akbulut ve ark. [3] ve Guliyev ve ark. [23] tarafından daha da zayıflatılmıştır.

Fonksiyon uzayları teorisinde doğal bir adım fonksiyonların regülerliğinin "Morrey-tipli ölçümünün" yuvar üzerindeki Lebesgue normu yerine Orlicz normu ile yapıldığı Orlicz-Morrey uzayları ile çalışmalar yapmaktır. Bu tipteki uzaylar ilk olarak Nakai [37] tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra Sawano ve ark. [46] başka bir tip Orlicz-Morrey uzayını tanıtmıştır.

Bu çalışmada Guliyev'in genelleştirilmiş Morrey uzayı tanımından yola çıkarak Orlicz ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarını birleştiren genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayları olarak adlandırılan yeni bir tip Orlicz-Morrey uzayı tanıtılmış ve Guliyev'in ispat tekniğinden faydalanılarak bu uzaylarda maksimal, singüler ve potansiyel operatörlerin güçlü ve zayıf sınırlılıkları hakkında yeni sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar "Operator Theory, Operator Algebras and Applications. Series: Operator Theory: Advances and Applications, Vol 242" kitabında bir bölüm ve "Journal of Function Spaces, Vol 2014" dergisinde bir araştırma makalesi olarak yayınlanmıştır.

2 ÖN BİLGİLER

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı; $x \cdot y = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ iç çarpımı ve buna karşılık gelen $|x| = \big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\big)^{1/2}$ normu ile $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm $x = (x_1, \ldots, x_n)$ noktalarının kümesidir.

$\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue ölçüsü $dx = dx_1 \ldots dx_n$ ve $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue ölçüsü $|A|$ ile gösterilecektir.

Eğer $N \subset B$ ve $|B| = 0$ olacak şekildeki bir B Borel kümesi varsa $N \subset \mathbb{R}^n$ kümesine ihmal edilebilir küme denir. B Borel kümesi ve N ihmal edilebilir bir küme olmak üzere $A = B \cup N$ ise A kümesine (Lebesgue) ölçülebilirdir denir. A ölçülebilir bir küme ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilirse $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (Lebesgue) ölçülebilir olarak adlandırılır. N ihmal edilebilir bir küme olmak üzere bir özellik eğer $A \setminus N$ kümesinde sağlanıyorsa bu özellik A kümesinde "hemen her yerde" sağlanıyordur denir. Bu deyim kısaca "h.h.y." ile gösterilir.

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$, merkezi x, yarıçap uzunluğu r olan açık yuvarı ve ${}^{c}B(x, r) = \mathbb{R}^n \setminus B(x, r)$ onun tümleyenini göstersin. $\nu_n = |B(0, 1)|$ olmak üzere

$$|B(x, r)| = \nu_n r^n = \frac{2\pi^{n/2} r^n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{1}{n}\omega_{n-1} r^n$$

biçimindedir. Burada $\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $\mathbb{R}^n$ de $n \geq 1$ için yarıçapı 1 olan $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ küresinin yüzey alanıdır.

$f : A \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} f(x) = \inf \{K \in \mathbb{R} : |\{x \in A : f(x) > K\}| = 0\}$$

ve

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x \in A} f(x) = \sup \{K \in \mathbb{R} : |\{x \in A : f(x) < K\}| = 0\}$$

olarak tanımlanır. f, A kümesinde ölçülebilir negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere, bu kavramlar arasında

$$\Big(\operatorname*{ess\,inf}_{x \in A} f(x)\Big)^{-1} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} \frac{1}{f(x)} \tag{2.1}$$

ilişkisi vardır [52].

C pozitif bir sabit olmak üzere bu çalışmada $A \lesssim B$ gösterimini $A \leq CB$, eşitsizliğinin yerine kullanacağız. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir.

2.1 Lebesgue Uzayları

Tanım 2.1.1 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı veya p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı üzerindeki norm

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

ile tanımlanır.

$p = \infty$ için $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı,

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfıdır.

Teorem 2.1.2 Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L^p(\mathbb{R}^n)$ bir Banach uzayıdır [29].

Teorem 2.1.3 (Young Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. Bu durumda her $a, b > 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a^p = b^{p'}$ olması ile mümkündür [29].

Teorem 2.1.4 (Hölder Eşitsizliği) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlar, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

eşitsizliği sağlanır [44].

Teorem 2.1.5 (**Jensen Eşitsizliği**) $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex bir fonksiyon, $|\Omega| < \infty$ olmak üzere $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $\langle f \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)dx$ olsun. Eğer $f \in L^1(\Omega)$ ise

$$\langle J \circ f \rangle \geq J(\langle f \rangle)$$

olur [30].

Teorem 2.1.6 (**Chebyshev Eşitsizliği**) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$$

eşitsizliği gerçeklenir [52].

Tanım 2.1.7 $1 \leq p < \infty$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\|f\|_{WL^p} = \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere zayıf Lebesgue uzayı $WL^p(\mathbb{R}^n)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$WL^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f - \text{ölçülebilir} \ \& \ \|f\|_{WL^p} < \infty\}.$$

Uyarı 2.1.8 $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow WL^p(\mathbb{R}^n)$. Dahası $\|f\|_{WL^p} \leq \|f\|_{L^p}$ eşitsizliği sağlanır [18].

Tanım 2.1.9 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ nin her bir kompakt K alt kümesi için sırasıyla $f\chi_K \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_K \in WL^p(\mathbb{R}^n)$ şartlarını sağlayan tüm ölçülebilir f fonksiyonların uzayı $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $WL^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Burada χ_K, K kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir. Özel olarak $p = 1$ yani $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ise f fonksiyonu lokal integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.1.10 Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun desteği

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır. Yani f fonksiyonunun desteği onun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapanışıdır. Eğer supp$f$ sınırlı bir küme ise f fonksiyonuna kompakt desteğe sahiptir denir.

Teorem 2.1.11 (**Lebesgue diferansiyellenebilme teoremi**) $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0} \frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}} = |f(x)|$$

eşitliği gerçeklenir [18].

Tanım 2.1.12 $\log^+ t = \max(\log t, 0),\ t > 0$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L \log L$ Zygmund uzayı denir.

2.2 Morrey Uzayları

Klasik Morrey uzayları, 1938 yılında Morrey [34] tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları araştırılırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenilirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının önemli uygulamaları Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride ortaya çıkmıştır.

Tanım 2.2.1 $1 \le p < \infty,\ 0 \le \lambda \le n,\ f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) :\ ||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}}$ normu

$$\begin{aligned} ||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

$\lambda = 0$ için $\mathcal{M}^{p,0}(\mathbb{R}^n) \equiv L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda = n$ için $\mathcal{M}^{p,n}(\mathbb{R}^n) \equiv L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olur. Burada Θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir. Gerçekten, ilk olarak

$\lambda < 0$ ve $f \in \mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $\|f\|_{L^p(B(x,r))} = \|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$\|f\|_{L^p(B(x,r))} \leq r^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{M}^{p,\lambda}}$$

olur. Sonuç olarak

$$\|f\|_{L^p} = \lim_{r\to\infty} \|f\|_{L^p(B(x,r))} = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \quad \text{h.h. } x \in \mathbb{R}^n$$

elde edilir.

Şimdi $\lambda > n$ ve $f \in \mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$\frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}} \leq v_n^{-\frac{1}{p}} r^{\frac{\lambda-n}{p}} \|f\|_{\mathcal{M}^{p,\lambda}}$$

olur. Burada Teorem 2.1.11 kullanılırsa hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = 0$ olması elde edilir.

$W\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilen zayıf Morrey uzayı

$$\|f\|_{WM^{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL^p(B(x,r))} < \infty$$

olacak şekildeki bütün $f \in WL^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır. Burada $\|f\|_{WL^p(B(x,r))} = \|f\chi_{B(x,r)}\|_{WL^p}$ dir.

2.3 Genelleştirilmiş Morrey Uzayları

Morrey uzayının tanımındaki kuvvet fonksiyonu r^λ yerine bir $\varphi(r)$ veya daha genel olarak bir $\varphi(x,r)$ fonksiyonu alarak Morrey uzaylarını genelleştirme çalışmaları, bilindiği kadarıyla ilk olarak Dzhumakaeva ve Nauryzbaev [15] tarafından yapılmıştır. Bu tarz genelleştirmeler için Zorko [54] ve Mizuhara [33] çalışmaları da örnek olarak verilebilir. Bu çalışmalarda çoğunlukla φ fonksiyonu üzerine r ye bağlı bazı monotonluk tipli şartlar konulmuştur.

Genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normlu hali ve zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı, Guliyev [21] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.1 $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Genelleştirilmiş Morrey uzayı $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{L^p(B(x,r))} < \infty$$

şartını sağlayan $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Uyarı 2.3.2 $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının aşikar olmaması için yani $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \neq \Theta$ olması için belli $t_1, t_2 > 0$ sayıları için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\varphi(x,r)^{-1}|B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\|_{L^\infty(t_1,\infty)} < \infty, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\varphi(x,r)^{-1}\|_{L^\infty(0,t_2)} < \infty$$

şartlarının sağlanması gerekir [8].

Ayrıca zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı $W\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\|f\|_{W\mathcal{M}^{p,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{WL^p(B(x,r))} < \infty$$

şartını sağlayan bütün $f \in WL^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ için

$$\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}, \qquad W\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = W\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

olduğu görülür.

2.4 Maksimal, Singüler ve Potansiyel Operatörler

Tanım 2.4.1 f lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, Hardy-Littlewood maksimal operatörü M

$$Mf(x) = \sup_{B\ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlı operatördür. Burada supremum x noktasını içeren bütün $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarları üzerinden alınmaktadır.

Tanım 2.4.2 f lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere I_α kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli)

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlı operatördür.

Tanım 2.4.3 $K(x,y)$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\}$ üzerinde sürekli ve

$$\text{Her } x \neq y \text{ için } |K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n},$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\frac{|y-z|^{\sigma}}{|x-y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad |x-y| > 2|y-z|,$$

$$|K(x,y) - K(\xi,y)| \leq C\frac{|x-\xi|^{\sigma}}{|x-y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad |x-y| > 2|x-\xi|$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ kompakt desteğe sahip bir fonksiyon olmak üzere $L^2(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy, \qquad x \notin \operatorname{supp}(f)$$

eşitliğiyle tanımlı operatörler Calderón-Zygmund tipli singüler operatörler olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar kümesinin bir lineer alt uzayı $\mathcal{G}$ olmak üzere $\mathcal{T} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ operatörü her $f, g \in \mathcal{G}$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{T}(f+g) = \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g) \;\text{ ve }\; \mathcal{T}(\lambda f) = \lambda\mathcal{T}(f)$$

şartlarını sağlıyorsa lineer operatör,

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq |\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)| \quad \text{ve} \quad |\mathcal{T}(\lambda f)| = |\lambda|\,|\mathcal{T}(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa altlineer operatör, bir $C > 0$ sabiti için

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq C\left(|\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)|\right) \quad \text{ve} \quad |\mathcal{T}(\lambda f)| = |\lambda|\,|\mathcal{T}(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa quasilineer operatör olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.4 T bir quasilineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise zayıf (p,q) tipindendir denir. Yani her bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p}\right)^q$$

veya denk olarak

$$\|Tf\|_{WL^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü zayıf (p,q) tipindendir.

Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise güçlü (p,q) tipindendir denir. Yani her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü güçlü (p,q) tipindendir.

Uyarı 2.4.5 Her güçlü (p,q) tipli operatör aynı zamanda zayıf (p,q) tipli operatördür [18].

Şimdi sırasıyla bu operatörlerin Lebesgue, Morrey ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılıklarını ifade eden teoremleri verelim.

Teorem 2.4.6

(i) M, Hardy-Littlewood maksimal operatörü $1 \leq p \leq \infty$ için zayıf (p,p) tipli $1 < p \leq \infty$ için ise güçlü (p,p) tipli bir operatördür.

(ii) T, singüler integral operatörü $1 \leq p < \infty$ için zayıf (p,p) tipli $1 < p < \infty$ için ise güçlü (p,p) tipli bir operatördür.

(iii) I_α, kesirli integral operatörü $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ için zayıf (p,q) tipli $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ için ise güçlü (p,q) tipli bir operatördür. Burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ dir.

Teorem 2.4.6 deki sonuçlar klasiktir ve ispatları [13, 47, 48] kaynaklarında bulunabilir.

Teorem 2.4.7

(i) $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq n$ olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $p = 1$ için $\mathcal{M}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [9].

(ii) $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için T singüler integral operatörü $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $p = 1$ için $\mathcal{M}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [9, 17, 41].

(iii) $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için I_α kesirli integral operatörü $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $\mathcal{M}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{q,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Spanne [41]).

(iv) $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için I_α kesirli integral operatörü $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $\mathcal{M}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [1].

Harmonik analizin integral operatörlerinin genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılıklarını elde etmek amacıyla φ fonksiyonu üzerine konulması gereken şartları araştırmış birçok çalışma vardır. Bilindiği kadarıyla elde edilen en genel neticeler Guliyev tarafından verilmiştir.

Nakai [36], $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında M, T ve I_α operatörlerinin sınırlılığını araştırmış ve φ fonksiyonu üzerine $r \le t \le 2r$ olmak üzere

$$c^{-1}\varphi(x,r) \le \varphi(x,t) \le c\varphi(x,r) \tag{2.2}$$

şartını koymuştur. Burada $c \ge 1$, t, r ve $x \in \mathbb{R}^n$ den bağımsız bir sabittir. Bu şarta ilave olarak eğer

$$\int_r^\infty \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le C\varphi(x,r)^p$$

koşulu sağlanıyorsa M, T operatörlerinin $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı üzerinde ve eğer $1 < p < q < \infty$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olmak üzere

$$\int_r^\infty t^{\alpha p}\varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le Cr^{\alpha p}\varphi(x,r)^p$$

koşulu sağlanıyorsa I_α operatörünün $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduklarını göstermiştir.

Guliyev [19, 20, 21], Nakai'nin φ fonksiyonu üzerine koyduğu (2.2) şartını kaldırmış ve eğer

$$\int_r^\infty \varphi_1(x,t) \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r) \tag{2.3}$$

koşulu sağlanıyorsa M, T operatörlerinin $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve eğer $1 < p < q < \infty$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olmak üzere

$$\int_r^\infty t^{\alpha}\varphi_1(x,t) \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r) \tag{2.4}$$

koşulu sağlanıyorsa I_α operatörünün $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduklarını göstermiştir.

Daha sonra Akbulut ve ark. [3] tarafından maksimal operatör için, (2.3) şartından daha zayıf olan supremal şart ile $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında bu operatörün sınırlılığı araştırılmış ve yine aynı çalışmada singüler integral operatör için de (2.3) şartından daha zayıf bir şart koyularak bu operatörün $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılığı elde edilmiştir. Guliyev ve ark. [23] ise (2.4) şartından daha zayıf bir şart ile $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında I_α operatörünün sınırlılığını göstermişlerdir. Bu sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Teorem 2.4.8 $1 \leq p < \infty$ olsun ve (φ_1, φ_2) fonksiyonları

$$\sup_{t>r} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \leq C\, \varphi_2(x,r)$$

koşulunu sağlasınlar. Burada C, x ve r den bağımsız bir sabittir. Bu durumda M maksimal operatörü $p > 1$ için $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p \geq 1$ için $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [3].

Teorem 2.4.9 $1 \leq p < \infty$ ve (φ_1, φ_2) fonksiyonları

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \leq C\, \varphi_2(x,r)$$

koşulunu sağlasın. Burada C, x ve r den bağımsız bir sabittir. Bu durumda T operatörü $p > 1$ için $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p \geq 1$ için $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [3].

Teorem 2.4.10 $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun ve (φ_1, φ_2) fonksiyonları

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \leq C \varphi_2(x,r)$$

koşulunu sağlasın. Burada C, x ve r den bağımsız bir sabittir. Bu durumda I_α operatörü $p > 1$ için $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p \geq 1$ için $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [23].

Bu tezin temel problemi bu teoremleri (Teoremler 2.4.8, 2.4.9 ve 2.4.10), genelleştirilmiş Morrey uzaylarını da kapsayan genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarına genişletmektir. Bu problemin çözülmesinde önemli bir yere sahip olan harmonik analizin klasik operatörlerinin Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı ayrı bir bölümde ele alınacaktır.

2.5 Bazı supremal ve Hardy tipli eşitsizlikler

v bir ağırlık fonksiyonu olsun. $L_{\infty,v}(0,\infty)$ ile

$$\|g\|_{L_{\infty,v}(0,\infty)} = \sup_{t>0} v(t)|g(t)|$$

sonlu normuna sahip $g(t)$, $t > 0$ fonksiyonlarının uzayını göstereceğiz. Ayrıca $L^\infty(0,\infty) \equiv L_{\infty,1}(0,\infty)$ dır. $\mathfrak{M}(0,\infty)$, $(0,\infty)$ üzerindeki bütün Lebesgue ölçülebilir fonskiyonların kümesi olsun ve $\mathfrak{M}^+(0,\infty)$, bu kümenin negatif olmayan fonksiyonlarından oluşan alt kümesini göstersin. $\mathfrak{M}^+(0,\infty;\uparrow)$, $\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ kümesindeki azalmayan bütün fonksiyonların konisini belirtsin ve

$$\mathcal{A} = \left\{\varphi \in \mathfrak{M}^+(0,\infty;\uparrow) : \lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0\right\}$$

ile tanımlansın.

u, $(0,\infty)$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Supremal operator $\overline{S}_u$, $g \in \mathfrak{M}(0,\infty)$ olmak üzere

$$(\overline{S}_u g)(t) := \|u\, g\|_{L^\infty(t,\infty)}, \quad t \in (0,\infty)$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.5.1 v_1, v_2 her $t > 0$ için $0 < \|v_1\|_{L^\infty(t,\infty)} < \infty$ koşulunu sağlayan negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar ve u, $(0,\infty)$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\overline{S}_u$ operatörünün $\mathcal{A}$ üzerinde $L_{\infty,v_1}(0,\infty)$ uzayından $L_{\infty,v_2}(0,\infty)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter şart

$$\left\| v_2 \overline{S}_u \left(\|v_1\|^{-1}_{L^\infty(\cdot,\infty)} \right) \right\|_{L^\infty(0,\infty)} < \infty$$

olmasıdır [7].

w bir ağırlık fonksiyonu ve

$$H^*_w g(t) := \int_t^\infty g(s)w(s)ds, \quad 0 < t < \infty,$$

biçiminde tanımlanmak üzere aşağıdaki teorem [22] da ispatlanmıştır.

Teorem 2.5.2 v_1, v_2 ve w, $(0,\infty)$ üzerinde ağırlıklar ve $v_1(t)$ orijinin bir komşuluğu dışında sınırlı olsun. $(0,\infty)$ üzerinde azalmayan ve negatif olmayan her g fonksiyonu için

$$\sup_{t>0} v_2(t) H^*_w g(t) \le C \sup_{t>0} v_1(t) g(t) \tag{2.5}$$

eşitsizliğinin sağlancağı bir $C > 0$ sabiti olması için gerek ve yeter şart

$$B := \sup_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \frac{w(s)ds}{\sup_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty \tag{2.6}$$

olmasıdır. Dahası $C = B$ değeri (2.5) için en iyi sabittir.

Uyarı 2.5.3 (2.5) ve (2.6) ifadelerinde $\frac{1}{\infty} = 0$ ve $0 \cdot \infty = 0$ kabul edilmektedir.

2.6 Young Fonksiyonları

Bu bölümde Orlicz uzaylarını tanımlamak için kullanılan Young fonksiyonlarının tanımı verilerek, temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.6.1 Eğer bir $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonu,

(1) $\Phi(0) = 0$,

(2) Soldan süreklidir,

(3) Artandır,

(4) Konvekstir: Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ için

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda\Phi(t_1) + (1-\lambda)\Phi(t_2),$$

(5) Aşikar değildir: $(0,\infty)$ aralığı üzerinde özdeş olarak ne sıfıra ne de sonsuza eşit değildir. Yani $\exists t_1 > 0 \;\; \Phi(t_1) > 0 \;\&\; \exists t_2 > 0 \;\; \Phi(t_2) < \infty$

koşullarını sağlıyorsa Young fonksiyonu olarak adlandırılır.

Uyarı 2.6.2 Young fonksiyonunun 1 ve 4 numaralı özelliklerinden $t \in (0,\infty) \mapsto \frac{\Phi(t)}{t}$ fonksiyonunun artan olduğu görülebilir. Gerçekten, $t_1 = \frac{t_1}{t_2}t_2 + \big(1 - \frac{t_1}{t_2}\big)0$ olduğundan

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow \Phi(t_1) \leq \frac{t_1}{t_2}\Phi(t_2) \tag{2.7}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Açık bir aralık üzerinde konveks olan fonksiyonların sürekli oldukları ve hemen her yerde türevlenebildikleri iyi bilinmektedir. Fakat, konveks fonksiyonların sağladığı daha birçok önemli özellik vardır. Aşağıda konveks fonksiyonların integral gösterimine sahip olduklarını ifade eden teorem verilmiştir.

Teorem 2.6.3 $\Phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $[c,d] \subset (a,b)$ kapalı alt aralığı için

$$\Phi(t) = \Phi(c) + \int_c^t \varphi(s)ds, \qquad c \leq t \leq d \tag{2.8}$$

olmasıdır. Burada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, artan ve soldan sürekli bir fonksiyondur [42].

Şimdi Teorem 2.6.3 in bir sonucu olan, herhangi bir Young fonksiyonunun da (2.8) tipinde bir integral gösterimine sahip olduğunu ifade eden sonucu verelim.

Sonuç 2.6.4 $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonunun bir Young fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, \quad t \geq 0 \tag{2.9}$$

olmasıdır. Burada $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$, artan, soldan sürekli ve aşikar olmayan bir fonksiyondur. Eğer bazı t ler için $\Phi(t) = \infty$ ise uygunluk açısından $\varphi(t) = \infty$ olarak alınır.

Uyarı 2.6.5 Sonuç 2.6.4 de gereklilik durumunda hemen her $t > 0$ için $\varphi(t) = \Phi'(t)$ dir. Bu gerçek göz önünde bulundurularak bundan sonra; artan, soldan sürekli ve aşikar olmayan bir $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonu Orlicz türevi olarak adlandırılacaktır. φ türevine sahip bir Φ Young fonksiyonu denilince akla Φ fonksiyonunun (2.9) integral gösterimi gelmelidir.

Orlicz uzaylarını tanımlamak için bazı yazarlar Young fonksiyonları sınıfından daha dar bir sınıf olan ve tanımı aşağıda verilen N-fonksiyonlarını kullanmaktadırlar. Fakat bu durumun bazı dezavantajları vardır. Örneğin Orlicz uzayları N-fonksiyonları yardımıyla tanımlanırsa $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $L\log L(\mathbb{R}^n)$ uzayları dışarıda bırakılmış olur. Her ne kadar N-fonksiyonları çalışması daha kolay fonksiyonlar olsa da biz bu çalışmada Young fonksiyonlarını kullanmayı tercih edeceğiz.

Tanım 2.6.6 φ, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli ve

(a) $\varphi(0) = 0$, eğer $t > 0$ ise $\varphi(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$;

(b) φ azalmayan;

(c) φ sağdan sürekli

özelliklerine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda $[0,\infty)$ üzerinde

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \tag{2.10}$$

eşitliğiyle tanımlı, reel değerli Φ fonksiyonu bir N-fonksiyon olarak adlandırılır.

Önerme 2.6.7 Herhangi bir Φ N-fonksiyonu,

(i) Φ, $[0,\infty)$ üzerinde süreklidir;

(ii) Φ kesin artandır;

(iii) Φ konvekstir;

(iv) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$;

(v) Eğer $t > 0$ ise $\Phi(t) > 0$

özelliklerine sahiptir [2].

Uyarı 2.6.8 Önerme 2.6.7 (i),(iii), (iv) ve (v) özellikleri bir N-fonksiyonunu tanımlamak için kullanılabilirdi. Çünkü bu üç özellik, Tanım 2.6.6 (a)-(c) özelliklerine sahip bir φ fonksiyonu ile Φ fonksiyonunun (2.10) formunda bir gösteriminin var olmasını gerektirir [2].

Tanım 2.6.9 φ bir Orlicz türevi olmak üzere $\widetilde{\varphi}$ fonksiyonu

$$\widetilde{\varphi}(t) = \inf\{s : \varphi(s) \geq t\}$$

biçiminde tanımlanır.

Uyarı 2.6.10 $\widetilde{\varphi}$ fonksiyonu da bir Orlicz türevidir. Dolayısıyla Sonuç 2.6.4 gereğince $\widetilde{\Phi}(t) = \int_0^t \widetilde{\varphi}(s)ds$ eşitliğiyle tanımlı $\widetilde{\Phi}$ fonksiyonu bir Young fonksiyonudur [16].

Tanım 2.6.11 φ ve $\widetilde{\varphi}$ fonksiyonları Tanım 2.6.9 daki gibi olsunlar.

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\sigma)d\sigma, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \int_0^s \widetilde{\varphi}(\tau)d\tau$$

eşitlikleri ile verilen Φ ve $\widetilde{\Phi}$ Young fonksiyonları birbirlerinin tümleyeni olarak adlandırılırlar.

Örnek 2.6.12 Aşağıda tümleyen Young fonksiyon çiftlerine bazı örnekler verilmiştir:

(i) $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \frac{t^{p'}}{p'}, \qquad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$

(ii) $\Phi(t) = t, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq s \leq 1 \\ \infty & , \quad s > 1 \end{cases}$

(iii) $\Phi(t) = e^t - t - 1, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = (1+s)\log(1+s) - s.$

(iv) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 1 \\ t \log t & , t > 1 \end{cases}, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \begin{cases} s & , s < 1 \\ e^{s-1} & , s \geq 1 \end{cases}$

Uyarı 2.6.13 Örnek 2.6.12 (ii) ve (iv) de verilen fonksiyonlar Young fonksiyonudur fakat N-fonksiyon değildir.

Önerme 2.6.14 Φ bir Young fonksiyonu olsun. O zaman her $0 < \alpha < 1$ ve her $0 \leq t < \infty$ için

$$\Phi(\alpha t) \leq \alpha \Phi(t),$$

her $\alpha \geq 1$ ve her $0 \leq t < \infty$ için

$$\alpha \Phi(t) \leq \Phi(\alpha t) \tag{2.11}$$

olur [29].

Teorem 2.6.15 (Young eşitsizliği) Φ ve $\widetilde{\Phi}$ sırasıyla φ ve $\widetilde{\varphi}$ türevlerine sahip tümleyen Young fonksiyonları olsun. Bu durumda her $x, y \geq 0$ için

$$xy \leq \Phi(x) + \widetilde{\Phi}(y)$$

olur. Eşitlik ise sadece $y = \varphi(x)$ veya $x = \widetilde{\varphi}(y)$ olması ile mümkündür [53].

Sonuç 2.6.16 $y \geq 0$ için

$$\widetilde{\Phi}(y) = \sup\{xy - \Phi(x) : x \in [0, \ \infty)\} \tag{2.12}$$

ve eğer $\widetilde{\varphi}(y) < \infty$ ise sup = max olur [53].

Uyarı 2.6.17 (2.12) ifadesi Φ Young fonksiyonunun tümleyeninin tanımı olarak alınabilir.

Önerme 2.6.18 Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$$\widetilde{\Phi}(\frac{\Phi(t)}{t}) \leq \Phi(t)$$

olur [45].

Sıradaki önermede ve çalışmanın bundan sonraki kısmında Φ^{-1} gösterimi Φ Young fonksiyonunun genelleştirilmiş tersini göstermek için kullanılacaktır. Yani

$$\Phi^{-1}(s) = \inf\{r \geq 0 : \Phi(r) > s\}, \quad 0 \leq s \leq \infty.$$

Eğer Φ Young fonksiyonunun Orlicz türevi φ sonlu, yani her $0 < s < \infty$ için $0 < \varphi(s) < \infty$ ise $\Phi \in \mathcal{Y}$ ile gösterilecektir. Eğer $\Phi \in \mathcal{Y}$ ise Φ birebir ve örten bir fonksiyondur ve Φ^{-1}, Φ fonksiyonunun âdi tersidir [32]. Ayrıca genelleştirilmiş ters fonksiyon tanımından her $0 \leq r < \infty$ için

$$\Phi(\Phi^{-1}(r)) \leq r \leq \Phi^{-1}(\Phi(r))$$

olduğu görülür [39].

Önerme 2.6.19 Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$$t \leq \Phi^{-1}(t)(\widetilde{\Phi})^{-1}(t) \leq 2t \tag{2.13}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir [42].

Tanım 2.6.20 Φ bir Young fonksiyonu olsun.

(i) Eğer her $t \geq 0$ için

$$\Phi(2t) \leq c\Phi(t) \tag{2.14}$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir c sabiti varsa Φ, Δ_2 koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \Delta_2$ ile gösterilir.

(ii) Eğer $\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ ise Φ, ∇_2 koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \nabla_2$ ile gösterilir.

Uyarı 2.6.21 (2.11) göz önüne alınırsa (2.14) eşitsizliğindeki c sabiti için $c \geq 2$ olduğu görülür.

Önerme 2.6.22 Φ bir Young fonksiyonu olsun. $\Phi \in \nabla_2$ olması için gerek ve yeter koşul $\Phi(kt) \geq 2k\Phi(t)$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $k > 1$ sabitinin olmasıdır [28].

Örnek 2.6.23

(i) $\Phi(r) = r$ fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar fakat ∇_2 koşulunu sağlamaz.

(ii) $1 < p < \infty$ olmak üzere $\Phi(r) = r^p$ her iki koşulu da sağlar.

(iii) $\Phi(r) = e^r - r - 1$ fonksiyonu ∇_2 koşulunu sağlar fakat Δ_2 koşulunu sağlamaz.

Maksimal ve singüler operatörlerin Orlicz uzaylarındaki sınırlılığının ispatında kilit rol oynayan aşağıdaki önermeleri, ispatları ile birlikte vereceğiz.

Önerme 2.6.24 Φ, Δ_2 koşulunu sağlayan bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda $0 < t_1 < t_2$ için

$$\frac{\Phi(t_2)}{t_2^p} \leq \frac{b\Phi(t_1)}{t_1^p}$$

olacak şekilde $p > 1$ ve $b > 1$ sayıları vardır [27].

İspat. İlk olarak kabul edelim ki $0 < t_1 < t_2 \leq 2t_1$ olsun. O zaman

$$\frac{\Phi(t_2)}{t_2^p} \leq \frac{\Phi(2t_1)}{t_1^p} \leq c\frac{\Phi(t_1)}{t_1^p}$$

olur. Buradaki c, Δ_2 koşulundaki sabittir.

Eğer $0 < t_1 < t_2$, $t_2 > 2t_1$ ise bu durumda $[\cdot]$ tam kısmı göstermek üzere

$$\begin{aligned}
\Phi(t_2) &= \Phi(\frac{t_2}{t_1}t_1) = \Phi(2^{\log_2(t_2/t_1)}t_1) \\
&\leq \Phi(2^{[\log_2(t_2/t_1)]+1}t_1) \leq c^{[\log_2(t_2/t_1)]+1}\Phi(t_1) \\
&\leq c^{\log_2(t_2/t_1)+1}\Phi(t_1) \leq c\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\log_2 c}\Phi(t_1)
\end{aligned}$$

olur. İstenilen eşitsizliği elde etmek için $p = \log_2 c$ almak yeterlidir. ∎

Önerme 2.6.25 Φ, φ türevine sahip bir Young fonksiyonu olsun.

(i) $\Phi \in \Delta_2$ olsun. Daha açık yazarsak belli bir $A \geq 2$ sabiti için $\Phi(2t) \leq A\Phi(t)$ olsun. $\beta = \log_2 A$ alalım. Eğer $p > \beta + 1$ ise her $t > 0$ için

$$\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^p}ds \lesssim \frac{\Phi(t)}{t^p}$$

eşitsizliği gerçeklenir [27, 45].

(ii) $\Phi \in \nabla_2$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} ds \lesssim \frac{\Phi(t)}{t}$$

eşitsizliği gerçeklenir [27, 45].

İspat. (i) Kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^p} ds = \int_t^\infty \frac{\Phi'(s)}{s^p} ds = \lim_{R\to\infty} ([\frac{\Phi(s)}{s^p}]_t^R + p\int_t^R \frac{\Phi(s)}{s^{p+1}} ds)$$

elde ederiz. Önerme 2.6.24 den $s \geq t$ için $\Phi(s) \lesssim (\frac{s}{t})^\beta \Phi(t)$ eşitsizliğini hatırlarsak bu eşitsizlikten

$$\lim_{R\to\infty} \Phi(R)/R^p = 0, \quad \int_t^\infty \frac{\Phi(s)}{s^p} ds \lesssim \frac{\Phi(t)}{t^p}$$

elde ederiz. Böylece (i) ispatlanmış olur.

(ii) İspat benzerdir. İlk önce kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} ds = \left[\frac{\Phi(s)}{s}\right]_0^t + \int_0^t \frac{\Phi(s)}{s^2} ds$$

olur. Şimdi $\Phi(As) \geq 2A\Phi(s)$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_0^t \frac{\Phi(s)}{s^2} ds = \sum_{j=0}^\infty \int_{A^{-j-1}t}^{A^{-j}t} \frac{\Phi(s)}{s^2} ds \lesssim \frac{1}{t} \sum_{j=0}^\infty A^j (2A)^{-j} \Phi(t) \lesssim \frac{\Phi(t)}{t}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} ds \leq \frac{\Phi(t)}{t} + \int_0^t \frac{\Phi(s)}{s^2} ds \lesssim \frac{\Phi(t)}{t}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Tanım 2.6.26 Φ bir Young fonksiyonu olsun. Eğer her $s, t \geq 0$ için

$$\Phi(st) \leq C\Phi(s)\Phi(t)$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir C sabiti varsa Φ, Δ' koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \Delta'$ ile gösterilir.

Önerme 2.6.27 Bir Φ Young fonksiyonu Δ' koşulunu sağlarsa Δ_2 koşulunu da sağlar [42].

2.7 Orlicz Uzayları

Tanım 2.7.1 Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere Orlicz uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}: f-\text{ölçülebilir}\ \&\ \exists\alpha>0\ \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\alpha|f(x)|)dx<\infty\right\}.$$

Önerme 2.7.2 $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L^{\Phi}}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx\leq 1\right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Bu norma Orlicz uzayının Luxemburg-Nakano normu adı verilir [42].

Örnek 2.7.3

(i) $1\leq p<\infty$ olmak üzere $\Phi(t)=t^p$ ise $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\Phi(t)=\begin{cases}0 & ,\ 0\leq t\leq 1\\ \infty\ , & t>1\end{cases}$ ise $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)=L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\Phi(t)=\begin{cases}0 & ,\ t\leq 1\\ t\log t & ,\ t>1\end{cases}$ ise $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)=L\log L(\mathbb{R}^n)$.

Tanım 2.7.4 Φ ve Ψ, Young fonksiyonları olsun. Eğer her $s\geq 0$ için $\Phi(s)\leq\Psi(cs)$ eşitsizliğinin gerçekleştiği bir c sabiti varsa Ψ, Φ fonksiyonunu domine ediyor denir.

Teorem 2.7.5 Φ,Ψ Young fonksiyonları olsun. Ψ, Φ fonksiyonunu domine ediyor ise o zaman

$$L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)\supset L^{\Psi}(\mathbb{R}^n),\qquad \|f\|_{L^{\Phi}}\leq C\|f\|_{L^{\Psi}}$$

olur [29].

Tanım 2.7.6 Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, zayıf Orlicz uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$WL^{\Phi}(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}: f-\text{ölçülebilir}\ \&\ \sup_{t>0}\Phi(t)|\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>t\}|<\infty\right\}.$$

Önerme 2.7.7 $WL^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{WL^{\Phi}}=\inf\left\{\lambda>0:\sup_{t>0}\Phi(t)|\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda t\}|\leq 1\right\}$$

dönüşümü bir quasi-Banach uzayıdır [5].

Lemma 2.7.8 Φ bir Young fonksiyonu ve B sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir küme olsun.

$$\|\chi_B\|_{WL^\Phi} = \|\chi_B\|_{L^\Phi} = \frac{1}{\Phi^{-1}\big(|B|^{-1}\big)}$$

olur.

İspat.

$$\begin{aligned}
\|\chi_B\|_{L^\Phi} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_B \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) dy \le 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int_B dy \le 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} \le \Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \lambda \ge \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)}\right\} \\
&= \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\chi_B\|_{WL^\Phi} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{t>0} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : |\chi_B(x)| > t\}| \le 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{0<t<1} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : |\chi_B(x)| > t\}| \le 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \le |B|^{-1}\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \lambda \ge \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)}\right\} \\
&= \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Tanım 2.7.9 Φ ve Ψ, Young fonksiyonları olsun. Eğer her $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^\Psi} \le k\|f\|_{L^\Phi}$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir k sabiti varsa T quasilineer operatörüne güçlü (Φ, Ψ) tiplidir denir. Eğer her $t > 0$ ve her $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |Tf(y)| > t\}| \le 1/\Psi\left(\frac{t}{k\|f\|_{L^\Phi}}\right)$$

eşitisizliğinin sağlandığı bir k sabiti varsa T quasilineer operatörüne zayıf (Φ, Ψ) tiplidir denir.

Önerme 2.7.10 Her güçlü (Φ,Ψ) tipli operatör aynı zamanda zayıf (Φ,Ψ) tipli operatördür [43].

İspat. İspat için Chebyshev eşitsizliğini kullanacağız. Quasilineer operatör tanımından her $t>0$ için ve $|f|\neq 0$, h.h.y. için

$$
\begin{aligned}
&|\{y\in\mathbb{R}^n : |Tf|(y)>t\}| \\
= \quad & \left|\left\{y\in\mathbb{R}^n : |T(\tfrac{f}{K\|f\|_{L^\Phi}})|(y) > \tfrac{t}{K\|f\|_{L^\Phi}}\right\}\right| \\
= \quad & \left|\left\{y\in\mathbb{R}^n : \Psi\left(\tfrac{|Tf|(y)}{K\|f\|_{L^\Phi}}\right) > \Psi\left(\tfrac{t}{K\|f\|_{L^\Phi}}\right)\right\}\right| \\
\leq \quad & \left[\Psi\left(\tfrac{t}{K\|f\|_{L^\Phi}}\right)\right]^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\Psi\left(\tfrac{|Tf|(y)}{K\|f\|_{L^\Phi}}\right)dy \\
\leq \quad & \left[\Psi\left(\tfrac{t}{K\|f\|_{L^\Phi}}\right)\right]^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\Psi\left(\tfrac{|Tf|(y)}{\|Tf\|_{L^\Psi}}\right)dy \\
\leq \quad & \left[\Psi\left(\tfrac{t}{K\|f\|_{L^\Phi}}\right)\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece istenilen ispatlanmış olur. ■

Önerme 2.7.11 Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olsun. Eğer $f\in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ ve $g\in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^n)$ ise $fg\in L^1(\mathbb{R}^n)$ olur ve

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|dx \leq 2\|f\|_{L^\Phi}\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}$$

eşitsizliği sağlanır [42].

Önerme 2.7.12 $f\in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L^\Phi}\leq \|f\|_\Phi^* := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|dx : \|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}\leq 1\right\}\leq 2\|f\|_{L^\Phi}$$

eşitsizliği sağlanır. $\|f\|_\Phi^*$, $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayının Orlicz normu olarak adlandırılır [16].

Teorem 2.7.13 Φ bir Young fonksiyonu ve $f\in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda hemen her $x\in\mathbb{R}^n$ için

$$\liminf_{r\to 0+}\frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}}\geq f(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Dahası eğer $\Phi\in\Delta'$ ise hemen her $x\in\mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0+}\frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}} = f(x)$$

olur [25].

Temel sonuçlarımızda kullanacağımız ve ispatı Önermeler 2.7.11, 2.7.8 ve 2.6.19 kulanılarak kolayca elde edilebilen eşitsizlik aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.7.14 Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bütün B yuvarları için

$$\|f\|_{L^1(B)} \leq 2|B|\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)\|f\|_{L^{\Phi}(B)}$$

eşitsizliği sağlanır.

3 HARMONİK ANALİZİN KLASİK OPERATÖRLERİNİN ORLICZ UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI

Bu bölümde maksimal, potansiyel ve singüler operatörlerin Orlicz uzaylarındaki zayıf ve güçlü tipli sınırlılıkları detaylı bir şekilde incelenecektir.

3.1 Maksimal Operatör

Maksimal operatörün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı iyi bilinmektedir ve Cianchi [11], Kita [26] ve Kokilashvili ve Krbec [27] çalışmalarında bulunabilir.

Lemma 3.1.1 f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\lambda|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq C \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda/2\}} |f(x)|dx$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği bir C sabiti vardır [12].

Lemma 3.1.2 Φ bir Young fonksiyonu ve $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) < \infty$ olmak üzere

$$\Phi(Mf(x)) \leq M\Phi(|f|)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliği sağlanır [31].

İspat. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $Mf(x) < \infty$ olsun. Bu durumda her bir $0 < \epsilon < 1$ için $B_0 \ni x$ olacak şekilde bir $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı vardır ve

$$Mf(x) < \frac{1}{|B_0|}\int_{B_0} |f(y)|dy + \epsilon.$$

olur. Φ fonksiyonunun integral gösteriminden,

$$\Phi(u+\varepsilon) = \int_0^{u+\varepsilon} \varphi(s)ds = \int_0^u \varphi(s)ds + \int_u^{u+\varepsilon} \varphi(s)ds \leq \Phi(u) + \varphi(u+\varepsilon)\varepsilon$$

olur. Sonuç olarak Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\Phi(Mf(x)) &\leq \Phi\left(\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0} |f(y)|dy + \varepsilon\right) \\
&\leq \Phi\left(\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0} |f(y)|dy\right) + \varphi\left(\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0} |f(y)|dy + \varepsilon\right)\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{|B_0|}\int_{B_0} \Phi(|f(y)|)dy + \varphi(Mf(x)+1)\varepsilon \\
&\leq M\Phi(|f|)(x) + \varphi(Mf(x)+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\Phi(Mf(x)) \leq M\Phi(|f|)(x)$ olur. ■

Maksimal operatörün Orlicz uzaylarındaki zayıf sınırlılığı Lemma 3.1.2 nin bir sonucudur ve ispatı aşağıdaki şekilde Deringoz ve ark. [14] tarafından verilmiştir. Aşağıda verilen maksimal operatörün Orlicz uzaylarındaki güçlü sınırlılığının ispatı ise Maligranda ve Matsuoka [31] ile Sawano [45] çalışmalarından alınmıştır.

Teorem 3.1.3

(i) M maksimal operatörü her Φ Young fonksiyonu için zayıf (Φ, Φ) tiplidir.

(ii) M maksimal operatörün güçlü (Φ, Φ) tipli olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \nabla_2$ olmasıdır.

İspat. (i) $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ olacak şekilde $f \in L^\Phi$ alalım. Lemma 3.1.2 ve maksimal operatörün zayıf (1,1) sınırlılığından

$$\begin{aligned}
|\{x : Mf(x) > t\}| &= |\{x : \Phi(Mf(x)) > \Phi(t)\}| \\
&\leq |\{x : M(\Phi \circ |f|)(x) > \Phi(t)\}| \\
&\leq \frac{C}{\Phi(t)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx \\
&\leq \frac{C}{\Phi(t)} \leq \frac{1}{\Phi(\frac{t}{C\|f\|_{L^\Phi}})}
\end{aligned}$$

olur. Çünkü $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ ve eğer $C \geq 1$ ise $\frac{1}{C}\Phi\left(t\right) \geq \Phi\left(\frac{t}{C}\right)$ dir.

$\|\cdot\|_{L^\Phi}$ normunun homojenlik özelliğinden dolayı

$$|\{x : Mf(x) > t\}| \leq \frac{1}{\Phi(\frac{t}{C\|f\|_{L^\Phi}})}$$

eşitsizliği her $f \in L^\Phi$ için doğrudur.

(ii) *Yeterlilik*:

$\Lambda > 0$ ve $f \in L^\Phi \backslash \{0\}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\Lambda}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\frac{Mf(x)}{\Lambda}} \varphi(s)dsdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (\chi_{\{s\in[0,\infty):\frac{Mf(x)}{\Lambda}>s\}} \cdot \varphi)(s)dsdx \\
&= \int_0^\infty \varphi(s)|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \Lambda s\}|ds \\
&= \frac{1}{\Lambda}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}|d\lambda \\
&= \frac{2}{\Lambda}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 2\lambda\}|d\lambda
\end{aligned}$$

olur. Lemma 3.1.1 ve integrasyon sırasının değiştirilmesinden

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{Mf(x)}{\Lambda}\right)dx &\lesssim \frac{1}{\Lambda}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}|f(x)|dx\right)\frac{d\lambda}{\lambda}\\ &\lesssim \frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\left(\int_0^{|f(x)|}\varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}\right)dx\\ &\lesssim \frac{1}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\left(\int_0^{2\Lambda^{-1}|f(x)|}\varphi(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\right)dx\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 2.6.25 (ii) den

$$\left(\int_0^{2\Lambda^{-1}|f(x)|}\varphi(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\right)\lesssim |f(x)|^{-1}\Lambda\Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\Lambda}\right)$$

olup $k\geq 1$ ve $t>0$ için $k\Phi(t)\leq\Phi(kt)$ olduğu hatırlanırsa (Bkz. Önerme 2.6.14) buradan

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{Mf(x)}{\Lambda}\right)dx\leq c_0\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\Lambda}\right)dx\leq\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{c_0|f(x)|}{\Lambda}\right)dx$$

olur. $\Lambda=c_0\|f\|_{L^\Phi}$ seçersek

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{Mf(x)}{\Lambda}\right)dx\leq 1$$

olur bu da normun tanımı dolayısıyla

$$\|Mf\|_{L^\Phi}\leq\Lambda=c_0\|f\|_{L^\Phi}$$

olması demektir.

Gereklilik:

Şimdi kabul edelim ki M güçlü (Φ,Φ) tipli olsun. Yani her $f\in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L^\Phi}\leq C\|f\|_{L^\Phi}$$

olacak biçimde bir C sabiti olsun.

Özel olarak $0<|A|<\infty$ olacak şekildeki her $A\subset\mathbb{R}^n$ için,

$$\|M\chi_A\|_{L^\Phi}\leq C_1\,\|\chi_A\|_{L^\Phi} \tag{3.1}$$

olur. (3.1) ifadesinde $r=(a_1uv)^{-1/n}$ olmak üzere $A=B_r$ alalım. Burada $B_r=B(0,r)$, $a_r=|B_r|$, $u>0$ ve $v>1$ dir. Bu durumda Lemma 2.7.8 ve (2.13) eşitsizliği kullanılarak

$$\|\chi_{B_r}\|_{L^\Phi}=\frac{1}{\Phi^{-1}(1/|B_r|)}=\frac{1}{\Phi^{-1}(1/(r^n|B_1|))}=\frac{1}{\Phi^{-1}(uv)}\leq\frac{1}{uv}\widetilde{\Phi}^{-1}(uv)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan eğer $x \neq B_r$ ise $B_r \subset B(x, 2|x|)$ olur. Çünkü $y \in B_r$ için

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq |x| + r \leq 2|x|$$

dir. Dolayısıyla

$$M\chi_{B_r}(x) \geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int_{B(x,2|x|)} \chi_{B_r}(y)dy = \frac{|B(x,2|x|) \cap B_r|}{|B(x,2|x|)|} = \left(\frac{r}{2|x|}\right)^n$$

olur. $s = (a_1 u)^{-1/n}$ olmak üzere $g = \widetilde{\Phi}^{-1}(u)\chi_{B_s}$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx \leq u|B_s| = us^n|B_1| = 1$$

elde edilir. Luxemburg-Nakano normu ile Orlicz normunun denkliğinden (Bkz. Önerme 2.7.12)

$$\begin{aligned}
\|M\chi_{B_r}\|^*_{L^\Phi} &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |M\chi_{B_r}(x)g(x)|dx : \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx \leq 1\right\} \\
&\geq \widetilde{\Phi}^{-1}(u) \int_{B_s} M\chi_{B_r}(x)dx \geq \widetilde{\Phi}^{-1}(u) \int_{B_s \setminus B_r} \left(\frac{r}{2|x|}\right)^n dx \\
&= \frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(u)}{2^n a_1 uv} \int_{r<|x|<s} \frac{1}{|x|^n} dx \\
&= \frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(u)}{2^n a_1 uv} n a_1 \ln\frac{s}{r} = \frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(u)}{2^n uv} \ln v
\end{aligned}$$

olur. Buradan $u > 0$ ve $v > 1$ için (3.1) eşitsizliği

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(u)}{2^n uv} \ln v \leq 2C\frac{1}{uv}\widetilde{\Phi}^{-1}(uv)$$

olmasını gerektirir. Böylece, $v = \exp(C \cdot 2^{n+2})$ alınarak $u > 0$ için $2\widetilde{\Phi}^{-1}(u) \leq \widetilde{\Phi}^{-1}(u\exp(C \cdot 2^{n+2}))$ elde edilir veya her $t > 0$ için $\widetilde{\Phi}(2t) \leq \exp(C \cdot 2^{n+2})\widetilde{\Phi}(t)$ olur. Bu ise $\Phi \in \nabla_2$ olması demektir. ■

Sonuç 3.1.4 $\Phi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$ Young fonksiyonu $1 < p < \infty$ için ∇_2 koşulunu sağlar. Dolayısıyla M, Hardy-Littlewood maksimal operatörü $1 \leq p < \infty$ için zayıf (p,p) tipli, $1 < p < \infty$ güçlü (p,p) tiplidir.

3.2 Riesz Potansiyeli

Riesz potansiyelinin $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı Φ, Ψ Young fonksiyonları üzerine bazı kısıtlayıcı şartlar koyularak O'Neil [39] ve Torchinsky [50] tarafından gösterilmiştir. Daha sonra Cianchi [11] bu şartları hafifleterek daha genel bir sonuç elde etmiştir. Şimdi bu sonuç elde edilirken kullanılan bazı tanımları vereceğiz.

Tanım 3.2.1 Ψ bir Young fonksiyonu ve $p \in (1, \infty]$ olsun.

$$B_p(s) = \int_0^s \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}} dt$$

olmak üzere Ψ_p, tümleyeni

$$\widetilde{\Psi_p}(s) = \int_0^s r^{p'-1}(B_p^{-1}(r^{p'}))^{p'} dr \tag{3.2}$$

şeklinde verilen Young fonksiyonudur.

Tanım 3.2.2 Φ bir Young fonksiyonu ve $p \in (1, \infty]$ olsun.

$$A_p(s) = \int_0^s \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}} dt$$

olmak üzere Φ_p, tümleyeni

$$\widetilde{\Phi_p}(s) = \int_0^s r^{p'-1}(A_p^{-1}(r^{p'}))^{p'} dr \tag{3.3}$$

şeklinde verilen Young fonksiyonudur.

Teorem 3.2.3 [11] $n \geq 1$ ve $0 < \alpha < n$ olsun. Φ ve Ψ Young fonksiyonları ve $\Phi_{n/\alpha}$ ile $\Psi_{n/\alpha}$ (3.3) ve (3.2) ile tanımlanan Young fonksiyonları olmak üzere

(i) I_α Riesz potansiyelinin zayıf (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_0^1 \widetilde{\Phi}(t)/t^{1+n/(n-\alpha)} dt < \infty, \tag{3.4}$$

ve

$$\Phi_{n/\alpha} \text{ fonksiyonunun } \Psi \text{ fonksiyonunu domine etmesidir.} \tag{3.5}$$

(ii) I_α Riesz potansiyelinin güçlü (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul (3.4) ve (3.5) koşulları ile birlikte

$$\int_0^1 \Psi(t)/t^{1+n/(n-\alpha)} dt < \infty, \tag{3.6}$$

ve

$$\Phi \text{ fonksiyonunun } \Psi_{n/\alpha} \text{ fonksiyonunu domine etmesi} \tag{3.7}$$

koşullarının da sağlanmasıdır.

Sonuç 3.2.4 $\Phi(t) = t^p$, $1 \le p < \infty$ ve $\Psi(t) = t^q$, $1 \le q < \infty$ Young fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu fonksiyonlar için, (3.3) ile tanımlanan $\Phi_{n/\alpha}$ fonksiyonu

$$C = \frac{\left(p' - \frac{n}{n-\alpha}\right)^{\frac{p'}{p' - \frac{n}{n-\alpha}}}}{\left[\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p'n}{n-\alpha}}} > 0$$

olmak üzere $\Phi_{n/\alpha}(t) = Ct^{\frac{p'n}{p'n-\alpha p'-n}}$ olur. Teorem 3.2.3 (i) deki (3.4) şartı $p' > \frac{n}{n-\alpha}$ şartına, (3.5) şartı ise $\sup\limits_{t>0} t^{q-\frac{p'n}{p'n-\alpha p'-n}} < \infty$ veya denk olarak $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olur. Yani I_α kesirli integral operatörünün zayıf (p,q) tipli olması için gerek ve yeter koşul $1 \le p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasıdır.

(3.2) ile tanımlanan $\Psi_{n/\alpha}$ fonksiyonu

$$C = \left[\frac{qn - q\alpha - n}{n-\alpha}\right]^{\frac{-n}{q\alpha+n}} - \frac{n-\alpha}{qn}\left[\frac{qn - q\alpha - n}{n-\alpha}\right]^{\frac{q\alpha}{q\alpha+n}} > 0$$

olmak üzere $\Psi_{n/\alpha}(t) = Ct^{\frac{qn}{q\alpha+n}}$ olur. (3.6) şartı $q > \frac{n}{n-\alpha}$ şartına, (3.7) şartı $\sup\limits_{t>0} t^{\frac{qn}{q\alpha+n}-p} < \infty$ yani $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasına denk olur. Bu ve yukarıdaki açıklamalar gözönüne alınırsa Teorem 3.2.3 (ii) deki koşullar $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasına denk olur. Yani I_α kesirli integral operatörünün güçlü (p,q) tipli olması için gerek ve yeter koşul $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasıdır.

Nakai [35] çalışmasında genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerin Orlicz uzaylarındaki sınırlılıklarını göstermiştir. Bu sonucun özel bir durumu olan aşağıdaki teorem Riesz potansiyelinin Orlicz uzayındaki sınırlılığı için alternatif bir sonuçtur.

Teorem 3.2.5 $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$ olsun. Her $r > 0$ için

$$\int_r^\infty \widetilde{\Phi}\left(\frac{t^{\alpha-n}}{Ar^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n})}\right) t^{n-1} dt \le A', \tag{3.8}$$

$$r^\alpha \Phi^{-1}\left(r^{-n}\right) \le A'' \Psi^{-1}\left(r^{-n}\right). \tag{3.9}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı A, A', $A'' > 0$ sabitleri var olsun. Bu durumda her $C_0 > 0$ için bir $C_1 > 0$ sabiti vardır öyle ki her $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\Psi\left(\frac{|I_\alpha f(x)|}{C_1 \|f\|_{L^\Phi}}\right) \le \Phi\left(\frac{|Mf(x)|}{C_0 \|f\|_{L^\Phi}}\right) \tag{3.10}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla I_α zayıf (Φ, Ψ) tiplidir. Dahası eğer $\Phi \in \nabla_2$ ise I_α güçlü (Φ, Ψ) tiplidir.

İspat.
$$J_1 = \int_{|x-y|<r} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \quad \text{ve} \quad J_2 = \int_{|x-y|\geq r} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$
olsun. J_1 için Hedberg yöntemini kullanarak

$$|J_1| \leq C r^{\alpha} Mf(x) \tag{3.11}$$

elde ederiz. Şimdi J_2 için benzer bir eşitisizlik elde edilecektir. Hölder eşitsizliğinden

$$|J_2| \leq 2 \| |x-\cdot|^{\alpha-n} \chi_{\complement(B(x,r))}(\cdot) \|_{L^{\widetilde{\Phi}}} \|f\|_{L^{\Phi}} \tag{3.12}$$

olur.

$$F(r) = r^{\alpha} \Phi^{-1}(r^{-n}) \tag{3.13}$$

olmak üzere

$$\| |x-\cdot|^{\alpha-n} \chi_{\complement(B(x,r))}(\cdot) \|_{L^{\widetilde{\Phi}}} \leq C F(r) \tag{3.14}$$

olduğunu göstereceğiz. $\widetilde{\Phi}$ fonksiyonunun artanlığından

$$\int_{|x-y|\geq r} \widetilde{\Phi}\left(\frac{|x-y|^{\alpha-n}}{\lambda} \right) dy \leq C_2 \int_r^{\infty} \widetilde{\Phi}\left(\frac{t^{\alpha-n}}{\lambda} \right) t^{n-1} dt \tag{3.15}$$

olur. Burada C_2, $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ den bağımsız bir sabittir. $C_2 A' \geq 1$ kabul edebiliriz. (2.7) ve (3.8) kullanılarak

$$\begin{aligned} &\int_r^{\infty} \widetilde{\Phi}\left(\frac{t^{\alpha-n}}{C_2 A A' F(r)} \right) t^{n-1} dt \\ &\quad \leq \frac{1}{C_2 A'} \int_r^{\infty} \widetilde{\Phi}\left(\frac{t^{\alpha-n}}{A F(r)} \right) t^{n-1} dt \leq \frac{1}{C_2} \end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $\lambda = C_2 A A' F(r)$ alınırsa (3.15) ve (3.16) dan

$$\int_{|x-y|\geq r} \widetilde{\Phi}\left(\frac{|x-y|^{\alpha-n}}{\lambda} \right) dy \leq 1$$

olur. Dolayısıyla (3.14) eşitsizliği gösterilmiş olur. (3.11), (3.12) ve (3.14) kullanılırsa

$$|I_{\alpha} f(x)| = |J_1 + J_2| \leq C r^{\alpha} \left(Mf(x) + \|f\|_{L^{\Phi}}) \Phi^{-1}(r^{-n}) \right) \tag{3.17}$$

olduğu görülür. $r > 0$ sayısını

$$\Phi^{-1}(r^{-n}) = \frac{Mf(x)}{C_0 \|f\|_{L^{\Phi}}} \tag{3.18}$$

olacak şekilde seçersek

$$r^{\alpha} \leq A'' \frac{\Psi^{-1}(r^{-n})}{\Phi^{-1}(r^{-n})} = A'' \frac{\Psi^{-1} \circ \Phi\left(\frac{Mf(x)}{C_0 \|f\|_{L^{\Phi}}} \right)}{\frac{Mf(x)}{C_0 \|f\|_{L^{\Phi}}}} \tag{3.19}$$

olur ve (3.17), (3.18) ve (3.19) kullanılarak

$$|I_\alpha f(x)| \le C_1 \|f\|_{L^\Phi} \Psi^{-1} \circ \Phi \left(\frac{Mf(x)}{C_0 \|f\|_{L^\Phi}} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.10) ispatlanmış olur.

$m(r,f) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > r\}|$ olmak üzere Teorem 3.1.3 (i) den

$$\begin{aligned} \sup_{r>0} \Psi(r) m \left(r, \frac{|I_\alpha f(x)|}{C_1 \|f\|_{L^\Phi}} \right) &= \sup_{r>0} r\, m \left(r, \Psi \left(\frac{|I_\alpha f(x)|}{C_1 \|f\|_{L^\Phi}} \right) \right) \\ &\le \sup_{r>0} r\, m \left(r, \Phi \left(\frac{Mf(x)}{C_0 \|f\|_{L^\Phi}} \right) \right) \\ &= \sup_{r>0} \Phi(r) m \left(r, \frac{Mf(x)}{C_0 \|f\|_{L^\Phi}} \right) \\ &\le 1 \end{aligned}$$

yani

$$\|I_\alpha f\|_{WL^\Psi} \le C_1 \|f\|_{L^\Phi}$$

ve Teorem 3.1.3 (ii) den

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi \left(\frac{|I_\alpha f(x)|}{C_1 \|f\|_{L^\Phi}} \right) dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|Mf(x)|}{C_0 \|f\|_{L^\Phi}} \right) dx \le 1$$

yani

$$\|I_\alpha f\|_{L^\Psi} \le C_1 \|f\|_{L^\Phi}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi Riesz potansiyelinin Orlicz uzayındaki sınırlılığını tümleyen fonksiyon kullanılmadan ifade eden sonucu verelim.

Sonuç 3.2.6 $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$ olsun. Her $r > 0$ için

$$\int_r^\infty t^{\alpha-1} \Phi^{-1}(t^{-n}) dt \le A r^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n}), \tag{3.20}$$

$$r^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n}) \le A' \Psi^{-1}(r^{-n}) \tag{3.21}$$

$A, A' > 0$ eşitsizliklerini sağlayan $A, A' > 0$ sabitleri var olsun. Bu durumda (3.10) eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla I_α zayıf (Φ, Ψ) tiplidir. Dahası eğer $\Phi \in \nabla_2$ ise I_α güçlü (Φ, Ψ) tiplidir.

İspat. $F(r)$, (3.13) daki gibi olsun. $F(r)$ neredeyse azalan bir fonksiyondur. Yani $0 < r \le t < \infty$ için

$$F(t) \le CF(r)$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği bir C sabiti vardır. Gerçekten; $F(r)$, $\frac{1}{2} \le \frac{s}{r} \le 2$ için $\frac{1}{C} \le \frac{F(s)}{F(r)} \le C$ eşitsizliğini sağladığından (3.20) den $0 < 2r < \infty$ için

$$\int_r^\infty t^{\alpha-1}\Phi^{-1}(t^{-n})dt \approx r^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n})$$

olur. Bu da $F(r)$ nin neredeyse azalan olduğunu gösterir.

(2.7) ve Önerme 2.6.18 den

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}\left(\frac{t^{\alpha-n}}{CF(r)}\right) &\le \frac{F(t)}{CF(r)}\widetilde{\Phi}\left(\frac{t^{\alpha-n}}{F(t)}\right) \\ &= \frac{F(t)}{CF(r)}\widetilde{\Phi}\left(\frac{t^{-n}}{\Phi^{-1}(t^{-n})}\right) \\ &\le \frac{F(t)t^{-n}}{CF(r)} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.20) kullanılarak (3.8) eşitsizliği alınır. Dolayısıyla bu sonuç Teorem 3.2.5 den alınır. ■

Sonuç 3.2.7 $\Phi(t) = t^p$, $1 \le p < \infty$ ve $\Psi(t) = t^q$, $1 \le q < \infty$ Young fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu fonksiyonlar için, (3.20) ve (3.21) koşulları $1 \le p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasına denktir. $\Phi(t) = t$ fonksiyonunun ∇_2 koşulunu sağlamadığı da göz önüne alınırsa; "$1 \le p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ için I_α zayıf (p,q) tiplidir " ve "$1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ için I_α güçlü (p,q) tiplidir" sonuçları elde edilir.

3.3 Singüler İntegral Operatör

Konvolüsyon tipli singüler integral operatörlerin Orlicz uzaylarındaki zayıf ve güçlü sınırlılıkları iyi bilinmektedir ve Cianchi [11] ve Kokilashvili ve Krbec [27] çalışmalarında bulunabilir. Calderón-Zygmund operatörlerinin Orlicz uzaylarındaki güçlü sınırlılıkları için Nakai [38] çalışması referans verilebilir. Aşağıda verilen Calderón-Zygmund operatörlerinin Orlicz uzaylarındaki zayıf sınırlılıklarının ispatı Deringoz ve ark. [14] çalışmasından güçlü sınırlılıklarının ispatı ise Sawano [45] çalışmasından alınmıştır.

Teorem 3.3.1

(i) $\Phi \in \Delta_2$ ise T singüler integral operatörü zayıf (Φ, Φ) tiplidir.

(ii) $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ise T singüler integral operatörü güçlü (Φ, Φ) tiplidir.

İspat. (i) $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ olsun. $\lambda > 0$ keyfi fakat sabit bir sayı olmak üzere f fonksiyonunu $f_1 = \chi_{\{|f|>\lambda\}} \cdot f$ ve $f_2 = \chi_{\{|f|\leq\lambda\}} \cdot f$ olacak biçimde iki parçaya ayıralım yani $f = f_1 + f_2$ dir. O zaman

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}|$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq |\Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| \\ + \Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}|\end{aligned}$$

olur.

T operatörünün zayıf (1,1) sınırlılığından ve L^p, $p > 1$ sınırlılığından

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|dx \tag{3.22}$$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^p dx \tag{3.23}$$

olduğunu biliyoruz.

(3.22) ve $\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}$ fonksiyonunun monotonluğundan

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| &\lesssim \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|dx \\ &= \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|dx \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \frac{\Phi(|f(x)|)}{|f(x)|} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx\end{aligned}$$

olur. (3.23) ve Önerme 2.6.24 den

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda)|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| &\lesssim \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^p dx \\ &= \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^p} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq\lambda\}} |f(x)|^p dx \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \frac{\Phi(|f(x)|)}{|f(x)|^p} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\Phi(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx \leq \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda}{C\|f\|_{L^\Phi}}\right)}$$

elde edilmiş olur. Bu eşitsizlik $\|\cdot\|_{L^\Phi}$ normunun homojenlik özelliğinden dolayı her $f \in L^\Phi$ için doğrudur.

(ii) Dağılım fonksiyonunu kullanarak yaptığımız hesaplamalar maksimal operatör için yaptığımızla aynıdır. Yani

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Tf(x)}{\Lambda}\right) dx = \frac{2}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > 2\lambda\}| d\lambda$$

olur. Diğer yapacağımız hesaplamalarda maksimal operatörden farklı olacak kısımlar T operatörünün L^∞ sınırlı olmamasından kaynaklanmaktadır. Şimdi kabul edelim ki $p > 1$ yeterince büyük, $f_1 = \chi_{\{|f|>\lambda\}} \cdot f$ ve $f_2 = \chi_{\{|f|\leq\lambda\}} \cdot f$ olsun. Bu durumda eğer $|Tf(x)| > 2\lambda$ ise $|Tf_1(x)| > \lambda$ veya $|Tf_2(x)| > \lambda$ olur. Dolayısıyla

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > 2\lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \lambda\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \lambda\}|$$

olur.

Maksimal operatör için kullandığımız hesaplama ilk terim için de geçerlidir. Bu ve (3.22) gözönüne alınırsa

$$\frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \lambda\}| \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c|f|}{\Lambda}\right) \tag{3.24}$$

eşitsizliği elde edilir. İkinci terim için benzer bir hesaplama hala geçerlidir fakat burada $\Phi \in \Delta_2$ olmasını ve (3.23) ü kullanacağız. O zaman

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \lambda\}| d\lambda &\lesssim \frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^p dx\right) \frac{d\lambda}{\lambda^p} \\ &\lesssim \frac{1}{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \left(\int_{|f(x)|}^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^p}\right) dx \end{aligned}$$

olur.

Önerme 2.6.25 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \lambda\}| d\lambda \\ &\quad \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\Lambda}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c|f(x)|}{\Lambda}\right) dx \end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir.

Böylece (3.24) ve (3.25) den

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|Tf(x)|}{\Lambda}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c_0|f(x)|}{\Lambda}\right) dx$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\Lambda = c_0\|f\|_{L^\Phi}$ alırsak

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|Tf(x)|}{\Lambda}\right) dx \leq 1$$

olur. Bu da

$$\|Tf\|_{L^\Phi} \leq \Lambda = c_0\|f\|_{L^\Phi}$$

olması demektir. ■

Sonuç 3.3.2 $\Phi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$ Young fonksiyonu $1 \leq p < \infty$ için Δ_2 koşulunu, $1 < p < \infty$ için ∇_2 koşulunu sağlar. Dolayısıyla T, singüler integral operatörü $1 \leq p < \infty$ için zayıf (p, p) tipli, $1 < p < \infty$ güçlü (p, p) tiplidir.

4 ORLICZ-MORREY TİPLİ UZAYLAR

4.1 Orlicz-Morrey Uzayları

Bu uzaylar ilk olarak Kokilashvili ve Krbec [27] tarafından $\Phi \in \Upsilon$ ve $0 \leq \lambda < n$ olmak üzere

$$\Phi_\lambda(L) = \{f - \text{ölçülebilir} : \sup_{r>0, x\in\mathbb{R}^n} r^{-\lambda} \int_{B(x,r)} \Phi(f(y))dy < \infty\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada Υ, negatif olmayan, çift, $[0,\infty)$ üzerinde artan, $\lim_{t\to 0^+}\Phi(t) = 0$ ve $\lim_{t\to\infty}\Phi(t) = \infty$ şartlarını sağlayan $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sınıfını göstermektedir.

Daha sonra 2014 yılında Deringoz ve ark. [14] tarafından Orlicz-Morrey uzayı ve zayıf Orlicz-Morrey uzayı Φ Young fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1 (Orlicz-Morrey Uzayları) Φ bir Young fonksiyonu ve $0 \leq \lambda \leq n$ olsun. $\mathcal{M}^{\Phi,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğimiz Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \Phi^{-1}\big(r^{-\lambda}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))}$$

sonlu normuna sahip bütün $f \in L^\Phi_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfıdır.

$\mathcal{M}^{\Phi,0}(\mathbb{R}^n) = L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ ve eğer $\Phi(r) = r^p$, $1 \leq p < \infty$ ise $\mathcal{M}^{\Phi,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olur.

$W\mathcal{M}^{\Phi,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğimiz zayıf Orlicz-Morrey uzayı benzer olarak

$$\|f\|_{WM_{\Phi,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \Phi^{-1}\big(r^{-\lambda}\big)\|f\|_{WL^\Phi(B(x,r))} < \infty$$

olacak şekildeki bütün $f \in WL^\Phi_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.

2015 yılında ise Maligranda ve Matsuoka [31] tarafından merkezi Orlicz-Morrey uzayları ve zayıf merkezi Orlicz-Morrey uzayları $\Phi \in \mathcal{Y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $B_r = B(0,r)$ ve $d_f(u) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > u\}|$ olmak üzere

$$\|f\|_{\Phi,\lambda,B_r} = \inf\left\{\lambda > 0 \,:\, \frac{1}{|B_r|^\lambda}\int_{B_r} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}$$

için

$$B^{\Phi,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^{\Phi,\lambda}} = \sup_{r\geq 0}\|f\|_{\Phi,\lambda,B_r} < \infty\}$$

ve

$$\|f\|_{\Phi,\lambda,B_r,\infty}=\inf\left\{\lambda>0\,:\,\sup_{u>0}\Phi(u)\frac{1}{|B_r|^{\lambda}}d_{f\chi_{B_r}}(\lambda u)\leq 1\right\}$$

için

$$WB^{\Phi,\lambda}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{B^{\Phi,\lambda}}=\sup_{r\geq 0}\|f\|_{\Phi,\lambda,B_r,\infty}<\infty\}$$

olarak tanımlanmıştır.

4.2 Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey Uzayları

Literatürde birden fazla genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı tanımı vardır. Bu uzaylar ilk olarak Nakai [37] tarafından 2004 yılında tanımlanmış, daha sonra Sawano ve ark. [46] tarafından 2012 yılında farklı bir tip Orlicz-Morrey uzayı tanımlanmıştır. Bu tezde ise yeni bir tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı tanımı verilecek ve bu uzayda harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılığı araştırılacaktır. Aşağıda birinci, ikinci ve üçüncü tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı tanımları verilmiştir.

Birinci tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı olarak adlandırılan $\mathcal{L}^{\varphi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı; Φ bir Young fonksiyonu ve $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ neredeyse azalan ve $\varphi(r)r$ neredeyse artan bir fonksiyon, B bir açık yuvar ve

$$\|f\|_{(\varphi,\Phi);B}:=\inf\left\{\lambda>0\,:\,\frac{1}{|B|\varphi(|B|)}\int_B\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx\leq 1\right\}$$

olmak üzere

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{\varphi,\Phi}}:=\sup_B\|f\|_{(\varphi,\Phi);B}$$

sonlu normuna sahip lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfıdır.

İkinci tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı olarak adlandırılan $M^{\varphi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayı; Φ bir Young fonksiyonu ve $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ azalmayan ve $\varphi(r)r^{-n}$ artmayan bir fonksiyon, Q bir küp, $l(Q)$ küpün kenar uzunluğu ve

$$\|f\|_{\Phi;Q}:=\inf\left\{\lambda>0\,:\,\frac{1}{|Q|}\int_Q\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx\leq 1\right\}$$

olmak üzere

$$\|f\|_{M^{\varphi,\Phi}}:=\sup_Q\varphi(l(Q))\|f\|_{\Phi;Q}$$

sonlu normuna sahip lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfıdır.

Şimdi bu tezde ortaya koyulan problem çerçevesinde 2014 yılında Deringoz ve ark. [14] tarafından tanımlanan ve üçüncü tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı olarak adlandırılan $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve onun zayıf hali olan $W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının tanımlarını verelim.

Tanım 4.2.1 $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğimiz genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}\left(|B(x,r)|^{-1}\right)\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))}$$

sonlu normuna sahip bütün $f \in L^\Phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfıdır.

Lemma 4.2.2 $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve Φ bir Young fonksiyonu olsun.

(i) Eğer her $t > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sup_{t<r<\infty} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1}) = \infty \tag{4.1}$$

ise $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olur.

(ii) Eğer $\Phi \in \Delta'$ ve her $t > 0$ ve hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sup_{0<r<t} \varphi(x,r)^{-1} = \infty \tag{4.2}$$

ise $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olur.

İspat. (i) (4.1) sağlansın ve f özdeş olarak 0 a denk olmasın. Bu durumda belli bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $t_0 > 0$ için $A = \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t_0))} > 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} &\geq \sup_{t_0<r<\infty} \varphi(x_0,r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x_0,r)|^{-1})\,\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,r))}\\ &\geq A \sup_{t_0<r<\infty} \varphi(x_0,r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x_0,r)|^{-1})\end{aligned}$$

ve dolayısıyla $\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \infty$ olur.

(ii) Şimdi $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olsun ve (4.2) sağlansın. Teorem 2.7.13 den hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}} = |f(x)|$$

olur. Bu x noktalarının hepsi için $f(x) = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksini kabul edelim, yani x noktasını sabitleyelim ve $|f(x)| > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $0 < r \leq t_0$ için

$$\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1}) \, \|f\|_{L^{\Phi}(B(x,r))} \geq \frac{|f(x)|}{2}$$

olacak şekilde bir $t_0 > 0$ vardır. Sonuç olarak

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} \geq \sup_{0<r<t_0} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1}) \, \|f\|_{L^{\Phi}(B(x,r))} \geq \frac{|f(x)|}{2} \sup_{0<r<t_0} \varphi(x,r)^{-1}$$

ve dolayısıyla $\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \infty$, yani $f \notin \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olur. Bu ise bir çelişkidir. ■

Uyarı 4.2.3 Φ bir Young fonksiyonu olsun. Ω_Φ ile belli $t_1,\, t_2 > 0$ sayıları için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1})\|_{L^{\infty}(t_1,\infty)} < \infty$$

ve

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\varphi(x,r)^{-1}\|_{L^{\infty}(0,t_2)} < \infty$$

koşullarını sağlayan $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir $\varphi(x,r)$ fonksiyonlarının kümesini göstererec eğiz. Lemma 4.2.2 göz önüne alınarak $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının aşikar olmaması için yani $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n) \neq \Theta$ olması için bundan sonra her zaman $\varphi \in \Omega_\Phi$ ve $\Phi \in \Delta'$ olduğu kabul edilecektir.

Ayrıca $W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğimiz zayıf genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}\left(|B(x,r)|^{-1}\right) \|f\|_{WL^{\Phi}(B(x,r))} < \infty$$

olacak şekildeki bütün $f \in WL^{\Phi}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfıdır.

Bu tanımlara göre eğer $\Phi(r) = r^p$, $1 \leq p < \infty$ seçilirse $\mathcal{M}^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı ve $W\mathcal{M}^{p,\varphi}$ zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı; $\Phi(r) = r^p$, $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$, $0 \leq \lambda \leq n$ seçilirse $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı ve $W\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Morrey uzayı; $\varphi(x,r) = \Phi^{-1}\left(|B(x,r)|^{-1}\right)$ seçilirse $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ Orlicz uzayı ve $WL^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Orlicz uzayı elde edilir.

5 HARMONİK ANALİZİN KLASİK OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI

5.1 Maksimal Operatör

Bu bölümde elde edilen sonuçlar "Operator Theory, Operator Algebras and Applications. Series: Operator Theory: Advances and Applications, Vol 242" dergisinde yayınlanmıştır (Bkz. [14]).

Lemma 5.1.1 $f \in L^{\Phi}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $B = B(x,r)$ olsun. Bu durumda $\Phi \in \nabla_2$ koşulunu sağlayan her Young fonksiyonu için

$$\|Mf\|_{L^\Phi(B)} \lesssim \|f\|_{L^\Phi(B(x,2r))} + \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{t>2r} t^{-n} \|f\|_{L^1(B(x,t))}$$

eşitsizliği ve her Φ Young fonksiyonu için

$$\|Mf\|_{WL^\Phi(B)} \lesssim \|f\|_{L^\Phi(B(x,2r))} + \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{t>2r} t^{-n} \|f\|_{L^1(B(x,t))} \tag{5.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. $\Phi \in \nabla_2$ olsun. $f_1 = f\chi_{B(x,2r)}$ ve $f_2 = f\chi_{\complement_{B(x,2r)}}$ olmak üzere $f = f_1 + f_2$ yazalım o zaman

$$\|Mf\|_{L^\Phi(B)} \le \|Mf_1\|_{L^\Phi(B)} + \|Mf_2\|_{L^\Phi(B)}$$

olur. Teorem 3.1.3 de verilen M operatörünün $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılığından

$$\|Mf_1\|_{L^\Phi(B)} \lesssim \|f\|_{L^\Phi(B(x,2r))}$$

elde edilir.

Şimdi y, B yuvarından alınan keyfi bir nokta olsun. Eğer $B(y,t) \cap {}^{\complement}(B(x,2r)) \neq \emptyset$ ise $t > r$ olur. Gerçekten eğer $z \in B(y,t) \cap {}^{\complement}(B(x,2r))$ ise $t > |y-z| \geq |x-z| - |x-y| > 2r - r = r$ dır.

Diğer taraftan $B(y,t) \cap {}^{\complement}(B(x,2r)) \subset B(x,2t)$ dır. Gerçekten eğer $z \in B(y,t) \cap {}^{\complement}(B(x,2r))$ ise $|x-z| \le |y-z| + |x-y| < t + r < 2t$ elde ederiz.

Böylece

$$\begin{aligned} Mf_2(y) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t)\cap \complement(B(x,2r))} |f(z)|dz \\ &\le 2^n \sup_{t>r} \frac{1}{|B(x,2t)|} \int_{B(x,2t)} |f(z)|dz \\ &= 2^n \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \end{aligned}$$

olur. Buradan her $y \in B$ için

$$Mf_2(y) \le 2^n \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \tag{5.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\|Mf\|_{L^\Phi(B)} \lesssim \|f\|_{L^\Phi(B(x,2r))} + \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \right)$$

elde edilir.

Şimdi Φ keyfi bir Young fonksiyonu olsun. Her $B = B(x,r)$ için

$$\|Mf\|_{WL^\Phi(B)} \le \|Mf_1\|_{WL^\Phi(B)} + \|Mf_2\|_{WL^\Phi(B)}$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.1.3 de verilen M operatörünün zayıf sınırlılığından

$$\|Mf_1\|_{WL^\Phi(B)} \lesssim \|f\|_{L^\Phi(B(x,2r))}.$$

elde ederiz. Böylece (5.2) kullanılarak (5.1) eşitsizliğini alırız. ∎

Lemma 5.1.2 $f \in L^\Phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $B = B(x,r)$ olsun. Bu durumda $\Phi \in \nabla_2$ koşulunu sağlayan her Young fonksiyonu için

$$\|Mf\|_{L^\Phi(B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{t>2r} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \tag{5.3}$$

eşitsizliği ve her Φ Young fonksiyonu için

$$\|Mf\|_{WL^\Phi(B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{t>2r} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \tag{5.4}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. $\Phi \in \nabla_2$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &:= \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \right), \\ \mathcal{J}_2 &:= \|f\|_{L^\Phi(B(x,2r))} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Lemma 2.7.14 kullanılarak

$$\mathcal{J}_1 \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{t>2r} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{t>2r} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \\
&\qquad \gtrsim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{t>2r} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\,\|f\|_{L^\Phi(B(x,2r))} \approx \mathcal{J}_2
\end{aligned}$$

olur. Lemma 5.1.1 den $\|Mf\|_{L^\Phi(B)} \leq \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ olduğundan (5.3) eşitsizliği elde edilir. Son olarak eğer Φ keyfi bir Young fonksiyonu ise (5.4) eşitsizliği direk olarak (5.1) den çıkar. ■

Teorem 5.1.3 Φ bir Young fonksiyonu olsun ve φ_1, φ_2 ve Φ fonksiyonları

$$\sup_{r<t<\infty} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)} \leq C\,\varphi_2(x,r) \tag{5.5}$$

koşulunu sağlasınlar. Burada C, x ve r den bağımsız bir sabittir. Bu durumda M maksimal operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $\Phi \in \nabla_2$ için $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat.

1.Yol: Lemma 5.1.2 ve Teorem 2.5.1 kullanılarak $\Phi \in \nabla_2$ için

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{\varphi_2(x,r)} \sup_{t>r} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)\,\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}},
\end{aligned}$$

ve keyfi Φ Young fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{\varphi_2(x,r)} \sup_{t>r} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)\,\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} = \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}},
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.Yol: $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan (2.1) ve $\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}$ nin t nin azalmayan bir fonksiyonu olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\frac{\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{0<t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x_0,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)}} \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<s<\infty} \frac{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}}{\varphi_1(x_0,s)} \\
&\le \sup_{s>0,x_0\in\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,s))}}{\varphi_1(x_0,s)} \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ve (5.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\sup_{r<t<\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \\
&\le \sup_{r<t<\infty} \frac{\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x_0,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)}} \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x_0,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)}\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \\
&\le C\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}} \sup_{r<t<\infty} \left(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)} \right) \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \\
&\le C\varphi_2(x_0,r)\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

olur. Bu sonuç ve (5.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0} \frac{1}{\varphi_2(x,r)} \sup_{t>r} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)\,\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\|Mf\|_{W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}$ eşitsizliği (5.4) kullanılarak yukarıdakine benzer olarak kolaylıkla elde edilir. ■

Sonuç 5.1.4 Eğer Teorem 5.1.3 de özel olarak $\Phi(t) = t^p$, $1 \le p < \infty$ alınırsa Teorem 2.4.8 elde edilir.

5.2 Riesz Potansiyeli

Bu bölümde elde edilen sonuçlar "Journal of Function Spaces, Vol 2014" dergisinde yayınlanmıştır (Bkz. [24]).

Lemma 5.2.1 Φ ve Ψ Young fonksiyonları ve Φ_p, $p \in (1, \infty]$, (3.3) ile tanımlı Young fonksiyonu olsun. Eğer $\int_0^1 \widetilde{\Phi}(t)/t^{1+p'} dt < \infty$ ve Φ_p fonksiyonu Ψ fonksiyonunu domine ediyorsa $r > 0$ için

$$\Phi^{-1}(r) \lesssim r^{\frac{1}{p}} \Psi^{-1}(r) \tag{5.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. $\int_0^1 \widetilde{\Phi}(t)/t^{1+p'} dt < \infty$ olması $r > 0$ için

$$1 \leq 2r^{-\frac{1}{p'}} \widetilde{\Phi}^{-1}(r) \Phi_p^{-1}(r) \tag{5.7}$$

olmasını gerektirir [10, s.50].

Eğer Φ_p fonksiyonu Ψ fonksiyonunu domine ediyorsa $r > 0$ için,

$$\Phi_p^{-1}(r) \leq C \Psi^{-1}(r) \tag{5.8}$$

olacak şekilde bir pozitif C sabiti vardır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(r) &= \inf\{t \geq 0 : \Psi(t) > r\} \\ &\geq \inf\{t \geq 0 : \Phi_p(Ct) > r\} \\ &= \frac{1}{C} \inf\{Ct \geq 0 : \Phi_p(Ct) > r\} \\ &= \frac{1}{C} \Phi_p^{-1}(r). \end{aligned}$$

Böylece (5.6) eşitsizliği (5.7), (5.8) ve (2.13) ifadelerinden çıkar. ■

Aşağıda vereceğimiz lemma Guliyev lemmasının [19, 20, 21] Orlicz uzayları için bir genelleştirilmesidir.

Lemma 5.2.2 $0 < \alpha < n$, Φ ve Ψ Young fonksiyonları, $f \in L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $B = B(x_0, r)$ olsun. Eğer (Φ, Ψ), (3.4)-(3.7) koşullarını sağlarsa

$$\|I_\alpha f\|_{L^\Psi(B)} \lesssim \frac{1}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \tag{5.9}$$

eşitsizliği, (3.4) ve (3.5) koşullarını sağlarsa

$$\|I_\alpha f\|_{WL^\Psi(B)} \lesssim \frac{1}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \tag{5.10}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. (3.4)-(3.7) koşullarının sağlandığını kabul edelim. $2B = B(x_0, 2r)$ olmak üzere f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{(2B)}}(y), \quad r > 0,$$

biçiminde yazalım. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L^\Psi(B)} \le \|I_\alpha f_1\|_{L^\Psi(B)} + \|I_\alpha f_2\|_{L^\Psi(B)}$$

olur. $f_1 \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ olmasından ve I_α operatörünün $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından (Bkz. Teorem 3.2.3)

$$\|I_\alpha f_1\|_{L^\Psi(B)} \le \|I_\alpha f_1\|_{L^\Psi(\mathbb{R}^n)} \le C\|f_1\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L^\Phi(2B)}$$

elde edilir. Burada $C > 0$, f den bağımsız bir sabittir.

$x \in B$, $y \in {}^{\complement}(2B)$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \le |x - y| \le \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olmasını gerektirir. O zaman

$$|I_\alpha f_2(x)| \le 2^{n-\alpha} \int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} dy$$

eşitsizliği sağlanır. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} dy &\approx \int_{\complement_{(2B)}} |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \le |x_0 - y| < t} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}}
\end{aligned}$$

olur. Lemma 2.7.14 ve $p = n/\alpha$ için Lemma 5.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n}} dy &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) t^{\alpha-1} dt \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\|I_\alpha f_2\|_{L^\Psi(B)} \lesssim \frac{1}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \tag{5.11}$$

olur. Böylece

$$\|I_\alpha f\|_{L^\Psi(B)} \lesssim \|f\|_{L^\Phi(2B)} + \frac{1}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer yandan (2.13) özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big) &\approx \Psi^{-1}\big(r^{-n}\big) r^n \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

olduğunu görürüz ve buradan

$$\|f\|_{L^{\Phi}(2B)} \lesssim \frac{1}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{\Phi}(B(x_0,t))} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \tag{5.12}$$

olur.

Böylece

$$\|I_{\alpha} f\|_{L^{\Psi}(B)} \lesssim \frac{1}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{\Phi}(B(x_0,t))} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi (3.4) ve (3.5) koşullarının sağlandığını kabul edelim. I_{α} operatörünün $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından (Bkz. Teorem 3.2.3) ve (5.12) ifadesinden

$$\begin{aligned}\|I_{\alpha} f_1\|_{WL^{\Psi}(B)} &\le \|I_{\alpha} f_1\|_{WL^{\Psi}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|f\|_{L^{\Phi}(2B)} \lesssim \frac{1}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{\Phi}(B(x_0,t))} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t}\end{aligned} \tag{5.13}$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak (5.11) ve (5.13) ifadelerinden (5.10) eşitsizliğini elde ederiz. ■

Teorem 5.2.3 $0 < \alpha < n$ olsun ve (φ_1, φ_2) ve (Φ, Ψ) fonksiyonları

$$\int_{r}^{\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)} \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \le C\, \varphi_2(x,r) \tag{5.14}$$

koşulunu sağlasın. Burada C, x ve r den bağımsız bir sabittir. Bu durumda I_{α} operatörü (3.4) ve (3.5) koşulları için $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve (3.4)-(3.7) koşulları için $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat.

1.Yol:

Lemma 5.2.2 ve Teorem 2.5.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}\frac{dt}{t} \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f\|_{W\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}\frac{dt}{t} \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}\end{aligned}$$

elde edilir.

2.Yol:

$f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan (2.1) ve $\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}$ nin t nin azalmayan bir fonksiyonu olması kullanılarak

$$\begin{aligned}&\frac{\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{0<t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x_0,s)}{\Phi^{-1}\left(s^{-n}\right)}} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<s<\infty} \frac{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}}{\varphi_1(x_0,s)} \\ &\le \sup_{s>0, x_0\in\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,s))}}{\varphi_1(x_0,s)} \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ve (5.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\int_r^\infty \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}\Psi^{-1}\big(t^{-n}\big)\,\frac{dt}{t} \\ &\le \int_r^\infty \frac{\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x_0,s)}{\Phi^{-1}\left(s^{-n}\right)}} \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x_0,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)}\Psi^{-1}\big(t^{-n}\big)\,\frac{dt}{t} \\ &\le C\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}} \int_r^\infty \left(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)}\right)\Psi^{-1}\big(t^{-n}\big)\,\frac{dt}{t} \\ &\le C\varphi_2(x_0,r)\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}\end{aligned}$$

olur. Bu sonuç ve (5.9) kullanılarak

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \Psi^{-1}\big(t^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}\frac{dt}{t} \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}\end{aligned}$$

elde edilir.

$\|I_\alpha f\|_{W\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}$ eşitsizliği (5.10) kullanılarak yukarıdakine benzer olarak kolaylıkla elde edilir. ■

Uyarı 5.2.4 M_α kesirli maksimal operatör olmak üzere $0 < \alpha < n$ için

$$M_\alpha f(x) \lesssim I_\alpha(|f|)(x)$$

olduğundan Teorem 5.2.3 aynı zamanda M_α operatörünün $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılıklarını gerektirir.

Sonuç 5.2.5 Eğer Teorem 5.2.3 de özel olarak $\Phi(t) = t^p$, $\Psi(t) = t^q$, $1 \le p, q < \infty$ alınırsa Teorem 2.4.10 alınır.

5.3 Singüler İntegral Operatör

Bu bölümde elde edilen sonuçlar "Operator Theory, Operator Algebras and Applications. Series: Operator Theory: Advances and Applications, Vol 242" dergisinde yayınlanmıştır (Bkz [14]).

Aşağıda vereceğimiz lemma Guliyev lemmasının [19, 20, 21] Orlicz uzayları için bir genelleştirilmesidir.

Lemma 5.3.1 Φ bir Young fonksiyonu ve $f \in L^\Phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $B = B(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$ olsun. Bu durumda $\Phi \in \Delta_2 \bigcap \nabla_2$ için

$$\|Tf\|_{L^\Phi(B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^\infty \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\frac{dt}{t} \tag{5.15}$$

eşitsizliği ve $\Phi \in \Delta_2$ için

$$\|Tf\|_{WL^\Phi(B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^\infty \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\frac{dt}{t} \tag{5.16}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. İlk önce $\Phi \in \Delta_2 \bigcap \nabla_2$ olsun. $2B = B(x_0, 2r)$ olmak üzere f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{(2B)}}(y)$$

biçiminde yazalım. Bu durumda

$$\|Tf\|_{L^\Phi(B)} \leq \|Tf_1\|_{L^\Phi(B)} + \|Tf_2\|_{L^\Phi(B)}$$

olur. $f_1 \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ olduğundan T operatörünün $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılığından (Bkz. Teorem 3.3.1)

$$\|Tf_1\|_{L^\Phi(B)} \leq \|Tf_1\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_1\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L^\Phi(2B)}$$

elde ederiz.

$x \in B$, $y \in {}^{\complement}(2B)$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olmasını gerektirir. O zaman

$$|Tf_2(x)| \leq C \int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

eşitsizliği sağlanır. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy &\approx \int_{\complement_{(2B)}} |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0 - y| < t} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

olur. Lemma 2.7.14 kullanılarak

$$\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t}$$

bulunur. Buradan

$$\|Tf_2\|_{L^\Phi(B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \tag{5.17}$$

olur. Böylece

$$\|Tf\|_{L^\Phi(B)} \lesssim \|f\|_{L^\Phi(2B)} + \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer yandan Önerme 2.6.19 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big) &\approx \Phi^{-1}\big(r^{-n}\big) r^n \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan

$$\|f\|_{L^\Phi(2B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \tag{5.18}$$

olur. Böylece

$$\|Tf\|_{L^\Phi(B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi $\Phi \in \Delta_2$ olsun. T operatörünün Orlicz uzayındaki zayıf sınırlılığından (Bkz. Teorem 3.3.1) ve (5.18) ifadesinden

$$\begin{aligned} \|Tf_1\|_{WL^\Phi(B)} &\le \|Tf_1\|_{WL^\Phi(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|f\|_{L^\Phi(2B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \end{aligned} \tag{5.19}$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak (5.17) ve (5.19) ifadelerinden (5.16) eşitsizliğini elde ederiz. ■

Teorem 5.3.2 Φ bir Young fonksiyonu ve φ_1, φ_2 ve Φ

$$\int_r^{\infty} \Big(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)} \Big) \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \le C\, \varphi_2(x,r) \tag{5.20}$$

koşulunu sağlasın. Burada C, x ve r den bağımsız bir sabittir. Bu durumda T operatörü $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ için $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $\Phi \in \Delta_2$ için $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat.

1.Yol: Lemma 5.3.1 ve Teorem 2.5.2 kullanılarak $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ için

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \frac{1}{\varphi_2(x,r)} \int_r^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1} \Phi^{-1}\big(r^{-n}\big) \|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}} \end{aligned}$$

ve $\Phi \in \Delta_2$ için

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \frac{1}{\varphi_2(x,r)} \int_r^{\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1} \Phi^{-1}\big(r^{-n}\big) \|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}} \end{aligned}$$

elde edilir.

2.Yol: $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan (2.1) ve $\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}$ nin t nin azalmayan bir fonksiyonu olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\frac{\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{0<t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x_0,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)}} \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<s<\infty} \frac{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}}{\varphi_1(x_0,s)} \\
&\le \sup_{s>0,x_0\in\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,s))}}{\varphi_1(x_0,s)} \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ve (5.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_r^\infty \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\,\frac{dt}{t} \\
&\le \int_r^\infty \frac{\|f\|_{L^\Phi(B(x_0,t))}}{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x_0,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)}} \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x_0,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)}\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\,\frac{dt}{t} \\
&\le C\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}} \int_r^\infty \left(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}\big(s^{-n}\big)}\right)\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\,\frac{dt}{t} \\
&\le C\varphi_2(x_0,r)\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

olur. Bu sonuç ve (5.15) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \frac{1}{\varphi_2(x,r)} \int_r^\infty \|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\|Tf\|_{W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}$ eşitsizliği (5.16) kullanılarak yukarıdakine benzer olarak kolaylıkla elde edilir. ∎

Eğer özel olarak Teorem 5.3.2 de $\Phi(t) = t^p$, $1 \le p < \infty$ alınırsa Teorem 2.4.9 elde edilir.

Uyarı 5.3.3 (5.5) şartı (5.20) şartından daha zayıftır. Gerçekten $s \in (r, \infty)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x,r) &\gtrsim \int_r^{\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{t<\tau<\infty} \frac{\varphi_1(x,\tau)}{\Phi^{-1}\big(\tau^{-n}\big)} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \\
&\gtrsim \int_s^{\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{t<\tau<\infty} \frac{\varphi_1(x,\tau)}{\Phi^{-1}\big(\tau^{-n}\big)} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \\
&\gtrsim \operatorname*{ess\,inf}_{s<\tau<\infty} \frac{\varphi_1(x,\tau)}{\Phi^{-1}\big(\tau^{-n}\big)} \int_s^{\infty} \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) \frac{dt}{t} \\
&\approx \operatorname*{ess\,inf}_{s<\tau<\infty} \frac{\varphi_1(x,\tau)}{\Phi^{-1}\big(\tau^{-n}\big)} \Phi^{-1}\big(s^{-n}\big),
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\sup_{s>r} \operatorname*{ess\,inf}_{s<\tau<\infty} \frac{\varphi_1(x,\tau)}{\Phi^{-1}\big(\tau^{-n}\big)} \Phi^{-1}\big(s^{-n}\big) \lesssim \varphi_2(x,r)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[**1**] Adams, D. R. *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. **1975**, 42, 765-778.

[**2**] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F. *Sobolev paces*, Academic Press, 2003.

[**3**] Akbulut, A.; Guliyev, V. S.; Mustafayev, R. *On boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces*, Mathematica Bohemica, **2012**, 137 1, 27-43.

[**4**] Bennett, C.; Sharpley, R. *Interpolation of operators*, Academic Press, Boston, 1988.

[**5**] Bibiana, I. *Comparison of two weak versions of the Orlicz spaces*, Rev. Un. Mat. Argentina 40, **1996**, 1-2, 191-202.

[**6**] Birnbaum, Z.; Orlicz, W. *Über die verallgemeinerung des begriffes der zueinander konjugierten potenzen*, Studia Math. **1931**, 3, 1-67.

[**7**] Burenkov, V. I.; Gogatishvili, A.; Guliyev, V. S.; Mustafayev, R. *Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces*, Complex variables and elliptic equations **2010**, vol 55, no. 8-10, 739-758.

[**8**] Burenkov, V. I.; Guliyev, H. V. *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces*, Studia Math. 163, **2004**, 2, 157-176.

[**9**] Chiarenza, F.; Frasca, M. *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Math. Appl. **1987**, 7, 7, 273-279.

[**10**] Cianchi, A. *A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces*, Indiana Uni. Math. J. 45, **1996**, 39-65.

[**11**] Cianchi, A. *Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces*, J. London Math. Soc. **1999**, 2, 1, 187-202.

[**12**] García-Cuerva, J.; Rubio de Francia, J. L. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[**13**] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode. Island, 2000, 29.

[**14**] Deringoz, F.; Guliyev, V. S.; Samko, S. *Boundedness of maximal and singular operators on generalized Orlicz-Morrey spaces*, Operator Theory, Operator Algebras and Applications. Series: Operator Theory: Advances and Applications Vol. 242, **2014**, 139-158.

[**15**] Dzhumakaeva, G. T.; Nauryzbaev, K. Zh. *Lebesgue-Morrey spaces.* Izv. Akad. Nauk Kazakh. SSR Ser. Fiz.-Mat 79, **1982**, 5, 7-12.

[**16**] Edgar, G. A.; Sucheston, L. *Stopping Times and Directed Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[**17**] Fazio, G. Di.; Ragusa, M. A.; *Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients*, J. Funct. Anal., **1993**, 112, 241-256.

[**18**] Grafakos, L. *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 2004.

[**19**] Guliyev, V. S. *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in* $\mathbb{R}^n$, Doctoral degree dissertion, Mat. Inst. Steklov, Moscow, 329, 1994.

[**20**] Guliyev, V. S. *Integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups. Some applications*, Function spaces, Casioglu, Baku, 332, 1999.

[**21**] Guliyev, V. S. *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces*, J. Inequal. Appl., **2009**, Art. ID 503948, 20.

[**22**] Guliyev, V. S. *Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel*, J. Math. Sci. **2013**, vol 193 No. 2, 211-227.

[**23**] Guliyev, V. S.; Aliyev, S. S.; Karaman, T.; Shukurov, P. S. *Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey spaces*, Integral. Equ. Oper. Theory, **2011**, 71, 3, 327-355.

[24] Guliyev, V. S.; Deringoz, F. *On the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces.* J. Funct. Spaces. Volume 2014, Article ID 617414, **2014**, 11 pp.

[25] Hencl, S.; Kleprlik, L. *Composition of q-quasiconformal mappings and functions in Orlicz-Sobolev spaces.* Illinois J. Math. 56, **2012**, 3, 931-955.

[26] Kita, H. *On Hardy-Littlewood maximal functions in Orlicz spaces*, Math. Nachr. **1997**, 183, 135-155.

[27] Kokilashvili, V.; Krbec, M. M. *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, World Scientific, Singapore, 1991.

[28] Krasnoselskii, M. A.; Rutickii, Ya. B. *Convex Functions and Orlicz Spaces*, English translation P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[29] Kufner, A.; John, O.; Fuçik, S. *Function Spaces.* Noordhoff International Publishing: Leyden, Publishing House Czechoslovak Academy of Sciences: Prague, 1977.

[30] Lieb, E.; Loss, M. *Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[31] Maligranda, L.; Matsuoka, K. *Maximal function in Beurling-Orlicz and central Morrey-Orlicz spaces*, Colloquium Mathematicum, 138, **2015**, 2, 165-182.

[32] Megan, M.; Sasu, A. L.; Sasu, B. *On a theorem of Rolewicz type for linear skew-product semiflows*, International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, Cluj-Napoca, **2001**. Semin. Fixed Point Theory Cluj-Napoca, 3, **2002**, 63-72.

[33] Mizuhara, T. *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces*, Harmonik analysis, Sendai, **1990**, ICM-90 Satellite Conference Proceedings, **1991**, 183-189.

[34] Morrey, C. B. *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **1938**, 43, 126-166.

[**35**] Nakai, E. *On generalized fractional integrals*, Taiwanese J. Math., **2001**, 5, 3, 587-602.

[**36**] Nakai, E. *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr. **1994**, 166, 95-103.

[**37**] Nakai, E. *Generalized fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces*, In: Banach and Function Spaces, Kitakyushu, 2003, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004, 323-333.

[**38**] Nakai, E. *Calderón-Zygmund operators on Orlicz-Morrey spaces and modular inequalities*, Banach and function spaces II, Yokohama Publ., Yokohama, 2008, 393-410.

[**39**] O'Neil, R. *Fractional integration in Orlicz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 115, **1965**, 300-328.

[**40**] Orlicz, W. *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus* B. Bull. Acad. Polon. A, **1932**, 207-220 ; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, **1988**, 217-230.

[**41**] Peetre, J. *On the theorey of* $L_{p,\lambda}$ *spaces*, J. Funct. Anal., **1969**, 4, 71-87.

[**42**] Rao, M. M.; Ren, Z. D. *Theory of Orlicz Spaces*, M. Dekker, Inc., New York, 1991.

[**43**] Rao, M. M.; Ren, Z. D. *Application of Orlicz Spaces*, M. Dekker, Inc., New York, 2002.

[**44**] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill., 1987.

[**45**] Sawano, Y. *A Handbook of Harmonic Analysis*, http://www.comp.tmu.ac.jp/yosihiro/teaching/harmonic-analysis/harmonic-analysis-textbook.pdf

[**46**] Sawano, Y.; Sugano, S.; Tanaka, H. *Orlicz-Morrey spaces and fractional operators*, Potential Anal., 36, no. 4, **2012**, 517-556.

[**47**] Sadosky, C. *Interpolation of operators and singular integrals*, Marcel Dekker Inc., New York, 1979.

[**48**] Stein, E. M. *Harmonic Analysis: Real-Variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, 1993.

[**49**] Stein, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 304, 1970.

[**50**] Torchinsky, A. *Interpolation of operators and Orlicz classes*, Studia Math., 59, **1976**, 177-207.

[**51**] Torchinsky, A. *Real Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic, Press, San Diego, 1986.

[**52**] Wheeden, R.; Zygmund, A. *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York, 1977.

[**53**] Zaanen, A. C. *Riesz spaces*, II. North-Holland Mathematical Library, 30. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. xi+720 pp.

[**54**] Zorko, C. T. *Morrey space*, Proc. Amer. Math. Soc., 98, **1986**, 4, 586-592.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Fatih DERİNGÖZ
Doğum Yeri	:	Ankara
Doğum Tarihi	:	31.01.1986
Yabancı Dili	:	İngilizce

İletişim Bilgileri

Adres	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
E-mail	:	fderingoz@ahievran.edu.tr

Eğitim Durumu

Lisans	:	Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2004-2008)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2009-2011)
Doktora	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2011-2015)

Akademik Deneyim

Arş. Gör.	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2009-...)