T.C.

AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNDİRGENMİŞ HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

Zuhal CANPOLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2018

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNDİRGENMİŞ HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

Zuhal CANPOLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. HANDAN KÖSE

KIRŞEHİR 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı
Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Danışman
Doç. Dr. Handan KÖSE

Üye
Yrd. Doç. Dr. Nil MANSUROĞLU

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

12/03/2018

Prof. Dr. Yılmaz ALTUN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum **" İndirgenmiş Halkaların Genelleştirilmesi "** başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Zuhal CANPOLAT

ÖZET

İNDİRGENMİŞ HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Zuhal CANPOLAT

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Mart 2018

Tez özet, abstract, giriş, temel tanımlar ve üç ana başlıktan oluşmaktadır. Birinci bölüm " **Giriş** ", ikinci bölüm " **Temel Tanımlar** ", üçüncü bölüm " **Yarı İndirgenmiş Halkalar** " dördüncü bölüm " **İndirgenmiş Halkaların Genelleştirilmesi** " ve son bölüm " **Merkezi İndirgenmiş Halkalar** " şeklinde isimlendirilmiştir.

Üçüncü bölümde indirgenmiş halka kavramı verilmiş ve bu halkaların genelleştirmesi olan yarı indirgenmiş halkalar tanıtılmıştır. Bu halkaların indirgenmiş halkalar ile arasındaki ilişkiye değinilmiştir. Yarı indirgenmiş halkaların hangi koşullar altında indirgenmiş olduğu araştırılmıştır. Yarı indirgenmiş halkaların Abelyen olduğu gösterilmiş ve Abelyen halkaların yarı indirgenmiş olmadığına yönelik örnekler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde yarı indirgenmiş halka sınıfları için Köthe varsayımının doğru olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde indirgenmiş halkaların başka bir genelleştirmesi olan merkezi katı halka kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca bu bölümde indirgenmiş halka ile merkezi katı olma arasındaki ilişkiler ele alınmıştır.

Son bölümde merkezi indirgenmiş halka olarak adlandırılan halkalar tanıtılmış, indirgenmiş halka sınıfları arasındaki yeri belirlenmiştir. Ayrıca bu halkaların merkezi terslenebilir halka ve zayıf terslenebilir halka sınıfları ile ilişkilerine değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler	:	İndirgenmiş halka, Yarı indirgenmiş halka, Merkezi katı halka, Merkezi indirgenmiş halka
Tez Danışmanı	:	Doç. Dr. HANDAN KÖSE
Sayfa Adedi	:	**46**

ABSTRACT

A GENERALIZATION OF REDUCED RINGS

Master of Science Thesis

Zuhal CANPOLAT

Ahi Evran University
Institute of Science
March 2018

This thesis consists of abstract, basic concepts, introduction and three main chapters. The first main section is Quasi-reduced rings, the second main section is A generalization of reduced rings, and the third main section is Rings in which every nilpotent is central.

A ring R is usually called *reduced* if for $a \in R$, $a^2 = 0$ implies $a = 0$. This thesis is concerned with a generalization of reduced rings. A ring R *central rigid* if for $a, b \in R$, $a^2 b = 0$ implies that ab is central. Thesis contains sufficient conditions for central rigid rings to be reduced.

A ring R is Quasi-reduced if for $a, b \in R$, $ab = 0$ implies that $(aR) \cap (Rb) \subseteq C(R)$.
Thesis is divided Quasi-reduced rings as a generalization of reduced rings. It is contained basic properties of Quasi-reduced rings are establish-among them, the structure of such rings and their extensions.

Keywords	:	Reduced ring, Quasi-reduced ring, Central rigid ring Central reduced ring
Supervisor	:	Doç. Dr. Handan KÖSE
Number of Pages	:	**46**

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezimde çalışmalarım boyunca araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Handan KÖSE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olup bu kadar güvendikleri için değerli aileme en derin duygularımla teşekkür ederim.

Zuhal CANPOLAT

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	: Birimli ve birleşmeli halka
C(R)	: R halkasının merkezi
N(R)	: R halkasındaki üstel sıfırlı elemanların kümesi
P(R)	: R halkasının asal radikali
R[x]	: R üzerindeki polinom halkası
R[[x]]	: R üzerindeki kuvvet serileri halkası
R[x, x^{-1}]	: R üzerindeki Laurent polinom halkası
R[x, α]	: R üzerindeki aykırı polinom halkası
D(R, $\mathbb{Z}$)	: R nin $\mathbb{Z}$ boyunca Dorroh genişlemesi
S^{-1}(R)	: R nin S de ki yerelleştirmesi
M_n(F)	: F cismi üzerinde $n \times n$ tipindeki matrislerin halkası
U(R)	: R deki tersinir elemanların kümesi
${}_R\mathrm{M}_R$	: Sağ sol R-modül

1. GİRİŞ

Tez boyunca R birimli ve birleşmeli bir halkayı gösterecektir. Eğer R'nin sıfırdan başka üstel sıfırlı elemanı yoksa yani $a^2 = 0$ olacak şekildeki her $a \in R$ için $a = 0$ oluyorsa R'ye *indirgenmiş halka* denir **(Lee ve Zhou, 2004)**. İndirgenmiş halka kavramı pek çok bilim insanı tarafından çalışılmıştır. İndirgenmiş halkalar üzerinde en iyi bilinen sonuçlardan biri;

$$R \text{ indirgenmiş} \Longleftrightarrow R[x] \text{ indirgenmiş} \Longleftrightarrow R[[x]] \text{ indirgenmiştir.}$$

(Andrunakievic ve Rjabuhin, 1968).
Her $n \geq 2$ için R indirgenmiştir $\Longleftrightarrow R[x]/(x^n)$ Armendariz halkadır **(Anderson ve Camillo, 1998)**. α, R'nin bir endomorfizması olmak üzere $R[x, \alpha]$ aykırı polinom halkası indirgenmiştir **(Krempa, 1996)**. İndirgenmiş halka kavramı polinom ve kuvvet serileri halkalarının sıfırlayanları arasındaki ilişkiyi belirlemede oldukça kullanışlıdır.

İndirgenmiş halkaların bir genelleştirmesi olarak indirgenmiş modül kavramı **(Lee ve Zhou, 2004)** de çalışılmıştır. Buna göre bir M sol R-modülü eğer aşağıdaki denk koşullardan birini sağlıyorsa;

(1) $a \in R$ ve $m \in M$ için $a^2m = 0$ iken $aRm = 0$.

(2) $am = 0$ olduğunda $aM \cap Rm = 0$.

M'ye *indirgenmiş modül* denir **(Lee ve Zhou, 2004)**.

İndirgenmiş modüller için aşağıdaki örnekler verilebilir:

(1) R indirgenmiş halkadır $\Longleftrightarrow R_R$ indirgenmiş modüldür.

(2) İndirgenmiş bir modülün her alt modülüde indirgenmiştir. Özel olarak I; indirgenmiş bir halkanın sağ ideali ise bu durumda I_R indirgenmiş modüldür.

(3) İndirgenmiş R-modüllerin her dik çarpımı indirgenmiş R-modüldür.

Eğer $a^2b = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ab = 0$ oluyorsa R'ye *katı halka* denir **(Lee ve Zhou, 2004)**. İndirgenmiş halkalar katıdır. Bu halkaların bazı genelleştirmeleri şöyledir:

(1) Eğer $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $(aR) \cap (Rb)$ halkanın merkezi tarafından kapsanıyorsa R'ye *yarı indirgenmiş halka* denir **(Köse vd. 2013)**.

(2) Eğer $a^2b = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ab \in C(R)$ oluyorsa R'ye *merkezi katı* denir **(Köse vd. 2012)**.

Yarı indirgenmiş halkalar merkezi katıdır. Fakat merkezi katı halkalar yarı indirgenmiş olmak zorunda değildir.
(Köse vd. 2013) de; indirgenmiş halkaların bazı sonuçları yarı indirgenmiş halkalara genişletilmiştir. Ayrıca yarı indirgenmiş halkaların hangi koşullar altında indirgenmiş olduğu araştırılmıştır. Aynı çalışmada yarı indirgenmiş halkaların indirgenmiş olmadığına yönelik örnekler verilmiştir. Ayrıca yarı indirgenmiş halkaların Abelyen olduğu ve Abelyen halkaların yarı indirgenmiş olmadığı gösterilmiştir. Üstelik yarı indirgenmiş halkaların bazı genişlemelerinin örneğin; $D(R, \mathbb{Z})$ Dorroh genişlemesinin yarı indirgenmiş olması için gerekli koşullar araştırılmıştır. Yarı indirgenmiş halka sınıfları için Köthe varsayımının doğru olduğu ispatlanmıştır. İndirgenmiş halkaların bazı sonuçları merkezi katı halkalara genişletilmiştir. R'nin merkezi katı olması için gerek ve yeter şart $D(R, \mathbb{Z})$ Dorroh genişlemesinin merkezi katı olmasıdır. Ayrıca **(Köse vd. 2012)** de aşağıdakilerin denk olduğu gösterilmiştir:

(1) R sağ temel projektif halkadır.

(2) R merkezi katıdır.

(3) Her $n \geq 2$ için $R[x]/(x^n)$ halkası merkezi Armendarizdir.

Aynı çalışmada " $R[x]$ polinom halkasının merkezi katı olması için gerek ve yeter şart $R[x, x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının merkezi katı olmasıdır " gösterilmiştir.

Eğer $x^n = 0$ olacak şekilde her $x \in R$ için $x \in C(R)$ oluyorsa R'ye *merkezi indirgenmiş halka* denir **(Üngör vd. 2013)**. Eğer $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $aRb = 0$ oluyorsa R'ye *yarı değişmeli halka* denir **(Rege vd. 1997)**. Son zamanlarda yarı değişmeli halkaların genelleştirmesi **(Agayev vd. 2011)** de verilmiştir. Buna göre $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $aRb \subseteq C(R)$ oluyorsa R'ye *merkezi yarı değişmeli halka* denir. Her merkezi indirgenmiş halka merkezi yarı değişmelidir.

Eğer $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa R halkasına *terslenebilir halka* denir **(Cohn, 1999)**. Terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi **(Köse vd. 2014)** de verildi. Buna göre eğer $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ba \in C(R)$ oluyorsa R'ye *merkezi terslenebilir halka* denir. Ayrıca terslenebilir halkaların başka bir genelleştirmesi **(Liang ve Gang, 2007)** de verilmiştir. Buna göre eğer $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ ve her $r \in R$ için $Rbra$ R'nin sol nil ideali oluyorsa R'ye *zayıf terslenebilir halka* denir. Bu halkalar arasındaki ilişki şöyledir:
{Terslenebilir halka} $\subseteq$ {Merkezi terslenebilir halka} $\subseteq$ {Zayıf terslenebilir halka}

ve

{Merkezi terslenebilir halka} $\subseteq$ {Abelyen}$\subseteq$ {Direkt sonlu} **(Köse vd. 2014)**.

Bu çalışmada verilen kapsamaların terslerinin doğru olmadığına yönelik örnekler verilmiştir. Ayrıca R'nin merkezi terslenebilir olması ile $R[x]$ polinom halkasının ve $R[x, x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının merkezi terslenebilir olması arasında aşağıdaki ilişki vardır.

R Armendariz halka olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) R merkezi terslenebilirdir.

(2) $R[x]$ merkezi terslenebilirdir.

(3) $R[x, x^{-1}]$ merkezi terslenebilirdir.

2. TEMEL TANIMLAR

2.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde diğer bölümlerde gerekli olan tanım ve özellikler verilecektir.

Tanım 2.1. R bir halka ve $x \in R$ olsun. $x^n = 0$ olacak şekilde bir $n > 0$ varsa bu durumda x e *üstel sıfırlı eleman* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 2.2. Sıfırdan farklı üstel sıfırlı elemanı olmayan bir R halkasına *indirgenmiş halka* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 2.3. R bir halka olmak üzere R'nin bir e elemanı $e = e^2$ şartını sağlarsa, e ye *eş güçlü eleman* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 2.4. Her eş güçlü elemanı merkezde olan halkaya *Abelyen* denir **(Agayev vd. 2009)**.

Tanım 2.5. R'nin tek üreteçli sağ(sol) idealinin sağ(sol) sıfırlayanı eğer bir eş güçlü tarafından üretiliyorsa R'ye *sağ(sol) temel yarı Baer halka* denir **(Birkenmeier, 2001)**.

Tanım 2.6. R'nin bir elemanının sağ(sol) sıfırlayanı bir eş güçlü tarafından üretilmişse R'ye *sağ(sol) temel projektif halka* denir **(Birkenmeier, 2001)**.

Tanım 2.7. $aRa = 0$ olacak şekilde her $a \in R$ için $a = 0$ oluyorsa R'ye *yarı asal* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 2.8. R bir halka, $abc = 0$ olacak sekilde her $a, b, c \in R$ için $acb = 0$ oluyorsa R'ye *simetrik halka* denir **(Lambek, 1971)**.

Tanım 2.9. $D(R, \mathbb{Z}) = \{(r, n) : r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, $(r_1, n_1), (r_2, n_2) \in D(R, \mathbb{Z})$ için $(r_1, n_1) + (r_2, n_2) = (r_1 + r_2, n_1 + n_2)$ ve $(r_1, n_1)(r_2, n_2) = (r_1r_2 + n_1r_2 + n_2r_1, n_1n_2)$ işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya R'nin $\mathbb{Z}$ boyunca *Dorroh genişlemesi* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 2.10. $ab = 1$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ba = 1$ oluyorsa R'ye *direkt sonlu* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 2.11. Her $a \in R$ için $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa R halkasına *Von Neumann düzenli* denir. Her $a \in R$ için $a = a^2b$ olacak şekilde $b \in R$ varsa R halkasına *güçlü düzenli* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 2.12. Halkanın bütün asal ideallerinin kesişimine *asal radikal* denir **(Hirano, 1978; Hwang vd. 2007)**.

Tanım 2.13. $P(R)$ R'nin asal radikali ve $N(R)$, R'nin bütün üstel sıfırlı elemanlarının kümesi olmak üzere eğer $P(R) = N(R)$ ise R'ye *2-primal* denir **(Hirano, 1978; Hwang vd. 2007)**.

Tanım 2.14. $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $aRb = 0$ oluyorsa R'ye *yarı değişmeli halka* denir **(Rege ve Chhawchharia, 1997)**.

Tanım 2.15. $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $aRb \in C(R)$ oluyorsa R'ye *merkezi yarı değişmeli halka* denir **(Agayev vd. 2011)**.

Tanım 2.16. $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ ve her $r \in R$ için $arb \in N(R)$ oluyorsa R'ye *zayıf yarı değişmeli halka* denir **(Liang vd. 2007)**.

Tanım 2.17. $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa R'ye *terslenebilir halka* denir **(Cohn, 1999)**.

Tanım 2.18. $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ba \in C(R)$ oluyorsa R'ye *merkezi terslenebilir halka* denir **(Köse vd. 2014)**.

Tanım 2.19. $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ ve her $r \in R$ için $Rbra$, R'nin sol nil ideali oluyorsa R'ye *zayıf terslenebilir halka* denir **(Liang ve Gang, 2007)**.

Tanım 2.20. R bir halka ve

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad , \quad g(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j \in R[x]$$

olsun.

$f(x)g(x) = 0$ iken her i, j için $a_i b_j = 0$ oluyorsa R'ye *Armendariz* denir **(Rege ve Chhawchharia, 1997)**.

Tanım 2.21. $f(x), g(x) \in R[x]$ için eğer $f(x)g(x) = 0$ iken her i, j için $a_i b_j \in N(R)$ oluyorsa R'ye *zayıf Armendariz* denir **(Liu ve Zhao, 2006)**.

Tanım 2.22. R bir halka olmak üzere $f(x), g(x) \in R[x]$ için eğer $f(x)g(x)$ üstel sıfırlı katsayılarına sahip olduğundan $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq s$ için $a_i b_j \in N(R)$ oluyorsa R'ye *nil Armendariz* denir **(Antoine, 1998)**.

Tanım 2.23. $f(x), g(x) \in R[x]$ için eğer $f(x)g(x) = 0$ iken her i, j için $a_i b_j \in C(R)$ oluyorsa R'ye *merkezi Armendariz* denir **(Agayev vd. 2011)**.

3. YARI İNDİRGENMİŞ HALKALAR

3.1. Yarı İndirgenmiş Halkalar

Bu bölümde yarı indirgenmiş halkalar tanıtılacaktır. İndirgenmiş halkaların bazı sonuçları; yarı indirgenmiş halkalara genişletilecektir. Yarı indirgenmiş halkaların indirgenmiş olmadığına yönelik örnekler verilecektir. Ayrıca yarı indirgenmiş halkaların Abelyen olduğu gösterilerek, Abelyen olan yarı indirgenmiş olmayan halka örnekleri verilecektir. Her yarı indirgenmiş halkanın zayıf yarı değişmeli, merkezi yarı değişmeli, Abelyen ve direkt sonlu olduğu gösterilecektir. Üstelik R halkasının yarı indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $D(R,\mathbb{Z})$ Dorroh genişlemesinin yarı indirgenmiş olmasıdır. Yarı indirgenmiş halkalarda Köthe varsayımının doğru olduğu ispatlanmıştır.

Tanım 3.1. $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $(aR) \cap (Rb) = 0$ oluyorsa R'ye *indirgenmiş halka* denir **(Lee ve Zhou, 2004)**.

İndirgenmiş halkanın sıfırdan başka üstel sıfırlı eleman içermeyen halka olduğu bu çalışmada gösterilmiştir. Gerçekten her $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $(aR) \cap (Rb) = 0$ gerek ve yeter şart R sıfırdan başka üstel sıfırlı eleman içermez gerek ve yeter şart $a^2 = 0$ olacak şekilde her $a \in R$ için $a = 0$ dır.

Eğer R halkası birimli değilse indirgenmiş halka kavramı yukarıdaki denklikleri sağlamaz. Aşağıda bu durum örneklendirilmiştir.

Örnek 3.2. $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ halkası göz önüne alınsın. Matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemleri altında R değişmeli olmayan bir halkadır. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in R$ sıfırdan farklı üstel sıfırlı elemandır.

$\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} \in R$ için $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = 0$ olsun. Bu durumda $(a+b)c = 0$ ve $(a+b)d = 0$ elde edilir. Buradan iki durum ortaya çıkar. $a + b = 0$ ya da $a + b \neq 0$. Eğer $a + b = 0$ ise $a = b = 0$ ya da $a = b = 1$. Bu ise $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} R \cap R \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = 0$ olmasını gerektirir.
Kabul edelim ki; her iki durum için $a + b \neq 0$ olsun. Bu durumda $c = d = 0$ bulunur ve $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} R \cap R \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = 0$ **(Köse vd. 2013)**.

Tanım 3.3. R bir halka olmak üzere eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $(aR) \cap (Rb)$ halkanın merkezi tarafından kapsanıyorsa R'ye *yarı indirgenmiş halka* denir **(Köse vd. 2013)**.

Örnek 3.4. Değişmeli halkalar ve indirgenmiş halkalar yarı indirgenmiş halkalardır. Karşıtı doğru değildir. Yani; yarı indirgenmiş halkaların indirgenmiş olması gerekmez **(Köse vd. 2013)**.

Örnek 3.5. $R = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$ halkası göz önüne alınsın. R değişmeli olduğundan R yarı indirgenmiştir. $a = x + (x^2) \in R$ için $a^2 = 0$ olmasına rağmen $a \neq 0$. Bu nedenle R indirgenmiş değildir **(Köse vd. 2013)**.

Lemma 3.6. R halkası için aşağıdakiler doğrudur.

(1) Eğer R yarı indirgenmiş halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ ise a merkezdedir. Karşıtı R halkasının yarı asal olması durumunda doğrudur.

(2) Eğer R yarı indirgenmiş halka ise R Abelyendir.

(Köse vd. 2013).

İspat.

(1) Kabul edelim ki; R yarı indirgenmiş halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $(aR) \cap (Ra) \in C(R)$ dir. R yarı indirgenmiş halka olduğundan $a \in (aR) \cap (Ra)$ olup a merkezdedir.

Karşıt olarak kabul edelim ki; R yarı asal halka ve $a^2 = 0$ iken a merkezde olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için ba, bra, arb merkezdedir. $t, s \in R$ için $at = sb \in (aR) \cap (Rb)$ olsun.
Buradan $ata = sba$ ve $(ata)^2 = (sba)^2 = sbasba = sbabas = 0$ elde edilir. Ayrıca $ata = sba$ merkezde ve $ata^2 = sbaa = asba = abas = 0$ dır. Diğer taraftan $atat = tata$ ve $atata = tata^2 = 0$. Böylece $(at)^3 = 0$ yani $(at)^2$ merkezdedir. O halde $((at)^2R)^2 = 0$ ve $(at)^2 = 0$. Buradan (at) merkezdedir. Yani R yarı indirgenmiştir.

(2) e, R'de eş güçlü eleman olsun. Lemma 3.6.(1) den her $r \in R$ için $(er - ere)^2 = 0$ ve $er - ere$ merkezdedir, buradan $er = ere$ elde edilir. Benzer şekilde her $r \in R$ için $re = ere$ bulunur. O halde R Abelyendir.

■

Sonuç 3.7. R yarı indirgenmiş halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda ba merkezdedir **(Köse vd. 2013)**.

Aşağıda verilen örnek Lemma 3.6.(2) nin karşıtının genelde doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.8.

$$R=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a\equiv d(mod2),\ b\equiv c\equiv 0(mod2),\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}\right\}$$

halkası göz önüne alınsın. R'nin eş güçlü elemanları sadece birim ve sıfır matrisler olduğundan R Abelyendir.
$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in R$ için $A^2=0$ olmasına rağmen A merkezde değildir. Bu durumda Lemma 3.6.(1) den R yarı indirgenmiş değildir **(Köse vd. 2013)**.

Teorem 3.9. R'nin her üstel sıfırlı elemanı merkezde ise R yarı indirgenmiştir. Karşıtı R'nin yarı asal olması durumunda doğrudur **(Köse vd. 2013)**.

İspat. Her $a,b\in R$ için $ab=0$ olsun. Buradan $(ba)^2=0$ ise ba merkezdedir. Her $a_1,b_1\in R$ için $x=aa_1=b_1b\in(aR)\cap(Rb)$ olsun. Bu durumda

$$x^3=b_1bb_1bb_1b=b_1bb_1baa_1=b_1babb_1a_1=0$$

elde edilir. Kabulden x merkezdedir. Böylece R yarı indirgenmiştir.

Karşıt olarak kabul edelim ki; R yarı asal ve yarı indirgenmiş, $a\in R$ ve $n>0$ olmak üzere $a^n=0$ olsun. Lemma 3.6. dan $n\geq 3$ kabul edebiliriz. Bu durumda $(a^{n-1})^2=0$ ve böylece a^{n-1} merkezdedir. Buradan $a^{n-1}Ra^{n-1}=0$ şeklindedir. R yarı asal olduğundan $a^{n-1}=0$ dır. Benzer şekilde n sonlu olduğundan $a^2=0$ durumuna indirgeyebiliriz. Lemma 3.6.(1) den a merkezdedir. ■

Teorem 3.9. da R'nin yarı asal halka olması gereksiz değildir. Ancak bu iddiayı birimli halkalar içinde kurabilmek için bir örnek bulmalıyız. Fakat birimli halkalar için bir örnek bulabilmek mümkün değildir. Aşağıdaki örnekte birimsiz halkalar için bu iddiayı gösterelim.

Örnek 3.10. $R=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}_2\right\}$ halkasını ve $a=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ elemanını göz önüne alalım. Ra sıfır olmayan üstel sıfırlı sol ideal olduğundan R halkası yarı asal değildir. Üstelik a merkezde olmayan üstel sıfırlı elemandır **(Köse vd. 2013)**.

Tanım 3.11. R'deki bütün üstel sıfırlı a elemanları için $a^n=0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısına *üstel sıfırlı indeks* denir.

Lemma 3.6.(1) ve Teorem 3.9. dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.12. R üstel sıfırlı indeksi 2 olan bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R yarı indirgenmiştir.

(2) R'nin her üstel sıfırlı elemanı merkezde yer alır.

(Köse vd. 2013).

Önerme 3.13. Eğer R indirgenmiş halka ise R yarı indirgenmiş halkadır. Karşıtı aşağıdaki koşullardan

(1) R yarı asal halkadır.

(2) R sağ(sol) temel projektif halkadır.

(3) R sağ(sol) temel yarı Baer halkadır.

herhangi birinin sağlanıyor olması durumunda doğrudur.

(Köse vd. 2013).

İspat. R indirgenmiş halka ise R'nin yarı indirgenmiş halka olduğu açıktır. Karşıt olarak kabul edelim ki; R yarı indirgenmiş halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Lemma 3.6.(1) den a merkezdedir. Şimdi aşağıdaki durumları düşünelim.

(1) R yarı asal halka olsun. a merkezde olduğundan her $x \in R$ için $axa = 0$ dır. Buradan $a = 0$ elde edilir. Böylece R indirgenmiştir.

(2) Kabul edelim ki; R sağ temel projektif halka olsun. Bu durumda $r_R(a) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ eş güçlü elemanı vardır. Buradan $a = ea = ae = 0$ ve böylece R indirgenmiş halkadır. Benzer şekilde R'nin sol temel projektif halka olması durumunda ispat doğrulanır.

(3) (2) nin ispatında olduğu gibidir.

■

Sonuç 3.14. R yarı indirgenmiş halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R sağ temel projektif halkadır.

(2) R sol temel projektif halkadır.

(3) R sağ temel yarı Baer halkadır.

(4) R sol temel yarı Baer halkadır.

(Köse vd. 2013).

İspat. Her bir durumda R indirgenmiş olduğundan Önerme 3.13. den istenilen elde edilir.
■

Örnek 3.15. D bölmeli halka, $R = D[x, y]$ ve $xy \neq yx$ için $I = (x^2)$ olsun. R tamlık bölgesi olduğundan yarı indirgenmiştir. Diğer taraftan, $\bar{x}^2 = \bar{0}$ olmasına rağmen $\bar{x}$, R/I da merkezde değildir. Bu durumda Lemma 3.6.(1) den R/I yarı indirgenmiş değildir **(Köse vd. 2013)**.

Önerme 3.16. R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R tamlık bölgesidir.

(2) R asal ve indirgenmiştir.

(3) R asal ve yarı indirgenmiştir.

(Köse vd. 2013).

İspat.
(1) $\implies$ (2) $xRy = 0$ olsun. R tamlık bölgesi olduğundan $x = 0$ veya $y = 0$ bu durumda R asaldır. $x^2 = 0$ olsun. $x = 0$ olup R indirgenmiştir.
(2) $\implies$ (3) İndirgenmiş halkalar yarı indirgenmiştir.
(3) $\implies$ (1) Her $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $abr = 0$ ve Sonuç 3.7. den bra merkezdedir. Buradan her $s \in R$ için $(asb)R(asb) = 0$ elde edilir. R asal olduğundan $asb = 0$ ve $aRb = 0$ yani $a = 0$ ya da $b = 0$. Böylece R tamlık bölgesidir. ■

Lemma 3.17. R halkası için aşağıdaki ifadeler vardır.

(1) Eğer R, 2-primal ve yarı asal ise R indirgenmiştir.

(2) Eğer R, yarı değişmeli ve yarı asal ise R indirgenmiştir.

(Köse vd. 2013).

İspat. (1) R yarı asal ve 2-primal halka olsun. Bu durumda $P(R) = 0$ ve böylece $N(R) = 0$ dır. Buradan R indirgenmiştir.
(2) R yarı değişmeli ve yarı asal halka olsun. Her $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $ba \in C(R)$ dir. Her $r \in R$ için $(arb)^2 = arbarb = abarrb = 0$. $(arb)R(arb) = 0$ ve R yarı asal olduğundan $arb = 0$ elde edilir. R yarı asal olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ bu durumda R indirgenmiştir. ■

Uyarı 3.18. Her yarı değişmeli halka 2-primaldir **(Shin, 1973)** [Teorem 1.5].

Teorem 3.19. Her yarı indirgenmiş halka 2-primaldir. Karşıtı halkanın yarı asal olması durumunda doğrudur **(Köse vd. 2013)**.

İspat. R yarı indirgenmiş halka olsun. $P(R) \leq N(R)$ olduğu bilinen sonuçtur. $a \in R$ ve en az bir $n \geq 2$ tamsayısı için $a^n = 0$ olsun. R yarı indirgenmiş halka olduğundan herhangi bir $r_1 \in R$ için $ar_1a^{n-1} \in (aR) \cap (Ra^{n-1})$ merkezdedir. Herhangi bir $r_2 \in R$ için ar_1a^{n-1} ile ar_2 yer değiştirdiğinde

$$ar_2ar_1a^{n-1} = ar_1a^{n-1}ar_2 = 0$$

elde edilir.
Kabulden herhangi bir $s_1 \in R$ için $ar_2ar_1as_1a^{n-2}$ merkezdedir. Herhangi bir $r_3 \in R$ için $ar_2ar_1as_1a^{n-2}$ ile ar_3 yer değiştirdiğinde

$$ar_3ar_2ar_1as_1a^{n-2} = ar_2ar_1as_1a^{n-2}ar_3 = 0$$

elde edilir.
Kabulden herhangi bir $s_2 \in R$ için $ar_3ar_2ar_1as_1as_2a^{n-3}$ merkezdedir. Herhangi bir $r_4 \in R$ için $ar_4ar_3ar_2ar_1as_1as_2a^{n-3}$ ile ar_4 yer değiştirdiğinde

$$ar_4ar_3ar_2ar_1as_1as_2a^{n-3} = ar_3ar_2ar_1as_1as_2a^{n-3}ar_4 = 0$$

elde edilir.
Kabulden herhangi bir $s_3 \in R$ için $ar_4ar_3ar_2ar_1as_1as_2as_3a^{n-4}$ merkezdedir. Herhangi bir $r_5 \in R$ için $ar_4ar_3ar_2ar_1as_1as_2as_3a^{n-4}$ ile ar_5 yer değiştirdiğinde

$$ar_5ar_4ar_3ar_2ar_1as_1as_2as_3a^{n-4} = ar_4ar_3ar_2ar_1as_1as_2as_3a^{n-4}ar_5 = 0$$

elde edilir.

Her $i \in R$ (i=1,...,t) için $ax_1ax_2...ax_ta = 0$ olacak şekilde n'ye bağlı bir t pozitif tamsayısı vardır. Herhangi bir P asal ideali için $aR(ax_2ax_3...ax_ta) \leq P$. Böylece $a \in P$ ya da her $x_2, ..., x_t$ için $ax_2ax_3...ax_ta \in P$ dir. Eğer $aRax_3...ax_ta \leq P$ ise $a \in P$ ya da her $x_3, ..., x_t$ için $ax_3...ax_ta \in P$ dir. Bu şekilde devam edilerek her P asal ideali için $a \in P$ elde edilir. Dolayısıyla $a \in P(R)$ yani $N(R) = P(R)$ şeklindedir.

Karşıt olarak R yarı asal ve 2-primal halka olsun. Bu durumda Lemma 3.17. den R indirgenmiş olup yarı indirgenmiştir. ∎

Sonuç 3.20. R yarı indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $R/P(R)$ indirgenmiştir **(Köse vd. 2013)**.

İspat. $P(R)$ bütün üstel sıfırlı elemanları içeriyor olduğundan Teorem 3.19. dan sonuç açıktır. ∎

Teorem 3.21. Her yarı indirgenmiş halka merkezi yarı değişmelidir. Karşıtı halkanın yarı asal olması durumunda doğrudur **(Köse vd. 2013)**.

İspat. R yarı indirgenmiş halka ve her $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(aR) \cap (Rb)$ merkezdedir. $aRb \leq (aR) \cap (Rb)$ olup R yarı indirgenmiş olduğundan $aRb \subseteq C(R)$ elde edilir. Karşıtı Lemma 3.17.(2) den görülür. ∎

Uyarı 3.22. (Köthe Problemi) Eğer R sıfır olmayan nil ideallere sahip değilse R sıfır olmayan tek yanlı nil ideallere sahip değildir **(Smoktunowicz, 2001)**.

Sonuç 3.23. Yarı indirgenmiş halkalarda Köthe problemi doğrudur. Teorem 3.21. in karşıtı genelde doğru değildir **(Köse vd. 2013)**.

Örnek 3.24. F bir cisim ve $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & e \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e \in F \right\}$ olsun.

R'nin merkezi yarı değişmeli fakat yarı indirgenmiş olmadığı gösterilecektir. $A, B \in R$ için $AB = 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar vardır.

(1) $A = 0$ ya da $B = 0$ ya da

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & b & e \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c' & d' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ya da

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & b' & c' & d' \\ 0 & 0 & b' & e' \\ 0 & 0 & 0 & b' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ya da

(4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c' & d' \\ 0 & 0 & 0 & e' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Her bir durum için $ARB = 0$ elde edilir. Böylece R yarı değişmelidir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(AR) \cap (RB) = RB$ olup merkezde değildir. Böylece R yarı indirgenmiş değildir **(Köse vd. 2013)**.

Önerme 3.25. R yarı indirgenmiş halka olsun. Bu durumda R zayıf yarı değişmelidir **(Köse vd. 2013)**.

İspat. $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. R yarı indirgenmiş olduğundan ve Sonuç 3.7. den ba merkezdedir. Her $r \in R$ için $(arb)^2 = arbarb = ar^2bab = 0$ dır. Bu durumda R zayıf yarı değişmeli halkadır. ■

Örnek 3.26. D bölmeli halka ve $R = \begin{bmatrix} D & D \\ 0 & D \end{bmatrix}$ olsun. R'nin zayıf yarı değişmeli olduğu **(Liang vd. 2007)** de ispatlandı. $a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ göz önüne alınsın. Buradan $a^2 = 0$ ve a merkezde değildir. Dolayısıyla Lemma 3.6.(1) den R yarı indirgenmiş değildir **(Köse vd. 2013)**.

Örnek 3.27. F bir cisim ve $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda Örnek 3.26. dan R yarı indirgenmiş değildir. $I = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ idealini göz önüne alınsın. Bu durumda R/I değişmeli olduğundan R/I yarı indirgenmiştir **(Köse vd. 2013)**.

Önerme 3.28. R bir asal halka olsun. I, R'nin indirgenmiş ideali olmak üzere eğer R/I yarı indirgenmiş halka ise R yarı indirgenmiştir **(Köse vd. 2013)**.

İspat. R/I yarı indirgenmiş halka olsun. Teorem 3.21. den R/I merkezi yarı değişmelidir. $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $(a+I)^2 = 0 \in R/I$ ve $(a+I)(R/I)(a+I) \in C(R/I)$. Buradan $(a+I)(R/I)(a+I)(R/I)(a+I) = 0$ ve $aRaRa \subseteq I$ elde edilir. $r, s \in R$ olsun. $(arasa)^2 = 0$ ve I indirgenmiş olduğundan $arasa = 0$ dır. Bu durumda $aRaRa = 0$ elde edilir. Kabulden $a = 0$, bu nedenle R indirgenmiştir. Dolayısıyla R yarı indirgenmiştir.

■

Sonuç 3.29. Eğer R yarı indirgenmiş halka ise R direkt sonludur **(Köse vd. 2013)**.

İspat. Lemma 3.6.(2) den R Abelyen halka ve buradan R direkt sonludur. ■

Örnek 3.30. Her güçlü düzenli halka Von Neumann düzenlidir **(Lam, 1998)**.

Teorem 3.31. R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R güçlü düzenlidir.

(2) Her sağ R-modülü flat ve R yarı indirgenmiştir.

(3) Her devirli sağ R-modülü flat ve R yarı indirgenmiştir.

(4) R düzenli ve yarı indirgenmiştir.

(5) R düzenli ve indirgenmiştir.

(6) R düzenli ve Abelyendir.

(Köse vd. 2013).

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) Her güçlü düzenli halka Von Neumann düzenli ve Harada'nın teoreminden her flat modüldür. R güçlü düzenli olduğundan sıfırdan farklı üstel sıfırlı elemanlar içermez. Kabul edelim ki; $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $ba = 0$ dır. $ar = tb \in (aR) \cap (Rb)$ olsun. $ar = tb$ eşitliğinin her iki tarafı ar ile çarpıldığında $(ar)^2 = 0$ elde edilir. Buradan $ar = 0$ dır. Dolayısıyla $(aR) \cap (Rb) = 0$.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Aşikardır.
(3) $\Longrightarrow$ (4) **(Lam, 1998)** [Teorem 4.21] den açıktır.
(4) $\Longrightarrow$ (1) $a \in R$ olsun. $a = aba$ olacak şekilde $b \in R$ vardır dolayısıyla ab eş güçlüdür. Lemma 3.6. dan ab merkezdedir. Buradan $a = aba = a^2b$ elde edilir. Böylece R güçlü düzenlidir. ∎

Önerme 3.32. R yarı indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $D(R, \mathbb{Z})$ yarı indirgenmiştir **(Köse vd. 2013)**.

İspat. $(r_1, n_1), (r_2, n_2) \in D(R, \mathbb{Z})$ için $(r_1, n_1)(r_2, n_2) = (r_1r_2 + r_1n_2 + r_2n_1+, n_1n_2) = 0$ olsun. Bu durumda $n_1n_2 = 0$ ve $r_1r_2 + r_1n_2 + r_2n_1 = 0$ dır. İspat $n_1 = 0$ ve $n_2 \neq 0$ ya da $n_1 \neq 0$ ve $n_2 = 0$ şeklinde iki durum ortaya çıkar.

İlk olarak $n_1 = 0$ ve $n_2 \neq 0$ durumu için ispatlayacağız. Bu durumda $r_1r_2 + r_1n_2 = 0$ elde edilir. R birimli ve $r_2 + n_2 \in R$ olduğu için $r_1(r_2 + n_2) = 0$ dır. Kabulden $(r_1R) \cap (R(r_2 + n_2))$ merkezdedir. $(r_1, 0)(a, n) = (b, m)(r_2, n_2) \in ((r_1, 0)D(R, \mathbb{Z})) \cap (D(R, \mathbb{Z})(r_2, n_2))$ olsun. Buradan $m = 0$ ve $r_1(a + n) = b(r_2 + n_2) \in (r_1R) \cap (R(r_2 + n_2))$ merkezdedir. Bu durumda $((r_1, 0)D(R, \mathbb{Z})) \cap (D(R, \mathbb{Z})(r_2, n_2))$ merkezdedir.
$n_1 \neq 0$ ve $n_2 = 0$ durumu için benzer şekilde ispat yapılır. ∎

S, R'nin merkezi düzenli elemanlarının çarpımsal kapalı alt kümesi ve $S^{-1}R$, R'nin S'de ki yerelleştirmesi olsun.

Önerme 3.33. R'nin yarı indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $S^{-1}R$ halkasının yarı indirgenmiş olmasıdır **(Köse vd. 2013)**.

İspat. $r/s \in C(S^{-1}R)$ olması için gerek ve yeter şart $r \in C(R)$ olmasıdır. Kabul edelim ki; R yarı indirgenmiş ve her $s, t \in S$ için $a/s, b/t \in S^{-1}R$ olmak üzere $(a/s)(b/t) = 0$ olsun. S'nin bütün elemanları merkezi düzenli olduğundan $ab = 0$ dır. Kabulden $(aR) \cap (Rb)$ R'nin merkezdeki elemanlarını içerir.
$(a/s)(a_1/s_1) = (b_1/t_1)(b/t) \in ((a/s)(S^{-1}R)) \cap ((S^{-1}R)(b/t))$ olsun.
Bu durumda $tt_1aa_1 = ss_1b_1b$ ve t, t_1, s, s_1 merkezde olduğundan $tt_1aa_1 = ss_1b_1b \in (aR) \cap (Rb)$ merkezdedir. $tt_1aa_1 = ss_1b_1b$, tt_1ss_1 tarafından bölünerek $(a/s)(a_1/s_1) = (b_1/t_1)(b/t)$ $((a/s)(S^{-1}R)) \cap ((S^{-1}R)(b/t))$ nin merkezindedir.

Karşıt olarak, R alt halkası $S^{-1}R$ de gömülü ve yarı indirgenmiş halkalar alt halkalar altında korunduğu için R yarı indirgenmiştir. ∎

Sonuç 3.34. Her R halkası için $R[x]$ polinom halkasının yarı indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $R[x, x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının yarı indirgenmiş olmasıdır **(Köse vd. 2013)**.

İspat. $S = \{1, x, x^2, x^3, x^4, ...\}$ olsun. S, $R[x]$'in merkezi düzenli elemanlarından oluşan çarpımsal kapalı alt kümesidir. Bu durumda Önerme 3.33. den ispat açıktır. ■

Tanım 3.35. R bir halka ve M bir R_R modül olsun. $T(R, M) = R \oplus M$ bileşensel toplama ve $(r_1, m_1), (r_2, m_2) \in T(R, M)$ olmak üzere $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$ işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya *R'nin M tarafından aşikar genişlemesi* denir.

Bu halka

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in M \right\}$$

halkasına izomorftur.

Aşağıda R'nin M tarafından aşikar genişlemesinin yarı indirgenmiş olmasının gerekmediğine yönelik örnek verilecektir.

Örnek 3.36. R değişmeli olmayan bir halka ve r, R'nin merkezde olmayan bir elemanı olsun. $\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T(R, R)$ göz önüne alınsın. Buradan $\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir. $ar \neq ra$ olacak şekilde a, R'nin bir elemanı olsun. Böylece

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

elde edilir. Lemma 3.6.(1) den $T(R, R)$ yarı indirgenmiş değildir **(Köse vd. 2013)**.

4. İNDİRGENMİŞ HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

4.1. İndirgenmiş Halkaların Genelleştirilmesi

Bu bölümde indirgenmiş halkaların merkezi katı halka sınıflarının bir genelleştirmesi olduğu gösterilecektir. İndirgenmiş halkaların bazı sonuçları; merkezi katı halkalara genişletilecektir. Merkezi katı halkalar indirgenmiş halkalar ile merkezi terslenebilir halkalar arasındadır. Eğer R sağ temel projektif ya da yarı asal halka ise R indirgenmiştir gerek ve yeter şart R merkezi katıdır gerek ve yeter şart R terslenebilirdir gerek ve yeter şart R merkezi terslenebilirdir gerek ve yeter şart R yarı değişmelidir gerek ve yeter şart R merkezi yarı değişmelidir gerek ve yeter şart R Abelyendir. Üstelik R'nin merkezi katı olması için gerek ve yeter şart $D(R, \mathbb{Z})$ Dorroh genişlemesinin merkezi katı olmasıdır. Ayrıca R'nin sağ temel projektif halka olması durumunda R'nin merkezi katı olması için gerek ve yeter şart $R[x]/(x^n)$ halkasının merkezi Armendariz olmasıdır. Son olarak $R[x]$ polinom halkasının merkezi katı olması için gerek ve yeter şart $R[x, x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının merkezi katı olmasıdır.

Tanım 4.1. α, R halkasının bir homomorfizması olsun. $a\alpha(a) = 0$ olacak şekilde her $a \in R$ için $a = 0$ oluyorsa R halkasına *α-katı* denir **(Hong vd. 2000)**.

Tanım 4.2. $ma\alpha(a) = 0$ olacak şekilde her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ oluyorsa M'ye *α-katı* denir **(Agayev vd. 2009)**.

Tanım 4.3. $ma^2 = 0$ olacak şekilde her $m \in M$ ve $a \in R$ için $ma = 0$ ise M'ye *katı* denir **(Agayev vd. 2009)**.

Tanım 4.4. M sol R-modülü eğer aşağıdaki denk koşullardan

(1) $a^2m = 0$ olacak şekilde $a \in R$ ve $m \in M$ iken $aRm = 0$.

(2) $am = 0$ olduğunda $aM \cap Rm = 0$.

herhangi birini sağlıyorsa M'ye *indirgenmiş modül* denir **(Lee ve Zhou, 2004)**.

Uyarı 4.5. M indirgenmiş modül ise bu durumda katı olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 4.6. R bir halka ve $a^2b = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ab = 0$ oluyorsa R'ye *katı* denir **(Lee ve Zhou, 2004)**.

Önerme 4.7. R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R indirgenmiş halkadır.

(2) R_R indirgenmiş modüldür.

(3) R_R katı modüldür.

(4) R katı halkadır.

(Köse vd. 2012).

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) Kabul edelim ki, R indirgenmiş olsun. Buradan $xM \cap R1 = 0$ olup R_R indirgenmiş modüldür.
(2) $\Longrightarrow$ (3) $ma^2 = 0$ olsun. $(ma)a = 0$ M indirgenmiş olduğundan $(ma)M \cap Ra = 0$. Buradan $ma = 0$ olup R_R katı modüldür.
(1) $\Longrightarrow$ (4) R indirgenmiş olsun. $a^2b = 0$ ve buradan $(ab)a = 0$ olup sağdan b ile çarpıldığında $(ab)(ab) = 0$ dır. $(ab)^2 = 0$ R indirgenmiş olduğundan $ab = 0$. ■

Tanım 4.8. R bir halka ve $a^2b = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ab \in C(R)$ ise R'ye *merkezi katı* denir **(Köse vd. 2012)**.

Örnek 4.9. Değişmeli halkalar ve indirgenmiş halkaların merkezi katı halkalardır **(Köse vd. 2012)**. Karşıtı doğru değildir. Yani; merkezi katı halkaların indirgenmiş olması gerekmez.

Örnek 4.10. $R = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ olsun. $(a, b), (c, d) \in R$ olmak üzere $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ve $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$ işlemleri ile bir halkadır. R halkası değişmeli ve birimlidir. Birimi $(1, 0)$ elemanıdır. R değişmeli olduğundan merkezi katıdır. Buna rağmen $(0, 1)^2 = (0, 0)$ ve $(0, 1) \neq (0, 0)$ olduğundan R indirgenmiş değildir **(Köse vd. 2012)**.

Önerme 4.11. Eğer R indirgenmiş halka ise bu durumda R merkezi katıdır. Karşıtı aşağıdaki ifadelerden herhangi birinin sağlanması durumunda doğrudur.

(1) R yarı asal halkadır.

(2) R sağ(sol) temel projektif halkadır.

(3) R sağ(sol) temel yarı Baer halkadır.

(Köse vd. 2012).

İspat. $(aba)(aba) = 0$ ise R indirgenmiş olduğundan $(aba) = 0$ (sağdan b ile çarpıldığında) $abab = 0$. R indirgenmiş olduğu için $ab = 0$ elde edilir ve böylece R merkezi katıdır. Karşıt olarak,

(1) R yarı asal halka ve $x \in R$ için $x^2 = 0$ olsun. Kabulden x merkezdedir. Buradan $xRx = 0$ elde edilir. R yarı asal olduğundan $x = 0$ dır. Böylece R indirgenmiştir.

(2) $x \in R$ için $x^2 = 0$ olsun. Kabulden x merkezdedir. R sağ temel projektif halka olduğundan $x \in r_R(x) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ eş güçlü elemanı vardır. Buradan $x = ex = xe = 0$ olur. Böylece R indirgenmiştir.

(3) (2) nin ispatı ile benzerdir.

■

Sonuç 4.12. Eğer R merkezi katı halka ise bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R sağ temel projektif halkadır.

(2) R sol temel projektif halkadır.

(3) R sağ temel yarı Baer halkadır.

(4) R sol temel yarı Baer halkadır.

(Köse vd. 2012).

İspat. Her bir durum için R'nin indirgenmiş olduğu Önerme 4.11. den elde edilir. ■

Önerme 4.13. I sonlu indeks kümesi olmak üzere halkaların $\{R_i\}_{i \in I}$ sınıfını göz önüne alalım. Bu durumda her $i \in I$ için R_i'nin merkezi katı olması için gerek ve yeter şart $\bigoplus R_i$'nin merkezi katı olmasıdır **(Köse vd. 2012)**.

İspat. $\{i \in I \mid I = \{1, ..., n\}\}$ olsun. $a_i, b_i \in R_i$ için $a_1^2 b_1 + a_2^2 b_2 + ... + a_n^2 b_n = 0$ olsun. $a_1(a_1 b_1) + a_2(a_2 b_2) + ... + a_n(a_n b_n) = 0$ olup buradan da $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n) = 0$ yazılabilir. Her $i \in I$ olduğu için $a_i(a_i b_i) = 0$ elde edilir. Bu durumda $a_i^2 b_i = 0$ olduğundan $a_i b_i \in C(R_i)$. ■

Sonuç 4.14. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. eR ve $(1 - e)R$ merkezi katı olması için gerek ve yeter şart R'nin merkezi katı olmasıdır **(Köse vd. 2012)**.

Uyarı 4.15. R'nin homomorfik görüntüsü merkezi katı olmasına rağmen R merkezi katı olmayabilir **(Köse vd. 2012)**.

Örnek 4.16. F bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ olsun.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmasına rağmen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R$ için

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan R merkezi katı değildir. Buna rağmen R'nin $I = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ideali göz önüne alındığında $R/I \cong F$ olduğu için R/I merkezi katıdır **(Köse vd. 2012)**.

Lemma 4.17. I, R'nin indirgenmiş ideali olmak üzere eğer R/I merkezi katı halka ise R merkezi katıdır **(Köse vd. 2012)**.

İspat. $a, b \in R$ olmak üzere eğer $a^2b = 0$ ise $(a+I)^2(b+I) = 0 + I$ şeklindedir. R/I merkezi katı olduğundan her $r \in R$ için $arb - rab \in I$ ve buradan $aba \in I$. Diğer taraftan $(aba)^2 = 0$ ve I indirgenmiş olduğundan $aba = 0$ elde edilir. Bu durumda her $r \in R$ için $abra \in I$. Her $r \in R$ için $(abra)^2 = 0$ olduğundan $abra = 0$ bulunur. Böylece $(abr - rab)^2 = 0$ ve kabulden her $r \in R$ için $abr = rab$ elde edilir. ■

Örnek 4.18. D bölmeli halka, $R = D[x, y]$ ve $xy \neq yx$ için $I = (y^2)$ olsun. R tamlık bölgesi olduğundan, R merkezi katıdır. Diğer taraftan $(yxy + I)^2(x + I) = 0 + I$ olmasına rağmen $(yxy + I)(x + I)$, $(y + I)$ ile değişmeli değildir. Buradan R/I merkezi katı değildir **(Köse vd. 2012)**.

Lemma 4.19. R bir halka olsun. Bu durumda R'nin asal ve merkezi katı olması için gerek ve yeter şart R'nin tamlık bölgesi olmasıdır **(Köse vd. 2012)**.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(ba)^2 = 0$ ve ba merkezdedir. Böylece her $r \in R$ için $(arb)^2 = 0$ dır. Her $r \in R$ için arb merkezdedir. $(arb)R(arb) = R(arb)^2 = 0$ olsun. R asal olduğundan $a = 0$ ya da $b = 0$ dır. Buradan R tamlık bölgesidir.
Karşıt olarak kabul edelim ki; R tamlık bölgesi olsun. Bu durumda R asal ve indirgenmiştir. R bir halka, böylece R merkezi katıdır. ■

İndirgenmiş her halka yarı değişmelidir. Zayıf yarı değişmeli halkalar içinde aşağıdaki ifade sağlanır.

Lemma 4.20. Eğer R merkezi katı ise R zayıf yarı değişmelidir **(Köse vd. 2012)**.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R merkezi katı olduğundan $ba \in C(R)$. Her $r \in R$ için $(arb)^2 = 0$ buradan $arb \in N(R)$ elde edilir. Yani R zayıf yarı değişmelidir. ■
Lemmanın karşıtı her zaman doğru değildir. Bu durum aşağıda örneklendirilmiştir.

Örnek 4.21. S bölmeli halka ve $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in S \right\}$ halkası göz önüne alınsın. Buradan R zayıf yarı değişmelidir **(Köse vd. 2012)**. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ için $A^2 = 0$ elde edilir.
$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ için $BA = 0$ olmasına rağmen $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ dır. Böylece R merkezi katı değildir **(Köse vd. 2012)**.

Lemma 4.22. R bir halka olmak üzere, eğer R merkezi katı ise R Abelyendir **(Köse vd. 2012)**.

İspat. $e^2 = e \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $(re - ere)^2 = 0$ ve buradan $re - ere$ merkezdedir. $e(re - ere) = (re - ere)e$ olup buradan $ere = re$ elde edilir. Benzer şekilde her $r \in R$ için $(er - ere)^2 = 0$ ve buradan $ere = er$ elde edilir. Böylece R Abelyendir. ■

Lemma 4.22. nin karşıtı genelde doğru değildir, yani her Abelyen halkanın merkezi katı olması gerekmez.

Örnek 4.23.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a \equiv d(mod2),\ b \equiv c \equiv 0(mod2),\ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkası göz önüne alınsın. R'nin eş güçlü elemanları sadece $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisler olduğundan R Abelyendir.

Diğer taraftan $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmasına rağmen $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ merkezde değildir.

Bu yüzden R merkezi katı değildir **(Köse vd. 2012)**.

Sonuç olarak indirgenmiş, katı, terslenebilir, merkezi terslenebilir, yarı değişmeli, merkezi yarı değişmeli ve sağ temel projektif halkalar kullanılarak Abelyen halkalar ve yarı asal halkalar arasındaki ilişkiler verilecektir.

Teorem 4.24. R sağ temel projektif halka ise bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R indirgenmiş halkadır.

(2) R merkezi katı halkadır.

(3) R terslenebilir halkadır.

(4) R merkezi terslenebilir halkadır.

(5) R yarı değişmeli halkadır.

(6) R merkezi yarı değişmeli halkadır.

(7) R Abelyen halkadır.

(Köse vd. 2012).

İspat. İlk olarak her $x \in R$ için xR'nin sağ projektif ideal olduğuna dikkat edelim. $r_R(x)$ R'nin direkt toplamı, $xR \cong R/r_R(x)$ ve böylece $e^2 = e \in R$ için $rR(x) = eR$. Ayrıca R sağ temel projektif halka ise bu durumda her eş güçlüsü merkezdedir.

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) Önerme 4.11. den elde edilir.
(2) $\Longrightarrow$ (3) $x, y \in R$ için $xy = 0$ olsun. Buradan bazı $e^2 = e \in R$ için $y \in r_R(x) = eR$. Bu durumda $y = ey$ ve $xe = 0$ dır.
Diğer taraftan $(yx)^2 = 0$ ve R merkezi katı olduğundan yx merkezdedir. Bu durumda $yx = eyx = yxe = 0$ ve böylece R terslenebilirdir.
(3) $\Longrightarrow$ (4) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = baba = 0$ olduğundan $ba \in C(R)$ dolayısıyla R merkezi terslenebilirdir.
(4) $\Longrightarrow$ (5) $x, y \in R$ için $xy = 0$ olsun. Bu durumda bazı $e^2 = e \in R$ için $y \in r_R(x) = eR$ dir. Böylece $y = ey$ ve $xe = 0$ dır. Buradan her $r \in R$ için $xry = xr(ey) = xery = 0$ ve böylece (5) elde edilir.
(5) $\Longrightarrow$ (6) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $ba \in C(R)$ elde edilir. $(arb)^2 = 0$ olduğundan $arb \in C(R)$ olup R merkezi yarı değişmelidir.
(6) $\Longrightarrow$ (7) $e^2 = e \in R$ olsun. Kabulden $e(1-e) = 0$ iken her $r \in R$ için $er(1-e) \in C(R)$. $er(1-e)$ e ile yer değiştirdiğinde $er(1-e) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $(1-e)er = 0$ elde edilir. Buradan $er = ere = re$ olup R Abelyendir.
(7) $\Longrightarrow$ (1) Aşikardır. ■

Teorem 4.25. R bir halka olmak üzere eğer R yarı asal halka ise aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R indirgenmiş halkadır.

(2) R merkezi katı halkadır.

(3) R terslenebilir halkadır.

(4) R merkezi terslenebilir halkadır.

(5) R yarı değişmeli halkadır.

(6) R merkezi yarı değişmeli halkadır.

(Köse vd. 2012).
İspat.
(1) $\Longleftrightarrow$ (2) Önerme 4.11. den elde edilir.
(2) $\Longrightarrow$ (4) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $(ba)^2 = baba = 0$ olduğundan ba merkezdedir.
(4) $\Longrightarrow$ (2) Kabul edelim ki; R merkezi terslenebilir, yarı asal halka ve $a, b \in R$ için $a^2b = 0$ olsun. Bu durumda R merkezi terslenebilir olduğundan aba merkezdedir. Buradan $(aba)R(aba) = 0$ ve kabule göre $aRab$, R'nin merkezindedir. Buradan her $r \in R$ için $(abrab)R(abrab) = 0$ elde edilir. R yarı asal olduğundan $abRab = 0$ ve böylece ab merkezdedir.
(2) $\Longrightarrow$ (6) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda ba merkezde ve her $r \in R$ için

$(arb)^2 = 0$ R merkezi katı olduğundan arb merkezdedir. Bu durumda R merkezi yarı değişmelidir.
(6) $\Longrightarrow$ (2) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(ba)^2 = 0$ ve ba merkezdedir. Her $r \in R$ için $(arb)^2 = 0$. Buradan $(arb)R(arb) = 0$ dır. R yarı asal olduğundan R yarı değişmelidir.
(3) $\Longrightarrow$ (4) Aşikardır.
(4) $\Longrightarrow$ (3) Kabul edelim ki; R merkezi terslenebilir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan ba merkezdedir. R yarı asal halka olduğundan $baRba = 0$ ve böylece $ba = 0$.
(5) $\Longrightarrow$ (6) Aşikardır.
(6) $\Longrightarrow$ (5) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $b(arb)a = ba(arb) = b(a^2rb) = a^2rb^2 = a(arb)b = ab(arb) = 0$. Buradan $baRba = 0$ dır. Kabulden $ba = 0$ olduğu için $aRb = 0$ elde edilir.

■

Teorem 4.26. R bir halka olmak üzere, eğer R merkezi katı ise 2-primaldir. Karşıtı halkanın yarı asal olması durumunda doğrudur **(Köse vd. 2012)**.

İspat. R merkezi katı halka olsun. $P(R)$, R de nil ideal ve $P(R) \subseteq N(R)$ her zaman vardır.

Ters kapsama için, n pozitif tamsayı olacak şekilde $a \in N(R)$ için $a^n = 0$ olsun. Kabul edelim ki; Q asal ideali için $a \notin Q$ olsun. R merkezi katı olduğundan a merkezdedir. Her bir $r_{n-1}, r_{n-2}, r_{n-3}, ..., r_2, r_1 \in R$ için

$$ar_{n-1}ar_{n-2}ar_{n-3}...ar_2ar_1a = r_{n-1}r_{n-2}r_{n-3}...r_2r_1a^n = 0$$

elde edilir. P'nin her asal ideali için $aR(ar_{n-2}a, ..., ar_2ar_1a) \subseteq P$ dir. $a \notin Q$ olduğundan P'nin her asal ideali için $ar_{n-2}a...ar_2ar_1a \in P$ ve $r_{n-2}, ..., r_2, r_1 \in R$. Buradan P'nin her asal ideali için $aR(ar_{n-3}a...ar_2ar_1a) \subseteq P$ ve $r_{n-3}, ..., r_2, r_1 \in R$ dir. Benzer düşünceyle P'nin her asal ideali için $ar_{n-4}a...ar_2ar_1a \in P$ ve her $r_{n-4}, ..., r_2, r_1 \in R$ için $aR(ar_{n-4}a...ar_2ar_1a) \subseteq P$. Benzer şekilde devam edildiğinde P'nin her asal ideali için $aRa \subseteq P$ elde edilir. Bu durumda P'nin her asal ideali için $a \in P$ dir. Bu bir çelişkidir. Bu durumda a üstel sıfırlı ise $a \in P(R)$ dir ve böylece $N(R) \subseteq P(R)$.

Karşıt olarak R yarı asal ve 2-primal halka olsun. Bu durumda $P(R) = 0$ ve $N(R) = 0$ elde edilir. Buradan R indirgenmiş ve böylece merkezi katıdır. ■

Sonuç 4.27. R merkezi katı halka olsun. Bu durumda $R/P(R)$ halkası merkezi katıdır **(Köse vd. 2012)**.

Tanım 4.28. İki direkt toplamın kesişimi M'nin direkt toplamı ise M*'ye toplam kesişim özelliğine sahiptir* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 4.29. R'nin sağ R modülü toplam kesişim özelliğine sahip ise R*'ye toplam kesişim özelliğine sahiptir* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 4.30. İki direkt toplamın toplamı M'nin direkt toplamı ise M*'ye toplamı toplam özelliğine sahiptir* denir **(Lam, 1998)**.

Tanım 4.31. R'nin sağ R-modülü toplamının toplam özelliği var ise R*'ye toplamı toplam özelliğine sahiptir* denir **(Lam, 1998)**.

Önerme 4.32. R merkezi katı halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

(1) R toplam kesişim özelliğine sahiptir.

(2) R toplamı toplam özelliğine sahiptir.

(Köse vd. 2012).

İspat.

(1) e ve f, R'de eş güçlü elemanlar olsun. Lemma 4.22. den e ve f merkezde, bu durumda $eR \cap fR = efR = feR$ ve $(ef)^2 = ef$ elde edilir. Buradan $eR \cap fR$, R'nin direkt toplamıdır.

(2) R'nin sağ idealleri eR ve fR için $e^2 = e$, $f^2 = f \in R$ olsun. Buradan $e + f - ef$ R'nin eş güçlüsüdür. R Abelyen olduğundan $ef + fR = (e + f - ef)R$. Buradan $ef + fR$, R'nin direkt toplamıdır.

■

Önerme 4.33. R halkasının merkezi katı olması için gerek ve yeter şart $D(R, \mathbb{Z})$ Dorroh genişlemesinin merkezi katı olmasıdır **(Köse vd. 2012)**.

İspat. R merkezi katı halka ve $(r, n), (s, m) \in D(R, \mathbb{Z})$ için $(r, n)^2(s, m) = 0$ olsun. Bu durumda $n^2m = 0$ dan $n = 0$ veya $m = 0$. Kabulden $n = 0$ alınır ve buradan $r^2s + mr^2 = 0$ dır. Bu durumda $r(s + m1_R) \in C(R)$. Buradan her $(u, t) \in D(R, \mathbb{Z})$ için $(r, n)(s, m)(u, t) = (u, t)(r, n)(s, m)$ elde edilir. Böylece $D(R, \mathbb{Z})$ merkezi katıdır. Karşıtı açıktır. ■

Örnek 4.34. $\mathbb{H}$ reel sayılar üzerinde kuarterniyon halkası ve $T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, $\mathbb{H}$'nin $\mathbb{H}$ tarafından aşikar genişleme halkası olsun. Bu durumda $\mathbb{H}$ indirgenmiş olmasına rağmen değişmeli değildir.
$\begin{bmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ üstel sıfırlı elemanı göz önüne alınsın.

$$\begin{bmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ merkezi katı değildir **(Köse vd. 2012)**.

Uyarı 4.35. İndirgenmiş halkalar Armendarizdir **(Armendariz, 1974)**. Armendariz halkalar, R'nin sıfırlayanı ile $R[x]$'in sıfırlayanı arasında doğal bir ilişkinin varlığını ortaya koyar. Armendariz halkaların çok çeşitli genelleştirmeleri yapılmıştır.

Uyarı 4.36. Her nil Armendariz halkanın zayıf Armendariz halka olduğu açıktır.

(Anderson ve Camillo, 1998) [Teorem 5] te $n \geq 2$ doğal sayısı için $R[x]/(x^n)$ Armendariz olması için gerek ve yeter şart R'nin indirgenmiş olmasıdır.

Teorem 4.37. *R sağ temel projektif halka ve $n \geq 2$ bir doğal sayı olsun. Bu durumda R'nin merkezi katı olması için gerek ve yeter şart $R[x]/(x^n)$'in merkezi Armendariz olmasıdır* **(Köse vd. 2012)**.

İspat. Kabul edelim ki; R merkezi katı halka olsun. Önerme 4.11. den R indirgenmiş halkadır. **(Anderson ve Camillo, 1998)** [Teorem 5] ten $R[x]/(x^n)$ Armendariz ve buradan merkezi Armendarizdir.
Karşıt olarak kabul edelim ki; $R[x]/(x^n)$ merkezi Armendariz olsun. Kabulden ve **(Agayev vd. 2011)** [Teorem 2.5] ten $R[x]/(x^n)$ Armendarizdir. Bu durumda **(Anderson ve Camillo, 1998)** [Teorem 5] ten R indirgenmiş ve böylece merkezi katıdır. ■

Teorem 4.38. *R bir halka olmak üzere, eğer R merkezi katı ise R nil Armendarizdir* **(Köse vd. 2012)**.

İspat. Eğer R merkezi katı ise Teorem 4.26. dan 2-primal ve böylece $N(R) = P(R)$ olup $N(R)$, R'nin nil idealidir. **(Köse vd. 2012)**[Önerme 2.1] den bütün üstel sıfırlı elemanların kümesinden oluşan halka idealleri oluşturur buradan R nil Armendarizdir. ■

Sonuç 4.39. *R bir halka olmak üzere, eğer R merkezi katı halka ise $R[x]/(x^n)$ nil Armendarizdir.*

İspat. R merkezi katı ise Teorem 4.38. den R nil Armendarizdir. **(Antoine, 2008)** [Teorem 4.1] den $R[x]/(x^n)$ nil Armendarizdir. ■

5. MERKEZİ İNDİRGENMİŞ HALKALAR

5.1. Merkezi İndirgenmiş Halkalar

Bu bölümde merkezi indirgenmiş halkalar tanıtılacaktır. İndirgenmiş halkaların bazı sonuçları, merkezi indirgenmiş halkalara genişletilecektir. Merkezi indirgenmiş halkaların indirgenmiş olmadığına yönelik örnekler verilecektir. Ayrıca merkezi indirgenmiş halkaların Abelyen olduğu gösterilerek, abelyen olan merkezi indirgenmiş olmayan halka örnekleri verilecektir. Her merkezi indirgenmiş halkanın merkezi yarı değişmeli, zayıf yarı değişmeli, abelyen ve direkt sonlu olduğu gösterilecektir. Üstelik R halkasının merkezi indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $D(R, \mathbb{Z})$ Dorroh genişlemesinin merkezi indirgenmiş olmasıdır.

Ayrıca R'nin merkezi indirgenmiş olması ile $R[x]$ polinom halkasının, $R[[x]]$ kuvvet serisi halkasının ve $R[x, x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının merkezi indirgenmiş olması arasında aşağıdaki ilişki vardır.
R merkezi indirgeniş halka olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) R merkezi indirgenmiştir.

(2) $R[x]$ merkezi indirgenmiştir.

(3) $R[[x]]$ merkezi indirgenmiştir.

(4) $R[x, x^{-1}]$ merkezi indirgenmiştir.

Tanım 5.1. R bir halka, $x^n = 0$ olacak şekilde her $x \in R$ için $x \in C(R)$ oluyorsa R'ye *merkezi indirgenmiş halka* denir **(Üngör vd. 2013)**.

Örnek 5.2. Değişmeli halkalar ve indirgenmiş halkalar merkezi indirgenmiş halkalardır. Karşıtı doğru değildir. Yani, merkezi indirgenmiş halkaların indirgenmiş olması gerekmez **(Üngör vd. 2013)**.

Örnek 5.3. S değişmeli bir halka ve $R = S[x]/(x^2)$ halkası göz önüne alınsın. R değişmeli olduğundan R merkezi indirgenmiştir. $a = x + (x^2) \in R$ için $a^2 = 0$ olmasına rağmen $a \neq 0$. Bu nedenle R indirgenmiş değildir **(Üngör vd. 2013)**.

Önerme 5.4. Eğer R indirgenmiş halka ise R merkezi indirgenmiş halkadır. Karşıtı aşağıdaki koşullardan

(1) R yarı asal halkadır.

(2) R sağ(sol) temel projektif halkadır.

(3) R sağ(sol) temel yarı Baer halkadır.

herhangi birinin sağlanıyor olması durumunda doğrudur. **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. $x^n = 0$ olsun. R indirgenmiş olduğundan $x = 0$ dır. Her $r \in R$ için $r0 = 0r = 0$ olduğundan $0 \in C(R)$ olup buradan $x \in C(R)$ elde edilir ve böylece R merkezi indirgenmiştir. Karşıt olarak,

(1) R yarı asal halka ve $x \in R$ için $x^n = 0$ olsun. Kabulden x merkezdedir. Buradan $xRx = 0$ elde edilir. R yarı asal olduğundan $x = 0$ dır. Böylece R indirgenmiştir.

(2) $x \in R$ için $x^n = 0$ olsun. Kabulden x merkezdedir. R sağ temel projektif halka olduğundan $x \in r_R(x) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ eş güçlü elemanı vardır. Buradan $x = ex = xe = 0$ olur. Böylece R indirgenmiştir.

(3) (2) nin ispatı ile benzerdir.

■

Sonuç 5.5. R merkezi indirgenmiş halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R sağ temel projektif halkadır.

(2) R sol temel projektif halkadır.

(3) R sağ temel yarı Baer halkadır.

(4) R sol temel yarı Baer halkadır.

(Üngör vd. 2013).

Uyarı 5.6. R'nin homomorfik görüntüsü merkezi indirgenmiş olmasına rağmen R merkezi indirgenmiş olmayabilir **(Üngör vd. 2013)**.

Örnek 5.7. D bölmeli halka, $R = D[x, y]$ ve $xy \neq yx$ için $I = (x^2)$ olsun. R tamlık bölgesi olduğundan merkezi indirgenmiştir. Diğer taraftan, $x + I$, R/I'nın üstel sıfırlı elemanı olmasına rağmen $x + I$, R/I'da merkezde değildir. Bu durumda R/I merkezi indirgenmiş değildir **(Üngör vd. 2013)**.

Lemma 5.8. I, R'nin ideali olmak üzere R merkezi indirgenmiş halka ise R/I merkezi indirgenmiştir **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. n pozitif tamsayı olacak şekilde $a + I \in R/I$ için $(a + I)^n = \bar{0}$ olsun. Bu durumda $a^n \in I$ ve m pozitif tamsayısı için $(a^n)^m = 0$. R merkezi indirgenmiş olduğundan $a \in C(R)$. Buradan her $b \in R$ için $ab - ba \in R$ ve böylece $a + I \in C(R)$. Buradan R/I merkezi indirgenmiştir. ■

Lemma 5.9. R bir halka olsun. Bu durumda R'nin tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter şart asal ve merkezi indirgenmiş olmasıdır **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. Kabul edelim ki; R bir tamlık bölgesi olsun. R asal ve indirgenmiş olduğundan merkezi indirgenmiştir. Karşıt olarak kabul edelim ki; R asal ve merkezi indirgenmiş halka olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Böylece her $r \in R$ için $rab = 0$ dır. Her $r \in R$ için $bra \in C(R)$. Her $r \in R$ ve her $s \in R$ için $asbrasb \in (asb)R(asb)$ olsun. $ab = 0$ ve $bra \in C(R)$ olduğundan $asbrasb = abras^2b = 0$. Bu durumda $(asb)R(asb) = 0$ dır. R asal olduğundan $asb = 0$ ve her $s \in R$ için $aRb = 0$ dır. R asal olduğundan $a = 0$ ya da $b = 0$ dır. Buradan R bir tamlık bölgesidir. ■

Önerme 5.10. Her merkezi indirgenmiş halka merkezi yarı değişmelidir **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. R merkezi indirgenmiş halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $ab = 0$ olduğundan $ba \in C(R)$. Bu durumda her $r \in R$ için $barb = rbab = 0$ dır. $(arb)^2 = 0$ olup kabulden arb merkezdedir. ■

Lemma 5.11. Eğer R asal merkezi yarı değişmeli ise R indirgenmiştir **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a \in R$ için $a^n = 0$ olsun. R merkezi yarı değişmeli olduğundan $a^{n-1}Ra \in C(R)$. Bu durumda her $x \in R$ için $(axa^{n-1})R(axa^{n-1}) = 0$. Kabulden her $x \in R$ için $axa^{n-1} = 0$ ve buradan $aRa^{n-1} = 0$ elde edilir. Kabulden $a = 0$ ya da $a^{n-1} = 0$ dır. Eğer $a = 0$ ise ispat tamamlanmıştır. Eğer $a^{n-1} = 0$ ise bu durumda benzer teknik kullanılarak $a = 0$ dır. ■

Uyarı 5.12. I, R'nin ideali olmak üzere, R/I merkezi indirgenmiş olmasına rağmen R merkezi indirgenmiş olmayabilir **(Üngör vd. 2013)**.

Örnek 5.13. F herhangi bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ olsun. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ üstel sıfırlı olmasına rağmen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ R'nin merkezinde olmadığı için R merkezi indirgenmiş değildir. Buna rağmen R'nin $I = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ideali göz önüne alındığında $R/I \cong F$ olduğu için R/I merkezi indirgenmiştir **(Üngör vd. 2013)**.

Lemma 5.14. I, R'nin indirgenmiş ideali olmak üzere eğer R/I merkezi indirgenmiş halka ise R indirgenmiş halkadır **(Üngör vd. 2013)**.

Lemma 5.15. Eğer R merkezi indirgenmiş ise R zayıf yarı değişmelidir **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R merkezi yarı değişmeli olduğundan $ba \in C(R)$. Her $r \in R$ için $(arb)^2 = arbarb = arrbab = 0$ buradan $arb \in N(R)$ elde edilir. Yani R zayıf yarı değişmelidir. ■

Teorem 5.16. R bir halka olmak üzere, eğer R merkezi indirgenmiş ise 2-primaldir. Karşıtı halkanın yarı asal olması durumunda doğrudur **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. R merkezi indirgenmiş halka olsun. $P(R)$, R'de nil ideal ve $P(R) \subseteq N(R)$ her zaman vardır.

$a \in N(R)$ olsun. Bu durumda bir n pozitif tamsayısı için $a^n = 0$ olsun. $(RaR)^n = 0 \subseteq P(R)$ ve bu durumda $RaR \subseteq P(R)$ dir. Buradan $a \in P(R)$ dir. Buradan $N(R) \subseteq P(R)$ elde edilir.

Karşıtını, R yarı asal ve 2-primal halka olsun. Bu durumda $P(R) = 0$ ve $N(R) = 0$ elde edilir. Buradan R indirgenmiş ve böylece merkezi indirgenmiştir. ■

Lemma 5.17. R bir halka olmak üzere, eğer R merkezi indirgenmiş ise R Abelyendir **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. $e^2 = e \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $(re - ere)^2 = 0$ ve buradan $re - ere$ merkezdedir. $e(er - ere) = (er - ere)e$ olup buradan $ere = re$ elde edilir. Benzer şekilde her $r \in R$ için $(er - ere)^2 = 0$ ve buradan $ere = er$ elde edilir. Böylece R Abelyendir. ■

Lemma 5.17. nin karşıtı genelde doğru değildir, yani her Abelyen halkanın merkezi indirgenmiş olması gerekmez.

Örnek 5.18. $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \quad a \equiv d(mod2), \quad b \equiv c \equiv 0(mod2) \right\}$ halkası göz önüne alınsın. R'nin eş güçlü elemanları sadece $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisler olduğundan R Abelyendir. Diğer taraftan $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, R'nin üstel sıfırlı elemanı olmasına rağmen

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan R merkezi indirgenmiş değildir **(Üngör vd. 2013)**.

Teorem 5.19. R bir halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R güçlü düzenlidir.

(2) Her sağ R-modül flat ve R merkezi indirgenmiştir.

(3) Her devirli sağ R-modül flat ve R merkezi indirgenmiştir.

(4) R düzenli ve merkezi indirgenmiştir.

(5) R düzenli ve indirgenmiştir.

(6) R düzenli ve Abelyendir.

(Üngör vd. 2013).

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) R güçlü düzenli olduğundan, R merkezi indirgenmiştir. Diğer taraftan, R düzenli ve buradan her R-modül flat.
(2) $\Longrightarrow$ (3) ve (3) $\Longrightarrow$ (4) Aşikardır.
(4) $\Longrightarrow$ (5) $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Kabulden $a = aba$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. ab eş güçlü olduğundan Lemma 5.17. den $a = a^2b = 0$. Bu durumda R indirgenmiştir.
(5) $\Longrightarrow$ (6) Aşikardır.
(6) $\Longrightarrow$ (1) $a \in R$ olsun. Kabulden $a = aba$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. ab eş güçlü olduğundan ab merkezdedir. Buradan $a = a^2b$ ve bu nedenle R güçlü düzenlidir. ■

Önerme 5.20. R'nin merkezi indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $S^{-1}R$ halkasının merkezi indirgenmiş olmasıdır **(Üngör vd. 2013)**.

Teorem 5.21. R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R merkezi indirgenmiştir.

(2) $R[x_1, \ldots, x_n]$ merkezi indirgenmiştir.

(3) $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ merkezi indirgenmiştir.

(4) $R[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$ merkezi indirgenmiştir.

(Üngör vd. 2013).

İspat. $(1), (2), (3)$ denklikleri R merkezi indirgenmiş gerek ve yeter şart $R[x]$ merkezi indirgenmiş olduğundan açık bir şekilde gösterilebilir. Tek yönlü açıktır. Kabul edelim ki; R merkezi indirgenmiş olsun. $f(x) = a_0 + a_1x^1 + ... + a_nx^n \in R[x]$ üstel sıfırlı olsun. İspatı tamamlamak için $a_0 + a_1x^1 + ... + a_nx^n \in C(R)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f(x)^2 = 0$ olduğundan polinomun katsayılarından;

$$\begin{aligned} a_0^2 &= 0 \qquad (1) \\ a_0a_1 + a_1a_0 &= 0 \qquad (2) \\ a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0 &= 0 \qquad (3) \\ &... \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Bu durumda a_0 merkezde ve (2) denkleminden $2a_0a_1 = 0$ dır. (3) denkleminden $2a_0a_2 + a_1^2 = 0$. Buradan $2a_0a_2 = -a_1^2$ elde edilir. Bu durumda

$a_1^4 = 0$ olup $a_1 \in C(R)$. Bu şekilde devam edersek $a_2, ..., a_n \in C(R)$ olduğunu gösteririz. Varsayalım ki $f(x)^3 = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
a_0^3 &= 0 && (1)\\
a_0^2 a_1 + a_0 a_1 a_0 + a_1 a_0^2 &= 0 && (2)\\
a_0^2 a_2 + a_0 a_1^2 + a_0 a_2 a_0 + a_1 a_0 a_1 + a_1^2 a_0 + a_2 a_0^2 &= 0 && (3)\\
a_0^2 a_3 + a_0 a_1 a_2 + a_0 a_2 a_1 + a_0 a_3 a_0 + a_1 a_0 a_2 + a_1^3 + &\\
a_1 a_2 a_0 + a_2 a_0 a_1 + a_2 a_1 a_0 + a_3 a_0^2 &= 0 && (4)\\
&...
\end{aligned}$$

(1) denkleminden a_0 merkezdedir. (4) denkleminden $3a_3a_0^2 + 3a_2a_0a_1 + 3a_1a_2a_0 + a_1^3 = 0$. Bu durumda $a_0^3 = 0$ ve $a_0 \in C(R)$, $a_1^9 = 0$ ve buradan a_1 merkezdedir. Bu şekilde devam edersek $a_2, ..., a_n \in C(R)$ olduğunu gösteririz. $f(x)^m = 0$ ise $f(x)$ in bütün katsayılarının merkezde olduğu gösterilebilir.

(2) $\Rightarrow$ (4) $S = \{1, x, x^2, ...\}$, $R[x]$ in çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Lemma 5.20. den $R[x, x^{-1}] = S^{-1}R[x]$ merkezi indirgenmiştir.

(4) $\Rightarrow$ (2) Aşikardır. ■

Önerme 5.22. R halkasının merkezi indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $D(R, \mathbb{Z})$ Dorroh genişlemesinin merkezi indirgenmiş olmasıdır **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. R merkezi indirgenmiş halka ve $(r, n) \in D(R, \mathbb{Z})$, m pozitif tamsayısı için $(r, n)^m = 0$ olsun. $n^m = 0$ olduğundan $n = 0$ ve buradan $r^m = 0$. Kabulden r merkezdedir. Bu durumda her $(s, a) \in D(R, \mathbb{Z})$ için $(r, n)(s, a) = (s, a)(r, n)$. Buradan $D(R, \mathbb{Z})$ merkezi indirgenmiştir. Tersi aşikardır. ■

Örnek 5.23. $\mathbb{H}$ reel sayılar üzerinde kuarterniyon halkası olsun ve $T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, $\mathbb{H}$'nin $\mathbb{H}$ tarafından aşikar genişleme halkası olsun. Bu durumda $\mathbb{H}$ indirgenmiş olmasına rağmen değişmeli değildir.

$\begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ üstel sıfırlı elemanı göz önüne alınsın.

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ merkezi indirgenmiş değildir **(Üngör vd. 2013)**.

Önerme 5.24. R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R değişmelidir.

(2) $T(R, R)$ merkezi indirgenmiştir.

(Üngör vd. 2013).

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) Kabulden $T(R,R)$ değişmeli ve böylece merkezi indirgenmiştir.
(2) $\Rightarrow$ (1) $x, y \in R$ olsun. $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T(R,R)$ sıfır güçlü olduğundan $\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in T(R,R)$ ile değiştirilebilir. Bu durumda $xy = yx$ elde edilir.

■

Teorem 5.25. *R bir sağ temel projektif halka ve $n \geq 2$ bir doğal sayı olsun. Bu durumda R'nin merkezi indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $R[x]/(x^n)$'in merkezi Armendariz olmasıdır* **(Üngör vd. 2013)**.

Teorem 5.26. *R merkezi indirgenmiş halka ise bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *R nil Armendarizdir.*

(2) *R zayıf Armendarizdir.*

(3) *R merkezi Armendarizdir.*

(Üngör vd. 2013).

İspat. Eğer R merkezi indirgenmiş ise Teorem 5.16. dan 2-primal ve böylece $N(R)$ idealdir. **(Antoine, 2008)**[Önerme 2.1] de bütün üstel sıfırlı elemanların kümesi bir ideal olan halka nil Armendarizdir. Böylece R zayıf Armendariz ve merkezi Armendarizdir. ■

Sonuç 5.27. *Eğer R merkezi indirgenmiş halka ise $R[x]/(x^n)$ nil Armendarizdir* **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. R merkezi indirgenmiş ise Teorem 5.26. dan R nil Armendarizdir. **(Antoine, 2008)**[Önerme 4.1] den $R[x]/(x^n)$ nil Armendarizdir. ■

Teorem 5.28. *Eğer R merkezi indirgenmiş halka ise $T(R,R)$ aşikar genişlemesi merkezi Armendarizdir* **(Üngör vd. 2013)**.

İspat. $f(x) = \begin{bmatrix} a_0 & a_0' \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_1' \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} x + ... + \begin{bmatrix} a_n & a_n' \\ 0 & a_n \end{bmatrix} x^n = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ 0 & f_1(x) \end{bmatrix}$,

$$g(x) = \begin{bmatrix} b_0 & b_0' \\ 0 & b_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_1' \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} x + ... + \begin{bmatrix} b_t & b_t' \\ 0 & b_t \end{bmatrix} x^t \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \\ 0 & g_1(x) \end{bmatrix} \in T(R,R)[x] \text{ olsun.}$$

$f_1(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $f_2(x) = a_0' + a_1'x + ... + a_n'x^n$, $g_1(x) = b_0 + b_1x + ... + b_tx^t$, $g_2(x) = b_0' + b_1'x + ... + b_t'x^t$. Kabul edelim ki; $f(x)g(x) = 0$ olsun.

$$f(x)g(x) = \begin{bmatrix} f_1(x)g_1(x) & f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x) \\ 0 & f_1(x)g_1(x) \end{bmatrix} = 0$$

Bu durumda $f_1(x)g_1(x) = 0$ ve $f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x) = 0$ dır. Teorem 5.26. dan R hem nil Armendariz hem de merkezi Armendarizdir. Her i, j için a_ib_j ve b_ja_i R nin merkezi üstel sıfırlı elemanıdır. $f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)$=0 polinomunun katsayılarından

$$
\begin{aligned}
a_0b_0^{'} + a_0^{'}b_0 &= 0 \qquad (1)\\
a_0b_1^{'} + a_1b_0^{'} + a_0^{'}b_1 + a_1^{'}b_0 &= 0 \qquad (2)\\
a_0b_2^{'} + a_1b_1^{'} + a_2b_0^{'} + a_0^{'}b_2 + a_1^{'}b_1 + a_2^{'}b_0 &= 0 \qquad (3)\\
&...
\end{aligned}
$$

denklemlerini elde ederiz. (1) denklemi sağdan a_0 ile çarpılarak $a_0b_0^{'}a_0 + a_0^{'}b_0a_0 = 0$ elde edilir. b_0a_0 merkezi üstel sıfırlı olduğundan $a_0b_0^{'}a_0$ merkezi üstel sıfırlı böylece $a_0b_0^{'}$ ve $b_0^{'}a_0$ merkezi üstel sıfırlıdır. (1) denkleminden $a_0^{'}b_0$ ve $b_0a_0^{'}$ merkezi üstel sıfırlıdır.

(2) denklemi sağdan a_0 ile çarpılarak $a_0b_1^{'}a_0 + a_1b_0^{'}a_0 + a_0^{'}b_1a_0 + a_1^{'}b_0a_0 = 0$ elde edilir. $b_0^{'}a_0$, b_1a_0 ve b_0a_0 merkezi üstel sıfırlı $a_0b_1^{'}a_0$ ve böylece $a_0b_1^{'}$ ve $b_1^{'}a_0$ merkezi üstel sıfırlıdır. (2) denklemi soldan b_0 ile çarpılarak ve b_0a_0, b_0a_1 ve $b_0a_0^{'}$ elemanlarının merkezi üstel sıfırlılığı kullanılarak $b_0a_1^{'}b_0$ merkezi üstel sıfırlı ve böylece $b_0a_1^{'}$ ve $a_1^{'}b_0$ merkezi üstel sıfırlıdır. (2) denklemi sağdan a_1 ile çarpılarak ve $a_0b_1^{'}a_1$, $a_0^{'}b_1a_1$ ve $a_1^{'}b_0a_1$ elemanlarının merkezi üstel sıfırlılığı kullanılarak $a_1b_0^{'}a_1$ ve böylece $a_1b_0^{'}$ ve $b_0^{'}a_1$ merkezi üstel sıfırlıdır. (2) denkleminden geriye kalan terim $a_0^{'}b_1$ ve $b_1a_0^{'}$ merkezi üstel sıfırlıdır.

(3) denklemi sağdan a_0 ile çarpılarak ve $b_1^{'}a_0$, $b_0^{'}a_0$, b_2a_0, b_1a_0 ve b_0a_0 elemanlarının merkezi üstel sıfırlı olduğu kullanılarak $a_0b_2^{'}a_0$ ve buradan $b_2^{'}a_0$ ve $a_0b_2^{'}$ merkezi üstel sıfırlıdır. (3) denklemini soldan b_0 ile çarpılarak ve b_0a_0, b_0a_1, b_0a_2, $b_0a_0^{'}$ ve $b_0a_1^{'}$ elemanlarının merkezi üstel sıfırlılığı kullanılarak $b_0a_2^{'}b_0$ olup buradan $b_0a_2^{'}$ ve $a_2^{'}b_0$ merkezi üstel sıfırlıdır. (3) denklemi sağdan a_1 ile çarpılarak ve $a_0b_2^{'}a_1$, $a_2b_0^{'}a_1$, $a_0^{'}b_2a_1$, $a_1^{'}b_1a_1$, $a_2^{'}b_0a_1$ merkezi üstel sıfırlıdır. Buradan $a_1b_1^{'}a_1$ ve böylece $a_1b_1^{'}$ ve $b_1^{'}a_1$ merkezi üstel sıfırlıdır. Benzer şekilde (3) denklemi soldan b_1 ile çarpılarak $b_1a_0b_2^{'}$, $b_1a_1b_1^{'}$, $b_1a_2b_0^{'}$, $b_1a_0^{'}b_2$ ve $b_1a_2^{'}b_0$ merkezi üstel sıfırlı olup buradan $b_1a_1^{'}b_1$ ve böylece $b_1a_1^{'}$ ve $a_1^{'}b_1$ merkezi üstel sıfırlıdır. (3) denklemi sağdan a_2 ile çarpılarak ve $a_0b_2^{'}a_2$, $a_1b_1^{'}a_2$, $a_0^{'}b_2a_2$, $a_1^{'}b_1a_2$, $a_2^{'}b_0a_2$ merkezi üstel sıfırlı olduğu kullanılarak buradan $a_2b_0^{'}a_2$ olup böylece $a_2b_0^{'}$ ve $b_0^{'}a_2$ merkezi üstel sıfırlıdır. (3) denklemindeki $a_0^{'}b_2$ merkezi üstel sıfırlı elemanların toplamı olduğundan $b_2a_2^{'}$ merkezi üstel sıfırlıdır. Böylece (3) denkleminin bütün terimleri üstel sıfırlıdır.

İspatı tamamlamak için $i + j \leq n + t$ için $i + j$ üzerinde tümevarım yöntemi kullanılmalıdır. Kabul edelim ki; her $i + j - 1$ için $i + j \leq n + t$ doğru olsun yani her k ve l için $k + l \leq i + j - 1$ olacak şekilde $a_kb_l^{'}$, $b_l^{'}a_k$, $a_k^{'}b_l$,$b_la_k^{'}$ merkezi üstel sıfırlıdır. $i + j$. denklemi düşünüldüğünde $a_0b_{i+j}^{'} + a_1b_{i+j-1}^{'} + a_2b_{i+j-2}^{'} + ... + a_{i+j-1}b_1^{'} + a_{i+j}b_0^{'} + a_0^{'}b_{i+j} + a_1^{'}b_{i+j-1} + ... + a_{i+j-2}^{'}b_2 + a_{i+j-1}^{'}b_1 + a_{i+j}^{'}b_0 = 0$.
Tümevarımdan ispatı tamamlamak amacıyla, $(i + j)$ de ki tüm terimlerin merkezi üs-

tel sıfırlı olduğu gösterilmelidir. $(i+j)$ denklemi a_0 ile sağdan çarpıldığında $a_0b'_{i+j}a_0 + a_1b'_{i+j-1}a_0 + a_2b'_{i+j-2}a_0 + ... + a_{i+j-1}b'_1a_0 + a_{i+j}b'_0a_0 + a'_0b_{i+j}a_0 + a'_1b_{i+j-1}a_0 + ... + a'_{i+j-2}b_2a_0 + a'_{i+j-1}b_1a_0 + a'_{i+j}b_0a_0$ dır. Tümevarımdan $b_{i+j-1}a_0, b_{i+j-2}a_0, ..., b'_1a_0, b'_0a_0$ merkezi üstel sıfırlı ve $b_{i+j}a_0, b_{i+j-1}a_0, ..., b_2a_0, b_1a_0, b_0a_0$ merkezi üstel sıfırlı olduğundan $a_0b'_{i+j}a_0$ ve bu durumda $a_0b'_{i+j}$ ve $b'_{i+j}a_0$ merkezi üstel sıfırlıdır. Benzer şekilde, $(i+j)$ denklemi b_0 ile soldan çarpıldığında $b_0a_0b'_{i+j} + b_0a_1b'_{i+j-1} + b_0a_2b'_{i+j-2} + ... + b_0a_{i+j-1}b'_1 + b_0a_{i+j}b'_0 + b_0a'_0b_{i+j} + b_0a'_1b_{i+j-1} + ... + b_0a'_{i+j-2}b_2 + b_0a'_{i+j-1}b_1 + b_0a'_{i+j}b_0$. Bu durumda $b_0a_0, b_0a_1, b_0a_2, ..., b_0a_{i+j-1}, b_0a_{i+j}, b_0a'_0, b_0a'_1, ..., b_0a'_{i+j-2}, b_0a'_{i+j-1}$ merkezi üstel sıfırlı olduğundan $b_0a'_{i+j}b_0$ merkezi üstel sıfırlı olup böylece $b_0a'_{i+j}$ ve $a'_{i+j}b_0$ merkezi üstel sıfırlıdır. Aynı yöntemle devam edilerek $k+l \leq i+j$ olacak şekilde her k ve l için $a_kb'_l, b_la'_k, a'_kb_l, b'_la_k$ merkezi üstel sıfırlıdır. Buradan ümevarım yöntemi ile ispat tamamlanır. Sonuç olarak $i+j \leq n+t$ olacak şekilde her i ve j için $a_ib'_j, b'_ja_i, a'_ib_j, b_ja'_i$ merkezi üstel sıfırlıdır. Matrisin bütün bileşenleri R nin merkezinde yer aldığından;

$$\begin{bmatrix} a_i & a'_i \\ 0 & a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j & b'_j \\ 0 & b_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_ib_j & a_ib'_j + a'_ib_j \\ 0 & a_ib_j \end{bmatrix}$$

$T(R,R)$ halkasında merkezdedir. ■

5.2. Merkezi İndirgenmiş Halkaların Terslenebilir Halkalar İle İlişkileri

Eğer $ab = 0$ olacak şekilde $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa R halkasına *terslenebilir halka* denir. İlk olarak Cohn tarafından **(Cohn, 1999)** çalışılmıştır. Bu bölümde terslenebilir halkaların genelleştirilmesi olan merkezi terslenebilir halkalar tanıtılacaktır. $a, b \in R$ için eğer $ab = 0$ iken her $r \in R$ için $Rbra$, R'nin sol nil ideali oluyorsa R'ye *zayıf terslenebilir halka* denir **(Liang ve Gang, 2007)**. Merkezi terslenebilir halkanın terslenebilir ile zayıf terslenebilir halkanın merkezi terslenebilir olmadığına yönelik örnekler verilecektir. Merkezi terslenebilir halkalar terslenebilir halkalar ve zayıf terslenebilir halkalar arasındadır. Ayrıca merkezi terslenebilir halkaların Abelyen olduğu ve bu gerektirmenin karşıtının doğru olmadığı gösterilecektir. Üstelik R'nin Armendariz halka olması durumunda R merkezi terslenebilirdir gerek ve yeter şart $R[x]$ polinom halkası merkezi terslenebilirdir gerek ve yeter şart $R[x, x^{-1}]$ Laurent polinom halkası merkezi terslenebilirdir. Ayrıca R merkezi terslenebilirdir gerek ve yeter şart $D(R, \mathbb{Z})$ merkezi terslenebilirdir.

Tanım 5.1. R bir halka, $ab = 0$ olacak şekilde $a, b \in R$ için $ba \in C(R)$ oluyorsa R'ye *merkezi terslenebilir* denir **(Köse vd. 2014)**.

Değişmeli halkalar, indirgenmiş halkalar, simetrik halkalar ve terslenebilir halkalar merkezi terslenebilirdir. Merkezi terslenebilir halkaların terslenebilir olması gerekmez.

Örnek 5.2. R değişmeli indirgenmiş bir halka ve $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$ halkası göz önüne alınsın. S'nin merkezi terslenebilir olmasına rağmen terslenebilir olmadığını gösterelim.

İspat. $x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$ olmak üzere $xy = 0$ olsun.

Buradan aşağıdaki denklemler elde edilir.

(1) $a_1 a_2 = 0$,

(2) $a_1 b_2 + b_1 a_2 = 0$,

(3) $a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2 = 0$,

(4) $a_1 d_2 + d_1 a_2 = 0$,

R değişmeli olduğundan $a_2 a_1 = 0$. (2) denklemi sol taraftan $b_1 a_2$ ile çarpıldığında $(b_1 a_2)^2 = 0$ ve R indirgenmiş olduğundan $b_1 a_2 = 0$ elde edilir.

Benzer yöntem kullanılarak $a_1d_2 = d_1a_2 = 0$ elde edilir. (3) denklemi sağdan a_1c_2 ile çarpıldığında $(a_1c_2)^2 = 0$ ve buradan $a_1c_2 = c_2a_1 = 0$ elde edilir. Bu durumda $b_1d_2 + c_1a_2 = 0$ olur. Bu denklem sağdan b_1d_2 ile çarpıldığında $b_1d_2 = d_2b_1 = 0$ ve buradan $c_1a_2 = a_2c_1 = 0$. Sonuç olarak

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

merkezi ve bu durumda S merkezi terslenebilirdir. Diğer taraftan **(Kim ve Lee, 2003)** [Örnek 1.5] ten S terslenebilir değildir. ■

Aşağıda merkezi terslenebilir halkaların hangi koşullar altında terslenebilir olduğu verilmiştir.

Önerme 5.3. Eğer R terslenebilir halka ise R merkezi terslenebilirdir. Karşıtı aşağıdaki koşullardan

(1) R yarı asal halkadır.

(2) R sağ(sol) temel projektif halkadır.

(3) R sağ(sol) temel yarı Baer halkadır.

herhangi birinin sağlanması durumunda doğrudur.

(Köse vd. 2014).

İspat. İlk durum aşikardır. Karşıtı için kabul edelim ki; R merkezi terslenebilir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $ba \in C(R)$ dir. Şimdi aşağıdaki durumlar göz önüne alındığında;

(1) R yarı asal halka olsun. $ba \in C(R)$ olduğundan $baRba = 0$ ve buradan $ba = 0$ dır. Böylece R terslenebilirdir.

(2) R sağ temel projektif halka olduğundan $r_R(a) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ eş güçlü elemanı vardır. Buradan $b = eb$ ve $ae = 0$ bulunur. $ab \in C(R)$ olduğundan $ba = eba = bae = 0$ ve böylece R terslenebilirdir. Benzer şekilde sol temel projektif halkalar içinde ispat tekrarlanır.

(3) (2) nin ispatına benzerdir.

■

Sonuç 5.4. Eğer R merkezi terslenebilir halka ise bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R sağ temel projektif halkadır.

(2) R sol temel projektif halkadır.

(3) R sağ temel yarı Baer halkadır.

(4) R sol temel yarı Baer halkadır.

(Köse vd. 2014).

Önerme 5.5. I sonlu indeks kümesi olmak üzere halkaların $\{R_i\}_{i\in I}$ sınıfı göz önüne alınsın. Bu durumda her $i \in I$ için R_i'nin merkezi terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $\bigoplus R_i$ direkt toplam halkasının merkezi terslenebilir olmasıdır **(Köse vd. 2014)**.

İspat. Gerek kısım tanımlardan açıktır. Diğer taraftan merkezi terslenebilir bir halkanın alt halkası merkezi terslenebilir olduğundan yeter kısım elde edilir. ■

Sonuç 5.6. R bir halka olsun. Bu durumda $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1-e)R$ merkezi terslenebilir olması için gerek ve yeter şart R'nin merkezi terslenebilir olmasıdır **(Köse vd. 2014)**.

Uyarı 5.7. R'nin homomorfik görüntüsü merkezi terslenebilir halka olmasına rağmen R merkezi terslenebilir olmayabilir **(Köse vd. 2014)**.

Örnek 5.8. D bölmeli halka olmak üzere, $R = D[x, y]$ ve $xy \neq yx$ için $I = (xy)$ olsun. R tamlık bölgesi olduğundan R merkezi terslenebilirdir. Diğer taraftan $(x+I)(y+I) = 0+I$ olmasına rağmen $(y+I)(x+I) \in R/I$ merkezde değildir. Buradan R/I merkezi terslenebilir değildir **(Köse vd. 2014)**.

Tanım 5.9. R'nin her tersinir elemanı merkezde ise (yani; $U(R) \subseteq C(R)$) R halkasına *merkezi tersinir* denir **(Khurana vd. 2010)**.

Uyarı 5.10. Merkezi tersinir her halka Abelyendir **(Köse vd. 2014)**.

Lemma 5.11. R merkezi tersinir halka olsun. Eğer I; R'nin nil ideali ise R/I merkezi terslenebilirdir **(Köse vd. 2014)**.

İspat. Kabul edelim ki; R merkezi tersinir halka olsun. $a, b \in R$ için $(a+I)(b+I) = 0+I$ olsun. $ab \in I$ ve böylece $(ab)^n = 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı vardır. Buradan $(ba)^{n+1} = 0$ elde edilir. Bu durumda $1 - ba$ tersinir ve kabulden merkezdedir. Böylece her $r \in R$ için $rba = bar$. Yani; $(b+I)(a+I) \in C(R/I)$. ■

Uyarı 5.12. R bir halka ve I, R'nin ideali olmak üzere R/I merkezi terslenebilir olmasına rağmen R merkezi terslenebilir olmayabilir **(Köse vd. 2014)**.

Örnek 5.13. F bir cisim olmak üzere $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ olsun.

R'nin $I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ideali göz önüne alındığında R/I değişmeli olduğundan R/I merkezi terslenebilirdir.
Buna rağmen; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $AB = 0$ dır. $c_1 \neq c_3$ olacak şekilde $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \in R$ için $CBA \neq BAC$ olup R merkezi terslenebilir değildir **(Köse vd. 2014)**.

Lemma 5.14. I, R'nin indirgenmiş ideali olmak üzere R/I merkezi terslenebilir halka ise R merkezi terslenebilirdir **(Köse vd. 2014)**.

İspat. R merkezi terslenebilir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $(a+I)(b+I) = 0+I$ olduğundan $(b+I)(a+I) \in C(R/I)$. Her $r \in R$ için $bar - rab \in I$. Buradan $I(bar - rab) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(bar - rba)^2 = 0$. I indirgenmiş olduğundan $bar = rba$ ve böylece R merkezi terslenebilirdir. ■

Şimdi merkezi terslenebilir halkalar sınıfının terslenebilir halkalar ile zayıf terslenebilir halkalar arasında olduğu gösterilecektir.

Teorem 5.15. R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım **(Köse vd. 2014)**.

(1) R terslenebilir halkadır.

(2) R merkezi terslenebilir halkadır.

(3) R zayıf terslenebilir halkadır.

İspat. Bu durumda (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) gerektirmeleri vardır.
(1) $\Longrightarrow$ (2) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $ba^2 = 0$ ve $ba \in C(R)$ dir.
(2) $\Longrightarrow$ (3) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $abx = 0$ dır. R merkezi terslenebilir olduğundan $bxa \in C(R)$. Buradan her $r, x \in R$ için $(rbxa)^2 = (rbxa)(rbxa) = r(bxa)rbxa = rrbx(ab)xa = 0$ elde edilir. Böylece R zayıf terslenebilirdir. ■

Uyarı 5.16. Merkezi terslenebilir olmayan buna rağmen zayıf terslenebilir halkalar vardır **(Köse vd. 2014)**.

Örnek 5.17. R zayıf terslenebilir halka ve

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in R \right\}$$

halkası göz önüne alınsın. **(Liang ve Gang, 2007)**[Örnek 2.6] dan S zayıf terslenebilirdir. Şimdi S'nin merkezi terslenebilir olmadığını gösterelim.

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in S$$

için $xy = 0$ olmasına rağmen $yx = x$, S'nin merkezinde değildir **(Köse vd. 2014)**.

Uyarı 5.18. Terslenebilir her halka Abelyendir. Merkezi durumlar için aşağıdaki lemma vardır **(Köse vd. 2014)**.

Lemma 5.19. Eğer R merkezi terslenebilir halka ise R Abelyendir **(Köse vd. 2014)**.

İspat. $e^2 = e \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $(1-e)(er-ere) = 0$ olduğundan $(er-ere)(1-e) = er - ere \in C(R)$ dir. $er - ere$ soldan e ile çarpıldığında $er - ere = 0$ elde edilir. Benzer şekilde her $r \in R$ için $(re - ere)(1 - e) = 0$ olduğundan $re - ere = 0$ dır. Buradan R Abelyendir. ■

Uyarı 5.20. Lemma 5.19. un karşıtı genelde doğru değildir, yani her Abelyen halkanın merkezi terslenebilir olması gerekmez **(Köse vd. 2014)**.

Örnek 5.21.

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a \equiv d(mod2),\ b \equiv c \equiv 0(mod2),\ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkası göz önüne alınsın. R'nin eş güçlü elemanları yalnızca $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisler olduğundan R Abelyendir. Diğer taraftan $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $xy = 0$ olmasına rağmen $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in R$ için yx merkezde değildir. Bu yüzden R merkezi terslenebilir değildir **(Köse vd. 2014)**.

Sonuç 5.22. Her merkezi terslenebilir halka direkt sonludur **(Köse vd. 2014)**.

İspat. Her Abelyen halkanın direkt sonlu olduğu Lemma 5.19. dan açıktır **(Köse vd. 2014)**. ■

Uyarı 5.23. Terslenebilir her halka yarı değişmelidir **(Köse vd. 2014)**.

Lemma 5.24. Merkezi terslenebilir her halka zayıf yarı değişmelidir **(Köse vd. 2014)**.

İspat. Kabul edelim ki; R merkezi terslenebilir halka olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olup buradan $ba \in C(R)$ dir. Bu durumda $(arb)^2 = (arb)(arb) = ar(ba)rb = a(ba)rrb = 0$ ve böylece her $r \in R$ için $arb \in N(R)$ dir. Bu durumda R zayıf yarı değişmelidir. ∎

Sonuç 5.25. R sağ temel projektif halka olsun. Eğer R merkezi terslenebilir ise R yarı değişmelidir **(Köse vd. 2014)**.

İspat. Merkezi terslenebilir her halka ve sağ temel projektif halka Önerme 5.3. ten terslenebilirdir. ∎

Uyarı 5.26. R bir halka olsun. Bu durumda R'nin tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter şart R'nin asal ve terslenebilir olmasıdır **(Cohn, 1999)**.

Lemma 5.27. R bir halka olsun. Bu durumda R'nin asal ve merkezi terslenebilir halka olması için gerek ve yeter şart tamlık bölgesi olmasıdır **(Köse vd. 2014)**.

İspat.
($\Longrightarrow$) Kabul edelim ki; R asal ve merkezi terslenebilir halka olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Her $r \in R$ için $abr = 0$ ve böylece $bra \in C(R)$ dir. bra b ile soldan çarpıldığında $b^2ra = brab = 0$ elde edilir. Kabulden her $t \in R$ için $bratb \in C(R)$ dir. R asal olduğundan $a = 0$ ya da $b = 0$. Buradan R tamlık bölgesidir.
($\Longleftarrow$) Kabul edelim ki; R tamlık bölgesi olsun. Kabulden R değişmeli bu durumda merkezi terslenebilirdir. Ayrıca kabulden R asaldır. ∎

Teorem 5.28. Her merkezi terslenebilir halka 2-primaldir. Karşıtı halkanın yarı asal olması durumunda doğrudur **(Köse vd. 2014)**.

İspat. Kabul edelim ki; R merkezi terslenebilir halka olsun. $P(R)$, R'nin nil ideali ve $P(R) \subseteq N(R)$ her zaman vardır. Ters kapsama için, n pozitif tamsayı olacak şekilde $a \in N(R)$ için $a^n = 0$ olsun. Kabul edelim ki; Q asal ideali için $a \notin Q$ olsun. R merkezi terslenebilir olduğundan a merkezdedir. Her bir $r_{n-1}, r_{n-2}, r_{n-3}, ..., r_2, r_1 \in R$ için

$$ar_{n-1}ar_{n-2}ar_{n-3}...ar_2ar_1a = r_{n-1}r_{n-2}r_{n-3}...r_2r_1a^n = 0$$

elde edilir. P'nin her asal ideali için $aR(ar_{n-2}a, ..., ar_2ar_1a) \subseteq P$ dir. $a \notin Q$ olduğundan P'nin her asal ideali için $ar_{n-2}a...ar_2ar_1a \in P$ ve $r_{n-2}, ..., r_2, r_1 \in R$. Buradan P'nin her asal ideali için $aR(ar_{n-3}a...ar_2ar_1a) \subseteq P$ ve $r_{n-3}, ..., r_2, r_1 \in R$ dir. Benzer düşünceyle P'nin her asal ideali için $ar_{n-4}a...ar_2ar_1a \in P$ ve her $r_{n-4}, ..., r_2, r_1 \in R$ için $aR(ar_{n-4}a...ar_2ar_1a) \subseteq P$. Benzer şekilde devam edildiğinde P'nin her asal ideali için $aRa \subseteq P$. Bu durumda P'nin her asal ideali için $a \in P$ dir. Bu bir çelişkidir. Bu durumda a üstel sıfırlı ise $a \in P(R)$ ve böylece $N(R) \subseteq P(R)$ dir.
Karşıt olarak R yarı asal ve 2-primal halka olsun. Bu durumda $P(R) = 0$ ve $N(R) = 0$ elde edilir. Buradan R indirgenmiş ve böylece merkezi terslenebilirdir. ∎

Uyarı 5.29. Eğer R indirgenmiş halka ise $T(R,R)$ terslenebilirdir **(Kim ve Lee, 2003)**.

Önerme 5.30. Eğer R merkezi indirgenmiş halka ise $T(R,R)$ merkezi terslenebilirdir **(Köse vd. 2014)**.

İspat. Kabul edelim ki; R merkezi indirgenmiş halka ve $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$ olsun. Buradan $ac = ad + bc = 0$ dır. Hipotezden R merkezi terslenebilir olduğundan $ca \in C(R)$ dir. Ayrıca $(ad)^3 = (-bc)(ad)(-bc) = b(ca)dbc = bdbcac = 0$ olduğundan $ad \in C(R)$ ve bunun sonucunda $bc \in C(R)$ dir. Böylece $(da)^4 = 0$ ve $(cb)^4 = 0$ olup $da, cb \in C(R)$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in C(R) dir.$ ∎

Önerme 5.31. R'nin merkezi terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $S^{-1}R$ merkezi terslenebilir olmasıdır **(Köse vd. 2014)**.

İspat. Kabul edelim ki; R merkezi terslenebilir halka ve her $a, b \in R, r, s \in S$ için $a/r, b/s \in S^{-1}R$ olmak üzere $(a/r)(b/s) = 0$ olsun. $(a/r)(b/s) = ab/rs = 0$ olduğundan $ab = 0$. Hipotezden $ba \in C(R)$ dir, böylece her $c \in R$ ve $t \in S$ olmak üzere her $c/t \in S^{-1}R$ için $(b/s)(a/r)(c/t) = (c/t)(b/s)(a/r)$ dir. Bu durumda $S^{-1}R$ merkezi terslenebilirdir. Karşıt olarak $S^{-1}R$ merkezi terslenebilir halka olsun. R, $S^{-1}R$ halkasına gömülebilir olduğundan açıktır. ∎

Sonuç 5.32. R bir halka olmak üzere $R[x]$ polinom halkası merkezi terslenebilirdir gerek ve yeter şart $R[x, x^{-1}]$ Laurent polinom halkası merkezi terslenebilirdir **(Köse vd. 2014)**.

İspat. $S = \{1, x, x^2, x^3, ...\}$ olsun. S, $R[x]$'in merkezi düzenli elemanlarından oluşan çarpımsal kapalı alt kümesidir. Bu durumda Önerme 5.31. den ispat açıktır. ∎

Teorem 5.33. R'nin Armendariz halka olması durumunda aşağıdaki denklikler sağlanır:
(1) R merkezi terslenebilirdir.
(2) $R[x]$ merkezi terslenebilirdir.
(3) $R[x, x^{-1}]$ merkezi terslenebilirdir.
(Köse vd. 2014).

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) Kabul edelim ki; R merkezi terslenebilir olsun.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad , \quad g(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j \in R[x]$$

için $f(x)g(x) = 0$ sağlansın. R Armendariz halka olduğundan her i, j için $a_i b_j = 0$ dır. Böylece her i, j için $b_j a_i = 0$ merkezdedir. Buradan $g(x)f(x) \in C(R[x])$ dir. Bu durumda $R[x]$ merkezi terslenebilirdir.

$(2) \Longrightarrow (1)$ Kabul edelim ki; $R[x]$ merkezi terslenebilir olsun. R, $R[x]$'in alt halkası olduğu için R merkezi terslenebilirdir.
$(2) \Longrightarrow (3)$ $S = \{1, x, x^2, x^3, ...\}$ olsun. S, $R[x]$'in merkezi düzenli elemanlarından oluşan çarpımsal kapalı alt kümesidir. Bu durumda Önerme 5.31. den ispat açıktır. ■

Önerme 5.34. *R halkasının merkezi terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $D(R, \mathbb{Z})$ Dorroh genişlemesinin merkezi terslenebilir olmasıdır* **(Köse vd. 2014)**.

İspat. Gerek kısmı açıktır. Yeter kısım için, $(r_1, n_1), (r_2, n_2) \in D(R, \mathbb{Z})$ olmak üzere $(r_1, n_1)(r_2, n_2) = 0$ olsun. Buradan $n_1 n_2 = 0$ ve kabul edelim ki $n_1 = 0$ olsun. R merkezi terslenebilir olduğundan $(r_2 + 1n_2)r_1 \in C(R)$ ve böylece $(r_2, n_2)(r_1, n_1) \in D(R, \mathbb{Z})$ nin merkezindedir. Bu durumda $D(R, \mathbb{Z})$ merkezi terslenebilirdir. Benzer ispat $n_2 = 0$ içinde yapılabilir. ■

KAYNAKLAR

[1] Agayev, N. ; Güngöroğlu, G. ; Harmancı, A. ; Halıcıoğlu, S. *Abelian Modules, Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **2009**, 78(2), 235-244.

[2] Agayev, N. ; Güngöroğlu, G. ; Harmancı, A. ; Halıcıoğlu, S. *Central Armendariz Rings, Bulletin of the Malaysia Mathematical Sciences Society*, **2011**, 34(1), 137-145.

[3] Agayev, N. ; Halıcıoğlu, S. ; Harmancı, A. *On Symmetric Modules, Riv. Mat. Univ. Parma*, **2009**, 8(2), 91-99.

[4] Agayev, N. ; Halıcıoğlu, S. ; Harmancı, A. *On Rickart Modules, Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **2012**, 38(2), 433-445.

[5] Agayev, N. ; Harmancı, A. ; Halıcıoğlu, S. *Extended Armendariz Rings, Algebras Groups Geom.*, **2009**, 26(4), 343-354.

[6] Anderson, D. D. ; Camillo, V. *Armendariz Rings and Gaussian Rings, Journal Communications in Algebra*, **1998**, 26(7), 2265-2272.

[7] Anderson, F. W. ; Fuller, K. R. *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[8] Andrunakievic, V. A. ; Rjabuhin, Yu. M. *Rings without nilpotent elements and completely prime ideals, Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **1968**, 180, 9-11.

[9] Antoine, R. *Nilpotent Elements and Armendariz Rings, Journal of Algebra*, **2008**, 319(8), 3128-3140.

[10] Armendariz, E. P. *A Note on Extensions of Baer and P. P.-Rings, Journal of the Australian Mathematical Society*, **1974**, 18(4), 470-473.

[11] Baser, M. ; Agayev, N. *On Reduced and Semi-Commutative Modules, Turkish Journal of Mathematics*, **2006**, 30(3), 285-291.

[12] Baser, M. ; Harmancı, A. *Reduced and P. Q.-Baer Modules, Taiwanese Journal of Mathematics*, **2007**, 11(1), 267-275.

[13] Baser, M. ; Hong, C. Y. ; Kwak, T. K. *On Extended Reversible Rings, Algebra Colloquim.*, **2009**, 16(1), 37-48.

[14] Baser, M. ; Kaynarca, F. ; Kwak, T. K. *Ring Endomorphism with the Reversible Condition, Communications Korean Mathematical Society*, **2010**, 25(3), 349-364.

[15] Birkenmeier, G. F. ; Kim, J. Y. ; Park, J. K. *Principally quasi-Baer Rings, Journal Communications in Algebra*, **2001**, 29(2), 639-660.

[16] Birkenmeier, G. F. ; Kim, J. Y. ; Park, J. K. *Polynomial Extensions of Baer and quasi-Baer Rings, Journal of Pure and Applied Algebra*, **2001**, 159(1), 25-42.

[17] Birkenmeier, G. F. ; Kim, J. Y. ; Park, J. K. *On Extensions of Baer and Quasi-Baer Rings, Journal of Pure and Applied Algebra*, **2001**, 159(1), 25-42.

[18] Bourbaki, N. *Modules et Anneaux Semi-Simples*, Hermann et Cie, Paris, 1958.

[19] Buhphang, A. M. ; Rege, M. B. *Semi-Commutative Modules and Armendariz modules, Arab. Journal of Mathematical Science*, **2002**, 8(1), 53-65.

[20] Buhphang, A. M. ; Halıcıoğlu, S. ; Harmancı, A. ; Hera Singh, K. ; Köse, H.Y. ; Rege, M. B. *On Rigid Modules, East-West Journal of Mathematics*, **2013**, 15(1), 71-85.

[21] Chen, H. *Rings Related Stable Range Conditions*, World Scientific, Hackensack, 2011.

[22] Choudhuri, I. ; Devi, M. I. ; Rege, M. B. *Anti-Regularity in Modules, National Academy Science Letters*, **1990**, 13(6), 253-255.

[23] Cohn, P. M. *Reversible Rings, Bulletin of the London Mathematical Society*, **1999**, 31(6), 641-648.

[24] Elliger, S. *Interdirekte Summen von Moduln, Journal of Algebra*, **1971**, 18(2), 271-303.

[25] Hirano, Y. *Some Studies of Strongly* Π*-Regular Rings, Mathematical Journal of Okayama University*, **1978**, 20(2), 141-149.

[26] Hong, C. Y. ; Kim, N. K. ; Kwak, T. K. *On skew Armendariz rings, Comm. Algebra*, **2003**, 31(1), 103-122.

[27] Hong, C. Y. ; Kim, N. K. ; Kwak, T. K. *Ore Extensions of Baer and P. P.-Rings, Journal of Pure and Applied Algebra*, **2000**, 151(3), 215-226.

[28] Hwang, S. U. ; Jeon, C. H. ; Park, K. S. *A Generalization of Insertion of Factors Property, Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **2007**, 44(1), 87-94.

[29] Khurana, N. ; Marks, K. ; Srivastava, A. *On Unit-Central Rings*, Basel, 2010.

[30] Kim, N. K. ; Lee, Y. *Extensions of Reversible Rings, Journal of Pure and Applied Algebra*, **2003**, 185, 207-223.

[31] Kim, N. K. ; Lee, K. H. ; Lee, Y. *Power Series Rings Satisfying a Zero Divisor Property, Journal Communications in Algebra*, **2006**, 34(6), 2205-2218.

[32] Köse, H. ; Üngör, B. ; Halıcıoğlu, S. *A Generalization of Reduced Rings, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **2012**, 38(1), 43-48.

[33] Köse, H. ; Üngör, B. ; Halıcıoğlu, S. ; Harmancı, A. *A Generalization of Reversible Rings, Iranian Journal of Science and Technology*, **2014**, 41(5), 689-696.

[34] Köse, H. ; Üngör, B. ; Halıcıoğlu, S. ; Harmancı, A. *Quasi Reduced Rings, Acta Universitatis Apulensis*, **2013**, 34, 1-12.

[35] Krempa, J. *Some examples of reduced rings, Algebra Colloquim*, **1996**, 4(4), 289-300.

[36] Lam, T. Y. *Exercises in Classical Ring Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[37] Lam, T. Y. *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[38] Lee, T. K. ; Zhou, Y. *Reduced Modules, Rings, Modules, Algebras and Abelian Groups*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, New York, 2004.

[39] Lee, T. K. ; Wong, T. L. ; *On Armendariz rings, Houston J. Mathematics*, **2003**, 29, 583-593

[40] Liang, Z. ; Gang, Y. *On weakly reversible rings, Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **2007**, 11(5), 189-192.

[41] Liang, L. ; Wang, L. ; Liu, Z. *On a Generalization of Semi-Commutative Rings, Taiwanese Journal of Mathematics*, **2007**, 11(5), 1359-1368.

[42] Liu, L. ; Zhao, R. *On weak Armendariz rings, Comm. Algebra*, **2006**, 34(7), 2607-2616.

[43] Marks, G. *Reversible and Symmetric Rings, Journal of Pure and Applied Algebra*, **2002**, 174(3), 311-318.

[44] Özen, T. ; Agayev, N. ; Harmancı, A. *On a Class of Semicommutative Rings, Kyungpook Mathematical Journal*, **2011**, 51(3), 283-291.

[45] Rege, M. B. ; Buhphang, A. M. *On Reduced Modules and Rings, International Electronic Journal of Algebra*, **2008**, 3(3), 58-74.

[46] Rege, M. B. ; Chhawchharia, S. C. *Armendariz rings*, *Proceedings Japan Academy Series A Mathematical Sciences*, **1997**, 73(1), 14-17.

[47] Renault, G. *Anneaux Reduits Non Commutatifs, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1967**, 46, 203-214.

[48] Shin, G. *Prime Ideals and Sheaf Represantations of a Pseudo Symmetric Ring, Transactions of the American Mathematical Society*, **1973**, 184, 43-69.

[49] Stenström, B. *Rings of Quotients: An Introduction to the Methods of Ring Theory*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[50] Üngör, B. ; Halıcıoğlu, S. ; Köse, H. ; Harmancı, A. *Rings in which every nilpotent is central*, *Algebras, Groups and Geometries*, **2013**, 30(1), 1-18.

[51] Zelmanowitz, J. *Regular modules*, *Transactions of the American Mathematical Society*, **1972**, 163(2), 341-355.

[52] Zelmanowitz, J. *Semiprime modules with maximum conditions, Journal of Algebra*, **1973**, 25(3), 554-574.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Zuhal CANPOLAT
Doğum Yeri	:	Yerköy / YOZGAT
Doğum Tarihi	:	25.02.1992
Yabancı Dili	:	İngilizce / 56

İletişim Bilgileri

Adres	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
E-mail	:	zuhalcnplt@hotmail.com

Eğitim Durumu

İlköğretim	:	80. Yıl İlköğretim Okulu, 1998-2006
Ortaöğretim	:	Şehit Sedat Nezih Özok Lisesi, 2006-2010
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010-2014
Pedagojik Eğitimi	:	Ahi Evran Üniversitesi, Eğitim Fakültesi 2014-2015