T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN KONTAKT METRİK MANİFOLDLARDA KONFORM Bİ-SLANT SUBMERSİYONLAR

Meltem KARAİSMAİLOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2022

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN KONTAKT METRİK MANİFOLDLARDA KONFORM Bİ-SLANT SUBMERSİYONLAR

Meltem KARAİSMAİLOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Sezin AYKURT SEPET

KIRŞEHİR / 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Meltem KARAİSMAİLOĞLU

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine her ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırarak sabırla ve büyük bir ilgi ile bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen kıymetli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Sezin AYKURT SEPET'e en içten duygularımla teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışma süresince ve hayatım boyunca bana ellerindeki her türlü imkanı veren, her koşulda ve her zaman maddi manevi beni destekleyen aileme sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2022 Meltem KARAİSMAİLOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
N	: Topolojik manifold
g	: Metrik tensör
$[,]$	: Lie Braket (Parantez) Operatörü
T_pN	: N manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
$\chi(N)$ veya $\Gamma(TN)$	: N manifoldunun vektör alanlarının uzayı
π_*	: Türev dönüşümü
$\mathcal{D}$	: Distribüsyon
∇	: Lineer konneksiyon
$\nabla\pi_*$	: Dönüşümün ikinci temel formu
∇^π	: F-dönüşümü boyunca pullback (geri çekme) konneksiyonu
$\mathcal{A}$	: Yatay tensör alanı
$\mathcal{T}$	: Dikey tensör alanı
ϕ	: (1,1)-tipinde tensör alanı
ξ	: Karakteristik vektör alanı
η	: 1-form
Φ	: 2. temel form
d	: Dış türev operatörü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEMEN HEMEN KONTAKT METRİK MANİFOLDLARDA KONFORM Bİ-SLANT SUBMERSİYONLAR

Meltem KARAİSMAİLOĞLU

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezin AYKURT SEPET

Bu tezde, hemen hemen kontakt metrik manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform bi-slant submersiyonlar çalışıldı. Bu çalışma için gerekli temel tanım ve kavramlar verilerek submersiyon üzerindeki distribüsyonların tamamen jeodezik olma durumları, integrallenebilirliği ve submersiyonun tamamen jeodezik olma durumları incelendi.

Haziran 2022, 55 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Riemann submersiyon, konform submersiyon, hemen hemen kontakt metrik manifold, konform bi-slant submersiyon.

ABSTRACT

M.Sc. THESIS

CONFORMAL BI-SLANT SUBMERSIONS FROM ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS

Meltem KARAİSMAİLOĞLU

Kırşehir Ahi Evran University
Graduate School of Sciences and Engineering
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezin AYKURT SEPET

In this thesis, conformal bi-slant submersions from almost contact metric manifolds onto Riemannian manifolds were studied. By giving the basic definitions and concepts necessary for this study, the necessary and sufficient conditions for the distributions on submersion to have totally geodesic fibers, the integrability of the distributions and the submersion to have totally geodesic fibers were investigated.

June 2022, 55 Pages.

Keywords: Riemannian submersion, conformal submersion, almost contact metric manifold, conformal bi-slant submersion.

1. GİRİŞ

Manifoldlar teorisi, diferensiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından birisidir. Öklidyen uzayda eğriler ve yüzeyler üzerine olan çalışmalar geometrinin ilk günlerinden itibaren çalışılmasına rağmen bugün ele alınan diferensiyel geometri ve manifold kavramı oluşmasına ön ayak olacak şekilde ortaya konan ilk çalışma Gauss'a aittir. Gauss, bugün Gauss eğriliği olarak adlandırılan bir ölçüyü keşfetmesiyle 2-boyutlu soyut manifoldların keşfine yol açtı. Çığır açan ikinci çalışma ise Riemann'a aittir. Riemann, manifold kavramını Öklidyen uzaydaki (en kısa) uzaklık ölçme bağıntısını genelleştirerek üzerinde çeşitli işlemlerin yapıldığı, koordinatların değiştirildiği n-boyutlu nokta kümesi olarak tanımladı.

Manifold, her bir noktasının komşuluğunda topolojik olarak reel açık birim küreye özdeş olan bir topolojik uzaydır. Manifoldlar teorisinde bir manifoldun geometrisi incelenir iken kullanılan metotlardan birisi, diğer manifolda uygun bir dönüşüm tanımlamaktır. Bu yöntemde dönüşüm ile diğer manifoldun özelliklerinden yararlanılarak ele alınan manifoldun geometrisi incelenir. Manifoldlar arasındaki en temel dönüşüm izometrik immersiyon dönüşümüdür. Gauss'un yüzeyler üzerinde yaptığı çalışmaları ile başlayan izometrik immersiyonlar, üç boyutlu Öklidyen uzayda ek boyutu 1 olan yüzeylerdir ve ek boyutu 1'den büyük olması durumunda ise altmanifold olarak isimlendirilir. 1950 ve 1960'lı yıllarda altmanifoldlar konusu üzerinde yoğun bir şekilde çalışılmıştır ve bu çalışmalar Chen [13] tarafından 1973 yılında bir kitapta toplandı.

İzometrik immersiyonların submersiyonlardaki karşılığı olan Riemann submersiyonlar 1960' larda O'Neill [3] ve Gray [2] tarafından birbirinden bağlantısız olarak tanımlandı. Buna bağlı olarak (N, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $\pi : N \to B$ bir submersiyon olmak üzere eğer $(\textit{çek}\pi_*)^{\perp}$ üzerinde π_* bir izometri oluyor ise π dönüşümüne bir Riemann submersiyon adı verilir. Bu tanım sonucunda, her X_1, X_2 yatay vektör alanları için

$$g(X_1, X_2) = g'(\pi_*(X_1), \pi_*(X_2))$$

elde edilir. Riemann submersiyonlar türevlenebilir yapılarla donatılmış Riemann manifoldlarının geometrisinin incelenmesinde ve manifoldları karşılaştırmada çok kullanışlı dönüşümlerdir. Ayrıca, bu dönüşümler diferensiyel geometride önemli olduğu kadar Yang-Mills teorisi ([23], [12]), Kaluze-Klein teorisi ([39], [24]), robotik teori [14], süper yerçekimi ve süper sicim teorileri ([40], [32]) gibi uygulamalar nedeniyle fizikte de önemli bir yer almaktadır. Hemen hemen kontakt tipli Riemann manifoldlar arasındaki submersiyonlarla ilgili yapılan ilk çalışmalardan biri Chinea [16] tarafından yapılmıştır: Bu çalışmada total uzay, lifler ve baz uzaylar arasındaki diferensiyel geometrik özellikleri elde etti. Watson hemen hemen kompleks manifoldlar arasındaki hemen hemen Hermityen submersiyonlar kavramını [11]'te tanımlayarak submersiyonun total manifoldunun hemen hemen kompleks yapısı altında dikey ve yatay distribüsyonun invaryant olduğunu gösterdi. Ayrıca, Şahin hemen hemen Hermityen manifoldlardan anti-invaryant Riemann submersiyonları tanıttı ve hemen hemen Hermityen manifoldundan bir Riemann manifolduna slant submersiyonlar üzerinde çalıştı, ([7], [9]). Daha sonra bu konuyla ilgili birçok çalışma yapılmıştır (bkz [8], [15], [21]).

Riemann submersiyonların genişletilmişi olan konform Riemann submersiyonlar Gundmundson tarafından doktora tezinde çalışıldı ve harmonik morfizm olma durumları elde edildi, [37]. Elde edilen bu durumlar, Burel [22] tarafından kontakt manifoldlara uygulandı. Daha sonralarda konform submersiyonlar üzerine Akyol ve Şahin hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform anti-invaryant [27], semi-invaryant [28] ve slant submersiyonlar [29] üzerinde çalıştı. Gündüzalp ve Akyol kosimplektik manifoldlarda konform slant submersiyonlar [42] ve konform anti-invaryant $\xi^{\perp}$-submersiyonları [30] tanımladı. Submersiyonlar konusu son zamanlarda diferensiyel geometrinin en aktif çalışma alanlarından birisidir.

Bu tezde, hemen hemen kontakt metrik manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform bi-slant submersiyonlar çalışılmıştır. İkinci bölümde, tezin devam eden bölümlerinde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler sunuldu. Bunlar; Riemann manifoldlar, vektör demetleri ve distribüsyonlar, Riemann submersiyonlar ve konform submersiyonlar, hemen hemen kontakt metrik manifoldlar olarak sıralanabilir. Tezin orijinal bölümü üçüncü bölümdür. Üçüncü bölümde, submersiyon üzerindeki distribüsyonların tamamen jeodezik olma durumları, integrallenebilirliği incelenmektedir. Bunun yanı sıra bu submersiyonun tamamen jeodezik olma durumlarıyla ilgili bazı karakterizasyonlar da araştırılmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, Riemann manifoldlar hakkında temel kavramlar ifade edilmektedir. İkinci alt bölümde, vektör demetleri ve distribüsyonlar incelenmektedir. Üçüncü alt bölümde, Riemann submersiyonlar ve bu submersiyonların genelleştirilmişi olan konform submersiyonlar ile ilgili temel kavramlar incelenerek temel özellikleri verilmektedir. Son bölümde ise hemen hemen kontakt metrik manifoldlar sunulmaktadır.

2.1. Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1. N, n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve g, N manifoldu üzerinde $(0,2)$ mertebeli bir tensör alanı olsun. O halde, N manifoldu üzerinde U_1, U_2 vektör alanları için

i) $g(U_1, U_2) = g(U_2, U_1)$

ii) $g(U_1, U_1) \geqslant 0$ ve $g(U_1, U_1) = 0 \Leftrightarrow U_1 = 0,$

özellikleri sağlanıyor ise g ye Riemann metriği adı verilir ve (N, g) ikilisi ise Riemann manifold olarak adlandırılır, [25].

Teorem 2.2. N, n-boyutlu bir Riemann manifold ve $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, N manifoldu üzerinde tanımlı lokal koordinat sistemi verilsin. O halde, N üzerinde tanımlı metrik tensör

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du_i \otimes du_j$$

şeklinde ifade edilir, [36].

Tanım 2.3. N bir Riemann manifold ve g, N üzerinde bir Riemann metriği olmak üzere $U_p \in T_pN$ tanjant vektörünün normu (uzunluğu)

$$\| U_p \| = \sqrt{g_p(U, U)}$$

reel sayısı ile tanımlanır, [38].

Tanım 2.4. N bir Riemann manifold ve g, N üzerinde tanımlı metrik tensör olsun. Sıfırdan farklı iki $U_1, U_2 \in T_pN$ tanjant vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere

$$g(U_1, U_2) = \parallel U_1 \parallel \parallel U_2 \parallel \cos\theta$$

şeklinde ifade edilir. Burada θ açısının $[0, \pi]$ kapalı aralığında olduğu Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$|g(U_1, U_2)| \leq \parallel U_1 \parallel \parallel U_2 \parallel$$

ile görülmektedir, [20].

Tanım 2.5. N manifoldu üzerinde U_1, U_2 vektör alanları ve $h \in C^\infty(N, R)$ fonksiyonu verilsin.

$$[,] : \chi(N) \times \chi(N) \to \chi(N)$$

$$[U_1, U_2]h = U_1(U_2h) - U_2(U_1h)$$

şeklinde tanımlanan $[,]$ ifadesine Lie (parantez) operatörü adı verilir. $h_1, h_2 \in C^\infty(N)$ ve N manifoldu üzerinde tanımlı U_1, U_2, U_3 vektör alanları için bu operatör aşağıda verilen özellikleri sağlar, [36]:

i) $[U_1, U_2] = -[U_2, U_1]$,

ii) $[a_1U_1 + a_2U_2, U_3] = a_1[U_1, U_3] + a_2[U_2, U_3], \quad a_1, a_2 \in R$,

iii) $[[U_1, U_2], U_3] + [[U_2, U_3], U_1] + [[U_3, U_1], U_2] = 0$ (Jacobi özdeşliği),

iv) $[h_1U_1, h_2U_2] = h_1h_2[U_1, U_2] + h_1(U_1h_2)U_2 - h_2(U_2h_1)U_1$.

Tanım 2.6. (N, g), n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve N manifoldu üzerinde U, V vektör alanları verilsin. N manifoldu üzerindeki her p noktası için

$$U_p = (u_1, \ldots, u_n)|_p \in T_pN$$

şeklinde ifade edilir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $v_i : N \to R$ koordinat fonksiyonları C^∞ sınıfından, yani $v_i \in C^\infty(N, R)$ ise $V_p = (v_1, \ldots, v_n)|_p$ şeklinde tanımlı vektör alanı C^∞ sınıfındandır denir. O halde V nin U ya göre kovaryant türevi

$$\nabla_U V = (U_p[v_1], \ldots, U_p[v_n])$$

ile tanımlanır ve $\nabla_U V$ şeklinde gösterilir, [36].

Tanım 2.7. N bir diferensiyellenebilir manifold ve N manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(N)$ olmak üzere

$$\nabla : \chi(N) \times \chi(N) \to \chi(N)$$

fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa ∇, N manifoldu üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olarak adlandırılır, [36]:

i) $\nabla_{U_1+U_2} U_3 = \nabla_{U_1} U_3 + \nabla_{U_2} U_3$,

ii) $\nabla_{U_1}(U_2 + U_3) = \nabla_{U_1} U_2 + \nabla_{U_1} U_3$,

iii) $\nabla_{hU_1} U_2 = h\nabla_{U_1} U_2$,

iv) $\nabla_{U_1}(hU_2) = U_1[h]U_2 + h\nabla_{U_1} U_2, \quad \forall h \in C^\infty(N)$.

Tanım 2.8. N bir manifold ve N üzerinde tanımlı konneksiyon ∇ olsun. N manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TN)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TN) \times \Gamma(TN) &\to \Gamma(TN) \\ (U_1, U_2) &\to T(U_1, U_2) = \nabla_{U_1} U_2 - \nabla_{U_2} U_1 - [U_1, U_2] \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen vektör değerli tensöre N manifoldu üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü adı verilir, [19].

Tanım 2.9. N bir manifold ve T, N manifoldu üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü olmak üzere $T = 0$ oluyor ise ∇ konneksiyonuna simetrik veya sıfır torsiyonludur denir, [19].

Tanım 2.10. N bir Riemann manifold ve N manifoldu üzerinde tanımlı bir lineer konneksiyon ∇ olmak üzere ∇ konneksiyonu aşağıda verilen özelliklere sahip ise Riemann konneksiyon veya Levi-Civita konneksiyonu olarak adlandırılır. N manifoldu üzerinde her U_1, U_2, U_3 vektör alanı için

i) $[U_1, U_2] = \nabla_{U_1} U_2 - \nabla_{U_2} U_1$,

ii) $U_1 g(U_2, U_3) = g(\nabla_{U_1} U_2, U_3) + g(U_2, \nabla_{U_1} U_3)$

eşitlikleri sağlanır, [4].

Bu şekilde ifade edilen ∇ Riemann konneksiyonu, N manifoldu üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu şeklinde ayrıca tanımlanır. N üzerindeki bir Levi-Civita konneksiyonu,

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{U_1}U_2, U_3) = U_1 g(U_2, U_3) + U_2 g(U_3, U_1) - U_3 g(U_1, U_2)\\ + g(U_3, [U_1, U_2]) + g(U_2, [U_3, U_1]) - g(U_1, [U_2, U_3])\end{aligned}$$

Koszul eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 2.11. N ve B sırası ile n_1 ve n_2 boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold ve

$$\pi : N \to B$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere $p \in N$ ve $U_p \in T_pN$ için

$$\begin{aligned}(\pi_*)_p : T_pN &\to T_{\pi(p)}B\\ U_p &\to (\pi_*)_p(U_p) = (U_p[\pi_1], \ldots, U_p[\pi_{n_2}])_{\pi(p)}\end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüm türev dönüşümü olarak adlandırılır, [9].

Tanım 2.12. (N, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : N \to B$$

diferensiyellenebilir dönüşümü verilsin. N manifoldu üzerinde herhangi bir p noktası için $U_1, U_2 \in T_pN$ olmak üzere

$$g(U_1, U_2) = g'(\pi_*(U_1), \pi_*(U_2)) \tag{2.1}$$

eşitliği sağlanıyor (metrik tensörler korunuyor) ise π ye N den B ye bir izometri adı verilir, [36].

Önerme 2.13. N ve B diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi : N \to B$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm ise π_* dönüşümü lineerdir, [10].

Önerme 2.14. $\pi : N \to B,\ N$ ve B diferensiyellenebilir manifoldlar arasında bir C^∞ dönüşüm olsun. U_1, U_2 ve U_1', U_2' sırası ile N ve B manifoldları üzerinde

$$d\pi(U_1) = U_1' \quad ve \quad d\pi(U_2) = U_2'$$

yani, N manifoldu üzerinde her p noktası için

$$d\pi_p(U_{1_p}) = U'_{1_{\pi(p)}} \quad ve \quad d\pi_p(U_{2_p}) = U'_{2_{\pi(p)}}$$

eşitliklerini sağlayan vektör alanları verilsin. O halde,

$$d\pi([U_1, U_2]) = [U_1', U_2'] \circ \pi$$

dir, [31].

Tanım 2.15. $\pi : N \to B$ bir C^∞ dönüşümü için $(\pi_*)_p(T_pN)$ nin boyutu r oluyor ise π dönüşümünün rankı r dir denir, [25].

Önerme 2.16. N ve B sırası ile n_1 ve n_2 boyutlu Riemann manifoldlar ve

$$\pi : N \to B$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Her $p \in N$ noktası için $rank(\pi_*)_p = boyN = n_1$ oluyor ise $(\pi_*)_p$ birebirdir, [25].

Tanım 2.17. N ve B diferensiyellenebilir manifoldlar olsun.

$$\pi : N \to B$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve σ, B üzerinde tanımlı bir r-form olsun.

$$\pi_{*p} : T_pN \to T_{\pi(p)}B$$

türev dönüşümü $U_p \in T_pN$ için

$$\pi^* : T_{\pi(p)}B^* \to T_pN^*$$

$$\pi^*(\sigma_{\pi(p)})(U_p) = \sigma_{\pi(p)}(\pi_*(U_p))$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme pullback (geri çağırma, geri çekim) dönüşüm adı verilir, [10].

Önerme 2.18. N ve B birer Riemann manifold ve $\pi : N \to B$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere her U_1, U_2 vektör alanı için π dönüşümünün 2. temel formu şu şekilde tanımlanır:

$$(\nabla \pi_*)(U_1, U_2) = \nabla^{\pi}_{U_1} \pi_*(U_2) - \pi_*(\nabla^{B}_{U_1} U_2). \tag{2.2}$$

Buradaki ∇^{π} pullback konneksiyondur ve $\nabla \pi_*$, 2. temel formu simetriktir, [34].

Lemma 2.19. N ve B birer Riemann manifold ve $\pi : N \to B$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere U_1, U_2 vektör alanları için

$$\nabla^{\pi}_{U_1} \pi_*(U_2) - \nabla^{\pi}_{U_2} \pi_*(U_1) - \pi_*([U_1, U_2]) = 0$$

dır, [30].

Tanım 2.20. N ve B Riemann manifoldları arasında $\pi : N \to B$ bir Riemann submersiyonu verilsin. N manifoldu üzerindeki U_1, U_2 vektör alanları için

$$(\nabla \pi_*)(U_1, U_2) = 0 \tag{2.3}$$

oluyor ise π ye total geodezik dönüşüm adı verilir, [36].

2.2. Vektör Demetleri ve Distribüsyonlar

Tanım 2.21. E_1, E_2, F birer C^∞ manifold ve $\pi : E_1 \to E_2$ bir C^∞ dönüşüm olmak üzere E_2 manifoldunun bir açık örtüsü I indis kümesi için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olmak üzere

$$(\pi \circ \psi_\alpha)(u, v) = u, \quad u \in U_\alpha, \quad v \in F$$

sağlayacak şekilde

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi var ise π dönüşümü, F manifolduna göre lokal çarpım özelliğine sahiptir denir. Ayrıca, $\mathcal{D} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemi π dönüşümünün lokal ayrışması olarak adlandırılır, [5].

Lokal çarpım özelliğine sahip $\pi : E_1 \to E_2,\ C^{\infty}$ dönüşümü için $\zeta = (E_1, \pi, E_2, F)$ dörtlüsü bir diferensiyellenebilir lif demeti olarak adlandırılır, [36].

$\zeta = (E_1, \pi, E_2, F)$ lif demetinde E_1 total uzay, E_2 baz (taban) uzay, F lif modeli ve π dönüşümü ise projeksiyon (fibrasyon, izdüşüm) olarak tanımlanır, [5].

Tanım 2.22. $\pi : E_1 \to E_2$ bir lif demeti verilsin. E_2 manifoldu üzerindeki her u noktası için

$$\pi^{-1}(u) = F_u = \{p \in E_1 \mid \pi(p) = u\}$$

kümesine u noktası üzerinde bir lif adı verilir ve tüm F_u liflerinin ayrık birleşimi ise E_1 total uzayını verir, [41].

Tanım 2.23. $\zeta = (E_1, \pi, E_2, F)$ diferensiyellenebilir bir lif demeti olmak üzere π dönüşümünün $\mathcal{D}$ lokal ayrışmasına ζ lif demetinin lokal koordinat temsilcisi adı verilir, [41].

$\zeta = (E_1, \pi, E_2, F)$ lif demetinin $\mathcal{D} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi ele alındığında $\forall u \in U_\alpha$ için

$$\psi_{\alpha,u} : F \to F_u$$

dönüşümü $v \in F$ için

$$\psi_{\alpha,u}(v) = \psi_\alpha(u, v)$$

şeklinde tanımlanır ise ψ_α lar diffeomorfizm oldukları için $\psi_{\alpha,u}$ de birebir, örten diffeomorfizmdir.

Tanım 2.24. $\zeta = (E_1, \pi, E_2, F)$ şeklinde diferensiyellenebilir bir lif demeti verilsin. Her $u \in E_2$ için aşağıda verilen özellikler sağlanıyor ise ζ ya bir vektör demeti adı verilir, [41]:

i) F ve F_u lifleri $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı belirtir.

ii) ζ lif demetinin bir $\mathcal{D} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi var ise $\psi_{\alpha,u} : F \to F_u$ dönüşümleri lineer izomorfizmdir.

Tanım 2.25. $\pi : E_1 \to E_2$ diferensiyellenebilir lif demeti verilsin. O halde

$$\pi \circ S = I \quad (I,\ \text{birim dönüşüm})$$

sağlayacak şekilde

$$S : E_2 \to E_1$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne lif demetinin kesiti adı verilir ve $\Gamma(E_1)$ şeklinde gösterilir, [5].

Tanım 2.26. E_1 bir vektör demeti olmak üzere E_2 manifoldu üzerinde her p noktası için T_pE_2 tanjant uzayına bir U_p vektörünü taşıyan dönüşüme vektör demetinin kesiti adı verilir ve E_1 in $\Gamma(E_1)$ kesitlerinin uzayı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı belirtir, [41].

$N,$ n-boyutlu bir manifold olmak üzere herhangi bir $u \in N$ noktası için

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : N &\to T_uN \\ u &\to \mathcal{D}_u \subset T_uN, \quad boy(\mathcal{D}_u) = r \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\mathcal{D}$ dönüşümü bir r-boyutlu distribüsyon olarak adlandırılır.

$U \in \chi(N)$ ve $u \in N$ için $U_u \in \mathcal{D}_u$ oluyorsa U vektör alanı $\mathcal{D}$ distribüsyonuna aittir denir ve $U \in \Gamma(\mathcal{D})$ şeklinde ifade edilir, [36].

$\mathcal{D},$ N manifoldu üzerinde tanımlı r-boyutlu bir distribüsyon olmak üzere $\forall u \in N$ için $\mathcal{D}$ distribüsyonuna ait r-tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı mevcut ise $\mathcal{D}$ distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir, [36].

Tanım 2.27. N bir diferensiyellenebilir manifold, N manifoldu üzerinde tanımlı n-boyutlu bir diferensiyellenebilir distribüsyon $\mathcal{D}$ ve N manifoldunun altmanifoldu B olsun. Eğer $\forall u \in B$ için B manifoldunun tanjant uzayı ile $\mathcal{D}_u$ aynı oluyor ise B ye $\mathcal{D}$ nin integral manifoldu adı verilir. Yani,

$$\pi : B \to N$$

bir imbedding olmak üzere her $u \in B$ noktası için

$$\pi_*(T_uB) = \mathcal{D}_u$$

olur. Eğer $\mathcal{D}$ dışında B yi kapsayan bir başka integral manifoldu mevcut değil ise B manifolduna $\mathcal{D}$ distribüsyonunun bir maksimal integral manifoldu adı verilir, [41].

Tanım 2.28. N bir diferensiyellenebilir manifold ve N manifoldunun bir B altmanifoldu verilsin. $\mathcal{D},$ N üzerinde tanımlı bir distribüsyon olmak üzere $\forall u \in B$ için $\mathcal{D}$ distribüsyonunun

u yu kapsayan bir maksimal integral manifoldu var ise $\mathcal{D}$ distribüsyonuna integrallenebilirdir denir, [10].

Tanım 2.29. (N, g) bir Riemann manifoldu ve (N, g) üzerinde tanımlı bir lineer konneksiyon ∇ olmak üzere $U_1 \in \Gamma(TN),\ U_2 \in \Gamma(\mathcal{D})$ için $\mathcal{D}$ distribüsyonunun paralelliği

$$\nabla_{U_1} U_2 \in \Gamma(\mathcal{D})$$

şeklinde tanımlanır ve bu durumda, $\mathcal{D}$ distribüsyonu tamamen jeodezik bir foliasyon belirtir, [26].

Önerme 2.30. N Riemann manifoldu $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{H}$ ortogonal distribüsyonlarına sahip olmak üzere $\mathcal{D}$ distribüsyonunun ∇ konneksiyonuna göre paralel olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H}$ distribüsyonunun paralel olmasıdır, [5].

2.3. Riemann ve Konform Submersiyonlar

Bu bölümde, Riemann submersiyonlar ve onun daha genel bir durumu olan konformluk durumu ile ilişkili birtakım temel tanım ve teoremler sunulmaktadır.

Tanım 2.31. (N, g) ve (B, g') sırası ile n_1 ve n_2 boyutlu Riemann manifoldlar olmak üzere

$$\pi : N \to B$$

örten diferensiyellenebilir dönüşümü için

$$rank \pi_{*u} = boy B$$

ise π dönüşümüne $u \in N$ noktasında bir submersiyon adı verilir. Her $u \in N$ noktası için π bir submersiyon oluyor ise π dönüşümü, N manifoldu üzerinde bir submersiyon olarak adlandırılır, [31].

O halde, π submersiyonu için

$$rank \pi_{*u} = boy B < boy N$$

olur. B manifoldu üzerinde herhangi bir x noktası için $F_x = \pi^{-1}(x)$ üzerindeki lif N manifoldunun $r = (n_1 - n_2)$-boyutlu bir altmanifoldudur ve bu $\pi^{-1}(x)$ altmanifoldlarına submersiyonun lifleri adı verilir, [31].

Tanım 2.32. (N, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi : (N, g) \to (B, g')$$

bir C^∞ dönüşümü verilsin. N manifoldu üzerinde herhangi bir u noktası için

$$\mathcal{V}_u = \mathcal{V}_u(\pi) = çek\pi_{*u} = \{U \in T_uN \mid \pi_{*u}(U) = 0\} \subset T_uN$$

ve

$$\mathcal{H}_u = \mathcal{V}_u^{\perp} \subset T_uN$$

şeklinde tanımlı olsun. $\mathcal{V}_u$ uzayı π dönüşümünün u noktasındaki dikey uzayı olarak adlandırılır. N manifoldu üzerinde tanımlı g metriğine göre $\mathcal{V}_u$ dikey uzayının $\mathcal{H}_u$ dik tümleyenine π dönüşümünün u noktasındaki yatay uzayı adı verilir, [36].

Böylelikle, $u \in N$ noktasında N Riemann manifoldu

$$T_uN = \mathcal{V}_u \oplus \mathcal{H}_u = \mathcal{V}_u \oplus (\mathcal{V}_u)^{\perp}$$

ortogonal ayrışıma sahip olur, [36].

Tanım 2.33. (N, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : N \to B$$

bir C^∞ dönüşümü verilsin. $u \in N$ noktasında T_uN nin sırası ile $\mathcal{V}_u$ ve $\mathcal{H}_u$ alt uzaylarına karşılık gelen

$$u \to \mathcal{V}_u \quad ve \quad u \to \mathcal{H}_u$$

dönüşümleri $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ şeklinde ifade edilen C^∞ distribüsyonlarını tanımlar ve $\mathcal{V}$, π dönüşümünün dikey distribüsyonu (dikey alt demeti); $\mathcal{H}$ ise π dönüşümünün yatay distribüsyonu (yatay alt demeti) olarak adlandırılır, [26].

Bu durumda N manifoldu üzerinde bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise yatay vektör alanı, dikey distribüsyona ait ise dikey vektör alanı şeklinde tanımlanır ve yatay vektör alanlarının kümesi $\chi^{\mathcal{H}}(N)$ veya $\Gamma(\mathcal{H})$ ile dikey vektör alanlarının kümesi $\chi^{\mathcal{V}}(N)$ veya $\Gamma(\mathcal{V})$ şeklinde gösterilir, [35].

Herhangi bir $E \in \chi(N)$ vektör alanına ait dikey ve yatay bileşenleri sırası ile $\mathcal{V}E$ ve $\mathcal{H}E$ şeklinde ifade edilir, [35].

Tanım 2.34. (N, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $\pi : N \to B$ bir C^∞ dönüşüm olmak üzere N manifoldu üzerinde izdüşürülebilir (projectable) vektör alanlarının uzayı olan $\chi^{\mathcal{C}}(N)$ nin her elemanı, N manifoldu üzerinde bir vektör alanı belirtip B manifoldu üzerinde bir vektör alanına π-bağlıdır denir, [31].

Tanım 2.35. N ve B iki Riemann manifold olmak üzere N manifoldu üzerinde X vektör alanı yatay ve B manifoldu üzerinde X' vektör alanına π-bağlı ise X e temel vektör alanı adı verilir ve temel vektör alanlarının uzayı

$$\chi^{\mathcal{B}}(N) = \chi^{\mathcal{C}}(N) \cap \chi^{\mathcal{H}}(N)$$

ile ifade edilir,[36].

Tanım 2.36. (N, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : N \to B$$

bir C^∞ submersiyonu verilsin. $\forall u \in N$ için π_{*u}, yatay vektörlerin uzunluğu korunuyor ise π ye Riemann submersiyon adı verilir.
O halde,

$$g_u(X_1, X_2) = g'_{\pi(u)}(\pi_{*u}X_1, \pi_{*u}X_2), \quad X_1, X_2 \in \mathcal{H}_u, \quad u \in N \tag{2.4}$$

olur. Bu durum, bir $u \in N$ noktasında π_* dönüşümü $\mathcal{H}_u$ yatay uzayından $T_{\pi(u)}B$ uzayına bir lineer izometri ifade eder, [31].

Önerme 2.37. (N, g) ve (B, g') Riemann manifoldları,

$$\pi : N \to B$$

bir Riemann submersiyon, ∇ ve ∇' sırası ile N ve B manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olmak üzere N manifoldu üzerinde X_1, X_2, X_3 temel vektör alanları, X'_1, X'_2, X'_3 vektör alanlarına π-bağlı olsun. O halde

i) $g(X_1, X_2) = g'(X'_1, X'_2) \circ \pi$,

ii) $\mathcal{H}[X_1, X_2] = [X'_1, X'_2] \circ \pi$,

iii) $g'(\pi_*(\mathcal{H}\nabla_{X_1} X_2), X'_3) \circ \pi = g(\mathcal{H}\nabla_{X_1} X_2, X_3) = g'(\nabla'_{X'_1} X'_2, X'_3) \circ \pi$,

iv) $\forall U_1 \in \chi^{\mathcal{V}}(N)$ için $\pi_*([X_1, U_1]) = 0$ olur ve bu ise $[X_1, U_1] \in \chi^{\mathcal{V}}(N)$ dir, [31].

Tanım 2.38. (N, g) ve (B, g') iki Riemann manifold ve

$$\pi : N \to B$$

bir Riemann submersiyon olmak üzere (1,2) mertebeli anti-simetrik ve lineer $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ temel tensör alanları aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\mathcal{T}(E, F) = \mathcal{T}_E F = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}E}\mathcal{V}F + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}E}\mathcal{H}F, \quad E, F \in \Gamma(TN) \tag{2.5}$$

$$\mathcal{A}(E, F) = \mathcal{A}_E F = \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}E}\mathcal{H}F + \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}E}\mathcal{V}F, \quad E, F \in \Gamma(TN) \tag{2.6}$$

[41].

$E \in \Gamma(TN)$ olmak üzere $\mathcal{T}_E$ temel tensör alanı dikey yani $\mathcal{T}_E = \mathcal{T}_{\mathcal{V}E}$ olup $\mathcal{A}_E$ temel tensör alanı yatay yani $\mathcal{A}_E = \mathcal{A}_{\mathcal{H}E}$ dir. $\mathcal{T}_E$ ve $\mathcal{A}_E$ tensör alanları N manifoldunun herhangi bir noktasında yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirirler. Ayrıca, $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ tensör alanları aşağıdaki eşitlikleri sağlar;

$$\mathcal{T}_{U_1} U_2 = \mathcal{T}_{U_2} U_1, \quad U_1, U_2 \in \Gamma(\mathcal{V}) \tag{2.7}$$

$$\mathcal{A}_{X_1} X_2 = -\mathcal{A}_{X_2} X_1, \quad X_1, X_2 \in \Gamma(\mathcal{H}) \tag{2.8}$$

[36].

Önerme 2.39. (N, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : N \to B$$

bir Riemann submersiyonu verilsin. O halde N manifoldu üzerinde tanımlı herhangi bir E, F, G vektör alanları için

$$g(\mathcal{T}_E F, G) = -g(\mathcal{T}_E G, F) \tag{2.9}$$

$$g(\mathcal{A}_E F, G) = -g(\mathcal{A}_E G, F) \tag{2.10}$$

eşitlikleri sağlanır, [31].

Önerme 2.40. (N, g) ve (B, g') birer Riemann manifold ve

$$\pi : N \to B$$

bir Riemann submersiyon olsun. $\mathcal{A}$ tensör alanı aşağıda verilen özelliğe sahiptir, [41];

$$\mathcal{A}_{X_1} X_2 = \frac{1}{2}\mathcal{V}[X_1, X_2], \quad X_1, X_2 \in \Gamma(\mathcal{H}). \tag{2.11}$$

Tanım 2.41. (N, g) ve (B, g') iki Riemann manifold ve $\pi : N \to B$ bir Riemann submersiyon olmak üzere eğer $\mathcal{T}$ tensör alanı sıfır oluyor ise π dönüşümünün herhangi bir lifine N manifoldunun total geodezik altmanifoldu adı verilir, [31].

Bir Riemann submersiyonda $\mathcal{V}$ dikey distribüsyonunun her daim integrallenebilir olduğunu biliyoruz. $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonu için ise aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.42. N ve B birer Riemann manifold,

$$\pi : N \to B$$

bir Riemann submersiyon ve N üzerinde tanımlı yatay distribüsyon olan $\mathcal{H}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A} = 0$ olmasıdır, [41].

Lemma 2.43. (N, g) ve (B, g') birer Riemann manifold ve

$$\pi : N \to B$$

bir Riemann submersiyon olsun. X_1, X_2 yatay vektör alanları ve U_1, U_2 dikey vektör alanları için

$$\nabla_{U_1} U_2 = \mathcal{T}_{U_1} U_2 + \hat{\nabla}_{U_1} U_2 \tag{2.12}$$

$$\nabla_{U_1} X_1 = \mathcal{H}\nabla_{U_1} X_1 + \mathcal{T}_{U_1} X_1 \tag{2.13}$$

$$\nabla_{X_1} U_1 = \mathcal{A}_{X_1} U_1 + \mathcal{V}\nabla_{X_1} U_1 \tag{2.14}$$

$$\nabla_{X_1} X_2 = \mathcal{H}\nabla_{X_1} X_2 + \mathcal{A}_{X_1} X_2 \tag{2.15}$$

dir. Aynı zamanda X_1 temel vektör alanı için aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$\mathcal{H}\nabla_{U_1} X_1 = \mathcal{H}\nabla_{X_1} U_1 = \mathcal{A}_{X_1} U_1 \tag{2.16}$$

[31].

Tanım 2.44. (N, g) ve (B, g') birer Riemann manifold ve

$$\pi : N \to B$$

diferensiyellenebilir dönüşümü verilsin. O halde $u \in N$ ve $X_1, X_2 \in T_u N$ için

$$g'(d\pi_u(X_1), d\pi_u(X_2)) = \Lambda(u) g(X_1, X_2) \tag{2.17}$$

sağlanacak şekilde bir $\Lambda(u)$ fonksiyonu var ise π dönüşümü N manifoldunun herhangi bir u noktasında zayıf konform dönüşüm olarak adlandırılır, [34].

Tanım 2.45. (N, g) ve (B, g') birer Riemann manifold ve

$$\pi : N \to B$$

N nin u noktasındaki bir zayıf konform dönüşümü olmak üzere

$$\Lambda(u) = \lambda(u)^2 \tag{2.18}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir

$$\lambda : N \to [0, \infty)$$

fonksiyonu için $\lambda(u)$ sayısına π dönüşümünün konform faktörü, $\Lambda(u)$ sayısına ise π dönüşümünün kare konform faktörü adı verilir, [34].

Önerme 2.46. (N, g) ve (B, g') Riemann manifoldları arasında

$$\pi : N \to B$$

bir C^∞ dönüşümü ve N manifoldu üzerinde bir u noktası verilsin. Bu durumda, N nin u noktasındaki π nin zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul

i) $d\pi_u = 0$ veya

ii) $d\pi_u : T_uN \to T_{\pi(u)}B$ birebir konform dönüşüm olmasıdır, [26].

Tanım 2.47. (N, g) ve (B, g') birer Riemann manifold ve

$$\pi : N \to B$$

bir zayıf konform dönüşüm olmak üzere $d\pi_u = 0$ eşitliğini sağlayan N manifoldu üzerindeki u noktasına π dönüşümünün kritik noktası adı verilir, [34].

Tanım 2.48. (N, g) ve (B, g') birer Riemann manifold ve

$$\pi : N \to B$$

bir zayıf konform dönüşüm olmak üzere $X_1, X_2 \in \mathcal{H}_u$ için

$$g'(d\pi_u(X_1), d\pi_u(X_2)) = \Lambda(u)g(X_1, X_2)$$

koşulunu sağlayan $u \in N$ noktasına π dönüşümünün bir regüler noktası adı verilir, [26].

Tanım 2.49. (N, g) ve (B, g') birer Riemann manifold olsun. Bu durumda konform faktörü sıfırdan farklı bir sabit şeklinde tanımlı

$$\pi : N \to B$$

zayıf konform dönüşümü bir homotetik immersiyon olarak adlandırılır ve bir diffeomorfizm olan homotetik immersiyon ise homoteti olarak adlandırılır, [34].

Tanım 2.50. (N, g) ve (B, g') sırası ile n_1 ve n_2 boyutlu iki Riemann manifold ve

$$\pi : N \to B$$

bir C^{∞} dönüşüm olmak üzere $u \in N$ için aşağıda verilen şartlardan herhangi biri sağlanıyor ise π dönüşümü u noktasında yatay zayıf konform dönüşüm olarak adlandırılır:

i) $d\pi_u = 0$ veya

ii) $\mathcal{H}_u = \{çek(d\pi_u)\}^{\perp}$ yatay uzayını $T_{\pi(u)}B$ uzayı üzerine konform olarak resmeden $d\pi_u$ türev dönüşümü örten olup her X_1, X_2 yatay vektör alanı için

$$g'(d\pi_u(X_1), d\pi_u(X_2)) = \Lambda(u)g(X_1, X_2) \tag{2.19}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $\Lambda(u) \neq 0$ sayısı mevcuttur, [26].

Tanım 2.51. (N, g) ve (B, g') birer Riemann manifold ve

$$\pi : N \to B$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere herhangi bir $u \in N$ için

$$rankd\pi_u = boyB$$

oluyor ise π dönüşümü u noktasında submersiyon olarak adlandırılır ve π dönüşümünün hiç kritik noktası bulunmuyor ise π dönüşümü konform submersiyon olarak adlandırılır, [26].

Tanım 2.52. (N, g) ve (B, g') birer Riemann manifold ve zayıf konform dönüşüm π olsun. λ konform faktörünün gradiyenti regüler noktalarda dikey oluyor ise yani

$$\mathcal{H}(grad\lambda) = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise bu dönüşüm yatay homotetik dönüşüm olarak adlandırılır ve verilen $\mathcal{H}(grad\lambda) = 0$ eşitliği λ nın yatay eğriler boyunca sabit olması demektir, [34].

Tanım 2.53. N ve B sırası ile n_1 ve n_2 boyutlu Riemann manifoldları ve

$$\pi : N \to B$$

diferensiyellenebilir bir submersiyon olmak üzere $\forall X_1, X_2 \in \Gamma((çek\pi_*)^{\perp})$ için

$$\lambda^2 g(X_1, X_2) = g'(\pi_*(X_1), \pi_*(X_2)) \tag{2.20}$$

ifadesi sağlanacak şekilde bir pozitif λ fonksiyonu var ise π submersiyonu yatay konform submersiyon olarak adlandırılır, [6].

Önerme 2.54. $\pi : (N, g) \to (B, g')$ dönüşümü λ konform faktörü ile bir yatay konform submersiyon olmak üzere X_1, X_2 yatay vektör alanları için

$$\mathcal{A}_{X_1}X_2 = \frac{1}{2}\{\mathcal{V}[X_1, X_2] - \lambda^2 g'(X_1, X_2) grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})\} \tag{2.21}$$

dır, [37].

Lemma 2.55. $\pi : N \to B$ bir yatay konform submersiyonu verilsin. O halde $X_1, X_2 \in \Gamma(\mathcal{H})$ ve $U_1, U_2 \in \Gamma(\mathcal{V})$ için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır, [34];

$$(\nabla\pi_*)(X_1, X_2) = X_1(ln\lambda)\pi_* X_2 + X_2(ln\lambda)\pi_* X_1 - g'(X_1, X_2)\pi_*(\nabla ln\lambda),$$
$$(\nabla\pi_*)(U_1, U_2) = -\pi_*(\mathcal{T}_{U_1}U_2),$$
$$(\nabla\pi_*)(X_1, U_1) = -\pi_*(\nabla^B_{X_1}U_1) = -\pi_*(\mathcal{A}_{X_1}U_1).$$

2.4. Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlar

Bu bölümde, hemen hemen kontakt metrik manifoldlar ve bu manifold üzerinden Sasakian manifold tanımlanarak bu manifolda ait bazı temel özellikler verilmiştir.

Tanım 2.56. N, $(2n + 1)$-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold, $(1, 1)$-tipinde bir tensör alanı ϕ, bir karakteristik vektör alanı ξ ve N üzerinde bir diferensiyel 1-form η olsun. N manifoldu üzerindeki U vektör alanı için;

$$\phi^2 = -U + \eta(U)\xi \tag{2.22}$$

ve

$$\eta(\xi) = 1 \tag{2.23}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η) üçlüsü bir hemen hemen kontakt yapı ve (N, ϕ, ξ, η) dörtlüsü ise bir hemen hemen kontakt manifold olarak adlandırılır, [25].

Teorem 2.57. (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısı için;

$$\phi(\xi) = 0 \tag{2.24}$$

$$\eta(\phi U) = 0 \tag{2.25}$$

$$rank\phi = 2n \tag{2.26}$$

eşitlikleri sağlanır, [18].

Tanım 2.58. Hemen hemen kontakt manifoldu N ve N üzerinde hemen hemen kontakt yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. N manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği ve N manifoldu üzerindeki herhangi bir U_1, U_2 vektör alanları için

$$\eta(U_1) = g(U_1, \xi) \tag{2.27}$$

ve

$$g(\phi U_1, \phi U_2) = g(U_1, U_2) - \eta(U_1)\eta(U_2) \tag{2.28}$$

şeklinde verilen eşitlikler sağlanıyorsa g metriği N manifoldu üzerinde hemen hemen kontakt metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısı hemen hemen kontakt metrik yapı, (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile N manifoldu ise hemen hemen kontakt metrik manifold olarak adlandırılır, [25].

Örnek 2.59. R^5 Öklidyen uzayı üzerindeki kartezyen koordinatları (x_1, x_2, x_3, x_4, z) olsun. 1-form $\eta = dz$, karakteristik vektör alanı $\xi = \dfrac{d}{dz}$, Riemann metriği

$$g_{R^5} = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 + (dz)^2$$

ve

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin. Bu taktirde $(R^5, g_{R^5}, \varphi, \eta, \xi)$-beşlisi bir hemen hemen kontakt metrik manifolddur, [33].

Sonuç 2.60. (N, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen kontakt metrik manifoldu verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi U_1, U_2) = -g(U_1, \phi U_2), \quad \forall U_1, U_2 \in \chi(N) \tag{2.29}$$

dir, [18].

Tanım 2.61. Bir hemen hemen kontakt metrik manifold (N, ϕ, ξ, η, g) olsun. N üzerinde her U_1, U_2 vektör alanı için

$$\Phi(U_1, U_2) = g(U_1, \phi U_2) \tag{2.30}$$

ile ifade edilen

$$\Phi : \chi(N) \times \chi(N) \to C^\infty(N, \mathbb{R})$$

dönüşümü N nin 2. temel formu olarak adlandırılır, [25].

(N, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen kontakt metrik manifoldunun 2. temel formu Φ

$$\eta \wedge (\Phi)^n \neq 0$$

eşitliğini sağlar. Bu durum, geometrik olarak bir hemen hemen kontakt metrik manifoldunun yönlendirilebilir olduğunu gösterir, [1].

Teorem 2.62. (N, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik manifoldunun 2. temel formu olan Φ dönüşümü anti-simetriktir. Yani,

$$\Phi(U_1, U_2) = g(U_1, \phi U_2) = -g(\phi U_1, U_2) = -\Phi(U_2, U_1)$$

olduğundan

$$\Phi(U_1, U_2) = -\Phi(U_2, U_1) \tag{2.31}$$

dir, [25].

Tanım 2.63. Φ, (N, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen kontakt metrik manifoldu üzerinde bir 2-form olmak üzere

$$\Phi = d\eta$$

eşitliği sağlanıyor ise N ye bir kontakt metrik manifold (hemen hemen Sasakian manifold) adı verilir.

ϕ tensör alanının Nijenhuis tensörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{N}(U_1, U_2) = \phi^2[U_1, U_2] + [\phi U_1, \phi U_2] - \phi[\phi U_1, U_2] - \phi[U_1, \phi U_2], \quad U_1, U_2 \in \Gamma(TN).$$

Buradaki

$$\mathbf{N}(U_1, U_2) + 2d\eta(U_1, U_2)\xi = 0$$

ise (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen kontakt metrik yapısına normaldir denir.

N manifoldu üzerindeki herhangi bir U_1, U_2 vektör alanları için

$$(\nabla_{U_1}\phi)U_2 = -g(U_1, U_2)\xi + \eta(U_2)U_1 \tag{2.32}$$

ile verilen eşitlik sağlanıyor ise normal hemen hemen kontakt metrik manifoldu Sasakian manifold olarak adlandırılır.

Ayrıca (N, ϕ, ξ, η, g) Sasakian manifoldu için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır, [17];

$$\nabla_{U_1}(\phi U_2) = (\nabla_{U_1}\phi)U_2 + \phi\nabla_{U_1}U_2, \tag{2.33}$$

$$R(\xi, U_1)U_2 = g(U_1, U_2)\xi - \eta(U_2)U_1, \tag{2.34}$$

$$\nabla_{U_1}\xi = -\phi U_1. \tag{2.35}$$

Örnek 2.64. $i = 1, \ldots, n$ olmak üzere (x^i, y^i, z), R^{2n+1} de kartezyen koordinatları belirtsin. O halde, R^{2n+1} üzerinde (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapı

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i\frac{\partial}{\partial x^i} + y_i\frac{\partial}{\partial y^i}) + z\frac{\partial}{\partial z}\right) = \sum_{i=1}^{n}(y_i\frac{\partial}{\partial x^i} - x_i\frac{\partial}{\partial y^i}),$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i\right), \qquad \xi = 2\frac{\partial}{\partial z},$$

$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i)$$

şeklinde tanımlanabilir. (ϕ, ξ, η, g) yapısı R^{2n+1} üzerinde bir Sasakian yapıdır. O halde, bu yapıyla birlikte R^{2n+1} bir Sasakian manifolddur.

3. HEMEN HEMEN KONTAKT METRİK MANİFOLDLARDA KONFORM Bİ-SLANT SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde, ξ karakteristik vektör alanı yatay olarak kabul edilmiş olup hemen hemen kontakt metrik manifoldlardan Riemann manifoldlara konform bi-slant submersiyonlar tanımlanmaktadır ve submersiyon üzerindeki distribüsyonların tamamen jeodezik olma durumları, integrallenebilirliği ve bu submersiyonun tamamen jeodezik olma durumları ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilmektedir.

Tanım 3.1. (N, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen kontakt metrik manifold ve (B, g') bir Riemann manifold olsun. $\pi : N \to B$ bir yatay konform submersiyonu olsun. $\mathcal{D}_1$ ve $\mathcal{D}_2$, $çek\pi_* = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ olacak şekilde sırasıyla, θ_1 ve θ_2 slant açılarına sahip iki slant distribüsyon ise konform bi-slant submersiyon olarak adlandırılır.

Örnek 3.2. R^9 üzerinde koordinat sistemi $\{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z\}$ olsun. O halde, Örnek 2.64 de tanımlanan manifolda göre $\pi : R^9 \to R^5$ dönüşümü;

$$\begin{aligned}\pi(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z) = e^{11}((\cos\alpha)x_1 - (\sin\alpha)x_2, \quad & \frac{x_3 + \sqrt{3}x_4}{2}, \\ (\sin\beta)y_1 + (\cos\beta)y_2, \quad & y_3, \quad z)\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}çek\pi_* = span\{\mathcal{V}_1 = \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathcal{V}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}), \\ \mathcal{V}_3 = \cos\beta\frac{\partial}{\partial y_1} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \mathcal{V}_4 = \frac{\partial}{\partial y_4}\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(çek\pi_*)^\perp = span\{\mathcal{H}_1 = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_3} + \sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x_4}), \\ \mathcal{H}_3 = \sin\beta\frac{\partial}{\partial y_1} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \mathcal{H}_4 = \frac{\partial}{\partial y_3}, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z}\}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}g(\phi\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_3) &= -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\beta - \alpha) \\ g(\phi\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_4) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

olup $\mathcal{D}_1 = span\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_3\}$, $\cos\theta_1 = \sin(\beta - \alpha)$ eşitliğini sağlayan θ_1 slant açısı ile bir slant distribüsyon ve $\mathcal{D}_2 = span\{\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_4\}$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$ slant açısıyla bir slant distribüsyondur. O halde, $\lambda = e^{11}$ olup π bir konform bi-slant submersiyondur.

π, (N, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik manifoldundan (B, g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon olsun. O halde, $U \in \Gamma(çek\pi_*)$ için

$$U = PU + QU \tag{3.1}$$

olur. Burada $PU \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$ ve $QU \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$ dir. Ayrıca, $U \in \Gamma(çek\pi_*)$ için

$$\phi U = \varphi U + \omega U \tag{3.2}$$

olur. Burada $\varphi U \in \Gamma(çek\pi_*)$ ve $\omega U \in \Gamma((çek\pi_*)^\perp)$ dir. Benzer olarak, $X \in \Gamma((çek\pi_*)^\perp)$ için

$$\phi X = BX + CX \tag{3.3}$$

dir. Burada BX ve CX sırasıyla ϕX in dikey ve yatay bileşenleridir.
$(çek\pi_*)^\perp$ yatay distribüsyonu,

$$(çek\pi_*)^\perp = \omega\mathcal{D}_1 \oplus \omega\mathcal{D}_2 \oplus \mu$$

olarak verilen ayrışıma sahiptir ve μ, $\omega\mathcal{D}_1 \oplus \omega\mathcal{D}_2$ nin tamamlayıcı distribüsyonudur.

Teorem 3.3. (N, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen kontakt metrik manifold ve (B, g') bir Riemann manifold olsun. $\pi : N \to B$ dönüşümünün konform bi-slant submersiyon olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{D}_i$ üzerinde tanımlı $U_i \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$ için aşağıdaki eşitliği sağlayan bir θ_i bi-slant açısı vardır;

$$\varphi^2 U_i = -(\cos^2\theta_i)U_i, \quad i = 1, 2. \tag{3.4}$$

İspat. $U_i \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$ olsun. Bu durumda

$$\cos\theta_i = \frac{|\varphi U_i|}{|\phi U_i|} \tag{3.5}$$

yazılabilir. (2.22) eşitliği kullanılarak

$$g(\varphi^2 U_i, U_i) = -g(\varphi U_i, \phi U_i)$$

elde edilir. Tanım 3.1 gereğince

$$g(\varphi^2 U_i, U_i) = -\cos^2\theta_i g(U_i, U_i)$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Bu teorem kullanılarak Sasakian manifoldu üzerinde tanımlı konform bi-slant submersiyon için aşağıdaki teoremler ve sonuçlar verilebilir.

Teorem 3.4. π, (N, ϕ, ξ, η, g) Sasakian manifoldundan (B, g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon olsun. $\mathcal{D}_1$ distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon olması için gerek ve yeter şart $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1),\ U_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$ ve $X_1 \in \Gamma\left((çek\pi_*)^\perp\right)$ için

$$\lambda^{-2} g'((\nabla\pi_*)(U_1, \omega V_1), \pi_*\omega U_2) = -g(\mathcal{T}_{U_1}\omega\varphi V_1, U_2) + g(\mathcal{T}_{U_1}\omega V_1, \varphi U_2)$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda^{-2} g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*\omega U_1, \pi_*\omega U_2) = &-\sin^2\theta_1 g([U_1, X_1], U_1) + g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega\varphi U_1, V_1\right)\\ &+ g(grad(ln\lambda), X_1) g(\omega U_1, \omega V_1)\\ &+ g(grad(ln\lambda), \omega U_1) g(X_1, \omega V_1)\\ &+ g(grad(ln\lambda), \omega V_1) g(X_1, \omega U_1) - g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega U_1, \varphi V_1\right)\end{aligned}$$

dir.

İspat. $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$ ve $U_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}g(\nabla_{U_1}V_1, U_2) &= g(\phi\nabla_{U_1}V_1, \phi U_2) + \eta(\nabla_{U_1}V_1)\eta(U_2)\\ &= g(\phi\nabla_{U_1}V_1, \phi U_2)\end{aligned}$$

elde edilir ve (3.2) eşitliği kullanıldığında

$$g(\nabla_{U_1}V_1, U_2) = g(\nabla_{U_1}\varphi V_1, \phi U_2) + g(\nabla_{U_1}\omega V_1, \phi U_2)$$

bulunur. (2.29) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{U_1}V_1, U_2) &= -g(\phi\nabla_{U_1}\varphi V_1, U_2) + g(\nabla_{U_1}\omega V_1, \phi U_2)\\
&= -g(\nabla_{U_1}\phi\varphi V_1, U_2) + g(\nabla_{U_1}\omega V_1, \phi U_2)\\
&= -g(\nabla_{U_1}\varphi^2 V_1, U_2) - g(\nabla_{U_1}\omega\varphi V_1, U_2) + g(\nabla_{U_1}\omega V_1, \phi U_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4) eşitliği kullanıldığında

$$g(\nabla_{U_1}V_1, U_2) = \cos^2\theta_1 g(\nabla_{U_1}V_1, U_2) - g(\nabla_{U_1}\omega\varphi V_1, U_2) + g(\nabla_{U_1}\omega V_1, \phi U_2)$$

bulunur. Burada (2.13) ve (2.2) eşitliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta_1 g(\nabla_{U_1}V_1, U_2) &= -g(\mathcal{T}_{U_1}\omega\varphi V_1, U_2) + g(\mathcal{T}_{U_1}\omega V_1, \varphi U_2)\\
&\quad - \lambda^{-2}g'(\nabla\pi_*(\omega V_1, U_1), \pi_*\omega U_2)
\end{aligned}$$

elde edilerek ilk denklemin ispatı tamamlanmış olur. İkinci denklem ise $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$ ve $X_1 \in \Gamma\left((çek\pi_*)^\perp\right)$ için

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{U_1}V_1, X_1) &= -g([U_1, X_1], V_1) - g(\nabla_{X_1}U_1, V_1)\\
&= -g([U_1, X_1], V_1) + g(\nabla_{X_1}\phi\varphi U_1, V_1) - g(\nabla_{X_1}\omega U_1, \phi V_1)
\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 3.3 ve Lemma 2.55 den yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta_1 g(\nabla_{U_1}V_1, X_1) &= -\sin^2\theta_1 g([U_1, X_1], U_1) + g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega\varphi U_1, V_1\right) - g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega U_1, \varphi V_1\right)\\
&\quad - \lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*\omega U_1, \pi_*\omega V_1) + g(grad(ln\lambda), X_1)g(\omega U_1, \omega V_1)\\
&\quad + g(grad(ln\lambda), \omega U_1)g(X_1, \omega V_1) + g(grad(ln\lambda), \omega V_1)g(X_1, \omega U_1)
\end{aligned}$$

olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5. π, (N, ϕ, ξ, η, g) Sasakian manifoldundan (B, g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon olsun. $\mathcal{D}_2$ distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon olması için gerek ve yeter şart $U_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1),\ U_2, V_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$ ve $X_1 \in \Gamma\left((çek\pi_*)^\perp\right)$ için

$$\lambda^{-2}g'((\nabla\pi_*)(U_2, \omega V_2), \pi_*\omega U_1) = -g(\mathcal{T}_{U_2}\omega\varphi V_2, U_1) + g(\mathcal{T}_{U_2}\omega V_2, \varphi U_1)$$

ve

$$
\begin{aligned}
\lambda^{-2} g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*\omega U_2, \pi_*\omega V_2) = &-\sin^2\theta_2 g([U_2,V_2],U_2) + g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega\varphi U_2, V_2\right)\\
&+ g(grad(ln\lambda), X_1) g(\omega U_2, \omega V_2)\\
&+ g(grad(ln\lambda), \omega U_2) g(X_1, \omega V_2)\\
&+ g(grad(ln\lambda), \omega V_2) g(X_1, \omega U_2) - g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega U_2, \varphi V_2\right)
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. $U_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$ ve $U_2, V_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$ olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{U_2}V_2, U_1) &= g(\phi\nabla_{U_2}V_2, \phi U_1) + \eta(\nabla_{U_2}V_2)\eta(U_1)\\
&= g(\phi\nabla_{U_2}V_2, \phi U_1)\\
&= g(\nabla_{U_2}\varphi V_2, \phi U_1) + g(\nabla_{U_2}\omega V_2, \phi U_1)
\end{aligned}
$$

bulunur ve (2.29) eşitliğinden yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{U_2}V_2, U_1) &= -g(\phi\nabla_{U_2}\varphi V_2, U_1) + g(\nabla_{U_2}\omega V_2, \phi U_1)\\
&= -g(\nabla_{U_2}\varphi^2 V_2, U_1) - g(\nabla_{U_2}\omega\varphi V_2, U_1) + g(\nabla_{U_2}\omega V_2, \phi U_1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.4) eşitliği kullanılır ise

$$
g(\nabla_{U_2}V_2, U_1) = \cos^2\theta_2 g(\nabla_{U_2}V_2, U_1) - g(\nabla_{U_2}\omega\varphi V_2, U_1) + g(\nabla_{U_2}\omega V_2, \phi U_1)
$$

olur. Burada (2.13) ve (2.2) eşitlikleri kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta_2 g(\nabla_{U_2}V_2, U_1) = &-g(\mathcal{T}_{U_2}\omega\varphi V_2, U_1) + g(\mathcal{T}_{U_2}\omega V_2, \varphi U_1)\\
&- \lambda^{-2} g'(\nabla\pi_*(\omega V_2, U_2), \pi_*\omega U_1)
\end{aligned}
$$

bulunur ve ilk denklemin ispatı tamamlanmış olur. İkinci denklem ise $U_2, V_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$ ve $X_1 \in \Gamma\left((çek\pi_*)^{\perp}\right)$ için

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{U_2}V_2, X_1) &= -g([U_2, X_1], V_2) - g(\nabla_{X_1}U_2, V_2)\\
&= -g([U_2, X_1], V_2) + g(\nabla_{X_1}\phi\varphi U_2, V_2) - g(\nabla_{X_1}\omega U_2, \phi V_2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Teorem 3.3 ve Lemma 2.55 den yararlanılarak

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_2 g(\nabla_{U_2}V_2,X_1) &= -\sin^2\theta_2 g([U_2,V_2],U_2) + g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega\varphi U_2,V_2\right) - g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega U_2,\varphi V_2\right)\\ &\quad - \lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*\omega U_2,\pi_*\omega V_2) + g(grad(ln\lambda),X_1)g(\omega U_2,\omega V_2)\\ &\quad + g(grad(ln\lambda),\omega U_2)g(X_1,\omega V_2) + g(grad(ln\lambda),\omega V_2)g(X_1,\omega U_2)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6. π, (N,ϕ,ξ,η,g) Sasakian manifoldundan (B,g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon olsun. $(çek\pi_*)^{\perp}$ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X_1,X_2\in\Gamma\left((çek\pi_*)^{\perp}\right)$, $U_1\in\Gamma\left(\mathcal{D}_1\right)$ ve $U_2\in\Gamma\left(\mathcal{D}_2\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*CX_2,\pi_*\omega U_1) &= g\left(\left[X_1,X_2\right],\omega\varphi U_1\right) - g\left(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_1\right)\\ &\quad + g\left(\mathcal{A}_{X_2}BX_1,\omega U_1\right) - \eta(X_2)g\left(X_1,\phi U_1\right)\\ &\quad + \eta(X_1)g\left(X_2,\phi U_1\right) + \lambda^{-2}g'\left(\nabla^{\pi}_{X_2}\pi_*CX_1,\pi_*\omega U_1\right)\\ &\quad + g\left(grad\ln\lambda,CX_2\right)g\left(X_1,\omega U_1\right)\\ &\quad - g\left(grad\ln\lambda,CX_1\right)g\left(X_2,\omega U_1\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*CX_2,\pi_*\omega U_2) &= g\left(\left[X_1,X_2\right],\omega\varphi U_2\right) - g\left(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_2\right)\\ &\quad + g\left(\mathcal{A}_{X_2}BX_1,\omega U_2\right) - \eta(X_2)g\left(X_1,\phi U_2\right)\\ &\quad + \eta(X_1)g\left(X_2,\phi U_2\right) + \lambda^{-2}g'\left(\nabla^{\pi}_{X_2}\pi_*CX_1,\pi_*\omega U_2\right)\\ &\quad + g\left(grad\ln\lambda,CX_2\right)g\left(X_1,\omega U_2\right)\\ &\quad - g\left(grad\ln\lambda,CX_1\right)g\left(X_2,\omega U_2\right)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $X_1,X_2\in\Gamma\left((çek\pi_*)^{\perp}\right)$ ve $U_1\in\Gamma(\mathcal{D}_1)$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}g\left(\left[X_1,X_2\right],U_1\right) &= g\left(\nabla_{X_1}X_2,U_1\right) - g\left(\nabla_{X_2}X_1,U_1\right)\\ &= g\left(\phi\nabla_{X_1}X_2,\phi U_1\right) - g\left(\phi\nabla_{X_2}X_1,\phi U_1\right)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) eşitliği kullanılır ise

$$\begin{aligned}
g\left([X_1, X_2], U_1\right) &= g\left(\nabla_{X_1}\phi X_2, \varphi U_1\right) + g\left(\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega U_1\right) - g\left(\nabla_{X_2}\phi X_1, \varphi U_1\right) \\
&- g\left(\nabla_{X_2}\phi X_1, \omega U_1\right) + \eta(X_2) g\left(X_1, \phi U_1\right) - \eta(X_1) g\left(X_2, \phi U_1\right) \\
&= g\left(\phi\nabla_{X_1}\phi X_2, \phi\varphi U_1\right) + g\left(\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega U_1\right) - g\left(\phi\nabla_{X_2}\phi X_1, \phi\varphi U_1\right) \\
&- g\left(\nabla_{X_2}\phi X_1, \omega U_1\right) + \eta(X_2) g\left(X_1, \phi U_1\right) - \eta(X_1) g\left(X_2, \phi U_1\right) \\
&= g\left(\nabla_{X_1}\phi^2 X_2, \phi\varphi U_1\right) + g\left(\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega U_1\right) - g\left(\nabla_{X_2}\phi^2 X_1, \phi\varphi U_1\right) \\
&- g\left(\nabla_{X_2}\phi X_1, \omega U_1\right) + \eta(X_2) g\left(X_1, \phi U_1\right) - \eta(X_1) g\left(X_2, \phi U_1\right)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.22) ve (2.25) eşitlikleri dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
g\left([X_1, X_2], U_1\right) &= -g\left(\nabla_{X_1} X_2, \varphi^2 U_1\right) - g\left(\nabla_{X_1} X_2, \omega\varphi U_1\right) + g\left(\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega U_1\right) \\
&+ g\left(\nabla_{X_2} X_1, \varphi^2 U_1\right) + g\left(\nabla_{X_2} X_1, \omega\varphi U_1\right) - g(\nabla_{X_2}\phi X_1, \omega U_1) \\
&+ \eta(X_2) g\left(X_1, \phi U_1\right) - \eta(X_1) g\left(X_2, \phi U_1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
g\left([X_1, X_2], U_1\right) &= \cos^2\theta_1 g\left([X_1, X_2], U_1\right) - g\left(\nabla_{X_1} X_2, \omega\varphi U_1\right) \\
&+ g\left(\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega U_1\right) + \eta(X_2) g\left(X_1, \phi U_1\right) \\
&+ g\left(\nabla_{X_2} X_1, \omega\varphi U_1\right) - g\left(\nabla_{X_2}\phi X_1, \omega U_1\right) \\
&- \eta(X_1) g\left(X_2, \phi U_1\right)
\end{aligned}$$

olur ve (3.3) den yararlanılarak bu eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta_1 g\left([X_1, X_2], U_1\right) &= -g\left([X_1, X_2], \omega\varphi U_1\right) + g\left(\nabla_{X_1} B X_2, \omega U_1\right) \\
&+ g\left(\nabla_{X_1} C X_2, \omega U_1\right) + \eta(X_2) g\left(X_1, \phi U_1\right) \\
&- g\left(\nabla_{X_2} B X_1, \omega U_1\right) - g\left(\nabla_{X_2} C X_1, \omega U_1\right) \\
&- \eta(X_1) g\left(X_2, \phi U_1\right)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.14) ve (2.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_1 g\left([X_1,X_2],U_1\right) &= -g\left([X_1,X_2],\omega\varphi U_1\right)+g\left(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_1\right)\\ &+\lambda^{-2}g'\left(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*CX_2,\pi_*\omega U_1\right)\\ &-\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(X_1,CX_2),\pi_*\omega U_1\right)-g\left(\mathcal{A}_{X_2}BX_1,\omega U_1\right)\\ &-\lambda^{-2}g'\left(\nabla^{\pi}_{X_2}\pi_*CX_1,\pi_*\omega U_1\right)\\ &+\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(X_2,CX_1),\pi_*\omega U_1\right)+\eta(X_2)g\left(X_1,\phi U_1\right)\\ &-\eta(X_1)g\left(X_2,\phi U_1\right)\end{aligned}$$

olur. Burada Lemma 2.55 den yararlanılarak

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_1 g\left([X_1,X_2],U_1\right) &= g\left([X_1,X_2],\omega\varphi U_1\right)-g\left(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_1\right)\\ &+g\left(\mathcal{A}_{X_2}BX_1,\omega U_1\right)-\eta(X_2)g\left(X_1,\phi U_1\right)\\ &+\eta(X_1)g\left(X_2,\phi U_1\right)+\lambda^{-2}g'\left(\nabla^{\pi}_{X_2}\pi_*CX_1,\pi_*\omega U_1\right)\\ &-\lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*CX_2,\pi_*\omega U_1)+g\left(grad\ln\lambda,CX_2\right)g\left(X_1,\omega U_1\right)\\ &-g\left(grad\ln\lambda,CX_1\right)g\left(X_2,\omega U_1\right)\end{aligned}$$

şeklinde ilk denklemin ispatı tamamlanır. İkinci denklem ise $X_1,X_2\in\Gamma\left((çek\pi_*)^{\perp}\right)$ ve $U_2\in\Gamma(\mathcal{D}_2)$ için benzer işlemler uygulanarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.7. π, (N,ϕ,ξ,η,g) Sasakian manifoldundan (B,g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon ve $(çek\pi_*)^{\perp}=\omega\mathcal{D}_1\oplus\omega\mathcal{D}_2\oplus\{\xi\}$ olsun. O halde, $(çek\pi_*)^{\perp}$ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X_1,X_2\in\Gamma\left((çek\pi_*)^{\perp}\right)$, $U_1\in\Gamma\left(\mathcal{D}_1\right)$ ve $U_2\in\Gamma\left(\mathcal{D}_2\right)$ için

$$\begin{aligned}g([X_1,X_2],\omega\varphi U_1) &= g(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_1)-g(\mathcal{A}_{X_2}BX_1,\omega U_1)+\eta(X_2)g(X_1,\phi U_1)\\ &-\eta(X_1)g(X_2,\phi U_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}g([X_1,X_2],\omega\varphi U_2) &= g(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_2)-g(\mathcal{A}_{X_2}BX_1,\omega U_2)+\eta(X_2)g(X_1,\phi U_2)\\ &-\eta(X_1)g(X_2,\phi U_2)\end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat. $X_1, X_2 \in \Gamma((çek\pi_*)^\perp)$ ve $U_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$ için Teorem 3.6 daki ifadede $(çek\pi_*)^\perp = \omega\mathcal{D}_1 \oplus \omega\mathcal{D}_2 \oplus \{\xi\}$ eşitliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_1 g([X_1,X_2],U_1) &= -g([X_1,X_2],\omega\varphi U_1) + g(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_1)\\ &\quad - g(\mathcal{A}_{X_2}BX_1,\omega U_1) + \eta(X_2)g(X_1,\phi U_1) - \eta(X_1)g(X_2,\phi U_1)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $(çek\pi_*)^\perp$ in integrallenebilirliği göz önünde alındığında ilk denklem elde edilmiş olur. $X_1, X_2 \in \Gamma((çek\pi_*)^\perp)$ ve $U_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$ için benzer işlemler uygulandığında ikinci denklem elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.8. π, (N,ϕ,ξ,η,g) Sasakian manifoldundan (B,g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon olsun. $(çek\pi_*)^\perp$ in tamamen jeodezik foliasyon olması için gerek ve yeter şart $X_1, X_2 \in \Gamma((çek\pi_*)^\perp)$, $U_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$ ve $U_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\lambda^{-2}g'(\nabla^\pi_{X_1}\pi_*X_2,\pi_*\omega\varphi U_1) &= \lambda^{-2}g'(\nabla^\pi_{X_1}\pi_*CX_2,\pi_*\omega U_1)\\ &\quad + g(grad\ln\lambda,X_1)g(X_2,\omega\varphi U_1)\\ &\quad + g(grad\ln\lambda,X_2)g(X_1,\omega\varphi U_1)\\ &\quad + \sin^2\theta_1\eta(X_2)g(X_1,\phi U_1)\\ &\quad - g(X_1,X_2)g(grad\ln\lambda,\omega\varphi U_1)\\ &\quad + g(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_1)\\ &\quad - g(grad\ln\lambda,CX_2)g(X_1,\omega U_1)\\ &\quad + g(X_1,CX_2)g(grad\ln\lambda,\omega U_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda^{-2}g'(\nabla^\pi_{X_1}\pi_*X_2,\pi_*\omega\varphi U_2) &= \lambda^{-2}g'(\nabla^\pi_{X_1}\pi_*CX_2,\pi_*\omega U_2)\\ &\quad + g(grad\ln\lambda,X_1)g(X_2,\omega\varphi U_2)\\ &\quad + g(grad\ln\lambda,X_2)g(X_1,\omega\varphi U_2)\\ &\quad + \sin^2\theta_2\eta(X_2)g(X_1,\phi U_2)\\ &\quad - g(X_1,X_2)g(grad\ln\lambda,\omega\varphi U_2)\\ &\quad + g(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_2)\\ &\quad - g(grad\ln\lambda,CX_2)g(X_1,\omega U_2)\\ &\quad + g(X_1,CX_2)g(grad\ln\lambda,\omega U_2)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $X_1, X_2 \in \Gamma\left((çek\pi_*)^{\perp}\right)$ ve $U_1 \in \Gamma\left(\mathcal{D}_1\right)$ olsun. O halde (2.32), (2.33) ve (3.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{X_1}X_2, U_1) &= g(\phi\nabla_{X_1}X_2, \phi U_1) \\
&= g(\nabla_{X_1}\phi X_2 - g(X_1, X_2)\xi + \eta(X_2)X_1, \phi U_1) \\
&= g(\nabla_{X_1}\phi X_2, \phi U_1) + \eta(X_2)g(X_1, \phi U_1) \\
&= g(\nabla_{X_1}\phi X_2, \varphi U_1) + g(\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega U_1) + \eta(X_2)g(X_1, \phi U_1) \\
&= g(\phi\nabla_{X_1}\phi X_2, \phi\varphi U_1) + g(\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega U_1) + \eta(X_2)g(X_1, \phi U_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{X_1}X_2, U_1) &= g(\phi\nabla_{X_1}\phi X_2, \varphi^2 U_1) + g(\phi\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega\varphi U_1) + g(\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega U_1) \\
&\quad + \eta(X_2)g(X_1, \phi U_1)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.4) eşitliği, son eşitliğe uygulandığında

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{X_1}X_2, U_1) &= \cos^2\theta_1 g(\nabla_{X_1}X_2, U_1) + \cos^2\theta_1\eta(X_2)g(\phi X_1, U_1) \\
&\quad + g(\phi\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega\varphi U_1) + g(\nabla_{X_1}\phi X_2, \omega U_1) + \eta(X_2)g(X_1, \phi U_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.15) ve (2.25) eşitlikleri kullanılır ise

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta_1 g(\nabla_{X_1}X_2, U_1) &= -g(\mathcal{H}\nabla_{X_1}X_2, \omega\varphi U_1) + g(\mathcal{A}_{X_1}BX_2, \omega U_1) \\
&\quad + g(\mathcal{H}\nabla_{X_1}CX_2, \omega U_1) + \sin^2\theta_1\eta(X_2)g(X_1, \phi U_1)
\end{aligned}$$

bulunur ve Lemma 2.55 den yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta_1 g(\nabla_{X_1}X_2, U_1) &= -\lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*X_2, \pi_*\omega\varphi U_1) + \lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*CX_2, \pi_*\omega U_1) \\
&\quad + g(grad\ln\lambda, X_1)g(X_2, \omega\varphi U_1) + \sin^2\theta_1\eta(X_2)g\left(X_1, \phi U_1\right) \\
&\quad + g(grad\ln\lambda, X_2)g(X_1, \omega\varphi U_1) + g(\mathcal{A}_{X_1}BX_2, \omega U_1) \\
&\quad - g(X_1, X_2)g(grad\ln\lambda, \omega\varphi U_1) \\
&\quad - g(grad\ln\lambda, CX_2)g(X_1, \omega U_1) \\
&\quad + g(X_1, CX_2)g(grad\ln\lambda, \omega U_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. $(çek\pi_*)^\perp$ in tamamen jeodezik olduğu dikkate alınarak teoremdeki ilk denklem elde edilir. İkinci denklem ise $X_1, X_2 \in \Gamma\left((çek\pi_*)^\perp\right)$ ve $U_2 \in \Gamma\left(\mathcal{D}_2\right)$ için benzer işlemler yapıldığında ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.9. π, (N, ϕ, ξ, η, g) Sasakian manifoldundan (B, g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon ve $(çek\pi_*)^\perp = \omega\mathcal{D}_1 \oplus \omega\mathcal{D}_2 \oplus \{\xi\}$ olsun. O halde, $(çek\pi_*)^\perp$ in tamamen jeodezik foliasyon olması için gerek ve yeter şart $X_1, X_2 \in \Gamma\left((çek\pi_*)^\perp\right)$, $U_1 \in \Gamma\left(\mathcal{D}_1\right)$ ve $U_2 \in \Gamma\left(\mathcal{D}_2\right)$ için

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} g'(\nabla^\pi_{X_1} \pi_* X_2, \pi_* \omega\varphi U_1) &= g(\mathcal{A}_{X_1} B X_2, \omega U_1) + g\left(grad \ln\lambda, X_1\right) g\left(X_2, \omega\varphi U_1\right) \\
&+ g\left(grad \ln\lambda, X_2\right) g\left(X_1, \omega\varphi U_1\right) \\
&+ \sin^2\theta_1 \eta(X_2) g(X_1, \phi U_1) \\
&- g(X_1, X_2) g(gradln\lambda, \omega\varphi U_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} g'(\nabla^\pi_{X_1} \pi_* X_2, \pi_* \omega\varphi U_2) &= g(\mathcal{A}_{X_1} B X_2, \omega U_2) + g\left(grad \ln\lambda, X_1\right) g\left(X_2, \omega\varphi U_2\right) \\
&+ g\left(grad \ln\lambda, X_2\right) g\left(X_1, \omega\varphi U_2\right) \\
&+ \sin^2\theta_2 \eta(X_2) g(X_1, \phi U_2) \\
&- g(X_1, X_2) g(gradln\lambda, \omega\varphi U_2)
\end{aligned}$$

olur.

İspat. $X_1, X_2 \in \Gamma\left((çek\pi_*)^\perp\right)$ ve $U_1 \in \Gamma\left(\mathcal{D}_1\right)$ için Teorem 3.8 deki ifadede $(çek\pi_*)^\perp = \omega\mathcal{D}_1 \oplus \omega\mathcal{D}_2 \oplus \{\xi\}$ eşitliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta_1 g(\nabla_{X_1} X_2, U_1) &= -g(\nabla_{X_1} X_2, \omega\varphi U_1) + g(\mathcal{A}_{X_1} B X_2, \omega U_1) \\
&+ \sin^2\theta_1 \eta(X_2) g(X_1, \phi U_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.55 den

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta_1 g(\nabla_{X_1}X_2,U_1) &= -\lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*X_2,\pi_*\omega\varphi U_1)\\
&+ g(grad\ln\lambda,X_1)g(X_2,\omega\varphi U_1)+\sin^2\theta_1\eta(X_2)g\left(X_1,\phi U_1\right)\\
&+ g(grad\ln\lambda,X_2)g(X_1,\omega\varphi U_1)+g(\mathcal{A}_{X_1}BX_2,\omega U_1)\\
&- g(X_1,X_2)g(grad\ln\lambda,\omega\varphi U_1)
\end{aligned}$$

bulunur. $(\text{ç}ek\pi_*)^{\perp}$ in tamamen jeodezik olduğu dikkate alınarak teoremdeki ilk denklem elde edilir. İkinci denklem ise $X_1,X_2\in\Gamma\left((\text{ç}ek\pi_*)^{\perp}\right)$ ve $U_2\in\Gamma(\mathcal{D}_2)$ için benzer işlemler uygulanarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.10. π, (N,ϕ,ξ,η,g) Sasakian manifoldundan (B,g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon olsun. $(\text{ç}ek\pi_*)$ ın tamamen jeodezik foliasyon olması için gerek ve yeter şart $U_1,U_2\in\Gamma\left(\text{ç}ek\pi_*\right)$ ve $X_1\in\Gamma((\text{ç}ek\pi_*)^{\perp})$ için

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{\omega U_2}\pi_*\omega U_1,\pi_*X_1) &= (\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2)g(\mathcal{T}_{U_1}X_1,QU_2)+g(\mathcal{T}_{U_1}X_1,\omega\varphi U_2)\\
&+ g([U_1,\omega U_2],BX_1)+g\left(grad\ln\lambda,\omega U_1\right)g\left(\omega U_2,X_1\right)\\
&- g(\mathcal{A}_{\omega U_2}\varphi U_1,X_1)+g(grad\ln\lambda,\omega U_2)g\left(\omega U_1,X_1\right)\\
&- g\left(\omega U_1,\omega U_2\right)g\left(grad\ln\lambda,X_1\right)
\end{aligned}$$

dir.

İspat. $U_1,U_2\in\Gamma\left(\text{ç}ek\pi_*\right)$ ve $X_1\in\Gamma((\text{ç}ek\pi_*)^{\perp})$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{U_1}U_2,X_1) &= -g(\nabla_{U_1}X_1,U_2)\\
&= -g(\phi\nabla_{U_1}X_1,\phi U_2)
\end{aligned}$$

olur. (2.32) ve (2.33) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{U_1}U_2,X_1) &= -g(\nabla_{U_1}\phi X_1-g(U_1,X_1)\xi+\eta(X_1)U_1,\phi U_2)\\
&= -g(\nabla_{U_1}\phi X_1,\phi U_2)-\eta(X_1)g(U_1,\phi U_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\phi U_2 = \varphi U_2 + \omega U_2$ ifadesi kullanılır ise

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{U_1} U_2, X_1) &= -g(\nabla_{U_1} \phi X_1, \varphi U_2) - g(\nabla_{U_1} \phi X_1, \omega U_2) - \eta(X_1) g\left(U_1, \phi U_2\right) \\
&= -g(\phi \nabla_{U_1} \phi X_1, \phi \varphi U_2) - g(\nabla_{U_1} \phi X_1, \omega U_2) - \eta(X_1) g\left(U_1, \phi U_2\right)
\end{aligned}
$$

bulunur ve eşitlik düzenlenir ise

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{U_1} U_2, X_1) &= -g(\nabla_{U_1} \phi^2 X_1 - g(U_1, \phi X_1)\xi - \eta(U_1)\phi X_1, \phi \varphi U_2) \\
&\quad - g(\nabla_{U_1} \phi X_1, \omega U_2) - \eta(X_1) g\left(U_1, \phi U_2\right) \\
&= -g(\nabla_{U_1} \phi^2 X_1, \phi \varphi U_2) - g(\nabla_{U_1} \phi X_1, \omega U_2) - \eta(X_1) g\left(U_1, \phi U_2\right)
\end{aligned}
$$

bulunur ve (2.22) eşitliği uygulandığında

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{U_1} U_2, X_1) &= -g(\nabla_{U_1} X_1, \phi \varphi U_2) - \eta(X_1) g\left(\nabla_{U_1} \xi, \phi \varphi U_2\right) - g(\nabla_{U_1} \phi X_1, \omega U_2) \\
&\quad - \eta(X_1) g\left(U_1, \phi U_2\right)
\end{aligned}
$$

olur. Burada $\nabla_{U_1} \xi = -\phi U_1$ eşitliğinden yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{U_1} U_2, X_1) &= g(\nabla_{U_1} X_1, \phi \varphi U_2) - g(\nabla_{U_1} \phi X_1, \omega U_2) \\
&= g(\nabla_{U_1} X_1, \varphi^2 U_2) + g(\nabla_{U_1} X_1, \omega \varphi U_2) - g(\nabla_{U_1} \phi X_1, \omega U_2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $U_2 = PU_2 + QU_2$ ve (3.4) eşitlikleri kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{U_1} U_2, X_1) &= \cos^2 \theta_1 g\left(\nabla_{U_1} X_1, PU_2\right) - \cos^2 \theta_2 g\left(\nabla_{U_1} X_1, QU_2\right) \\
&\quad + g\left(\nabla_{U_1} X_1, \omega \varphi U_2\right) - g\left(\nabla_{U_1} \phi X_1, \omega U_2\right)
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
\sin^2 \theta_1 g(\nabla_{U_1} U_2, X_1) &= \left(\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2\right) g\left(\nabla_{U_1} X_1, QU_2\right) + g\left(\nabla_{U_1} X_1, \omega \varphi U_2\right) \\
&\quad - g\left(\nabla_{U_1} BX_1, \omega U_2\right) - g\left(\nabla_{U_1} CX_1, \omega U_2\right)
\end{aligned}
$$

olur. Lemma 2.55 den yararlanıldığında

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta_1 g(\nabla_{U_1}U_2, X_1) &= -\lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{\omega U_2}\pi_*\omega U_1, \pi_* X_1) \\
&+ (\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2) g(\nabla_{U_1}X_1, QU_2) + g(\nabla_{U_1}X_1, \omega\varphi U_2) \\
&+ g([U_1, \omega U_2], BX_1) - g(\nabla_{\omega U_2}\varphi U_1, X_1) \\
&+ g\left(grad \ln\lambda, \omega U_1\right) g\left(\omega U_2, X_1\right) \\
&+ g(grad \ln\lambda, \omega U_2) g\left(\omega U_1, X_1\right) \\
&- g\left(\omega U_1, \omega U_2\right) g\left(grad \ln\lambda, X_1\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada, (2.13) ve (2.14) eşitlikleri kullanılır ise

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta_1 g(\nabla_{U_1}U_2, X_1) &= -\lambda^{-2}g'(\nabla^{\pi}_{\omega U_2}\pi_*\omega U_1, \pi_* X_1) \\
&+ (\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2) g(\mathcal{T}_{U_1}X_1, QU_2) + g(\mathcal{T}_{U_1}X_1, \omega\varphi U_2) \\
&+ g([U_1, \omega U_2], BX_1) - g(\mathcal{A}_{\omega U_2}\varphi U_1, X_1) \\
&+ g\left(grad \ln\lambda, \omega U_1\right) g\left(\omega U_2, X_1\right) \\
&+ g(grad \ln\lambda, \omega U_2) g\left(\omega U_1, X_1\right) \\
&- g\left(\omega U_1, \omega U_2\right) g\left(grad \ln\lambda, X_1\right)
\end{aligned}
$$

olup istenilen denklem elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.11. π, (N, ϕ, ξ, η, g) Sasakian manifoldundan (B, g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon olsun. π nin tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $U_1, U_2 \in \Gamma(çek\pi_*)$ ve $X_1, X_2 \in \Gamma((çek\pi_*)^{\perp})$ için

$$
\begin{aligned}
\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1, \omega\varphi U_2), \pi_* X_1\right) &= \left(\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2\right) g\left(\mathcal{T}_{U_1}QU_2, X_1\right) \\
&- g\left(\mathcal{T}_{U_1}\omega U_2, BX_1\right) + \lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1, \omega U_2), \pi_* CX_1\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 g'\left(\nabla^{\pi}_{X_1}\pi_*\omega U_1, \pi_* CX_2\right) &= -g\left(\mathcal{A}_{X_1}\varphi U_1, CX_2\right) - g\left(\mathcal{V}\nabla_{X_1}\varphi U_1, BX_2\right) \\
&- g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega U_1, BX_2\right) + g\left(grad \ln\lambda, \omega U_1\right) g\left(X_1, CX_2\right) \\
&- g\left(U_1, \phi X_1\right)\eta(X_2) - g\left(X_1, \omega U_1\right) g\left(grad \ln\lambda, CX_2\right)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $U_1, U_2 \in \Gamma(\c{c}ek\pi_*)$ ve $X_1 \in \Gamma((\c{c}ek\pi_*)^\perp)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} g'\left(\nabla \pi_*(U_1, U_2), \pi_* X_1\right) &= -g\left(\nabla_{U_1} U_2, X_1\right) \\
&= -g\left(\phi \nabla_{U_1} U_2, \phi X_1\right) - \eta(\nabla_{U_1} U_2)\eta(X_1) \\
&= -g\left(\phi \nabla_{U_1} U_2, \phi X_1\right) - g\left(U_2, \phi U_1\right)\eta(X_1)
\end{aligned}$$

olur. (2.32), (2.33) ve (2.35) eşitlikleri bu son eşitliğe uygulanır ise

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} g'\left(\nabla \pi_*(U_1, U_2), \pi_* X_1\right) &= -g\left(\nabla_{U_1} \phi U_2 - g(U_1, U_2)\xi + \eta(U_2)U_1, \phi X_1\right) \\
&\quad - g\left(U_2, \phi U_1\right)\eta(X_1) \\
&= -g\left(\nabla_{U_1} \phi U_2, \phi X_1\right) - g\left(U_2, \phi U_1\right)\eta(X_1)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.2) eşitliği kullanılır ise

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} g'\left(\nabla \pi_*(U_1, U_2), \pi_* X_1\right) &= -g\left(\nabla_{U_1} \varphi U_2, \phi X_1\right) - g\left(\nabla_{U_1} \omega U_2, \phi X_1\right) \\
&\quad - g\left(U_2, \phi U_1\right)\eta(X_1)
\end{aligned}$$

elde edilir ve (2.28) eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} g'\left(\nabla \pi_*(U_1, U_2), \pi_* X_1\right) &= -g\left(\phi \nabla_{U_1} \varphi U_2, \phi^2 X_1\right) - \eta(\nabla_{U_1} \varphi U_2)\eta(\phi U_2) \\
&\quad - g\left(\nabla_{U_1} \omega U_2, \phi X_1\right) - g\left(U_2, \phi U_1\right)\eta(X_1)
\end{aligned}$$

dir. (2.25) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} g'\left(\nabla \pi_*(U_1, U_2), \pi_* X_1\right) &= -g(\phi \nabla_{U_1} \varphi U_2, X_1) - g\left(\nabla_{U_1} \omega U_2, \phi X_1\right) \\
&\quad - g\left(U_2, \phi U_1\right)\eta(X_1) \\
&= g\left(\nabla_{U_1} \varphi^2 U_2, X_1\right) + \left(\nabla_{U_1} \omega \varphi U_2, X_1\right) \\
&\quad - g\left(\nabla_{U_1} \omega U_2, \phi X_1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $U_2 = PU_2 + QU_2$ ve (3.4) eşitlikleri göz önüne alınır ise

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} g'\left(\nabla \pi_*(U_1, U_2), \pi_* X_1\right) &= -\cos^2\theta_1 g\left(\nabla_{U_1} U_2, X_1\right) \\
&\quad + (\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2) g\left(\nabla_{U_1} Q U_2, X_1\right) \\
&\quad + g\left(\nabla_{U_1} \omega \varphi U_2, X_1\right) - g\left(\nabla_{U_1} \omega U_2, \varphi X_1\right)
\end{aligned}$$

olup eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_1\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1,U_2),\pi_*X_1\right) &= \left(\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2\right)g\left(\nabla_{U_1}QU_2,X_1\right)\\ &+ g\left(\nabla_{U_1}\omega\varphi U_2,X_1\right)-g\left(\nabla_{U_1}\omega U_2,\phi X_1\right)\end{aligned}$$

elde edilir. (2.12) ve (2.13) eşitlikleri ile Lemma 2.55 den yararlanılarak

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_1\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1,U_2),\pi_*X_1\right) &= \left(\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2\right)g\left(\mathcal{T}_{U_1}QU_2,X_1\right)\\ &- g\left(\mathcal{T}_{U_1}\omega U_2,BX_1\right)\\ &- \lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1,\omega\varphi U_2),\pi_*X_1\right)\\ &+ \lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1,\omega U_2),\pi_*CX_1\right)\end{aligned}$$

elde edilip ilk denklemin ispatı tamamlanır. İkinci denklem ise $U_1\in\Gamma(çek\pi_*)$ ve $X_1,X_2\in\Gamma((çek\pi_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned}\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1,X_1),\pi_*X_2\right) &= -g\left(\nabla_{U_1}X_1,X_2\right)\\ &= -g\left(\phi\nabla_{X_1}U_1,\phi X_2\right)-\eta(\nabla_{X_1}U_1)\eta(X_2)\\ &= -g\left(\nabla_{X_1}\phi U_1-g(X_1,U_1)\xi+\eta(U_1)X_1,\phi X_2\right)\\ &- g\left(U_1,\phi X_1\right)\eta(X_2)\\ &= -g\left(\nabla_{X_1}\varphi U_1,\phi X_2\right)-g\left(\nabla_{X_1}\omega U_1,\phi X_2\right)\\ &- g\left(U_1,\phi X_1\right)\eta(X_2)\end{aligned}$$

bulunur. (2.14) ve (2.15) eşitlikleri ile Lemma 2.55 den yararlanılarak

$$\begin{aligned}\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1,X_1),\pi_*X_2\right) &= -g\left(\mathcal{A}_{X_1}\varphi U_1,CX_2\right)-g\left(\mathcal{V}\nabla_{X_1}\varphi U_1,BX_2\right)\\ &- g\left(\mathcal{A}_{X_1}\omega U_1,BX_2\right)-\lambda^2g'\left(\nabla^\pi_{X_1}\pi_*\omega U_1,\pi_*CX_2\right)\\ &+ g\left(grad\ln\lambda,\omega U_1\right)g\left(X_1,CX_2\right)\\ &- g\left(X_1,\omega U_1\right)g\left(grad\ln\lambda,CX_2\right)-g\left(U_1,\phi X_1\right)\eta(X_2)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.12. π, (N,ϕ,ξ,η,g) Sasakian manifoldundan (B,g') Riemann manifolduna bir konform bi-slant submersiyon ve $(çek\pi_*)^\perp=\omega\mathcal{D}_1\oplus\omega\mathcal{D}_2\oplus\{\xi\}$ olsun. O halde, π nin tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $U_1,U_2\in\Gamma(çek\pi_*)$ ve $X_1,X_2\in\Gamma((çek\pi_*)^\perp)$

için

$$\lambda^{-2}g'(\nabla\pi_*(U_1,\omega\varphi U_2),\pi_*X_1)=(\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2)g(\mathcal{T}_{U_1}QU_2,X_1)-g(\mathcal{T}_{U_1}\omega U_2,BX_1)$$

ve

$$g(\mathcal{A}_{X_1}\omega U_1,BX_2)=-g(\mathcal{V}\nabla_{X_1}\varphi U_1,BX_2)-g(U_1,\phi X_1)\eta(X_2)$$

dir.

İspat. $U_1,U_2\in\Gamma(çek\pi_*)$ ve $X_1\in\Gamma((çek\pi_*)^{\perp})$ için Teorem 3.11 deki ifadede $(çek\pi_*)^{\perp}=\omega\mathcal{D}_1\oplus\omega\mathcal{D}_2\oplus\{\xi\}$ eşitliği göz önüne alındığı zaman

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_1\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1,U_2),\pi_*X_1\right)=&\left(\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2\right)g\left(\nabla_{U_1}QU_2,X_1\right)\\&+g\left(\nabla_{U_1}\omega\varphi U_2,X_1\right)-g\left(\nabla_{U_1}\omega U_2,\phi X_1\right)\end{aligned}$$

bulunur. Burada, (2.14) ve (2.15) eşitlikleri ile Lemma 2.55 den yararlanılarak

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_1\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1,U_2),\pi_*X_1\right)=&\left(\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2\right)g\left(\mathcal{T}_{U_1}QU_2,X_1\right)\\&-g\left(\mathcal{T}_{U_1}\omega U_2,BX_1\right)-\lambda^{-2}g'\left(\nabla\pi_*(U_1,\omega\varphi U_2),\pi_*X_1\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve π nin tamamen jeodezik dönüşüm olması ile ilk denklemin ispatı tamamlanmış olur. Benzer işlemler $U_1\in\Gamma(çek\pi_*)$ ve $X_1,X_2\in\Gamma((çek\pi_*)^{\perp})$ için uygulandığı zaman ikinci denklem elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1]. A. Beri, *Hemen hemen değme manifoldlardan Riemann manifoldlar üzerine Riemann submersiyonlar*, Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, (2016).

[2]. A. Gray, *Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions*, Math. J. Mech., 16(1967), 715-737.

[3]. B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersions*, Michigan Math. J., 13(1966), 459-469.

[4]. B. O'Neill, *Semi Riemann Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[5]. B. Şahin, *CR-altmanifoldların geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, (1996).

[6]. B. Şahin, *Contact horizontally conformal submersions*, Demonstratio Mathematica. Vol. XL.II No:4,(2009).

[7]. B. Şahin, *Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds*, Central European J. Math., 8(3), (2010), 437-447.

[8]. B. Şahin, *Semi-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds*, Can. Math. Bull., 56(2011), 173-183.

[9]. B. Şahin, *Slant submersions from almost Hermitian manifolds*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 54(102), (2011), 93-105.

[10]. B. Şahin, *Manifoldların diferensiyel geometrisi*, Nobel Yayınevi, (2012).

[11]. B. Watson, *Almost Hermitian submersions*, J. Differential Geometry, 11(1), (1976), 147-165.

[12]. B. Watson, *G, G'-Riemannian submersions and nonlinear gauge eld equations of general relativity*, In: Rassias, T. (ed.) Global Analysis-Analysis on manifolds, dedicated M. Morse. Teubner-Texte Math., 57, (1983), 324-349, Teubner, Leipzig.

[13]. B.Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, New York, (1973).

[14]. C. Altafini, *Redundant robotic chains on Riemannian submersions*, 20, IEEE Transactions on Robotics and Automation, (2004), 335-340.

[15]. C. Sayar, M.A. Akyol and R. Prasad, *Bi-slant submersions in complex geometry*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 17 (2020), doi.org/10.1142/S0219887820500553.

[16]. D. Chinea, *Almost contact metric submersions*, Rend. Circ. Mat. Palermo, (1985), 34(1):89-104.

[17]. D.E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Springer, (2010).

[18]. E. Şahin, *Değme manifoldlar*, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya, (2007).

[19]. H.H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi, Fen Ed. Fak. Mat., No:2, 1982.

[20]. H.H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Cilt:1,2,3, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, (2003).

[21]. H.M. Taştan, B. Şahin and Ş. Yanan, *Hemi-slant submersions*, Mediterr. J. Math. 13(2016), 2171-2184.

[22]. J.M. Burel, *Almost contact structures and harmonic maps with minimal fibres*, Houston J. Math., 30(2), (2004), 393-411.

[23]. J.P. Bourguignon and H.B. Lawson, *Stability and isolation phenomena for Yang-mills fields*, Commun. Math. Phys. 79, (1981), 189-230.

[24]. J.P. Bourguing and H.B. Lawson, *A mathematician's visit to Kaluza-Klein theory*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Special Issue, (1989), 143-163.

[25]. K. Yano and M. Kon, *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corp., Singapore, (1984).

[26]. M.A. Akyol, *Kompleks geometride konform submersiyonlar*, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya, (2015).

[27]. M.A. Akyol and B. Şahin, *Conformal anti-invariant submersions from almost Hermitian manifolds*, Turkish J. Math., 40(2016), 4370.

[28]. M.A. Akyol and B. Şahin, *Conformal semi-invariant submersions*, Commun. Contemp. Math., 19(2017), 1650011, 22 pp.

[29]. M.A. Akyol and B. Şahin, *Conformal slant submersions*, Hacet. J. Math. Stat., 48(2019), 28-44.

[30]. M.A. Akyol and Y. Gündüzalp, *Conformal anti-invariant* $\xi^{\perp}$*-submersions*, arXiv:1707.05117v1 [Math.DG].

[31]. M. Falcitelli, S. Ianus and A.M. Pastore, *Riemannian submersions and related topics*, World Scientific Company, (2004).

[32]. M.T. Mustafa, *Applications of harmonic morphisms to gravity*, J. Math. Phys., 41, (2000), 6918-6929.

[33]. N. Yılmaz, *Kontakt Riemann submersiyonlar*, Yüksek Lisans Tezi, Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır, (2019).

[34]. P. Baird and J.C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs, No.29, Oxford University Press, The Clarendon Press, Oxford, (2003).

[35]. S. Aykurt, *Slant yüzeyler üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, (2011).

[36]. S. Aykurt Sepet, *Slant submersiyonların geometrisi*, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, (2015).

[37]. S. Gudmundsson, *The geometry of harmonic morphisms*, P.H.D. Thesis, University of Leeds, (1992).

[38]. S. Gudmundsson, *An Introduction to Riemannian Geometry*, Lectures Notes, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science, (2006).

[39]. S. Ianus and M. Visinescu, *Kaluza-Klein theory with scalar fields and generalized Hopf manifolds*, Class. Quantum Gravity 4, (1987), 1317-1325.

[40]. S. Ianus and M. Visinescu, *Space-time compactication and Riemannian submersions*, In: Rassias, G.(cd.) The Mathematical Heritage of C.F. Gauss, (1991), 358-371, World Scientific, River Edge.

[41]. Y. Gündüzalp, *Çarpım submersiyonlarının geometrisi üzerine*, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya, (2011).

[42]. Y. Gündüzalp and M.A., Akyol, *Conformal slant submersions from cosymlectic manifolds*, Turkish J. Math., 42(2018), 2672-2689.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Meltem KARAİSMAİLOĞLU
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	Türkiye Cumhuriyeti
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölüm	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü
Anabilim Dalı	Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Mezuniyet Yılı	2019

Yüksek Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Yılı	2022