T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN ORLICZ UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Koray ŞANTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİKANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2015

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN ORLICZ UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Koray ŞANTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİKANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

KIRŞEHİR 2015

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Üye
Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

Üye
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2015

Prof. Dr. Levent KULA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Harmonik Analizin İntegral Operatörlerinin Orlicz Uzaylarında Sınırlılığı" başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Koray ŞANTAŞ

HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN ORLICZ UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Yüksek Lisans Tezi

Koray ŞANTAŞ

Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran 2015

ÖZET

Bu tezde Orlicz uzayları ve harmonik analizin klasik operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılıkları hakkında bilgi verilecektir.

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, literatürde bu konu ile ilgili araştırmaları olan birçok matematikçi hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, bundan sonraki bölümlerde işlenecek olan konuları yakından ilgilendiren bazı temel kavram, notasyon ve teoremlere yer verilecektir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak Orlicz uzaylarının temelini olusturan Young fonksiyonlarının tanım ve özellikleri verilecek, daha sonra ise Orlicz uzayları detaylı bir şekilde incelenecektir.

Dördüncü bölümde ise harmonik analizin integral operatörlerinin Orlicz uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgili sonuçlara yer verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Young fonksiyonları, N-fonksiyonları, Lebesgue uzayı, Orlicz uzayı, maksimal operatör, kesirli maksimal operatör, singüler integral operatör, Riesz potansiyeli, komütatör.

Sayfa Adedi: 49

Danışman: Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

BOUNDEDNESS OF INTEGRAL OPERATORS OF HARMONIC ANALYSIS ON ORLICZ SPACES

Master Thesis

Koray ŞANTAŞ

Ahi Evran University

Institute of Science

June 2015

ABSTRACT

In this thesis, informations about Orlicz spaces and the boundedness of classical operators of harmonic analysis in these spaces are given.

This study is arranged in fourth chapters, in the first chapter, information is given about many mathematicians studying in this field in the literature and also about purpose of this study.

In the second chapter, some basic definitions and general informations about basic concepts, spaces and operators related to this study are given.

In the third chapter, firstly, the definitions and properties of Young functions which forms the basis of the Orlicz spaces will be given and then, Orlicz spaces will be investigated with full of details.

In the fourth chapter, the results about the boundedness of integral operators of harmonic analysis in Orlicz spaces will be given.

Keywords: Young functions, N-functions, Lebesgue space, Orlicz space, maximal operator, fractional maximal operator, singular integral operator, Riesz potential, commutator.

Number of Pages: 49

Supervisor: Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda yardımcı olan, değerli ve derin bilgileriyle bana ışık tutan, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyetiyle destekleyen ve bana emek veren saygı değer hocalarım; Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV ve Doç. Dr. Ali AKBULUT'a; lisans eğitimimde olduğu gibi yüksek lisans eğitimimde de attığım her adımda bana yol gösteren, iyi veya kötü her anımda destek olan, beni kardeşi bilip maddi manevi hiçbir desteğini esirgemeyen Arş. Gör. Fatih DERİNGÖZ'e; bugünlere ulaşmamda verdikleri emek ve sevgileri ile destekleri için sevgili aileme teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Koray ŞANTAŞ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
BMO	BMO uzayı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$\|B(x,r)\|$	$B(x,r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü
$\\|\cdot\\|_{L^p}$	Lebesgue uzayında norm
$WL^p(\mathbb{R}^n)$	zayıf Lebesgue uzayı
$\widetilde{\Phi}(t)$	Φ fonksiyonunun tümleyeni
$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$	Orlicz uzayı
$WL^\Phi(\mathbb{R}^n)$	zayıf Orlicz uzayı
$\\|\cdot\\|_{L^\Phi}$	Orlicz uzayında norm
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
M_α	kesirli maksimal operatörü
I_α	kesirli integral operatörü
T	singüler integral operatörü
$[b,K]$	K operatörünün komütatörü

1 GİRİŞ

Harmonik analizin klasik operatörlerinin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki sınırlılığı yoğun bir şekilde araştırılmaktadır. Bu operatörlerin Lebesgue uzaylarındaki zayıf ve güçlü tipli sınırlılıkları klasiktir ve [3, 17, 37, 40] kaynaklarında bulunabilir. Bu elde edilen sonuçlar Lebesgue uzaylarının genelleştirilmesi olan birçok fonksiyon uzayına genişletilmiştir. Örneğin Orlicz uzayları, Morrey uzayları, Lorentz Uzayları Herz uzayları vs. Bu operatörlerin fonksiyon uzaylarındaki sınırlılığı bu uzaylarda lineer ve non-lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerliği ve kesin ön eşitsizliklerin bulunmasında büyük öneme sahiptir.

Çalışmamızda bu operatörlerin Orlicz uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgileneceğiz. Orlicz uzayları ilk olarak 1931 yılında Birnbaum ve Orlicz [5] tarafından Lebesgue uzaylarının bir genelleştirilmesi olarak tanıtılmıştır. Daha sonra bu uzaylar matematiksel analizde özellikle de reel ve harmonik analizde kullanılan çok önemli araçlar haline gelmiştir. Orlicz uzayları Hardy-Littlewood maksimal operatörü, kesirli integral operatör ve singüler integral operatör gibi klasik operatörlerin sınırlılıklarının sınır durumları hakkında bize bilgi verir. Örneğin Hardy-Littlewood maksimal operatörü $1 < p \leq \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır. Orlicz uzayları yardımıyla bu operatörün $p = 1$ yakınındaki sınırlılığı araştırılabilmektedir [11, 22]. Yine kesirli integral operatör I_α nın $1 < p < q < \infty$ ve $-n/p + \alpha = -n/q$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğu iyi bilinmektedir (Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi). Trudinger [41], Orlicz uzayları yardımıyla bu operatörün sınırlılığını $q = \infty$ yakınında araştırmıştır. Daha sonra Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi ve Trudinger'in bu sonucu başka araştırmacılar tarafından daha da genişletilmiştir [11, 30, 32, 38, 39]. Ayrıca bu uzayların lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılmasında önemli bir yeri vardır [6, 7]. Orlicz uzaylarının teorisi ve uygulamaları [24, 28, 33, 34] çalışmalarında detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Bu tez bir başlangıç kabul edilerek "Orlicz uzayları ve harmonik analizin klasik integral operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılığı" konusunda daha ileri düzeyde çalışmalar yapabilmek için bir temel oluşturulması hedeflenmektedir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda bize yardımcı olacak temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.0.1 X boş olmayan bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir Σ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda Σ sınıfına X kümesi üzerinde bir cebirdir denir:

(i) $X \in \Sigma$

(ii) Her $E \in \Sigma$ için $E^c = X \setminus E \in \Sigma$

(iii) $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \Sigma$ ise $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \Sigma$

Eğer (iii) şartı yerine

$$\text{"her } n \in \mathbb{N} \text{ için } E_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma\text{"}$$

şartı konulursa Σ cebirine bir $\sigma-$ cebir adı verilir.

Tanım 2.0.2 Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği $\sigma-$cebiri denir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu $\sigma-$cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$ nin her bir elamanına Borel kümesi denir.

Tanım 2.0.3 X bir küme ve Σ, X üzerinde bir $\sigma-$cebiri olsun. Bu durumda (X, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay, Σ daki her bir kümeye de $\Sigma-$ ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.0.4 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. Σ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

şartlarını sağlarsa bu μ fonksiyonuna ölçü fonksiyonu veya ölçü adı verilir.

Tanım 2.0.5 Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir Σ σ-cebiri ve Σ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan (X, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı denir.

Tanım 2.0.6 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\left((\alpha, +\infty)\right) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \Sigma)$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.7 X bir küme ve $P(X)$, X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı , genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 2.0.8 $(I_k)\,, \mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup_k I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.

$n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$\upsilon(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \ I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için Eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^* \left(A \cap (\mathbb{R}^n - E) \right)$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir.

Tanım 2.0.9 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, m^*)$, m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}^n$ nin alt kümelerinin sınıfı olsun. m^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, m^*)$ sınıfına da $B(\mathbb{R}^n)$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir.

$\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue ölçüsü $dx = dx_1 \dots dx_n$ ile gösterilecektir. $|A|$ ve $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ notasyonları sırası ile $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue ölçüsü ve $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n$ için kullanılacaktır.

Tanım 2.0.10 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme hemen hemen her yerde doğrudur denir.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar kümesinin bir lineer alt uzayı $\mathcal{G}$ olmak üzere $\mathcal{T} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ operatörü her $f, g \in \mathcal{G}$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{T}(f + g) = \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g) \ \text{ ve } \ \mathcal{T}(\lambda f) = \lambda \mathcal{T}(f)$$

şartlarını sağlıyorsa lineer operatör,

$$|\mathcal{T}(f + g)| \leq |\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)| \quad \text{ve} \quad |\mathcal{T}(\lambda f)| = |\lambda| \, |\mathcal{T}(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa alt lineer operatör, bir $C > 0$ sabiti için

$$|\mathcal{T}(f + g)| \leq C \left(|\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)| \right) \quad \text{ve} \quad |\mathcal{T}(\lambda f)| = |\lambda| \, |\mathcal{T}(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa quasi-lineer operatör olarak adlandırılır.

C pozitif bir sabit olmak üzere bu çalışmada $A \lesssim B$ gösterimini $A \leq CB$, eşitsizliğinin yerine kullanacağız. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir.

2.1 Lebesgue Uzayları

Tanım 2.1.1 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı veya p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı üzerindeki norm

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

ile tanımlanır.

$p = \infty$ için $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı,

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf \{K : |f(x)| \leq K \quad \text{h.h. x} \in \mathbb{R}^n\} < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfıdır.

Teorem 2.1.2 Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L^p(\mathbb{R}^n)$ bir Banach uzayıdır [25].

Teorem 2.1.3 (Young Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. Bu durumda her $a, b > 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a^p = b^{p'}$ olması ile mümkündür [25].

Teorem 2.1.4 (Hölder Eşitsizliği) f, g ölçülebilir fonksiyonlar, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

eşitsizliği sağlanır [25].

Teorem 2.1.5 (Minkowski eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$ için eğer $f, g \in L^p$ ise $(f+g) \in L^p$ ve

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

dir [25].

Teorem 2.1.6 (**Jensen Eşitsizliği**) $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $|\Omega| < \infty$ olmak üzere $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $\langle f \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)dx$ olsun. Eğer $f \in L^1(\Omega)$ ise

$$\langle J \circ f \rangle \geq J(\langle f \rangle)$$

olur [26].

Teorem 2.1.7 (**Chebyshev Eşitsizliği**) f ölçülebilir bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$$

eşitsizliği gerçeklenir [42].

Tanım 2.1.8 $1 \leq p < \infty$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\|f\|_{WL^p} = \sup_{\lambda>0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere zayıf Lebesgue uzayı $WL^p(\mathbb{R}^n)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$WL^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f - \text{ölçülebilir} \ \& \ \|f\|_{WL^p} < \infty\}.$$

Uyarı 2.1.9 $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow WL^p(\mathbb{R}^n)$. Dahası $\|f\|_{WL^p} \leq \|f\|_{L^p}$ eşitsizliği sağlanır [17].

Tanım 2.1.10 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ nin her bir kompakt K alt kümesi için sırasıyla $f\chi_K \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_K \in WL^p(\mathbb{R}^n)$ şartlarını sağlayan tüm ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayı $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $WL^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Burada χ_K, K kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir. Özel olarak $p = 1$ yani $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ise f fonksiyonu lokal integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.1.11 T bir quasi-lineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise zayıf (p, q) tipindendir denir. Yani her bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p}\right)^q$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü zayıf (p, q) tipindendir.

Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise güçlü (p, q) tipindendir denir. Yani her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü güçlü (p, q) tipindendir.

Uyarı 2.1.12 Her güçlü (p, q) tipli operatör aynı zamanda zayıf (p, q) tipli operatördür [17].

Tanım 2.1.13 $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L \log L$ Zygmund uzayı denir [3].

2.2 BMO (John-Nirenberg) Uzayı

BMO (Bounded Mean Oscillation) uzayı, 1961 yılında John ve Nirenberg [21] tarafından ortaya konulmuştur. BMO uzayı L^∞ uzayı ile benzer özelliklere sahiptir ve sıklıkla L^∞ yerine kullanılır. Klasik singüler integral operatörler L^∞ uzayından L^∞ uzayına sınırlı olmamasına rağmen L^∞ uzayından BMO uzayına sınırlıdır. Fefferman 1971 yılında BMO uzayının H^1 Hardy uzayına dual olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.2.1 f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|f\|_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| dy < \infty$$

ile verilen $\| \cdot \|_*$ yarı-normu ile tanımlı Banach uzayıdır. Burada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy$$

dır. BMO uzayı $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına eşit değildir. Fakat $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ dır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| dy \\
&\qquad \le \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy + \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \left|f_{B(x,r)}\right| dy \\
&\qquad = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy + |f_{B(x,r)}| \\
&\qquad \le 2\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy \\
&\qquad \le 2||f||_\infty
\end{aligned}$$

ve buradan

$$||f||_* \le 2||f||_\infty$$

elde edilir.

$||f||_* \le 2||f||_\infty$ olduğundan $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. Her sınırlı (ölçülebilir) fonksiyon BMO uzayındandır. Ancak sınırlı olmayan BMO fonksiyonları da vardır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olan fakat $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olmayan tipik bir örnek $\log|x|$ verilebilir.

Şimdi BMO uzayına ait olmayan bir fonksiyon örneği verelim.

Örnek 2.2.2 $g(x) = sign(x)\log\frac{1}{|x|}$ fonksiyonu $BMO([-1,1])$ uzayına ait değildir. Gerçekten $0 < h < 1$ ve $I \equiv [-h,h]$ için $g_1 = 0$ ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I|}\int_I |g(y) - g_1|dy &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \left|\log\frac{1}{|x|}\right| dx = \frac{1}{h}\int_0^h \log\frac{1}{x}dx \\
&= 1 + \log\frac{1}{h} \longrightarrow \infty, \quad h \longrightarrow 0 \text{ iken}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu örnek bir fonksiyonun mutlak değeri BMO sınıfına ait ise bu fonksiyonun bir BMO fonksiyonu olmasını gerektirmeyeceğini gösterir.

Uyarı 2.2.3 [21]

(1) Her $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha > 0$ için

$$|\{x \in B : |f(x) - f_B| > \alpha\}| \le C_1\,|B|\,e^{-C_2\alpha/\|f\|_*}, \qquad \forall B \subset \mathbb{R}^n$$

olacak şekilde pozitif C_1 ve C_2 sayıları vardır. Bu eşitsizlik John-Nirenberg eşitsizliği olarak bilinir.

(2) John-Nirenberg eşitsizliği $1 < p < \infty$ için

$$\|f\|_* \approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left| f(y) - f_{B(x,r)} \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

olmasını gerektirir.

(3) $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $0 < 2r < t$ için

$$\left| f_{B(x,r)} - f_{B(x,t)} \right| \leq C \|f\|_* \ln \frac{t}{r} \tag{2.1}$$

olacak şekilde x, r, t ve f fonksiyonundan bağımsız pozitif bir C sayısı vardır.

Uyarı 2.2.4

(i) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ ise bu durumda $f(\cdot - h) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\cdot - h)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

dır.

(ii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ ise bu durumda $f(\lambda x) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

dır.

(iii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$\|f\|_{BMO} \approx \sup_Q \inf_{c\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c| \, dx$$

dır.

2.3 Harmonik Analizin Klasik İntegral Operatörleri

Şimdi bu çalışmada göz önünde bulundurulacak operatörler ve bu operatörlerin Lebesgue uzaylarındaki sınırlılıkları verilecektir.

Tanım 2.3.1 f, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere M, Hardy-Littlewood maksimal operatörü

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlı operatördür.

Tanım 2.3.2 T singüler integral operatörü

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\{|y| \geq \varepsilon\}} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlı operatördür. Burada Ω, $\mathbb{R}^n$ de tanımlı 0. dereceden homojen, tek ve $\omega(\delta) = \sup\{|\Omega(x) - \Omega(y)| : x, y \in S^{n-1}, |x-y| \leq \delta\}$ olmak üzere $\int_0 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty$ koşulunu (Dini koşulu) sağlayan bir fonksiyondur.

Tanım 2.3.3 f, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 \leq \alpha < n$ olmak üzere M_α kesirli maksimal operatörü

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlı operatördür. Ayrıca $\alpha = 0$ için $M_0 \equiv M$ olur.

Tanım 2.3.4 f, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere I_α kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli)

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlı operatördür.

Uyarı 2.3.5 I_α ve M_α operatörleri arasında $0 < \alpha < n$, $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$M_\alpha(f)(x) \lesssim I_\alpha(|f|)(x)$$

ilişkisi vardır [27].

Tanım 2.3.6 Lokal integrallenebilir bir b fonksiyonu ve T, I_α, M_α ve M operatörleri tarafından üretilen komütatör operatörleri sırasıyla

$$[b,T]f(x) := b(x)Tf(x) - T(bf)(x),$$

$$[b,I_\alpha]f(x) := b(x)I_\alpha f(x) - I_\alpha(bf)(x),$$

$$M_{b,\alpha}(f)(x) := \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B(x,t)} |b(x)-b(y)||f(y)|dy,$$

$$M_b(f)(x) := \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(x)-b(y)||f(y)|dy$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.3.7

(i) M, Hardy-Littlewood maksimal operatörü $1 \leq p \leq \infty$ için zayıf (p,p) tipli $1 < p \leq \infty$ için ise güçlü (p,p) tipli bir operatördür [18, 43].

(ii) T, singüler integral operatörü $1 \leq p < \infty$ için zayıf (p,p) tipli $1 < p < \infty$ için ise güçlü (p,p) tipli bir operatördür [2, 3].

(iii) M_α, kesirli maksimal operatörü $1 \leq p \leq \frac{n}{\alpha}$ için zayıf (p,q) tipli $1 < p \leq \frac{n}{\alpha}$ için ise güçlü (p,q) tipli bir operatördür. Burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ dir [19, 20, 36].

(iv) I_α, kesirli integral operatörü $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ için zayıf (p,q) tipli $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ için ise güçlü (p,q) tipli bir operatördür. Burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ dir [19, 20, 36].

(v) $1 < p < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ için $[b,T]$ ve M_b güçlü (p,p) tipli operatörlerdir [12, 16].

(vi) $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ için $[b, I_\alpha]$ ve $M_{b,\alpha}$ güçlü (p,q) tipli operatörlerdir [8].

3 ORLICZ UZAYLARI

3.1 Young Fonksiyonları

Bu bölümde Orlicz uzaylarını tanımlamak için kullanılan Young fonksiyonlarının tanımı verilerek, temel özellikleri incelenecektir. Tezin geneli ve özellikle de Bölüm 3 hazırlanırken Deringöz [13] çalışmasından faydalanılmıştır.

Tanım 3.1.1 Eğer bir $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonu,

(1) $\Phi(0) = 0$,

(2) Soldan süreklidir,

(3) Artandır,

(4) Konvekstir: Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ için $\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda\Phi(t_1) + (1-\lambda)\Phi(t_2)$,

(5) Aşikar değildir: $(0,\infty)$ aralığı üzerinde özdeş olarak ne sıfıra ne de sonsuza eşit değildir, yani $\exists t_1 > 0 \;\; \Phi(t_1) > 0$ & $\exists t_2 > 0 \;\; \Phi(t_2) < \infty$

koşullarını sağlıyorsa Young fonksiyonu olarak adlandırılır.

Uyarı 3.1.2 Young fonksiyonunun 1 ve 4 numaralı özelliklerinden $t \in (0,\infty) \mapsto \frac{\Phi(t)}{t}$ fonksiyonunun artan olduğu görülebilir. Gerçekten, $t_1 = \frac{t_1}{t_2}t_2 + \big(1 - \frac{t_1}{t_2}\big)0$ olduğundan

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow \Phi(t_1) \leq \frac{t_1}{t_2}\Phi(t_2) \tag{3.1}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Açık bir aralık üzerinde konveks olan fonksiyonların sürekli oldukları ve hemen her yerde türevlenebildikleri iyi bilinmektedir. Fakat, konveks fonksiyonların sağladığı daha birçok önemli özellik vardır. Aşağıda konveks fonksiyonların integral gösterimine sahip olduklarını ifade eden teorem verilmiştir.

Teorem 3.1.3 $\Phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $[c,d] \subset (a,b)$ kapalı alt aralığı için

$$\Phi(t) = \Phi(c) + \int_c^t \varphi(s)ds, \qquad c \leq t \leq d \tag{3.2}$$

olmasıdır. Burada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, artan ve soldan sürekli bir fonksiyondur [33].

Şimdi Teorem 3.1.3 ün bir sonucu olan, herhangi bir Young fonksiyonunun da (3.2) tipinde bir integral gösterimine sahip olduğunu ifade eden sonucu verelim.

Sonuç 3.1.4 $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ fonksiyonunun bir Young fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, \quad t \geq 0 \tag{3.3}$$

olmasıdır. Burada $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$, artan, soldan sürekli ve aşikar olmayan bir fonksiyondur. Eğer bazı t ler için $\Phi(t) = \infty$ ise uygunluk açısından $\varphi(t) = \infty$ olarak alınır.

Uyarı 3.1.5 Sonuç 3.1.4 de gereklilik durumunda hemen her $t > 0$ için $\varphi(t) = \Phi'(t)$ dir. Bu gerçek göz önünde bulundurularak bundan sonra; artan, soldan sürekli ve aşikar olmayan bir $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ fonksiyonu Orlicz türevi olarak adlandırılacaktır. φ türevine sahip bir Φ Young fonksiyonu denilince akla Φ fonksiyonunun (3.3) integral gösterimi gelmelidir.

Orlicz uzaylarını tanımlamak için bazı yazarlar Young fonksiyonları sınıfından daha dar bir sınıf olan ve tanımı aşağıda verilen N-fonksiyonlarını kullanmaktadırlar. Fakat bu durumun bazı dezavantajları vardır. Örneğin Orlicz uzayları N-fonksiyonları yardımıyla tanımlanırsa $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $L \log L(\mathbb{R}^n)$ uzayları dışarıda bırakılmış olur. Her ne kadar N-fonksiyonları çalışması daha kolay fonksiyonlar olsa da biz bu çalışmada Young fonksiyonlarını kullanmayı tercih edeceğiz.

Tanım 3.1.6 φ, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli ve

(a) $\varphi(0) = 0$, eğer $t > 0$ ise $\varphi(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$;

(b) φ azalmayan;

(c) φ sağdan sürekli;

özelliklerine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda $[0, \infty)$ üzerinde

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \tag{3.4}$$

eşitliğiyle tanımlı, reel değerli Φ fonksiyonu bir N-fonksiyon olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.7 Herhangi bir Φ N-fonksiyonu,

(i) Φ, $[0, \infty)$ üzerinde süreklidir;

(ii) Φ kesin artandır;

(iii) Φ konvekstir;

(iv) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$;

(v) Eğer $t > 0$ ise $\Phi(t) > 0$

özelliklerine sahiptir [1].

Uyarı 3.1.8 Önerme 3.1.7 (i), (iii), (iv) ve (v) özellikleri bir N-fonksiyonunu tanımlamak için kullanılabilirdi. Çünkü bu üç özellik, Tanım 3.1.6 (a)-(c) özelliklerine sahip bir φ fonksiyonu ile Φ fonksiyonunun (3.4) formunda bir gösteriminin var olmasını gerektirir [1].

Tanım 3.1.9 φ bir Orlicz türevi olmak üzere $\widetilde{\varphi}$ fonksiyonu

$$\widetilde{\varphi}(t) = \inf\{s : \varphi(s) \geq t\} \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlanır.

Uyarı 3.1.10 $\widetilde{\varphi}$ fonksiyonu da bir Orlicz türevidir. Dolayısıyla Sonuç 3.1.4 gereğince $\widetilde{\Phi}(t) = \int_0^t \widetilde{\varphi}(s)ds$ eşitliğiyle tanımlı $\widetilde{\Phi}$ fonksiyonu bir Young fonksiyonudur [14].

Tanım 3.1.11 φ ve $\widetilde{\varphi}$ fonksiyonları Tanım 3.1.9 daki gibi olsunlar.

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\sigma)d\sigma, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \int_0^s \widetilde{\varphi}(\tau)d\tau$$

eşitlikleri ile verilen Φ ve $\widetilde{\Phi}$ Young fonksiyonları birbirlerinin tümleyeni olarak adlandırılırlar.

Örnek 3.1.12 Aşağıda tümleyen Young fonksiyon çiftlerine bazı örnekler verilmiştir:

(i) $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \frac{t^{p'}}{p'}, \qquad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$

(ii) $\Phi(t) = t, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq s \leq 1 \\ \infty & , \quad s > 1 \end{cases}$

(iii) $\Phi(t) = e^t - t - 1, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = (1+s)\log(1+s) - s$

(iv) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 1 \\ t\log t & , t > 1 \end{cases}, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \begin{cases} s & , s < 1 \\ e^{s-1} & , s \geq 1 \end{cases}$

Uyarı 3.1.13 Örnek 3.1.12 (ii) ve (iv) de verilen fonksiyonlar Young fonksiyonudur fakat N-fonksiyon değildir.

Önerme 3.1.14 Φ bir Young fonksiyonu olsun. O zaman her $0 < \alpha < 1$ ve her $0 \leq t < \infty$ için

$$\Phi(\alpha t) \leq \alpha \Phi(t) \tag{3.6}$$

ve her $\alpha \geq 1$, her $0 \leq t < \infty$ için

$$\alpha \Phi(t) \leq \Phi(\alpha t)$$

olur [25].

İspat. $0 < \alpha < 1$ olsun. Konvekslikten ve $\Phi(0) = 0$ olmasından

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + (1-\alpha)0) \leq \alpha \Phi(t) + (1-\alpha)\Phi(0) = \alpha \Phi(t)$$

olur. Şimdi $\alpha \geq 1$ olsun. (3.6) eşitsizliğini kullanarak

$$\alpha \Phi(t) = \alpha \Phi(\alpha^{-1}\alpha t) \leq \alpha \alpha^{-1} \Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t)$$

olması elde edilir. ■

Önerme 3.1.15 Φ, φ türevine sahip bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda $t > 0$ için

(i) $\frac{\Phi(t)}{t} \leq \varphi(t) \leq \frac{\Phi(2t)}{t}$

(ii) $\Phi(\frac{t}{2}) \leq \int_0^t \frac{\Phi(s)}{s} ds \leq \Phi(t)$

eşitsizlikleri gerçeklenir [35].

İspat. Φ Young fonksiyonunun (3.3) integral gösteriminden ve φ fonksiyonunun artanlığından

$$\frac{\Phi(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)ds = \varphi(t),$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}\int_t^{2t} \varphi(t)ds \leq \frac{1}{t}\int_t^{2t} \varphi(s)ds \leq \frac{1}{t}\int_0^{2t} \varphi(s)ds = \frac{\Phi(2t)}{t}$$

elde edilir. Böylece (i). eşitsizlik ispatlanmış olur.

(ii). eşitsizliğin ispatı için $t \in [0,\infty) \mapsto \frac{\Phi(t)}{t}$ fonksiyonunun artanlığından (Bkz. (3.1)) faydalanacağız.

$$\Phi(\frac{t}{2}) = \int_{t/2}^{t} \frac{\Phi(t/2)}{t/2} ds \leq \int_{t/2}^{t} \frac{\Phi(s)}{s} ds \leq \int_{0}^{t} \frac{\Phi(s)}{s} ds.$$

$$\int_{0}^{t} \frac{\Phi(s)}{s} ds \leq \int_{0}^{t} \frac{\Phi(t)}{t} ds = \Phi(t).$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. ∎

Teorem 3.1.16 (**Young eşitsizliği**) Φ ve $\widetilde{\Phi}$ sırasıyla φ ve $\widetilde{\varphi}$ türevlerine sahip tümleyen Young fonksiyonları olsun. Bu durumda her $x, y \geq 0$ için

$$xy \leq \Phi(x) + \widetilde{\Phi}(y) \tag{3.7}$$

olur. Eşitlik ise sadece $y = \varphi(x)$ veya $x = \widetilde{\varphi}(y)$ olması ile mümkündür [44].

İspat. Eğer bir x_0 veya y_0 için $\Phi(x_0) = \infty$ veya $\widetilde{\Phi}(y_0) = \infty$ ise (3.7) eşitsizliği doğrudur. Şimdi her $0 \leq x < \infty$ ve $0 \leq y < \infty$ için $\Phi(x) < \infty$ ve $\widetilde{\Phi}(y) < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
0 \leq xy &= \int_0^x \int_0^y du dv \\
&= \iint_{\{(u,v)\in[0,x]\times[0,y]:\, v\leq\varphi(u)\}} du dv \\
&\quad + \iint_{\{(u,v)\in[0,x]\times[0,y]:\, u\leq\widetilde{\varphi}(v)\}} du dv \\
&= \int_0^x du \int_0^{\min(y,\varphi(u))} dv + \int_0^y dv \int_0^{\min(x,\widetilde{\varphi}(v))} du \\
&\leq \int_0^x \varphi(u) du + \int_0^y \widetilde{\varphi}(v) dv \\
&= \Phi(x) + \widetilde{\Phi}(y)
\end{aligned}$$

olur. Eşitlik ise sondan bir önceki adımda ancak ve ancak $y \geq \varphi(x)$ ve $x \geq \widetilde{\varphi}(y)$ olması ile mümkündür. Bu ise $y = \varphi(x)$ veya $x = \widetilde{\varphi}(y)$ olmasına denktir. Çünkü $y > \varphi(x)$ eşitsizliği $x \leq \widetilde{\varphi}(y)$ olmasını gerektirir. ∎

Sonuç 3.1.17 $y \geq 0$ için $\widetilde{\Phi}(y) = \sup\{xy - \Phi(x) : x \in [0,\ \infty)\}$ ve eğer $\widetilde{\varphi}(y) < \infty$ ise sup = max olur [44].

İspat. $y > 0$ sayısını sabitleyelim. O zaman bütün x ler için $\Phi(x) + \widetilde{\Phi}(y) \geq xy$, buradan ($\Phi(x), \widetilde{\Phi}(y)$ nin biri bile sonsuz olsa)

$$\widetilde{\Phi}(y) \geq \sup\{xy - \Phi(x) : x \geq 0\}$$

olur. Şimdi eğer $\widetilde{\varphi}(y) < \infty$ ise $x = \widetilde{\varphi}(y)$ için $\Phi(x) + \widetilde{\Phi}(y) = xy$ olur, dolayısıyla $\Phi(x)$ ve $\widetilde{\Phi}(y)$ nin ikisi birden sonludur ve

$$\widetilde{\Phi}(y) = \max\{xy - \Phi(x) : x \geq 0\}$$

dir. Diğer yandan eğer $\widetilde{\varphi}(y) = \infty$ ise Φ sınırlıdır, bu sebepten

$$\sup\{xy - \Phi(x) : x \geq 0\} = \infty$$

olur. ■

Önerme 3.1.18 Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$$\widetilde{\Phi}(\frac{\Phi(t)}{t}) \leq \Phi(t)$$

olur [35].

İspat. $\frac{\Phi(t)}{t}$ artan olduğundan $s < t$ için

$$\frac{\Phi(t)}{t}s - \Phi(s) \leq \Phi(t)$$

ve $s \geq t$ için

$$\frac{\Phi(t)}{t}s - \Phi(s) \leq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler ve Sonuç 3.1.17 kullanılarak ispat tamamlanır.

■

Sıradaki önermede ve çalışmanın bundan sonraki kısmında Φ^{-1} gösterimi Φ Young fonksiyonunun genelleştirilmiş tersini göstermek için kullanılacaktır. Yani

$$\Phi^{-1}(s) = \inf\{r \geq 0 : \Phi(r) > s\}, \quad 0 \leq s \leq \infty.$$

Eğer Φ Young fonksiyonunun Orlicz türevi φ sonlu, yani her $0 < s < \infty$ için $0 < \varphi(s) < \infty$ ise $\Phi \in \mathcal{Y}$ ile gösterilecektir. Eğer $\Phi \in \mathcal{Y}$ ise Φ birebir ve örten bir fonksiyondur ve Φ^{-1}, Φ fonksiyonunun adi tersidir [29]. Ayrıca genelleştirilmiş ters fonksiyon tanımından her $0 \leq r < \infty$ için

$$\Phi(\Phi^{-1}(r)) \leq r \leq \Phi^{-1}(\Phi(r))$$

olduğu görülür.

Önerme 3.1.19 Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$$t \leq \Phi^{-1}(t)(\widetilde{\Phi})^{-1}(t) \leq 2t \tag{3.8}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir [33].

İspat. Young eşitsizliği her $t \geq 0$ için

$$\Phi^{-1}(t)(\widetilde{\Phi})^{-1}(t) \leq \Phi(\Phi^{-1}(t)) + \widetilde{\Phi}((\widetilde{\Phi})^{-1}(t)) \leq 2t$$

olmasını gerektirir. Diğer taraftan Önerme 3.1.18 den, her $t > 0$ için

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{\Phi(t)}{t}\right) \leq \Phi(t)$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlikte $\Phi(t)$ yi t ile değiştirirsek

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{t}{\Phi^{-1}(t)}\right) \leq t$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece her $t \geq 0$ için

$$t \leq \Phi^{-1}(t)(\widetilde{\Phi})^{-1}(t) \leq 2t$$

elde edilir. ■

Tanım 3.1.20 Φ bir Young fonksiyonu olsun.

(i) Eğer her $t \geq 0$ için

$$\Phi(2t) \leq c\Phi(t)$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir c sabiti varsa Φ, Δ_2 koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \Delta_2$ ile gösterilir.

(ii) Eğer $\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ ise Φ, ∇_2 koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \nabla_2$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.21 Φ bir Young fonksiyonu olsun. $\Phi \in \nabla_2$ olması için gerek ve yeter koşul $\Phi(kt) \geq 2k\Phi(t)$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $k > 1$ sabitinin olmasıdır [24].

İspat.

$$\widetilde{\Phi(k\cdot)} = \widetilde{\Phi}(\cdot/k),\ \widetilde{2k\Phi(\cdot)} = 2k\widetilde{\Phi}(\cdot/2k)$$

olduğuna dikkat çekelim. Buradan

$$\Phi(kt) \geq 2k\Phi(t) \Leftrightarrow \widetilde{\Phi(kt)} \leq \widetilde{2k\Phi(t)} \Leftrightarrow \widetilde{\Phi}(s/k) \leq 2k\widetilde{\Phi}(s/2k) \Leftrightarrow \widetilde{\Phi}(2s) \leq 2k\widetilde{\Phi}(s)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Örnek 3.1.22

(i) $\Phi(r) = r$ fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar fakat ∇_2 koşulunu sağlamaz.

(ii) $1 < p < \infty$ olmak üzere $\Phi(r) = r^p$ her iki koşulu da sağlar.

(iii) $\Phi(r) = e^r - r - 1$ fonksiyonu ∇_2 koşulunu sağlar fakat Δ_2 koşulunu sağlamaz.

Tanım 3.1.23 Φ bir N-fonksiyonu olsun.

$$a_\Phi = \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}, \qquad b_\Phi = \sup_{t\in(0,\infty)} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}$$

eşitlikleri ile tanımlanan sayılar, Φ fonksiyonunun Simonenko indisleri olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.15 gözönüne alınırsa $1 \leq a_\Phi \leq b_\Phi \leq \infty$ olduğu görülür.

Önerme 3.1.24 Φ bir N-fonksiyonu ve a_Φ ve b_Φ bu fonksiyonun Simonenko indisleri olsun. Bu durumda

(i) Eğer $b_\Phi < \infty$ ise Φ fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar.

(ii) Eğer $b_\Phi < \infty$ ise $\Phi(t)/t^{b_\Phi}$, $t \in (0,\infty)$ için azalandır. Dahası her $\lambda \in [0,1]$ ve $t \in (0,\infty)$ için $\Phi(\lambda t) \geq \lambda^{b_\Phi}\Phi(t)$ eşitsizliği sağlanır.

(iii) $\Phi(t)/t^{a_\Phi}$, $t \in (0,\infty)$ için artandır. Dahası her $\lambda \in [1,\infty)$ ve $t \in (0,\infty)$ için $\Phi(\lambda t) \geq \lambda^{a_\Phi}\Phi(t)$ eşitsizliği sağlanır.

(iv) $1 < p < a_\Phi \leq b_\Phi < q < \infty$ ise $\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t^p} = 0$ ve $\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t^q} = 0$ olur.

önermeleri doğrudur [15, 24].

İspat.

(i) $b_\Phi < \infty$ ise her $t \in (0,\infty)$ için $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq \dfrac{b_\Phi}{t}$ olduğunu biliyoruz; ayrıca $[0,\infty)$ üzerinde konveks olan her fonksiyonun $[0,\infty)$ aralığının her kapalı ve sınırlı alt aralığında mutlak sürekli olmasından

$$\log\frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} = \int_t^{2t}\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)}ds \leq \int_t^{2t}\frac{b_\Phi}{s}ds = b_\Phi \log 2$$

olur. Böylece her $t \in (0,\infty)$ için $\Phi(2t) \leq 2^{b_\Phi}\Phi(t)$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(ii) $t_1 \leq t_2$ olacak şekildeki her $t_1, t_2 \in (0,\infty)$ için kalkülüsün temel teoreminden,

$$\frac{\Phi(t_2)}{t_2^{b_\Phi}} - \frac{\Phi(t_1)}{t_1^{b_\Phi}} = \int_t^{2t}\frac{s\Phi'(s) - b_\Phi\Phi(s)}{s^{b_\Phi+1}}ds \leq 0$$

olduğunu görürüz. Bu durumda $t \in (0,\infty)$ için $\Phi(t)/t^{b_\Phi}$ azalan olur. Özel olarak $\lambda \in (0,1]$ ve $t \in (0,\infty)$ için $\frac{\Phi(t)}{t^{b_\Phi}} \leq \dfrac{\Phi(\lambda t)}{(\lambda t)^{b_\Phi}}$, yani $\Phi(\lambda t) \geq \lambda^{b_\Phi}\Phi(t)$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(iii) (iii) ün ispatı (ii) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

(iv) $t \in (0,1]$ için $\frac{\Phi(t)}{t^{a_\Phi}}$, t ye göre artan olduğundan $\frac{\Phi(t)}{t^{a_\Phi}} \leq \Phi(1) < \infty$ olur. Bu ve $a_\Phi > p$ olması

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(t)}{t^p} = \lim_{t\to 0} t^{a_\Phi - p}\frac{\Phi(t)}{t^{a_\Phi}} = 0$$

olmasını gerektirir. $t \in [1,\infty)$ için $\frac{\Phi(t)}{t^{b_\Phi}}$, t ye göre azalan olduğundan $\frac{\Phi(t)}{t^{b_\Phi}} \leq \Phi(1) \leq \infty$ olur. Bu ve $b_\Phi < q$ olması

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t^q} = \lim_{t\to\infty} t^{b_\Phi - p}\frac{\Phi(t)}{t^{b_\Phi}} = 0$$

olmasını gerektirir ve böylece ispat tamamlanır.

■

3.2 Orlicz Fonksiyon Uzayları

Tanım 3.2.1 Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere Orlicz uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f - \text{ölçülebilir} \ \& \ \exists\alpha > 0 \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\alpha|f(x)|)dx < \infty \right\}$$

Önerme 3.2.2 $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L^{\Phi}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1\right\}$$

normu ile bir normlu uzaydır. Bu norma Orlicz uzayının Luxemburg-Nakano normu adı verilir [33].

İspat. $\|\cdot\|_{L^{\Phi}}$ norm olması için (i)$\|f\|_{L^{\Phi}} = 0 \Leftrightarrow f = 0$, h.h.y., (ii)$\|\alpha f\|_{L^{\Phi}} = |\alpha|\|f\|_{L^{\Phi}}, \alpha \in \mathbb{R}$ ve (iii)$\|f+g\|_{L^{\Phi}} \leq \|f\|_{L^{\Phi}} + \|g\|_{L^{\Phi}}$ şartlarını sağlaması gerekir. İlk olarak (i) şartının sağlandığını gösterelim.

$f = 0$, h.h.y. ise $\|f\|_{L^{\Phi}} = 0$ olması açıktır. Tersine $\|f\|_{L^{\Phi}} = 0$ olsun. Kabul edelim ki pozitif ölçülü bir küme üzerinde $|f| > 0$ olsun. O zaman $A = \{w : |f(w)| \geq \delta\}$, $|A| > 0$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Fakat $\|\cdot\|_{L^{\Phi}}$ tanımından $\forall\lambda > 0$ için $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1$ dolayısıyla $\forall n \geq 1$ için $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(n|f(x)|)dx \leq 1$ dır. Bu ise

$$\Phi(n\delta)|A| = \int_A \Phi(n\delta)dx \leq \int_A \Phi(n|f(x)|)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(n|f(x)|)dx \leq 1$$

$|A| > 0$ ve $\Phi(n\delta) \to \infty$, $n \to \infty$ olduğundan bu mümkün değildir dolayısıyla $|A| = 0$ dır. Bu nedenle $f = 0$, h.h.y olur yani (i) koşulu sağlanır.

(ii). koşul için aşikar olmayan $\alpha \neq 0$ durumunu düşünelim.

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{L^{\Phi}} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|\alpha||f(x)|}{\lambda})dx \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\frac{\lambda}{|\alpha|}})dx \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{|\alpha|\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1\right\} \\
&= |\alpha|\|f\|_{L^{\Phi}}
\end{aligned}$$

olduğundan istenilen gösterilmiş olur.

Keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\|f+g\|_{L^{\Phi}} \leq \|f\|_{L^{\Phi}} + \|g\|_{L^{\Phi}} + 2\varepsilon \tag{3.9}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterirsek $\|f+g\|_{L^{\Phi}} \leq \|f\|_{L^{\Phi}} + \|g\|_{L^{\Phi}}$ olduğunu göstermiş oluruz. $\|\cdot\|_{L^{\Phi}}$ tanımından

$$\|f\|_{L^{\Phi}} + \varepsilon \in \{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1\}$$

yani

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}+\varepsilon}\right) dx \leq 1 \tag{3.10}$$

olur. Aynı işlemler g için de yapılırsa,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\tfrac{|g(x)|}{\|g\|_{L^\Phi}+\varepsilon})dx \leq 1$$

elde edilir.

$\alpha = \|f\|_{L^\Phi} + \varepsilon,\ \beta = \|g\|_{L^\Phi} + \varepsilon$ ve $\theta = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ olsun. Φ nin konveksliğinden

$$\begin{aligned}\Phi(\frac{|f(x)+g(x)|}{\alpha+\beta}) &= \Phi((1-\theta)\frac{|f(x)|}{\alpha} + \theta\frac{|g(x)|}{\beta}) \\ &\leq (1-\theta)\Phi(\frac{|f(x)|}{\alpha}) + \theta\Phi(\frac{|g(x)|}{\beta})\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeyi $\mathbb{R}^n$ üzerinden integre edersek

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\tfrac{|(f+g)(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}+\|g\|_{L^\Phi}+2\varepsilon}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\tfrac{|(f+g)(x)|}{\alpha+\beta}\right) dx \leq 1$$

elde edilir bu ise (3.9) a denktir. ■

Örnek 3.2.3

(i) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Phi(t) = t^p$ ise $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 1 \\ \infty , & t > 1 \end{cases}$ ise $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 1 \\ t\log t & , t > 1 \end{cases}$ ise $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L\log L(\mathbb{R}^n)$.

Önerme 3.2.4 $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}}\right) dx \leq 1$ eşitsizliği gerçeklenir. Ayrıca $\|f\|_{L^\Phi} \leq 1$ olması için gerek ve yeter şart $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx \leq 1$ olmasıdır [14].

İspat. (3.10) ifadesinde $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa monoton yakınsaklık teoreminden ilk sonuç elde edilir. Diğer sonuç ise bundan ve normun tanımından elde edilir. ■

Önerme 3.2.5 $(L^\Phi(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^\Phi})$ uzayı Banach uzayıdır [14].

İspat. Her n için $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ ve $\|f_n\|_{L^\Phi} \leq 1$ olacak şekilde bir $f_n \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ dizisi alınsın. Yani $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f_n(x)|)\, dx \leq 1$ dir. Eğer $f = \lim f_n$ ise Φ fonksiyonunun soldan sürekli olmasından dolayı $\Phi(|f_n|) \to \Phi(|f|)$ olur. Böylece monoton yakınsaklık teoreminden $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)\, dx \leq 1$ olur. Bu ise $\|f\|_{L^\Phi} \leq 1$ olması demektir.

Bu sonuç kullanılarak $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayının tamlığı gösterilebilir. Kabul edelim ki (f_n), $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\left\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right\|_{L^\Phi} \leq 2^{-k}$ olacak şekilde bir f_{n_k} alt dizisi vardır.

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|$$

alalım. Φ fonksiyonunun konveksliğinden ve soldan sürekli olmasından

$$\begin{aligned}\Phi(g) &= \Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|\right) \\ &= \Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}2^k \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\Phi\left(2^k \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\|g\|_{L^\Phi} \leq 1$ olur ve g fonksiyonu $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olur. $u \to \infty$ iken $\Phi(u) \to \infty$ olduğundan seri hemen her yerde sonlu bir limite yakınsar.

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_k} - f_{n_{k-1}}) + f_{n_0}$$

serisi de hemen her yerde yakınsaktır ve $|f - f_{n_0}| \leq g$ olur. Dolayısıyla $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ dir. (f_n) bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir m vardır öyle ki her $n \geq m$ için $\|f_n - f_m\|_{L^\Phi} \leq \varepsilon$ olur. O zaman $n_k \geq m$ için $\|f_m - f_{n_k}\|_{L^\Phi} \leq \varepsilon$ elde edilir. Böylece $m \to \infty$ iken $\|f_m - f\|_{L^\Phi} \to 0$ olduğu gösterilmiş olur. ■

Tanım 3.2.6 Φ ve Ψ, Young fonksiyonları olsun. Eğer her $s \geq 0$ için $\Phi(s) \leq \Psi(cs)$ eşitsizliğinin gerçekleştiği bir c sabiti varsa Ψ, Φ fonksiyonunu global olarak domine ediyor denir. Eğer yeterince büyük s sayıları için $\Phi(s) \leq \Psi(cs)$ eşitsizliğinin gerçekleştiği bir c sabiti varsa Ψ, Φ fonksiyonunu sonsuz yakınında domine ediyor denir. Φ ve Ψ birbirlerini global olarak (sonsuz yakınında) domine ediyor ise Φ ve Ψ global olarak (sonsuz yakınında) denktir denir.

Teorem 3.2.7 Φ, Ψ Young fonksiyonları olsun. Ψ, Φ fonksiyonunu global olarak domine ediyor ise o zaman

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) \supset L^\Psi(\mathbb{R}^n), \qquad \|f\|_{L^\Phi} \leq C\|f\|_{L^\Psi}$$

olur [25].

İspat. Önerme (3.2.4) den $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Phi}}\right) dx \leq 1$ olduğunu ve normun tanımından $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ varsa $\|f\|_{L^\Phi} \leq \lambda$ olacağını biliyoruz. Bu özellikleri kullanırsak

$$\Phi\left(\frac{|f(x)|}{C\|f\|_{L^\Psi}}\right) \leq \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Psi}}\right) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{C\|f\|_{L^\Psi}}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^\Psi}}\right) dx \leq 1$$
$$\Rightarrow \|f\|_{L^\Phi} \leq C\|f\|_{L^\Psi}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Tanım 3.2.8 Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere zayıf Orlicz uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$WL^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{f - \text{ölçülebilir} : \sup_{t>0} \Phi(t)|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}| < \infty\right\}$$

Önerme 3.2.9 $WL^\Phi(\mathbb{R}^n)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{WL^\Phi} = \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{t>0} \Phi(t)|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda t\}| \leq 1\right\}$$

dönüşümü bir quasinormdur [4].

İspat. (i)$\|f\|_{WL^\Phi} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *h.h.y.*, (ii)$\|\alpha f\|_{WL^\Phi} = |\alpha|\|f\|_{WL^\Phi}, \alpha \in \mathbb{R}(\text{ veya } \mathbb{C})$ koşulları açıkça görülür. $\|f + g\|_{WL^\Phi} \leq 2\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)$ olduğunu göstermek için her $t > 0$ için

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x) + g(x)|}{c\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} > t\right\}\right| \Phi(t) \leq 1$$

olmasını göstermemiz yeterlidir.

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x) + g(x)|}{c\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} > t\right\}\right| \Phi(t) \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)| + |g(x)|}{c\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} > t\right\}\right| \Phi(t)$$
$$= \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)|}{c\|f\|_{WL^\Phi}} \frac{\|f\|_{WL^\Phi}}{\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} + \frac{|g(x)|}{c\|g\|_{WL^\Phi}} \frac{\|g\|_{WL^\Phi}}{\left(\|f\|_{WL^\Phi} + \|g\|_{WL^\Phi}\right)} > t\right\}\right| \Phi(t)$$
$$= \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)|}{c\|f\|_{WL^\Phi}}\theta_1 + \frac{|g(x)|}{c\|g\|_{WL^\Phi}}\theta_2 > t\right\}\right| \Phi(t)$$
$$\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)|}{c\|f\|_{WL^\Phi}} > t\right\}\right| \Phi(t) + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|g(x)|}{c\|g\|_{WL^\Phi}} > t\right\}\right| \Phi(t)$$

olur çünkü $\theta_1 + \theta_2 = 1$ dir. Φ nin konveksliği her $0 \leq s \leq 1$ için $\Phi(st) \leq s\Phi(t)$ olmasını gerektirir(Bkz. Önerme 3.1.14). O zaman $c \geq 1$ olmak üzere yukarıdaki toplamı

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|f(x)|}{\|f\|_{WL^\Phi}} > ct\right\}\right| \frac{\Phi(ct)}{c} + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|g(x)|}{\|g\|_{WL^\Phi}} > ct\right\}\right| \frac{\Phi(ct)}{c} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{c}$$

ile sınırlayabiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Önerme 3.2.10 Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olsun. Eğer $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^n)$ ise $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olur ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq 2\|f\|_{L^{\Phi}}\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}$$

eşitsizliği sağlanır [33].

İspat. $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{\Phi}}}$ ve $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}}$ olmak üzere Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^{\Phi}}\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}} \leq \Phi(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{\Phi}}}) + \widetilde{\Phi}(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}})$$

olur. Bu eşitsizliği $\mathbb{R}^n$ üzerinden integre edersek

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^{\Phi}}\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}}dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{\Phi}}})dx + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}}})dx \leq 2$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. ■

Önerme 3.2.11 $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L^{\Phi}} \leq \|f\|_{\Phi}^* := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx : \|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}} \leq 1\right\} \leq 2\|f\|_{L^{\Phi}}$$

eşitsizliği sağlanır. $\|f\|_{\Phi}^*$, $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının Orlicz normu olarak adlandırılır [14].

İspat. Eşitsizliğin sağ tarafı Önerme 3.2.10 dan kolayca görülür. Şimdi eşitsizliğin sol tarafının gerçeklendiğini gösterelim.

$f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ olsun ve $a = \|f\|_{\Phi}^*$ alalım. $\|f\|_{L^{\Phi}} \leq a$, yani $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(|f(x)|/a\right) dx \leq 1$ olduğu gösterilmelidir.

İlk olarak f fonksiyonunun integrallenebilir basit bir fonksiyon ve hemen her yerde $\Phi\left(|f|/a\right)$ sonlu olduğu durumu düşünelim. $g = \varphi(|f|/a)$ olsun. Young eşitsizliğindeki eşitlik durumundan

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)g(x)|}{a}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx + \Phi\left(\frac{|f(x)|}{a}\right)\right] dx \\ &=: M_{\widetilde{\Phi}}(g) + M_{\Phi}(\frac{f}{a})\end{aligned}$$

olur. Şimdi eğer $M_{\widetilde{\Phi}}(g) \leq 1$ ise bu durumda $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{\Phi}^* = a$ elde edilir. Buradan

$$M_{\Phi}(\frac{f}{a}) \leq M_{\widetilde{\Phi}}(g) + M_{\Phi}(\frac{f}{a}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)g(x)|}{a}dx \leq 1$$

olur. Diğer taraftan eğer $M_{\widetilde{\Phi}}(g) = b > 1$ ise bu durumda $M_{\widetilde{\Phi}}(g/b) \leq M_{\widetilde{\Phi}}(g)/b$ olur. Dolayısıyla Orlicz normunun tanımından $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx \leq b\,\|f\|_{\Phi}^{*} = ab$ elde edilir. Böylece

$$M_{\widetilde{\Phi}}(g) + M_{\Phi}(\frac{f}{a}) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx \leq \frac{ab}{a} = M_{\widetilde{\Phi}}(g)$$

olur. Yani $M_{\Phi}(f/a) = 0$ dır. Dolayısıyla her iki durumda da $M_{\Phi}(f/a) \leq 1$ olur ve $\|f\|_{L^{\Phi}} \leq a = \|f\|_{\Phi}^{*}$ eşitsizliği gerçeklenir.

Şimdi f fonksiyonu integrallenebilir basit bir fonksiyon olsun fakat $\Phi(|f|/a)$ hemen her yerde sonlu olmasın. Bu ise Φ fonksiyonunun sonsuz olması anlamına gelir. $v > d$ için $\Phi(v) = \infty$ ve $v < d$ için $\Phi(v) < \infty$ olacak şekilde bir d vardır. Bu durumda $x \to \infty$ iken $\widetilde{\varphi}(x) \to d$ ve böylece bütün u lar için $\widetilde{\Phi}(u) \leq du$ olur. Hemen her yerde $|f| \leq ad$ olur. Gerçekten, eğer $|\{|f| > ad\}| > 0$ ise $0 < |A| < \infty$ olacak şekilde bir $A \subseteq \{|f| > ad\}$ kümesi vardır. $g = (1/d|A|)\chi_A$ için $M_{\widetilde{\Phi}}(g) = \widetilde{\Phi}(1/d|A|)|A| \leq 1$ dolayısıyla $\|g\|_{L^{\widetilde{\Phi}}} \leq 1$ elde edilir. O zaman

$$a = \|f\|_{\Phi}^{*} \geq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx > \frac{ad}{d|A|}|A| = a$$

çelişkisi olur. Böylece hemen her yerde $|f| \leq ad$ dir. Eğer $0 < \alpha < 1$ ise $\alpha\,|f|/a \leq \alpha d < d$, yani $\Phi(\alpha\,|f|/a)$ sonlu olur. $M_{\Phi}(\alpha f/a) \leq \alpha < 1$ eşitsizliğini elde etmek için bir önceki duruma benzer işlemler yapılabilir. Bu durumda Φ soldan sürekli olduğundan $\alpha \uparrow 1$ iken $M_{\Phi}(f/a) \leq 1$ olur.

Son olarak genel bir $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunu düşünelim. Hemen her yerde $f_n \uparrow |f|$ olacak şekilde integrallenebilir basit fonksiyonların bir (f_n) dizisi vardır. Şimdi $M_{\Phi}(f_n/\|f_n\|_{\Phi}^{*}) \leq 1$ ve $\|f_n\|_{\Phi}^{*} \leq \|f\|_{\Phi}^{*} = a$ olur. Böylece $M_{\Phi}(f_n/a) \leq 1$ elde edilir. Yine Φ soldan sürekli olduğundan $M_{\Phi}(f/a) \leq 1$ olur. Böylece $\|f\|_{L^{\Phi}} \leq a$ sonucu elde edilir. ■

4 HARMONİK ANALİZİN KLASİK OPERATÖRLERİNİN ORLICZ UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

4.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde harmonik analizin klasik operatörlerinin Orlicz uzaylarındaki sınırlılıkları incelenirken kullanılacak olan temel tanım ve önermelere yer verilecektir.

Tanım 4.1.1 Φ ve Ψ, Young fonksiyonları olsun. Eğer her $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^{\Psi}} \leq k\|f\|_{L^{\Phi}}$$

eşitisizliğinin sağlandığı bir k sabiti varsa T quasilineer operatörüne güçlü (Φ, Ψ) tiplidir denir. Eğer her $t > 0$ ve her $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |Tf(y)| > t\}| \leq 1/\Psi\left(\frac{t}{k\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)$$

eşitisizliğinin sağlandığı bir k sabiti varsa T quasilineer operatörüne zayıf (Φ, Ψ) tiplidir denir.

Önerme 4.1.2 Her güçlü (Φ, Ψ) tipli operatör aynı zamanda zayıf (Φ, Ψ) tipli operatördür [34].

İspat. İspat için Chebyshev eşitsizliğini kullanacağız. Quasilineer operatör tanımından her $t > 0$ için ve $|f| \neq 0, h.h.y.$ için

$$\begin{aligned}
& |\{y \in \mathbb{R}^n : |Tf|(y) > t\}| \\
= & \left|\left\{y \in \mathbb{R}^n : |T(\tfrac{f}{K\|f\|_{L^{\Phi}}})|(y) > \tfrac{t}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right\}\right| \\
= & \left|\left\{y \in \mathbb{R}^n : \Psi\left(\tfrac{|Tf|(y)}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right) > \Psi\left(\tfrac{t}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)\right\}\right| \\
\leq & \left[\Psi\left(\tfrac{t}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)\right]^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\tfrac{|Tf|(y)}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right) dy \\
\leq & \left[\Psi\left(\tfrac{t}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)\right]^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\tfrac{|Tf|(y)}{\|Tf\|_{L^{\Psi}}}\right) dy \\
\leq & \left[\Psi\left(\tfrac{t}{K\|f\|_{L^{\Phi}}}\right)\right]^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen ispatlanmış olur. ■

Tanım 4.1.3 Ψ bir Young fonksiyonu ve $p \in (1, \infty]$ olsun.

$$B_p(s) = \int_0^s \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}} dt$$

olmak üzere Ψ_p, tümleyeni

$$\widetilde{\Psi_p}(s) = \int_0^s r^{p'-1}(B_p^{-1}(r^{p'}))^{p'} dr \tag{4.1}$$

şeklinde verilen Young fonksiyonudur.

Tanım 4.1.4 Φ bir Young fonksiyonu ve $p \in (1, \infty]$ olsun.

$$A_p(s) = \int_0^s \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}} dt \tag{4.2}$$

olmak üzere Φ_p, tümleyeni

$$\widetilde{\Phi_p}(s) = \int_0^s r^{p'-1}(A_p^{-1}(r^{p'}))^{p'} dr \tag{4.3}$$

şeklinde verilen Young fonksiyonudur.

Lemma 4.1.5 $1 < p \leq \infty$, Φ, Ψ Young fonksiyonları ve Φ_p, Ψ_p sırasıyla (4.3) ile (4.1) de tanımlanan Young fonksiyonları olsun. $V \in (0, \infty]$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $\phi \in L^{\Phi}(0, V)$ için

$$\left\| s^{-1/p'} \int_0^s \phi(r) dr \right\|_{L^{\Psi}(0,V)} \leq K \|\phi(s)\|_{L^{\Phi}(0,V)}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği bir K sabitinin var olması için gerek ve yeter şart ya $V < \infty$ ve Φ nin Ψ_p yi sonsuz yakınında domine etmesidir ya da $V = \infty$, $\int_0 \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}} dt < \infty$ ve Φ nin Ψ_p yi global olarak domine etmesidir.

$\Phi = \Psi_p$ olduğu zaman K sabiti sadece Ψ ve V ye bağlıdır, ek olarak $\int_0 \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}} dt < \infty$ ise K bir mutlak sabittir.

(ii)Her $\phi \in L^{\Phi}(0, V)$ için

$$\left\| \int_s^V \phi(r) r^{-1/p'} dr \right\|_{L^{\Psi}(0,V)} \leq K \|\phi(s)\|_{L^{\Phi}(0,V)}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği bir K sabitinin var olması için gerek ve yeter şart ya $V < \infty$ ve Φ_p nin Ψ yi sonsuz yakınında domine etmesidir ya da $V = \infty$, $\int_0 \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}} dt < \infty$ ve Φ_p nin Ψ yi global olarak domine etmesidir.

$\Phi = \Psi_p$ olduğu zaman K sabiti sadece Φ ve V ye bağlıdır, ek olarak $\int_0 \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}} dt < \infty$ ise K bir mutlak sabittir [10].

Lemma 4.1.6 $1 < p \leq \infty$ ve $p' = p/(p-1)$, p nin Hölder eşleniği olsun. T, tanım kümesi ölçülebilir fonksiyonlar kümesinin bir lineer alt uzayı; görüntü kümesi ise ölçülebilir fonksiyonlar kümesi tarafından kapsanan bir küme olan quasi-lineer bir operatör olsun. Kabul edelim ki T zayıf $(1, p')$ tipli ve (p, ∞) tipli bir operatör ve Ψ

$$\int_0^1 \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}} < \infty \tag{4.4}$$

şartını sağlayan bir Young fonksiyonu olsun. Ψ_p eşleniği (4.1) ile tanımlanan Young fonksiyonu olsun. O zaman her $f \in L^{\Psi_p}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^\Psi} \leq K\|f\|_{L^{\Psi_p}} \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir K sabiti vardır. Bu K sabiti T nin (p, ∞) normuna, zayıf $(1, p')$ normuna ve quasi-lineerlik tanımında ortaya çıkan c sabitine bağlıdır [10].

Tanım 4.1.7 $1 < p \leq \infty$, T, tanım kümesi $L_1 + L_{p\infty}$ uzayını içeren; görüntü kümesi ise ölçülebilir fonksiyonlar kümesi tarafından kapsanan bir küme olan quasilineer bir operatör olsun. Burada $L_1 + L_{p\infty}$ uzayı

$$\int_0^1 f^*(s)ds + \int_1^\infty f^*(s)s^{-1/p'}ds < \infty$$

şartını sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıfıdır. Burada f^*, $s \geq 0$ için

$$f^*(s) = \sup\{t \geq 0 : |\{|f| > t\}| \geq s\}$$

ile tanımlanan f fonksiyonunun azalan yeniden düzenlemesini göstermektedir.

Eğer her $f \in L_1 + L_{p\infty}$ için

$$(Tf)^*(s) \leq k_1 \left(s^{-1/p'} \int_0^s f^*(r)dr + \int_s^\infty f^*(r)r^{-1/p'}dr \right), \quad s > 0 \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir k_1 sabiti varsa T operatörüne birleşik zayıf $(1, p'; p, \infty)$ tipindendir denir. Ayrıca ek olarak, desteği $[0, \infty)$ tarafından içerilen ve $L_1 + L_{p\infty}$ sınıfına ait her $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f^* \equiv \phi^* \tag{4.7}$$

ve

$$(Tf)^*(s) \geq k_2 \left(s^{-1/p'} \int_0^s \phi(r)dr + \int_s^\infty \phi(r)r^{-1/p'}dr \right), \quad s > 0 \tag{4.8}$$

olacak şekilde ölçülebilir bir f fonksiyonu ve pozitif bir k_2 sabiti varsa T operatörüne sıkı birleşik zayıf $(1, p'; p, \infty)$ tipindendir denir [11].

Örnek 4.1.8 Bir pozitif c sabiti ve $s > 0$ için

$$h^*(s) \leq cs^{-1/p'}$$

eşitsizliğini sağlayan h çekirdeğine sahip

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(x-y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

tipindeki bir konvolüsyon operatörü birleşik zayıf $(1, p'; p, \infty)$ tipindendir [31].

Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığında kilit rol oynayan aşağıdaki teorem Cianchi [11] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.9 $1 < p \leq \infty$, T, tanım kümesi ölçülebilir fonksiyonlar kümesinin bir lineer alt uzayı; görüntü kümesi ise ölçülebilir fonksiyonlar kümesi tarafından kapsanan bir küme olan quasi-lineer bir operatör olsun. Kabul edelim ki T birleşik zayıf $(1, p'; p, \infty)$ tipinden ve k_1 (4.6) de beliren sabit olsun. Φ, Ψ Young fonksiyonları ve Φ_p, Ψ_p sırasıyla (4.3) ile (4.1) de tanımlanan Young fonksiyonları olsun. Bu durumda

(i) Eğer $\int_0 \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$ ve Φ_p, Ψ yi global olarak domine ediyorsa sadece Φ, Ψ ve k_1 e bağlı olan normla T zayıf (Φ, Ψ) tiplidir.

(ii) Eğer $\int_0 \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$, $\int_0 \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$, Φ Ψ_p yi global olarak domine ediyor ve Φ_p, Ψ yi global olarak domine ediyorsa sadece Φ, Ψ ve k_1 e bağlı olan normla T güçlü (Φ, Ψ) tiplidir.

Ek olarak eğer T sıkı birleşik zayıf $(1, p'; p, \infty)$ tipinden ise bu durumda T nin zayıf veya güçlü (Φ, Ψ) tipli olması için (i) ve (ii) deki koşullar yine gereklidir [11].

İspat. (i) Kabul edelim ki $\int_0 \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$ ve Φ_p, Ψ yi global olarak domine etsin. (4.6) eşitsizliğinde sağ taraftaki integrallere Hölder eşitsizliği uygulanırsa $s > 0$ için

$$(Tf)^*(s) \leq 2k_1 \left(s^{-1/p'} \|1\|_{L^{\widetilde{\Phi}}(0,s)} + \|r^{-1/p'}\|_{L^{\widetilde{\Phi}}(s,\infty)} \right) \|f^*\|_{L^{\Phi}(0,\infty)} \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

f ve f^* denk ölçülebilir olduğundan

$$\|f^*\|_{L^{\Phi}(0,\infty)} = \|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)} \tag{4.10}$$

olur. Böylece $s > 0$ için

$$(Tf)^*(s) \leq 2k_1 \left(s^{-1/p'} \|1\|_{L^{\widetilde{\Phi}}(0,s)} + \|r^{-1/p'}\|_{L^{\widetilde{\Phi}}(s,\infty)} \right) \|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)} \tag{4.11}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar sonucunda $s > 0$ için

$$\|r^{-1/p'}\|_{L^{\widetilde{\Phi}}(s,\infty)} = \frac{s^{-1/p'}}{F_p^{-1}(1/(sp'))} \tag{4.12}$$

bulunur. Burada F_p, A_p (4.2) ile verilen fonksiyon olmak üzere

$$F_p(s) = s^{p'} A_p(s) \tag{4.13}$$

biçiminde tanımlı fonksiyondur.

F_p ve

$$G_p(s) = s^{p'} \left(A_p^{-1}(s^{p'}) \right)^{p'} \tag{4.14}$$

biçiminde tanımlanan G_p fonksiyonu arasında

$$G_p^{-1}(r) = \frac{r^{1/p'}}{F_p^{-1}(r)}, \quad r > 0 \tag{4.15}$$

ilişkisi vardır. (4.12) ve (4.15) denklemlerinden

$$\|r^{-1/p'}\|_{L^{\widetilde{\Phi}}(s,\infty)} = (p')^{1/p'} G_p^{-1}(1/(sp')) \tag{4.16}$$

elde edilir. $\Phi_p(s) = \int_0^s G_p(t) t^{-1} dt$ ve integrant artan olduğundan

$$G_p(s) \leq \Phi_p(s) \leq G_p(2s) \tag{4.17}$$

olur. $p' \geq 1$ ise $(p')^{1/p'} \leq e^{1/e}$ ve (4.16) ve (4.17) daki ilk eşitsizlik

$$\|r^{-1/p'}\|_{L^{\widetilde{\Phi}}(s,\infty)} \leq e^{1/e} \Phi_p^{-1}(1/s) \tag{4.18}$$

olmasını gerektirir.

Diğer taraftan

$$\|1\|_{L^{\widetilde{\Phi}}(0,s)} = \frac{1}{\widetilde{\Phi}^{-1}(1/s)} \tag{4.19}$$

ve

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{p' s^{p'}}{2^{p'} - 1} \widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{2}\right) \int_{s/2}^{s} \frac{1}{t^{1+p'}} dt \leq \frac{p' s^{p'}}{2^{p'} - 1} \int_{s/2}^{s} \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}} dt \tag{4.20}$$

$$\leq \frac{p' s^{p'}}{2^{p'} - 1} \int_0^s \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}} dt \leq s^{p'} \int_0^s \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}} dt = F_p(s)$$

olur. Böylece (4.19), (4.20), (4.12) ve (4.18) den

$$s^{-1/p'} \|1\|_{L^{\tilde{\Phi}}(0,s)} \leq e^{1/e} \Phi_p^{-1}(1/s) \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.11), (4.18) ve (4.21) den

$$(Tf)^*(s) \leq 4e^{1/e} k_1 \Phi_p^{-1}(1/s) \|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \tag{4.22}$$

veya denk olarak

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\} \leq 1/\Phi_p \left(\frac{t}{4e^{1/e} k_1 \|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}} \right) \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.23) eşitsizliği bize T nin zayıf (Φ, Φ_p) tipli olduğunu ve Φ_p yi domine eden her Ψ için zayıf (Φ, Ψ) tipli olduğunu söyler.

Şimdi ek olarak T nin sıkı birleşik zayıf $(1, p'; p, \infty)$ tipinden olduğunu kabul edelim. Farz edelim ki T zayıf (Φ, Ψ) tipli olsun. O zaman her $s > 0$ için

$$(Tf)^*(s) \leq k \Psi^{-1}(1/s) \|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \tag{4.24}$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir pozitif k sabiti vardır. T sıkı birleşik zayıf $(1, p'; p, \infty)$ tipli olduğundan tanımdan (4.7) ve (4.8) un sağlandığı bir k_2 pozitif sabiti vardır. Özel olarak (4.7) ve (4.10)

$$\|\phi\|_{L^\Phi(s,\infty)} = \|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \tag{4.25}$$

olmasını gerektirir. (4.24), (4.25) ve (4.8) birleştirilirse

$$\int_s^\infty \phi(r) r^{-1/p'} dr \leq \frac{k}{k_2} \Psi^{-1}(1/s) \|\phi\|_{L^\Phi(s,\infty)} \tag{4.26}$$

elde edilir.

$$\|r^{-1/p'}\|_{L^{\tilde{\Phi}}(s,\infty)} \leq \sup \left\{ \frac{1}{\|\phi\|_{L^\Phi(s,\infty)}} \int_s^\infty \phi(r) r^{-1/p'} dr : \phi \in L^\Phi(s,\infty) \right\} \tag{4.27}$$

olmasını hatırlarsak ϕ nin keyfi olmasından ve (4.26) den

$$\|r^{-1/p'}\|_{L^{\tilde{\Phi}}(s,\infty)} \leq \frac{k}{k_2} \Psi^{-1}(1/s) \tag{4.28}$$

elde edilir.

(4.28), (4.16) ve (4.17) dan $\int_0 \frac{\tilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}} dt < \infty$ olduğu ve Φ_p nin Ψ yi global olarak domine ettiği kolayca görülür.

(ii) Kabul edelim ki $\int_0 \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$, $\int_0 \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+p'}}dt < \infty$, Φ Ψ_p yi global olarak domine ediyor ve Φ_p, Ψ yi global olarak domine ediyor olsun. O zaman Lemma 4.1.5 ve (4.10) denklemi her $\Phi \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left\| s^{-1/p'} \int_0^s f^*(r)dr \right\|_{L^{\Psi}(0,\infty)} \leq K\|f^*\|_{L^{\Phi}(0,\infty)} \tag{4.29}$$

ve

$$\left\| \int_s^{\infty} f^*(r)r^{-1/p'}dr \right\|_{L^{\Psi}(0,\infty)} \leq K\|f^*\|_{L^{\Phi}(0,\infty)} \tag{4.30}$$

olacak şekilde bir K sabitinin varlığını garanti eder. Böylece $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n) \subset L_1 + L_{p\infty}$ olur. O zaman $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, Tf nin tanım kümesi tarafından içerilir. Dahası (4.6) den

$$\|(Tf)^*\|_{L^{\Psi}(0,\infty)} \leq k_1 \left\| s^{-1/p'} \int_0^s f^*(r)dr + \int_s^{\infty} f^*(r)r^{-1/p'}dr \right\|_{L^{\Psi}(0,\infty)} \tag{4.31}$$

olur çünkü

$$\|(Tf)\|_{L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)} = \|(Tf)^*\|_{L^{\Psi}(0,\infty)}$$

dir. (4.29), (4.30) ve (4.31) eşitsizlikleri $\leq k_1 K$ normu ile T nin güçlü (Φ, Ψ) tipli olduğunu söyler.

Tersine T sıkı birleşik zayıf $(1, p'; p, \infty)$ tipinden olsun. Yukarıdaki ispata benzer şekilde eğer T K normu ile güçlü (Φ, Ψ) tipli ve k_2 (4.8) da beliren sabitse her $\phi \in L^{\Phi}(0, \infty)$ için

$$\left\| s^{-1/p'} \int_0^s \phi(r)dr + \int_s^{\infty} \phi(r)r^{-1/p'}dr \right\|_{L^{\Psi}(0,\infty)} \leq \frac{K}{k_2} \|\phi\|_{L^{\Phi}(0,\infty)} \tag{4.32}$$

olup özel olarak her $\phi \in L^{\Phi}(0, \infty)$ için

$$\left\| s^{-1/p'} \int_0^s \phi(r)dr \right\|_{L^{\Psi}(0,\infty)} \leq \frac{K}{k_2} \|\phi\|_{L^{\Phi}(0,\infty)}$$

ve

$$\left\| \int_s^{\infty} \phi(r)r^{-1/p'}dr \right\|_{L^{\Psi}(0,\infty)} \leq \frac{K}{k_2} \|\phi\|_{L^{\Phi}(0,\infty)}$$

olur. Böylece Lemma 4.1.5 kullanılarak istenilen gösterilmiş olur. ■

4.2 Kesirli Maksimal Operatörün Orlicz Uzaylarındaki Sınırlılığı

Teorem 4.2.1 $n \geq 1$ ve $0 \leq \alpha < n$ olsun. Φ ve Ψ Young fonksiyonları olmak üzere

M_α kesirli maksimal operatörünün zayıf (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun, tersi

$$\mathcal{Q}^{-1}(u) = u^{\alpha/n}\Psi^{-1}(u) \tag{4.33}$$

ile verilen $\mathcal{Q}$ fonksiyonunu global olarak domine etmesidir [11].

İspat. *Yeterlilik:*

Kabul edelim ki Φ, $\mathcal{Q}$ fonksiyonunu global olarak domine etsin. Tanımdan $\mathcal{Q}(u) \leq \Phi(bu),\ u \geq 0$ olacak şekilde bir $b > 0$ vardır.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^{-1}(u) &= \inf\{r \geq 0 : \mathcal{Q}(r) > u\} \\
&\geq \inf\{r \geq 0 : \Phi(br) > u\} \\
&= \frac{1}{b}\inf\{br \geq 0 : \Phi(br) > u\} \\
&= \frac{1}{b}\Phi^{-1}(u)
\end{aligned}$$

olması ve (4.33) kullanılarak

$$\Phi^{-1}(u) \leq b\mathcal{Q}^{-1}(u) = bu^{\alpha/n}\Psi^{-1}(u), \quad u \geq 0 \tag{4.34}$$

yazılabilir.

Eğer $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ biçiminde $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ alırsak $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(|f(x)|)dx \leq 1$ olur. Jensen eşitsizliğinden bütün (aşikar olmayan) B yuvarları için

$$\Phi\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy\right) \leq \frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(y)|)dy \tag{4.35}$$

olur. (4.34) de $u = \frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(y)|)dy$ alınır ve (4.35) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy &\leq b\left[\frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(y)|)dy\right]^{\alpha/n}\Psi^{-1}\left[\frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(y)|)dy\right] \\
&\leq b\left[\frac{1}{|B|}\right]^{\alpha/n}\Psi^{-1}\left[\frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(y)|)dy\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_B |f(y)|dy \leq b\Psi^{-1}\left[\frac{1}{|B|}\int_B \Phi(|f(y)|)dy\right] \tag{4.36}$$

elde edilir.

M_α ile M operatörlerinin tanımından ve (4.36) den

$$(M_\alpha f)(x) \le b\Psi^{-1}[(M\Phi(f))(x)],\ x \in \mathbb{R}^n \tag{4.37}$$

olur. Böylece (4.37) den

$$\begin{aligned} |\{x : (M_\alpha f)(x) > t\}| &\le \left|\left\{x\ : \Psi^{-1}[(M\Phi(f))(x)] > \frac{t}{b}\right\}\right| \\ &= \left|\left\{x\ : [(M(\Phi(f)))(x)] > \Psi\left(\frac{t}{b}\right)\right\}\right|. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Hardy-Littlewood maksimal operatörünün zayıf $(1,1)$ tipli olduğundan

$$|\{x : (Mg)(x) > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy, \qquad \lambda > 0 \tag{4.39}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. O zaman (4.39) de $g = \Phi(f)$ ve $\lambda = \Psi\left(\frac{t}{b}\right)$ alırsak (4.38) dan

$$\begin{aligned} |\{x : (M_\alpha f)(x) > t\}| &\le \frac{C}{\Psi\left(\frac{t}{b}\right)}\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(f)(y)|dy \\ &\le \frac{C}{\Psi\left(\frac{t}{b}\right)} \le \frac{1}{\Psi\left(\frac{t}{K\|f\|_{L^\Phi}}\right)} \end{aligned} \tag{4.40}$$

olur. Çünkü $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ ve eğer $C \ge 1$, $K = Cb$ ise $\frac{1}{C}\Psi\left(\frac{t}{b}\right) \ge \Psi\left(\frac{t}{Cb}\right) = \Psi\left(\frac{t}{K}\right)$ dir. Böylece (4.40) den M_α kesirli maksimal operatörünün zayıf (Φ, Ψ) tipli olması görülür.

Gereklilik

Kabul edelim ki M_α zayıf (Φ, Ψ) tipli olsun. Yani (4.40) bir $K > 0$ sabiti için sağlansın. Keyfi fakat sabit bir $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için $f = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B_0|}\right)\chi_{B_0}$ merdiven fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ olur. $x \in B_0$ için

$$(M_\alpha f)(x) \ge \frac{1}{|B_0|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_0} |f(y)|dy = |B_0|^{\frac{\alpha}{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B_0|}\right)$$

olduğunu biliyoruz fakat tanımdan eğer $t_0 = |B_0|^{\frac{\alpha}{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B_0|}\right)$ ise $B_0 \subset \{x : (M_\alpha f)(x) > t_0\}$ olur. Böylece $\|f\|_{L^\Phi} = 1$ ile (4.40) den zayıf (Φ, Ψ) tipli olmasından

$$|B_0| \le |\{x : (M_\alpha f)(x) > t_0\}| \le \frac{1}{\Psi\left(\frac{t_0}{K}\right)}$$

bulunur.

$u = |B_0|^{-1}$ yazarsak ,

$$\Psi\left(\frac{u^{-\frac{\alpha}{n}}\Phi^{-1}(u)}{K}\right) \leq u, \qquad u > 0$$

olur. Böylece $\Phi^{-1}(u) \leq Ku^{\frac{\alpha}{n}}\Psi^{-1}(u) = K\mathcal{Q}^{-1}(u)$ eşitsizliğinin gerçeklendiğini ispatlarız. Bu da Φ fonksiyonunun $\mathcal{Q}$ fonksiyonunu global olarak domine etmesidir. ■

Teorem 4.2.2 $n \geq 1$ ve $0 \leq \alpha < n$ olsun. Φ ve Ψ Young fonksiyonları olmak üzere M_α kesirli maksimal operatörünün güçlü (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul $\int_0^1 \Psi(t)/t^{1+n/(n-\alpha)}dt < \infty$ olması ve Φ fonksiyonunun $\Psi_{n/\alpha}$ fonksiyonunu global olarak domine etmesidir. Burada, $\Psi_{n/\alpha}$ (4.1) ile tanımlanan Young fonksiyonudur [11].

İspat. Kesirli maksimal operatör M_α nın $(n/\alpha, \infty)$ tipli ve zayıf $(1, n/(n-\alpha))$ tipli olduğunu biliyoruz. Eğer $\int_0 \Psi(t)t^{-1-n/(n-\alpha)}dt < \infty$ ise o zaman Lemma 4.1.6 bize M_α nın $(\Psi_{n/\alpha}, \Psi)$ tipli olduğunu söyler. Sonuç olarak $\Psi_{n/\alpha}$ yı global olarak domine eden her Φ Young fonksiyonu için (Φ, Ψ) tiplidir. Gerçekten Φ, $\Psi_{n/\alpha}$ yı global olarak domine ediyorsa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{n/\alpha}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c|f(x)|}{\lambda}\right)dx$$

olcak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. Bundan

$$\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{n/\alpha}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \leq 1\} \supset \{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c|f(x)|}{\lambda}\right)dx \leq 1\}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|f\|_{L^{\Psi_{n/\alpha}}} \leq \|cf\|_{L^\Phi} = c\|f\|_{L^\Phi}$$

olur. Bu da M_α, $(\Psi_{n/\alpha}, \Psi)$ tipli olduğunda $\Psi_{n/\alpha}$ yı global olarak domine eden her Φ Young fonksiyonu için M_α nın (Φ, Ψ) tipli olduğunu söyler.

Tersine M_α, (Φ, Ψ) tipli olsun. O zaman her $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{L^\Psi(\mathbb{R}^n)} \leq k\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \tag{4.41}$$

olacak şekilde bir k sabiti vardır. f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı $f(x) = \phi(C_n|x|^n)$ tipinde bir fonksiyon olsun. Burada $\phi \in L^\Phi(0, \infty)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $C_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1 + n/2)$ ise $\mathbb{R}^n$ deki birim yuvarın ölçüsüdür. Açıkça

$$\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{L^\Phi(0,\infty)} \tag{4.42}$$

olur. Gerçekten

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} &= \inf\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{\phi(C_n|x|^n)}{\lambda}\right) dx \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \omega_n \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\phi(C_n r^n)}{\lambda}\right) r^{n-1} dr \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \frac{\omega_n}{n}\frac{1}{C_n} \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\phi(r)}{\lambda}\right) dr \leq 1\} \\
&= \|\phi\|_{L^\Phi(0,\infty)}
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
M_\alpha f(x) &= \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|^{1-\alpha/n}} \int_B |f(y)| dy \\
&\geq \frac{1}{|B(0,|x|)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(0,|x|)} |f(y)| dy \\
&= \frac{1}{(C_n|x|^n)^{1-\alpha/n}} \int_0^{C_n|x|^n} \phi(r) dr
\end{aligned}
$$

olur böylece

$$
\|M_\alpha f\|_{L^\Psi(\mathbb{R}^n)} \geq \left\| s^{-1+\alpha/n} \int_0^s \phi(r) dr \right\|_{L^\Psi(0,\infty)} \tag{4.43}
$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.41), (4.42), (4.43) ifadelerinden

$$
\left\| s^{-1+\alpha/n} \int_0^s \phi(r) dr \right\|_{L^\Psi(0,\infty)} \leq k \|\phi\|_{L^\Phi(0,\infty)} \tag{4.44}
$$

elde edilir. ϕ fonksiyonunun keyfi seçiminden dolayı (4.44) eşitsizliği Lemma 4.1.5 (i) gereğince $\int_0 \Psi(t) t^{-1-n/(n-\alpha)} dt < \infty$ ve Φ fonksiyonunun $\Psi_{n/\alpha}$ fonksiyonunu global olarak domine etmesini gerektirir. ■

Sonuç 4.2.3 $\Phi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$ ve $\Psi(t) = t^q$, $1 \leq q < \infty$ Young fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu fonksiyonlar için, (4.33) de belirtilen $\mathcal{Q}$ fonksiyonu $\mathcal{Q}(t) = t^{\frac{qn}{q\alpha+n}}$ olur. Teorem 4.2.1 deki Φ fonksiyonunun $\mathcal{Q}$ fonksiyonunu global olarak domine etmesi şartı ise $\sup\limits_{t>0} t^{\frac{qn}{q\alpha+n}-p} < \infty$ veya denk olarak $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olur. Yani M_α kesirli maksimal operatörünün zayıf (p,q) tipli olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq p \leq \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasıdır.

Aynı fonksiyonlar için (4.1) ile tanımlanan $\Psi_{n/\alpha}$ fonksiyonu

$$
C = \left[\frac{qn - q\alpha - n}{n - \alpha}\right]^{\frac{-n}{q\alpha+n}} - \frac{n-\alpha}{qn}\left[\frac{qn - q\alpha - n}{n - \alpha}\right]^{\frac{q\alpha}{q\alpha+n}} > 0
$$

olmak üzere $\Psi_{n/\alpha}(t) = Ct^{\frac{qn}{q\alpha+n}}$ olur. Teorem 4.2.2 deki $\int_0 \Psi(t)/t^{1+n/(n-\alpha)}dt < \infty$ şartı $q > \frac{n}{n-\alpha}$ şartına, Φ fonksiyonunun $\Psi_{n/\alpha}$ fonksiyonunu global olarak domine etmesi şartı $\sup\limits_{t>0} t^{\frac{qn}{q\alpha+n}-p} < \infty$ yani $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasına denk olur. Bu şartları birleştirirsek M_α kesirli maksimal operatörünün güçlü (p,q) tipli olması için gerek ve yeter koşulun $1 < p \leq \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olduğunu söyleriz.

Sonuç 4.2.4 [11]

(i) M maksimal operatörünün zayıf (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun Ψ fonksiyonunu global olarak domine etmesidir.

(ii) M maksimal operatörünün güçlü (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul $\int_0 \Psi(t)t^{-2}dt < \infty$ ve $\Phi(s)$ fonksiyonunun $s\int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ Young fonksiyonunu global olarak domine etmesidir.

İspat. Teorem 4.2.1 de $\alpha = 0$ alınırsa (i) sonucu direk alınır. (ii) için $\Psi_\infty(s)$ fonksiyonunun $s\int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ fonksiyonuna denk olduğunu göstermek yeterlidir. Bu denkliği göstermek için $B_\infty(s) = \int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ olmak üzere

$$E(s) = sB_\infty^{-1}(s) \tag{4.45}$$

alalım. $\widetilde{\Psi}_\infty(s) = \int_0^s E(t)t^{-1}dt$ ve integrant artan olduğundan $s > 0$ için

$$\widetilde{B}_\infty(s) \leq E(s) \leq \widetilde{B}_\infty(2s) \tag{4.46}$$

olur. (4.46) ve (3.8) kullanılarak $r > 0$ için

$$\frac{r}{2E^{-1}(r)} \leq \Psi_\infty^{-1}(r) \leq \frac{2r}{E^{-1}(r)} \tag{4.47}$$

elde edilir. Şimdi $D(s) = \int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ olmak üzere

$$D^{-1}(r) = \frac{r}{E^{-1}(r)}, \quad r > 0 \tag{4.48}$$

olur. (4.47) eşitsizliği ve (4.48) eşitliği $s > 0$ için

$$D(s/2) \leq \Psi_\infty(s) \leq D(2s) \quad \text{for } s > 0 \tag{4.49}$$

olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanır.

■

Sonuç 4.2.4 de $\Phi = \Psi$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.5 [22, 23]

(i) M maksimal operatörü her Φ Young fonksiyonu için zayıf (Φ, Φ) tiplidir.

(ii) M maksimal operatörün güçlü (Φ, Φ) tipli olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \nabla_2$ olmasıdır.

İspat. (i) aşikardır.

$s \int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ fonksiyonunun Ψ fonksiyonunu her zaman domine ettiği Önerme 3.1.15 (ii) kullanılarak kolayca görülebilir. Ψ fonksiyonunun $s \int_0^s \Psi(t)t^{-2}dt$ fonksiyonunu domine etmesi için ise gerek ve yeter koşul $\Phi \in \nabla_2$ olmasıdır [24, Theorem 4.3]. Böylece (ii) ispatlanmış olur.

■

4.3 Kesirli İntegral Operatörün Orlicz Uzaylarındaki Sınırlılığı

Teorem 4.3.1 [11] $n \geq 1$ ve $0 < \alpha < n$ olsun. Φ ve Ψ Young fonksiyonları ve $\Phi_{n/\alpha}$ ile $\Psi_{n/\alpha}$ (4.3) ve (4.1) ile tanımlanan Young fonksiyonları olmak üzere

(i) I_α Riesz potansiyelinin zayıf (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul $\int_0 \widetilde{\Phi}(t)/t^{1+n/(n-\alpha)}dt < \infty$ olması ve $\Phi_{n/\alpha}$ fonksiyonunun Ψ fonksiyonunu global olarak domine etmesidir.

(ii) I_α Riesz potansiyelinin güçlü (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul $\int_0 \Psi(t)/t^{1+n/(n-\alpha)}dt < \infty$, $\int_0 \widetilde{\Phi}(t)/t^{1+n/(n-\alpha)}dt < \infty$ olması ve Φ fonksiyonunun $\Psi_{n/\alpha}$ fonksiyonunu global olarak domine etmesi ile $\Phi_{n/\alpha}$ fonksiyonunun Ψ fonksiyonunu global olarak domine etmesidir.

İspat. Örnek 4.1.8 dan biliyoruz ki I_α birleşik zayıf $(1, n/(n-\alpha); n/\alpha, \infty)$ tipindendir. Dahası I_α sıkı birleşik zayıf aynı tiptendir. Gerçekten bir $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu için f, $f(x) = \phi(C_n|x|^n)$ tipinde herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda (4.7) sağlanır ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} I_\alpha(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \geq 2^{\alpha-n} \left(\int_{\{|y|<|x|\}} \frac{f(y)}{|x|^{n-\alpha}} dy + \int_{\{|y|\geq|x|\}} \frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \right) \\ &= C_n^{(n-\alpha)/n} 2^{\alpha-n} \left(|x|^{\alpha-n} \int_0^{C_n|x|^n} \phi(s) ds + \int_{C_n|x|^n}^{|G|} s^{(\alpha-n)/n} \phi(s) ds \right) \end{aligned}$$

olur. Son ifade radyal olarak azaldığından $T = I_\alpha$ ve $p = n/\alpha$ alınırsa (4.8) sağlanır. Böylece istenilen Teorem 4.1.9 ün bir sonucu olur. ■

Sonuç 4.3.2 $\Phi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$ ve $\Psi(t) = t^q$, $1 \leq q < \infty$ Young fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu fonksiyonlar için, (4.3) ile tanımlanan $\Phi_{n/\alpha}$ fonksiyonu

$$C = \frac{\left(p' - \frac{n}{n-\alpha}\right)^{\frac{p'}{p' - \frac{n}{n-\alpha}}}}{\left[\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p'n}{n-\alpha}}} > 0$$

olmak üzere $\Phi_{n/\alpha}(t) = Ct^{\frac{p'n}{p'n-\alpha p'-n}}$ olur. Teorem 4.3.1 (i) deki $\int_0 \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t^{1+n/(n-\alpha)}} dt < \infty$ şartı $p' > \frac{n}{n-\alpha}$ şartına, $\Phi_{n/\alpha}$ fonksiyonunun Ψ fonksiyonunu global olarak domine etmesi şartı ise $\sup\limits_{t>0} t^{q - \frac{p'n}{p'n-\alpha p'-n}} < \infty$ veya denk olarak $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olur. Yani I_α kesirli integral operatörünün zayıf (p,q) tipli olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasıdır.

Sonuç 4.2.3 ve yukarıdaki açıklamalar gözönüne alınırsa Teorem 4.3.1 (ii) deki koşullar $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasına denk olur. Yani I_α kesirli integral operatörünün güçlü (p,q) tipli olması için gerek ve yeter koşul $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmasıdır.

4.4 Singüler İntegral Operatörlerin Orlicz Uzaylarındaki Sınırlılığı

Teorem 4.4.1 [11]

(i) T singüler integral operatörünün zayıf (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul $\int_0 \widetilde{\Phi}(t)/t^2 dt < \infty$ ve $\widetilde{\Psi}(s)$ fonksiyonunun $s\int_0^s \widetilde{\Phi}(t)/t^2 dt$ Young fonksiyonunu global olarak domine etmesidir.

(ii) T singüler integral operatörünün güçlü (Φ, Ψ) tipli olması için gerek ve yeter koşul $\int_0 \Psi(t)/t^2 dt < \infty$, $\int_0 \widetilde{\Phi}(t)/t^2 dt < \infty$ olması ve $\Phi(s)$ fonksiyonunun $s\int_0^s \Psi(t)/t^2 dt$ Young fonksiyonunu, $\widetilde{\Psi}$ fonksiyonunun $s\int_0^s \widetilde{\Phi}(t)/t^2 dt$ Young fonksiyonunu global olarak domine etmesidir.

İspat. (2.2) tipindeki her operatör birleşik zayıf $(1,1;\infty,\infty)$ tiplidir [2, Theorem 16.12]. Ayrıca eğer g özdeş olarak sıfır olmuyorsa bu operatör sıkı birleşik zayıf $(1,1;\infty,\infty)$ tiplidir [9, Lemma, Remark 2]. Böylece istenilen Teorem 4.1.9 in bir sonucu olur. ■

Teorem 4.4.1 de $\Phi = \Psi$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir. Bu sonucun ispatı Sonuç 4.2.5 in ispatına benzer şekilde kolayca yapılabilir.

Sonuç 4.4.2 [23]

(i) T singüler integral operatörünün zayıf (Φ,Φ) tipli olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \Delta_2$ olmasıdır.

(ii) T singüler integral operatörünün güçlü (Φ,Φ) tipli olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olmasıdır.

4.5 Maksimal, Singüler ve Potansiyel Operatörlerin Komütatörlerinin Orlicz Uzaylarındaki Sınırlılığı

Aşağıdaki interpolasyon teoremi Fu ve ark. [15] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.5.1 $\alpha \in [0,1)$, $i \in \{1,2\}$ olmak üzere $p_i, q_i \in (0,\infty)$, $1/q_i = 1/p_i - \alpha$, $p_1 < p_2$ ve T zayıf (p_i,q_i) tipli bir alt lineer operatör olsun. Bu durumda Φ ve Ψ, $1 < p_1 < a_\Phi \le b_\Phi < p_2 < \infty$, $1 < q_1 < a_\Psi \le b_\Psi < q_2 < \infty$ ve $\Psi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha}$, $t \in (0,\infty)$ koşullarını sağlayan N-fonksiyonları ise T, güçlü (Φ,Ψ) tipli bir operatördür [15].

İspat. İlk olarak $L^\Phi(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstereceğiz. Bunu yapmak için her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunu keyfi bir $\lambda \in (0,\infty)$ için

$$f(x) = f(x)\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}(x) + f(x)\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\le\lambda\}}(x) =: f^\lambda(x) + f_\lambda(x)$$

şeklinde parçalıyoruz. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $f \not\equiv 0$ olduğunu kabul edelim. $f^\lambda \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ ve $f_\lambda \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten Önerme 3.1.24 (i) ve (iii) den $|f(x)| > \lambda$ eşitsizliğini gerçekleyen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{a_\Phi} \le \frac{\Phi(|f(x)|/\lambda)}{\Phi(1)} \le C(\lambda)\frac{\Phi(|f(x)|)}{\Phi(1)}$$

olacak şekilde λ ya bağlı pozitif bir $C(\lambda)$ sabiti vardır. Bu ve $p_1 < a_\Phi$ olması

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |f^\lambda(x)|^{p_1} dx \\
&= \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}} |f(x)|^{p_1} dx \le \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}} \frac{|f(x)|^{a_\Phi - p_1}}{\lambda^{a_\Phi - p_1}} |f(x)|^{p_1} dx \\
&\le C(\lambda)\frac{\lambda^{p_1}}{\Phi(1)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx < \infty
\end{aligned}$$

olmasını yani $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ olmasını gerektirir.

Şimdi $f_\lambda \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterelim. Önerme 3.1.24 (i) ve (ii) den $|f(x)| \le \lambda$ eşitsizliğini gerçekleyen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{b_\Phi} \le \frac{\Phi(|f(x)|/\lambda)}{\Phi(1)} \le C(\lambda)\frac{\Phi(|f(x)|)}{\Phi(1)}$$

olacak şekilde λ ya bağlı pozitif bir $C(\lambda)$ sabiti vardır. Bu ve $b_\Phi < p_2$ olması

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda(x)|^{p_2} dx &= \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|\le\lambda\}} |f(x)|^{p_2} dx \\
&\le \lambda^{p_2 - b_\Phi} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|\le\lambda\}} |f(x)|^{b_\Phi} dx \\
&\le C(\lambda)\frac{\lambda^{p_2}}{\Phi(1)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx < \infty
\end{aligned}$$

olmasını yani $f_\lambda \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ olmasını gerektirir bu ise iddiayı ispatlar ve $L^\Phi(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ olur.

Şimdi T nin $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğunu gösterelim. u, her $t \in [0,\infty)$ için $u^{-1}(t) = \Psi^{-1}(\Phi(t))$ eşitliğiyle $[0,\infty)$ üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. O zaman u^{-1}, $u^{-1} \longrightarrow 0$, $t \longrightarrow 0$ ve $u^{-1}(t) \longrightarrow \infty$, $t \longrightarrow \infty$ olacak şekilde $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı azalmayan bir fonksiyon olur. $\sigma(f,\lambda) := |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|$ olarak tanımlansın. Bu durumda [26, Teorem 1.13] kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(|Tf(x)|)dx &= \int_0^\infty \sigma(Tf,\lambda)d\Psi(\lambda) \\
&\le \int_0^\infty \sigma(Tf^{u(\lambda)},\lambda/2)d\Psi(\lambda) \\
&+ \int_0^\infty \sigma(Tf_{u(\lambda)},\lambda/2)d\Psi(\lambda) =: I + II
\end{aligned}$$

olduğu görülür. T, zayıf (p_1,q_1) tipli olduğundan

$$\sigma(Tf^{u(\lambda)},\lambda/2) \lesssim \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{q_1} \left\|f^{u(\lambda)}\right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}^{q_1}$$

olur. Bu ve $p_1 < q_1$ olması ve Minkowski integral eşitsizliği (Bkz. [37, s.156])

$$\begin{aligned}
&I^{p_1/q_1}\\
&\lesssim \left\{\int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-p_1}|f(x)|^{p_1}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>u(\lambda)\}}(x)dx\right]^{q_1/p_1} d\Psi(\lambda)\right\}^{p_1/q_1}\\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^\infty \lambda^{-q_1}|f(x)|^{q_1}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>u(\lambda)\}}(x)d\Psi(x)\right]^{p_1/q_1} dx \qquad (4.50)\\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p_1}\left[\int_0^{u^{-1}(|f(x)|)} \lambda^{-q_1}d\Psi(\lambda)\right]^{p_1/q_1} dx
\end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Kısmi integrasyon, $u^{-1}(t) \longrightarrow 0$, $t \longrightarrow 0$, Önerme 3.1.24 (iii) ve (iv) ve $\Psi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha}$ olmasından

$$\begin{aligned}
&\int_0^{u^{-1}(|f(x)|)} \frac{1}{\lambda^{q_1}}d\Psi(\lambda)\\
&= \frac{\Psi(u^{-1}(|f(x)|))}{[u^{-1}(|f(x)|)]^{q_1}} + q_1\int_0^{u^{-1}(|f(x)|)} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda^{q_1+1}}d\lambda\\
&\le \frac{\Psi(u^{-1}(|f(x)|))}{[u^{-1}(|f(x)|)]^{q_1}} + q_1\int_0^{u^{-1}(|f(x)|)} \le \frac{\Psi(u^{-1}(|f(x)|))}{\lambda^{q_1+1}}\left[\frac{\lambda}{u^{-1}(|f(x)|)}\right]^{a_\Psi} d\lambda \qquad (4.51)\\
&= \frac{a_\Psi}{a_\Psi - q_1}\frac{\Psi(u^{-1}(|f(x)|))}{[u^{-1}(|f(x)|)]^{q_1}} \lesssim \frac{\Phi(|f(x)|)}{[u^{-1}(|f(x)|)]^{q_1}}\\
&\lesssim \frac{\Phi(|f(x)|)}{|f(x)|^{q_1}}[\Phi(|f(x)|)]^{q_1\alpha} \sim \frac{[\Phi(|f(x)|)]^{q_1/p_1}}{|f(x)|^{q_1}}
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. (4.50) ve (4.51) birleştirilirse

$$I \lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(|f(x)|)dx\right]^{q_1/p_1}$$

elde edilir. I e benzer bir metodla

$$II \lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(|f(x)|)dx\right]^{q_2/p_2}$$

olması elde edilir. I ve II için elde edilen eşitsizlikler birleştirilirse

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Psi(|Tf(x)|)dx \lesssim \left[\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(|f(x)|)dx\right]^{q_1/p_1} + \left[\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(|f(x)|)dx\right]^{q_2/p_2}$$

olur. Böylece T, $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ den $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı olur ve ispat tamamlanır.

■

Teorem 4.5.1 de $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.2 $p \in (1,\infty)$ olmak üzere T, zayıf (p,p) tipli bir alt lineer operatör olsun. Bu durumda Φ,

$$1 < a_\Phi \leq b_\Phi < \infty$$

koşulunu sağlayan bir N-fonksiyon ise T operatörü güçlü (Φ,Φ) tiplidir [15].

Teorem 2.3.7, Teorem 4.5.1 ve Sonuç 4.5.2 göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.5.3 Φ bir N-fonksiyon olsun. $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < a_\Phi \leq b_\Phi < \infty$ ise $[b,T]$ ve M_b operatörleri $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

Teorem 4.5.4 $0 < \alpha < n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Φ bir N-fonksiyon ve Ψ, tersi $\Psi^{-1}(t) := \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ ile tanımlanan fonksiyon olsun. Eğer $1 < a_\Phi \leq b_\Phi < \infty$ ve $1 < a_\Psi \leq b_\Psi < \infty$ ise $[b, I_\alpha]$ ve $M_{b,\alpha}$ operatörleri $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdırlar.

Uyarı 4.5.5 Eğer $\Phi(t) = t^p,\ p > 1$ ve $\Psi(t) = t^q,\ q > 1$ alınırsa $a_\Phi = p = b_\Phi$ ve $a_\Psi = q = b_\Psi$ olur. Dolayısıyla Teorem 4.5.3 ve 4.5.4 de özel olarak $\Phi(t) = t^p,\ p > 1$ ve $\Psi(t) = t^q,\ q > 1$ seçilirse Teorem 2.3.7 (v) ve (vi) elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F. *Sobolev paces*, Academic Press, 2003.

[2] Bennett, C.; Rudnick, K. *On Lorentz-Zygmund spaces*, Dissertationes Math. 175, **1980**.

[3] Bennett, C.; Sharpley, R. *Interpolation of operators*, Academic Press, Boston, 1988.

[4] Bibiana, I. *Comparison of two weak versions of the Orlicz spaces*, Rev. Un. Mat. Argentina 40, **1996**, 1-2, 191-202.

[5] Birnbaum, Z.; Orlicz, W. *Über die verallgemeinerung des begriffes der zueinander konjugierten potenzen*, Studia Math. **1931**, 3, 1-67.

[6] Byun, S. S.; Yao, F.; Zhou, S. *Gradient estimates in Orlicz space for nonlinear elliptic equations*, J. Funct. Anal. 255 **2008**, 8, 1851-1873.

[7] Byun, S. S. *Gradient estimates in Orlicz spaces for nonlinear elliptic equations with BMO nonlinearity in nonsmooth domains*, Forum Math. 23 **2011**, 4, 693-711

[8] Chanillo, S. A. *A note on commutators*, Indiana Univ. Math. J., 31, **1982**, 7-16.

[9] Cianchi, A. *A note on two-weight inequalities for maximal functions and singular integrals*, Bull. London Math. Soc. 29, **1997**, 53-59.

[10] Cianchi, A. *A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces*, Indiana Uni. Math. J. 45, **1996**, 39-65.

[11] Cianchi, A. *Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces*, J. London Math. Soc. **1999**, 2, 1, 187-202.

[12] Coifman, R. R.; Rochberg, R.; Weiss, G. *Fractorization theorems for Hardy spaces in several variables*, Ann. of Math., 103, **1976**, 611-635.

[**13**] Deringoz, F. *Harmonik analizin integral operatörlerinin genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığı*, Doktora tezi, Ahi Evran Üniversitesi-FBE, 2015.

[**14**] Edgar, G. A.; Sucheston, L. *Stopping Times and Directed Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[**15**] Fu, X.; Yang, D.; Yuan, W. *Boundedness of multilinear commutators of Calderón-Zygmund operators on Orlicz spaces over non-homogeneous spaces*, Taiwanese J. Math. 16, **2012**, 2203-2238.

[**16**] Garcia-Cuerva, J.; Harboure, E.; Segovia, C.; Torrea, J. L. *Weighted norm inequalities for commutators of strangly singular integrals*, Indiana Univ. Math. J. 40, 4, **1991**, 1397-1420.

[**17**] Grafakos, L. *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 2004.

[**18**] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math., 54, **1930**, 81-116.

[**19**] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. *Some properties of fractional integrals*, I, Math. Z., 27, MR1544927, **1928**, 565-606.

[**20**] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. *Some properties of fractional integrals*, II, Math. Z., 34, MR1545260, **1932**, 403-439.

[**21**] John, F.; Nirenberg, L. *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math **1961**, 14, 415-426.

[**22**] Kita, H. *On Hardy-Littlewood maximal functions in Orlicz spaces*, Math. Nachr. **1997**, 183, 135-155.

[**23**] Kokilashvili, V.; Krbec, M. M. *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, World Scientific, Singapore, 1991.

[**24**] Krasnoselskii, M. A.; Rutickii, Ya. B. *Convex Functions and Orlicz Spaces*, English translation P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[**25**] Kufner, A.; John, O.; Fucik, S. *Function Spaces*, Noordhoff International Publishing: Leyden, Publishing House Czechoslovak Academy of Sciences: Prague, 1977.

[**26**] Lieb, E.; Loss, M. *Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[**27**] Lu, S.; Ding, Y.; Yan, D. *Singular Integrals and Related Topics* World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd., 2007.

[**28**] Maligranda, L. *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Math. 5, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, **1989**.

[**29**] Megan, M.; Sasu, A. L.; Sasu, B. *On a theorem of Rolewicz type for linear skew-product semiflows*, International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, Cluj-Napoca, **2001**. Semin. Fixed Point Theory, Cluj-Napoca, 3, **2002**, 63-72.

[**30**] Nakai, E. *On generalized fractional integrals*, Taiwanese J. Math., **2001**, 5, 3, 587-602.

[**31**] O'Neil, R. *Convolution operators and $L_{(p,q)}$ spaces*, Duke Math. J. 30, **1963**, 129-142.

[**32**] O'Neil, R. *Fractional integration in Orlicz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 115, **1965**, 300-328.

[**33**] Rao, M. M.; Ren, Z. D. *Theory of Orlicz Spaces*, M. Dekker, Inc., New York, 1991.

[**34**] Rao, M. M.; Ren, Z. D. *Application of Orlicz Spaces*, M. Dekker, Inc., New York, 2002.

[**35**] Sawano, Y. *A Handbook of Harmonic Analysis*, Erişim:
http://www.comp.tmu.ac.jp/yosihiro/teaching/harmonic-analysis/
harmonic-analysis-textbook.pdf

[**36**] Sobolev, S. L. *On a theorem in fuctional analysis*, Math. Sbornik, Russian, 4, **1938**, 471-497.

[**37**] Stein, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 304, 1970.

[**38**] Strichartz, R. S. *A note on Trudinger's extension of Sobolev's inequalities*, Indiana Univ. Math. J. 21, **1972**, 841-842.

[**39**] Torchinsky, A. *Interpolation of operators and Orlicz classes*, Studia Math. 59, **1976**, 177-207.

[**40**] Torchinsky, A. *Real Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic, Press, San Diego, 1986.

[**41**] Trudinger, N. S. *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 17 **1967**, 473-483.

[**42**] Wheeden, R.; Zygmund, A. *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York, 1977.

[**43**] Wiener, N. *The ergodic theorem*, Duke Math. J., 5, **1939**, 1-18.

[**44**] Zaanen, A. C. *Riesz spaces*, II. North-Holland Mathematical Library, 30. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. xi+720 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Koray ŞANTAŞ
Doğum Tarihi	:	12.09.1989
Doğum Yeri	:	Ankara
Anabilim Dalı	:	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Eğitim

Orta Öğrenimi	:	Prof. Dr. Şevket Raşit Hatioğlu Lisesi, 2004-2008.
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2009-2013.
Yüksek Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bilim Dalı, 2013-