



T.C.  
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# KANAL YÜZEYLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Büşra GAFA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2020



T.C.  
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# KANAL YÜZEYLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Büşra GAFA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

KIRŞEHİR / 2020

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Büşra GAFA



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.



## ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında kanal yüzeyinin bazı karakterizasyonları detaylı olarak ele alınmıştır.

Lisans ve Lisansüstü ders sürecinde, tanıdığım günden beri bir bilim insanının nasıl çalışması gerektiğini kendisinden öğrendiğim her zaman bana örnek olan ve beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan, manevi desteklerini esirgemeyen sevgili eşim Mustafa Yakup GAFA ile annem Hatice KAYA ve tüm aileme de teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Kasım, 2020

Büşra GAFA

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ . . . . .	v
İÇİNDEKİLER . . . . .	vi
ŞEKİL LİSTESİ . . . . .	vii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ . . . . .	viii
ÖZET . . . . .	ix
ABSTRACT . . . . .	x
1. GİRİŞ . . . . .	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR . . . . .	3
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL YÜZEYLERİ . . . . .	10
3.1. Kanal Yüzeyleri . . . . .	10
3.2. Kanal Yüzeylerinin Bazı Karakterizasyonları . . . . .	12
3.3. (X,Y)-Weingarten Kanal Yüzeylerinin Bazı Karakterizasyonları . . . . .	36
4. TARTIŞMA VE SONUÇ . . . . .	49
KAYNAKLAR . . . . .	50
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	52

## ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Kanal Yüzeyi ..... 1



## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

### Kısaltmalar :Açıklama

$\langle , \rangle$	: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart iç çarpım
$\  \cdot \ $	: $\mathbb{R}^3$ uzayında norm
$\mathbf{x}$	: $\mathbb{R}^3$ uzayında vektörel çarpım
$M$	: $\mathbb{R}^3$ uzayında kanal yüzeyi
$K$	: $M$ yüzeyinin Gauss eğriliği
$H$	: $M$ yüzeyinin ortalama eğriliği
$K_{II}$	: $M$ yüzeyinin ikinci Gauss eğriliği
$k_1, k_2$	: $M$ yüzeyinin asli eğrilikleri
$E, F, G$	: $M$ yüzeyinin 1. temel formunun katsayıları
$L, M, N$	: $M$ yüzeyinin 2. temel formunun katsayıları
$e, f, g$	: $M$ yüzeyinin 3. temel formunun katsayıları
$\phi$	: Jacobi fonksiyonu



## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## KANAL YÜZEYLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Büşra GAFA

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrıldı. İkinci bölümde, Öklid uzayında eğriler ve yüzeylerle ilgili bazı temel tanım ve kavramlara yer verildi. Üçüncü bölümde, ilk olarak 3-Boyutlu Öklid uzayında kanal yüzeyleri ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verildi. Daha sonra kanal yüzeylerinin birinci, ikinci, üçüncü temel formunun katsayıları, yüzeyin ortalama eğriliği, Gauss eğriliği, ikinci Gauss eğriliği ve asli eğrilikleri hesaplanarak ve bu eğrilik fonksiyonları arasındaki bağıntılara yer verildi. Ayrıca flat, minimal ve ikinci Gauss eğriliği sıfır olan kanal yüzeyleri için çeşitli karakterizasyonlar elde edildi. Son olarak  $(K, H)$ ,  $(K, K_{II})$  ve  $(H, K_{II})$  Weingarten kanal yüzeyleri için bazı karakterizasyonlar verildi. Son bölümde tezle ilgili tartışma ve sonuçlara yer verildi.

Kasım 2020, 63 Sayfa.

**Anahtar Kelimeler:** Kanal yüzeyi, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, ikinci Gauss eğriliği, Weingarten yüzeyi.

## ABSTRACT

MSc THESIS

## THE CHARACTERIZATIONS OF CANAL SURFACES

Büşra GAFA

Kırşehir Ahi Evran University  
Science and Engineering Institute  
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

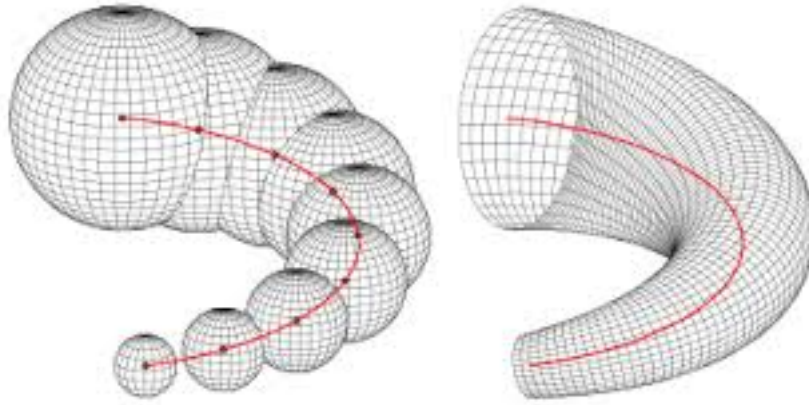
This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some basic definitions and concepts about curves and surfaces in Euclidean space are given. In the third chapter, firstly some basic concepts and definitions about canal surfaces are given. And then some calculations about the coefficients of the first, second and third fundamental forms, the mean curvature, Gaussian curvature, the second Gaussian curvature, the principal curvatures and the relationships about these curvature functions are given. Also some characterizations for flat canal surface, minimal canal surface and canal surface whose the second Gaussian curvature vanishes are obtained. Finally some characterizations about  $(K, H)$ ,  $(K, K_{II})$  and  $(H, K_{II})$  Weingarten canal surfaces are given. In the last chapter, discussion and results are given.

November 2020, 63 Pages.

**Keywords:** Canal surface, Gaussian curvature, mean curvature, second Gaussian curvature, Weingarten surface.

## 1. GİRİŞ

Kanal yüzeyleri, ilk olarak 1850 'de Fransız matematikçi Gaspard Monge tarafından bir küreyi tarayarak oluşan yüzeyler olarak tanımlanmıştır. Kanal yüzeyleri ya bir yol boyunca bir küre süpürülerek ya da aynı yol boyunca kürenin belirli bir dairesel enine kesiti süpürülerek oluşturulan yüzeylerdir. Kanal yüzeyleri kendisini oluşturan kürelerin merkez eğrisinin Frenet çatısı yardımıyla parametrize edilir. Kürelerin merkezlerinin yörüngesi bir helis ve yarıçap fonksiyonu sabit ise meydana gelen yüzey helis kanal yüzeyi, kürelerin merkezlerinin yörüngesi bir doğru ise meydana gelen yüzey bir dönel yüzey ve kanal yüzeyini oluşturan hareketli kürenin yarıçap fonksiyonu sabit ise kanal yüzeyi bir tüp ya da boru yüzeyidir. Dolayısıyla dönel yüzeyler ve tüp yüzeyler kanal yüzeylerinin bir alt sınıfı olarak düşünülebilir. Kanal yüzeyleri, günlük hayatta karşımıza çıkan boru, halat, direk ve 3- boyutlu dökümleri temsil etmede kullanılır. Ayrıca Kanal yüzeyleri şekillerinin yeniden yapılandırılması, insan iç organlarının yüzey modellemesi ve CAD, CAM de katıların ve yüzeylerin modellemesi gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Kanal yüzeyleri geniş bir uygulama alanına sahip olduğundan birçok matematikçi ve mühendis kanal yüzeyleri ile ilgili çeşitli çalışmalar yapmışlardır.[6, 7, 8, 10]



**Şekil 1.1.** Kanal Yüzeyi

[12] nolu çalışmada Xu, Freng ve Sun kanal yüzeylerinin analitik ve geometrik özelliklerini incelediler. [11] nolu çalışmada Tunçer ve Yoon, 3-boyutlu Öklid uzayında Weingarten ve Lineer Weingarten kanal yüzeyleri için çeşitli karakterizasyonlar verdiler. [2] nolu doktora

tezinde Dođan merkez eğrisi boyunca Frenet çatısı yerine Bishop ve Darboux çatılarını kullanarak kanal yüzeylerinin farklı genellemelerini elde etti.

Bu tez çalışmasında, 3-boyutlu Öklid uzayında kanal yüzeyleri çalışıldı. İlk olarak [5] nolu çalışmada yer alan kanal yüzeyleriyle ilgili bazı temel hesaplamalar detaylı olarak ele alındı. Bu anlamda kanal yüzeylerinin 1. temel formunun katsayıları, 2. temel formunun katsayıları, 3. temel formunun katsayıları, yüzeyin ortalama eğriliği, Gauss eğriliği, ikinci Gauss eğriliği ve asli eğrilik fonksiyonları gibi yüzeye ait bazı temel hesaplamalar yapıldı. Daha sonra yüzeyin ortalama eğriliği, Gauss eğriliği ve ikinci Gauss eğriliği arasındaki bağıntılar elde edildi ve flat kanal yüzeyleri, minimal kanal yüzeyleri ve ikinci Gauss eğriliği sıfır olan kanal yüzeyleri için bazı karakterizasyonlar elde edildi.

Son olarak yine [5] nolu çalışmada yer alan  $(K, H)$ ,  $(K, K_{II})$  and  $(H, K_{II})$  Weingarten kanal yüzeyleri için bazı sonuçlar detaylı olarak incelendi.

## 2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

**Tanım 2.1.**  $I, \mathbb{R}$  nin bir açık aralığı olmak üzere

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$$
$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

biçiminde düzgün ( $C^\infty$  sınıfından) bir  $\alpha$  dönüşümüne,  $\mathbb{E}^n$  uzayı içinde bir eğri denir [9].

**Tanım 2.2.**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  eğrisi verilsin.  $\mathbb{R}$  deki dik koordinat fonksiyonu  $x$  olmak üzere  $T_t(\mathbb{R}^1)$  uzayının doğal bazı  $\left\{ \frac{d}{dx} \Big|_t \right\}$  olsun.  $\alpha_{*t} \left( \frac{d}{dx} \Big|_t \right)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki hız vektörü denir ve kısaca  $\alpha'(t)$  ile gösterilir. Bu durumda

$$\alpha_{*t} \left( \frac{d}{dx} \Big|_t \right) = \alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t))_{\alpha(t)}$$

dır [9].

**Tanım 2.3.**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  eğrisi verilsin. Her  $t \in I$  için  $\alpha'(t) \neq 0$  ise  $\alpha$  eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir [9].

**Tanım 2.4.**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  eğrisi verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R},$$
$$t \rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı  $\|\alpha'\|$  fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin skalar hız fonksiyonu ve  $\|\alpha'(t)\|$  reel sayısına da  $\alpha$  nın  $\alpha(t)$  noktasındaki skalar hızı denir [4].

**Tanım 2.5.**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  eğrisi verilsin. Eğer  $\forall s \in I$  için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise  $\alpha$  eğrisi birim hızlı eğridir denir. Bu durumda  $s \in I$  parametresine yay parametresi adı verilir [4].

**Tanım 2.6.**  $\mathbb{E}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi için,

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli  $T(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birim teğet vektörü denir [9].

**Tanım 2.7.**  $\mathbb{E}^3$  uzayındaki birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi için,

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonsiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir.  $\kappa(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğriliği denir [9].

**Tanım 2.8.**  $\mathbb{E}^3$  uzayındaki birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi için,

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}T'(s)$$

eşitliğiyle belirli  $N(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birinci dik vektörü (asli normal) denir [9].

**Tanım 2.9.**  $\mathbb{E}^3$  uzayındaki birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi için,

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki ikinci dik vektörü (binormal) denir [9].

**Tanım 2.10.** Birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $T, N, B$  olmak üzere,

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin burulma fonksiyonu denir.  $\tau(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki burulması denir [9].

**Tanım 2.11.**  $T(s), N(s), B(s)$  vektörlerine,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri denir.  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  kümesine,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet çatısı denir [9].

**Teorem 2.12.** Birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $T, N, B$  ise

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir. Bu teoremden elde edilen eşitliklere,  $\alpha$  eğrisi için Frenet formülleri denir [9].

**Tanım 2.13.**  $V, \mathbb{E}^2$  uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere,  $X : V \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ , düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun.  $X : V \rightarrow X(V)$  dönüşümü bir homeomorfizm ise  $X(V)$  kümesine,  $\mathbb{E}^3$  uzayında bir basit yüzey denir [9].

**Tanım 2.14.**  $\mathbb{E}^3$  uzayında bir  $M$  yüzeyi  $X = X(u, v)$  şeklinde parametrelendirilmiş olsun.  $M$  yüzeyinin bir  $p$  noktasındaki tanjant uzayı  $T_p M$  uzayının baz vektörleri  $\{X_u, X_v\}$  olmak üzere,  $M$  yüzeyinin  $p$  noktasındaki birim normal vektör alanı

$$U = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

şeklinde tanımlanır [3].

**Tanım 2.15.**  $M, \mathbb{E}^3$  uzayında bir regüler bir yüzey ve  $U, M$  yüzeyinin bir  $p$  noktasının komşuluğunda tanımlanan birim normal vektörü olmak üzere,  $p$  noktasında  $M$  yüzeyinin bir  $X_p$  tanjant vektörü için

$$S(X_p) = -D_X U$$

şeklinde tanımlanan  $S$  dönüşümüne şekil operatörü denir [3].

**Lemma 2.16.**  $\mathbb{E}^3$  uzayında bir  $M$  yüzeyi  $X = X(u, v)$  şeklinde parametrelendirilmiş olsun.  $M$  yüzeyinin bir  $p$  noktasındaki tanjant uzayı  $T_pM$  uzayının bir bazı  $\{X_u, X_v\}$  ve  $U$ ,  $M$  yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere,

$$S(X_u) = -U_u$$

ve

$$S(X_v) = -U_v$$

olur [3].

**Lemma 2.17.**  $E^3$  uzayında  $M$  regüler yüzeyinin  $p$  noktasındaki tanjant uzayı  $T_pM$  olmak üzere,

$$S : T_pM \rightarrow T_pM$$

bir lineer dönüşümdür [3].

**Lemma 2.18.**  $M$  regüler yüzeyinin şekil operatörü simetriktir. Yani her  $X_p, Y_p \in T_pM$  için

$$\langle S(X_p), Y_p \rangle = \langle X_p, S(Y_p) \rangle$$

dir [3].

**Tanım 2.19.**  $M$ ,  $E^3$  uzayında bir regüler yüzey,  $S$ ,  $M$  yüzeyinin şekil operatörü ve  $X_p, Y_p$  vektörleri  $M$  yüzeyinin  $p$  noktasındaki tanjant vektörleri olmak üzere,  $M$  yüzeyinin birinci temel formu  $I$ ,

$$I(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle,$$

ikinci temel formu  $II$ ,

$$II(X_p, Y_p) = \langle S(X_p), Y_p \rangle,$$

üçüncü temel formu  $III$ ,

$$III(X_p, Y_p) = \langle S(X_p), S(Y_p) \rangle$$



şeklinde tanımlanır [3].

**Tanım 2.20.**  $X : V \rightarrow \mathbb{E}^3$  bir yüzey olsun.  $E, F, G : V \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları

$$E = \|X_u\|^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \|X_v\|^2$$

ile tanımlanır. Bu takdirde  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ,  $X$  yüzeyinin Riemann metriği ya da birinci temel formu olarak adlandırılır. Buradaki  $E, F, G$  ye birinci temel formun katsayıları denir[3].

**Tanım 2.21.**  $X : V \rightarrow \mathbb{E}^3$  bir regüler yüzey olsun.

$$\begin{aligned} L &= \langle -U_u, X_u \rangle = \langle U, X_{uu} \rangle, \\ M &= \langle -U_v, X_u \rangle = \langle U, X_{uv} \rangle = \langle U, X_{vu} \rangle = \langle -U_u, X_v \rangle, \\ N &= \langle -U_v, X_v \rangle = \langle U, X_{vv} \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı  $L, M, N$  ye  $X$  yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları denir [3].

**Teorem 2.22.**  $\mathbb{E}^3$  uzayında bir  $M$  yüzeyi  $X = X(u, v)$  şeklinde parametrelendirilmiş olsun.

$M$  yüzeyinin,  $T_p M$  uzayının  $\{X_u, X_v\}$  bazına göre  $S$  şekil operatörü

$$\begin{aligned} -S(X_u) &= \frac{FM - GL}{EG - F^2} X_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} X_v, \\ -S(X_v) &= \frac{FN - GM}{EG - F^2} X_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} X_v \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Böylece şekil operatörü matrisi

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{FM-GL}{EG-F^2} & -\frac{FN-GM}{EG-F^2} \\ -\frac{FL-EM}{EG-F^2} & -\frac{FM-EN}{EG-F^2} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde elde edilir [3].

**Tanım 2.23.**  $M$ ,  $\mathbb{E}^3$  uzayında bir regüler yüzey olsun.  $M$  yüzeyinin Gauss eğriliği  $K$  ve ortalama eğriliği  $H$  olmak üzere  $K, H : M \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlardır öyle ki

$$K(p) = \det(S(p))$$

ve

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(S(p))$$

şeklinde tanımlanır [3].

**Teorem 2.24.**  $X : V \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$  bir dönüşüm olsun.  $M$  yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (2.3)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{GL + EN - 2FM}{EG - F^2} \quad (2.4)$$

formülleri ile verilir [3].

**Tanım 2.25.**  $\mathbb{E}^3$  uzayında ortalama eğriliği sıfır olan yüzeye minimal yüzey, Gauss eğriliği sıfır olan yüzeye ise flat yüzey adı verilir [3].

**Tanım 2.26.**  $M$  yüzeyinin bir  $p$  noktasında  $S : T_p M \rightarrow T_p M$  lineer dönüşümünün karakteristik değerine,  $p$  noktasındaki asli eğrilikler denir [9].

**Teorem 2.27.**  $\mathbb{E}^3$  uzayında bir  $M$  regüler yüzeyinin asli eğrilikleri  $k_1$  ve  $k_2$ ,

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

şeklinde verilen ikinci dereceden denkleminin kökleridir. Böylece,

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}, \quad (2.5)$$

$$k_2 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (2.6)$$

olarak elde edilir [3].

**Tanım 2.28.**  $M, \mathbb{E}^3$  uzayında  $X = X(u, v)$  parametrizasyonu ile verilmiş bir regüler yüzey olsun.  $M$  yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları  $L, M, N$  olmak üzere, yüzeyin ikinci Gauss eğriliği

$$K_{II} = \frac{1}{(LN - M^2)^2} \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}L_{\theta\theta} + M_{s\theta} - \frac{1}{2}N_{ss} & \frac{1}{2}L_s & M_s - \frac{1}{2}L_\theta \\ M_\theta - \frac{1}{2}N_s & L & M \\ \frac{1}{2}N_\theta & M & N \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2}L_\theta & \frac{1}{2}N_s \\ \frac{1}{2}L_\theta & L & M \\ \frac{1}{2}N_s & M & N \end{array} \right| \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır [1].

### 3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL YÜZEYLERİ

#### 3.1. Kanal Yüzeyleri

Bu alt başlıkta 3-boyutlu Öklid uzayında kanal yüzeyleri ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

**Tanım 3.1.**  $F(x, y, z) = 0$  bir yüzey olsun. O halde  $\lambda$  bir parametre olmak üzere,  $F(x, y, z; \lambda) = 0$ , 1-parametrelili bir yüzey ailesi olur.  $k \geq 2$  için  $F, C^k$  sınıfından olsun. O halde,

$$F(x, y, z; \lambda) = 0$$

ve

$$\frac{\partial F(x, y, z; \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

denklem sisteminden,  $\lambda$  parametresi yok edilerek elde edilen  $G(x, y, z) = 0$  yüzeyine, 1-parametrelili yüzey ailesinin zarfı denir [3].

**Tanım 3.2.**  $E^3$  uzayında 1- parametrelili küre ailesinin zarfına kanal yüzeyi denir. Alternatif olarak kanal yüzeyi , merkezlerinin yörüngesi bir  $\delta(s)$  eğrisi ve yarıçap fonksiyonu  $r(s)$  olan, değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır [3].

**Tanım 3.3.**  $S^2(s)$  kürelerinin merkezlerinin yörüngesi olan  $\delta(s)$  eğrisine kanal yüzeyinin merkez eğrisi,  $r = r(s)$  fonksiyonuna ise kanal yüzeyinin yarıçap fonksiyonu denir [3].

**Teorem 3.4.** Bir kanal yüzeyinin merkez eğrisi, sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı  $\delta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eğrisi olsun. Bu durumda kanal yüzeyi,

$$x(s, \theta) = \delta(s) + r(s) \left( -r'(s)T + \sqrt{1 - r'(s)^2}(-\cos \theta N + \sin \theta B) \right) \quad (3.1)$$

şeklinde parametrelendirilir. Burada  $T, N, B, \delta$  eğrisinin sırasıyla teğet, normal ve binormal vektör alanlarıdır [3].

**İspat:** Kabul edelim ki  $x(s, \theta)$ , kanal yüzeyini tanımlayan kürelerin zarfını parametre eden bir

yüzey parçası olsun.  $\delta$  birim hızlı eğrisinin eğrilikleri sıfırdan farklı ve  $T, N, B$  Frenet çatısı iyi tanımlı olduğundan,

$$x(s, \theta) - \delta(s) = a(s, \theta)T(s) + b(s, \theta)N(s) + c(s, \theta)B(s) \quad (3.2)$$

yazılır. Burada  $a, b, c, \delta$  eğrisinin tanımlı olduğu aralıkta diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.  $x(s, \theta), \delta(s)$  merkezli,  $r(s)$  yarıçaplı  $S^2(s)$  küresi üzerinde yattığından analitik olarak,

$$\|x(s, \theta) - \delta(s)\|^2 = r^2(s) \quad (3.3)$$

dır. Ayrıca  $x(s, \theta) - \delta(s)$ , kanal yüzeyine dik bir vektördür. Bu yüzden kanal yüzeyinin  $x_s$  ve  $x_\theta$  tanjant vektörlerine dik olur. Bu durumda,

$$\langle x(s, \theta) - \delta(s), x_s \rangle = 0 \quad (3.4)$$

ve

$$\langle x(s, \theta) - \delta(s), x_\theta \rangle = 0 \quad (3.5)$$

olup, (3.2) ve (3.3) denklemlerinden,

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2. \quad (3.6)$$

(3.6) denkleminin  $s$ 'ye göre türevi alınır,

$$aa_s + bb_s + cc_s = rr' \quad (3.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.2) denkleminin  $s$ 'ye göre türevi alınıp,  $\delta$  eğrisinin Frenet formülleri kullanırsa,

$$x_s = (1 + a_s - b\kappa)T + (a\kappa - c\tau + b_s)N + (c_s + b\tau)B \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.2), (3.4), (3.7) ve (3.8) kullanılırsa,

$$a + rr' = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.6) ve (3.9) denklemlerinden,

$$b^2 + c^2 = r^2(1 - r'^2) \quad (3.10)$$

bulunur. (3.10) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} b &= -r\sqrt{1 - r'^2} \cos \theta \\ c &= r\sqrt{1 - r'^2} \sin \theta \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada  $\theta$  uygun bir parametredir. Böylece (3.1) parametrizasyonu ile verilen kanal yüzeyi,

$$x(s, \theta) = \delta(s) - rr'T - r\sqrt{1 - r'^2} \cos \theta N + r\sqrt{1 - r'^2} \sin \theta B$$

şeklinde elde edilir. ■

**Tanım 3.5.** Yarıçap fonksiyonu  $r = r(s)$  sabit olan kanal yüzeyine tüp ya da boru yüzeyi denir [3].

### 3.2. Kanal Yüzeylerinin Bazı Karakterizasyonları

Bu alt başlıkta [5] nolu çalışmada yer alan kanal yüzeyinin 1. temel formunun katsayıları  $E, F, G$ , 2. temel formunun katsayıları  $L, M, N$ , 3. temel formunun katsayıları  $e, f, g$ , yüzeyin birim normal vektörü  $n$ , ortalama eğriliği  $H$ , Gauss eğriliği  $K$  ve ikinci Gauss eğriliği  $K_{II}$ , asli eğrilikleri  $k_1$  ve  $k_2$  hesaplanacak ve eğrilik fonksiyonları arasındaki bağıntılara yer verilecektir. Ayrıca yüzeyin flat, minimal ve ikinci Gauss eğriliğinin sıfır olması durumuyla ilgili karakterizasyon-

yonlar detaylı bir şekilde ele alınacaktır. 3-boyutlu Öklid uzayında bir  $M$  kanal yüzeyi,

$$x(s, \theta) = \delta(s) + r(s)(-r'(s)T + \sqrt{1 - r'(s)^2} \cos \theta N + \sqrt{1 - r'(s)^2} \sin \theta B) \quad (3.11)$$

şeklinde parametrelendirilir. Burada  $\delta(s)$ ,  $s$  yay parametresiyle verilmiş birim hızlı bir eğri,  $T, N, B$  ise sırasıyla  $\delta$  eğrisinin birim teğet, asli normal ve binormal vektör alanlarıdır.  $\delta(s)$  eğrisine  $M$  kanal yüzeyinin merkez eğrisi,  $r = r(s)$  fonksiyonuna ise  $M$  kanal yüzeyinin yarıçap fonksiyonu denir. (3.11) parametrizasyonu ile verilen  $M$  kanal yüzeyinde  $\varphi = \varphi(s)$  diferensiyellenebilir fonksiyonu için  $-r'(s) = \cos \varphi(s)$  olarak alınırsa  $M$  kanal yüzeyi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$x(s, \theta) = \delta(s) + r(s) (\cos \varphi T + \sin \varphi \cos \theta N + \sin \varphi \sin \theta B). \quad (3.12)$$

Burada  $s \in [0, l]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\varphi \in [0, \pi)$  ve  $l, \delta$  eğrisinin toplam yay uzunluğudur. (3.12) denkleminin  $s$ 'ye göre kısmi türevi alınır ve (2.1) kullanılırsa  $M$  yüzeyinin  $x_s$  tanjant vektörü,

$$\begin{aligned} x_s &= \delta'(s) + r'(s)(\cos \varphi T + \sin \varphi \cos \theta N + \sin \varphi \sin \theta B) + r(s)(\cos \varphi T \\ &\quad + \sin \varphi \cos \theta N + \sin \varphi \sin \theta B)' \\ &= \delta'(s) + r'(s)(\cos \varphi T + \sin \varphi \cos \theta N + \sin \varphi \sin \theta B) + r(s)((\cos \varphi)'T \\ &\quad + \cos \varphi T' + (\sin \varphi \cos \theta)'N + (\sin \varphi \cos \theta)N' + (\sin \varphi \sin \theta)'B \\ &\quad + (\sin \varphi \sin \theta)B') \\ &= (1 + r' \cos \varphi - r\kappa \sin \varphi \cos \theta - r\varphi' \sin \varphi)T + (r' \sin \varphi \cos \theta + r(\varphi' \cos \varphi \cos \theta \\ &\quad - \theta' \sin \varphi \sin \theta - \tau \sin \varphi \sin \theta + \kappa \cos \varphi))N + (r' \sin \varphi \sin \theta + r\tau \sin \varphi \cos \theta \\ &\quad + r\varphi' \sin \theta \cos \varphi + r\theta' \sin \varphi \cos \theta)B \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $-r'(s) = \cos \varphi$  ve  $r''(s) = \varphi' \sin \varphi$  eşitlikleri kullanılırsa,  $x_s$  vektöründeki  $T, N, B$ 'nin katsayıları sırasıyla,

$$\begin{aligned}
x_s^1 &= \sin^2 \varphi - rr'' - r\kappa \sin \varphi \cos \theta, \\
x_s^2 &= r' \sin \varphi \cos \theta - rr' \kappa - r\tau \sin \varphi \sin \theta - rr' \varphi' \cos \theta, \\
x_s^3 &= r' \sin \varphi \sin \theta + r\tau \sin \varphi \cos \theta - rr' \varphi' \sin \theta
\end{aligned} \tag{3.13}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$x_s = \frac{\partial x}{\partial s} = x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B$$

olur. (3.12) ifadesinde verilen  $M$  kanal yüzeyinin  $\theta$ 'ya göre kısmi türevi alınırsa,  $M$  kanal yüzeyinin  $x_\theta$  tanjant vektörü,

$$\begin{aligned}
x_\theta &= r(s)((\cos \varphi)_\theta T + (\sin \varphi \cos \theta)_\theta N + (\sin \varphi \sin \theta)_\theta B) \\
&= (-r \sin \varphi \sin \theta) N + (r \sin \varphi \cos \theta) B
\end{aligned}$$

bulunur.  $x_\theta$  vektöründeki  $T, N, B$ 'nin katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned}
x_\theta^1 &= 0 \\
x_\theta^2 &= -r \sin \varphi \sin \theta \\
x_\theta^3 &= r \sin \varphi \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olmak üzere,

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = x_\theta^2 N + x_\theta^3 B$$

olur. Böylece (3.13) ve (3.14) denklemleri yardımıyla  $M$  kanal yüzeyinin 1.temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned}
E &= \langle x_s, x_s \rangle \\
&= \langle x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B, x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B \rangle
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (x_s^1)^2 + (x_s^2)^2 + (x_s^3)^2 \\
&= (\sin^2 \varphi - rr'' - r\kappa \sin \varphi \cos \theta)^2 + (r' \sin \varphi \cos \theta - rr' \kappa - r\tau \sin \varphi \sin \theta \\
&\quad - rr' \varphi' \cos \theta)^2 + (r' \sin \varphi \sin \theta + r\tau \sin \varphi \cos \theta - rr' \varphi' \sin \theta)^2 \\
&= \sin^4 \varphi - 2(rr'' \sin^2 \varphi + r\kappa \sin^3 \varphi \cos \theta) + r^2(r''^2 + 2r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta \\
&\quad + \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) + r'^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - 2(rr'^2 \kappa \sin \varphi \cos \theta \\
&\quad + rr' \tau \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + rr'^2 \varphi' \sin \varphi \cos^2 \theta) + r^2(\tau^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \\
&\quad + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta + 2r' \varphi' \tau \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + r'^2 \kappa^2 + 2r'^2 \varphi' \kappa \cos \theta \\
&\quad + r'^2 \varphi'^2 \cos^2 \theta) + r'^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta - 2(-rr' \tau \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \\
&\quad + rr'^2 \varphi' \sin \varphi \sin^2 \theta) + r^2(\tau^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - 2r' \varphi' \tau \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \\
&\quad + r'^2 \varphi'^2 \sin^2 \theta) \\
&= \sin^2 \varphi + r^2(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta \\
&\quad + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta) - 2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle x_s, x_\theta \rangle \\
&= \langle x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B, x_\theta^2 N + x_\theta^3 B \rangle \\
&= x_s^2 x_\theta^2 + x_s^3 x_\theta^3 \\
&= (r' \sin \varphi \cos \theta - rr' \kappa - r\tau \sin \varphi \sin \theta - rr' \varphi' \cos \theta)(-r \sin \varphi \sin \theta) \\
&\quad + (r' \sin \varphi \sin \theta + r\tau \sin \varphi \cos \theta - rr' \varphi' \sin \theta)(r \sin \varphi \cos \theta) \\
&= -rr' \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + r^2 r' \kappa \sin \varphi \sin \theta + r^2 \tau \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \\
&\quad + r^2 r' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + rr' \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + r^2 \tau \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \\
&\quad - r^2 r' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \\
&= r^2 r' \kappa \sin \varphi \sin \theta + r^2 \tau \sin^2 \varphi,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle x_\theta, x_\theta \rangle \\
&= \langle x_\theta^2 N + x_\theta^3 B, x_\theta^2 N + x_\theta^3 B \rangle \\
&= (x_\theta^2)^2 + (x_\theta^3)^2 \\
&= (-r \sin \varphi \sin \theta)^2 + (r \sin \varphi \cos \theta)^2 \\
&= r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \\
&= r^2 \sin^2 \varphi
\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir.

Böylece 1.temel formun katsayılarından  $EG - F^2$  hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= (\sin^2 \varphi + r^2(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta \\
&\quad + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta) - 2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta))(r^2 \sin^2 \varphi) \\
&\quad - (r^2 \tau \sin^2 \varphi + r^2 r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)^2 \\
&= r^4(\varphi'^2 \sin^2 \varphi + 2\varphi' \kappa \sin^2 \varphi \cos \theta + \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) - 2r^3 \sin^2 \varphi(r'' + \\
&\quad \kappa \sin \varphi \cos \theta) + r^2 \sin^4 \varphi \\
&= r^4(r''^2 + 2r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta + \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) - 2r^3 \sin^2 \varphi(r'' \\
&\quad + \kappa \sin \varphi \cos \theta) + r^2 \sin^4 \varphi \\
&= r^4(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)^2 - 2r^3 \sin^2 \varphi(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta) + r^2 \sin^4 \varphi \\
&= r^2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2
\end{aligned}$$

olup buradan

$$EG - F^2 = r^2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2 \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14) denklemlerinden,

$$x_s \times x_\theta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ x_s^1 & x_s^2 & x_s^3 \\ 0 & x_\theta^2 & x_\theta^3 \end{vmatrix} = (x_s^2 x_\theta^3 - x_s^3 x_\theta^2)T - (x_s^1 x_\theta^3)N + (x_s^1 x_\theta^2)B$$

$$\begin{aligned}
&= ((r' \sin \varphi \cos \theta - rr' \kappa - r\tau \sin \varphi \sin \theta - rr' \varphi' \cos \theta)(r \sin \varphi \cos \theta) - (r' \sin \varphi \sin \theta \\
&\quad + r\tau \sin \varphi \cos \theta - rr' \varphi' \sin \theta)(-r \sin \varphi \sin \theta))T - (\sin^2 \varphi - rr'' - r\kappa \sin \varphi \cos \theta) \\
&\quad (r \sin \varphi \cos \theta)N + (\sin^2 \varphi - rr'' - r\kappa \sin \varphi \cos \theta)(-r \sin \varphi \sin \theta)B \\
&= -rr'(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)T + (rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi) \\
&\quad (r \sin \varphi \cos \theta)N + (rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)(r \sin \varphi \sin \theta)B
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|x_s \times x_\theta\| &= \sqrt{\langle x_s, x_s \rangle \langle x_\theta, x_\theta \rangle - \langle x_s, x_\theta \rangle^2} \\
&= \sqrt{EG - F^2} \\
&= r(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)
\end{aligned}$$

olmak üzere,  $M$  kanal yüzeyinin birim normal vektör alanı;

$$\begin{aligned}
n &= \frac{x_s \times x_\theta}{\|x_s \times x_\theta\|} \\
&= \frac{(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)(r \cos \varphi T + r \sin \varphi \cos \theta N + r \sin \varphi \sin \theta B)}{r(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)} \\
&= \cos \varphi T + \sin \varphi \cos \theta N + \sin \varphi \sin \theta B
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca birim normal vektör alanının  $s$ 'ye göre kısmi türevini alınır ve (2.1) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
n_s &= (\cos \varphi)'T + (\cos \varphi)T' + (\sin \varphi \cos \theta)'N + (\sin \varphi \cos \theta)N' \\
&\quad + (\sin \varphi \sin \theta)'B + (\sin \varphi \sin \theta)B' \\
&= (-\varphi' \sin \varphi)T + \cos \varphi(\kappa N) + (\varphi' \cos \varphi \cos \theta)N + (\sin \varphi \cos \theta)(-\kappa T + \tau B) \\
&\quad + (\varphi' \cos \varphi \sin \theta)B + (\sin \varphi \sin \theta)(-\tau N) \\
&= -(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)T - (r'\kappa + r'\varphi' \cos \theta + \tau \sin \varphi \sin \theta)N + (\tau \sin \varphi \cos \theta \\
&\quad - r'\varphi' \sin \theta)B
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
n_s^1 &= -(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta), \\
n_s^2 &= -(r'\kappa + r'\varphi' \cos \theta + \tau \sin \varphi \sin \theta), \\
n_s^3 &= \tau \sin \varphi \cos \theta - r'\varphi' \sin \theta
\end{aligned} \tag{3.19}$$

olmak üzere,

$$n_s = n_s^1 T + n_s^2 N + n_s^3 B$$

olur. Birim normal vektör alanının  $\theta$ 'ya göre kısmi türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} n_\theta &= (\cos \varphi)_\theta T + (\sin \varphi \cos \theta)_\theta N + (\sin \varphi \sin \theta)_\theta B \\ &= -\sin \varphi \sin \theta N + \sin \varphi \cos \theta B. \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} n_\theta^1 &= 0, \\ n_\theta^2 &= -\sin \varphi \sin \theta, \\ n_\theta^3 &= \sin \varphi \cos \theta \end{aligned} \tag{3.20}$$

olmak üzere,

$$n_\theta = n_\theta^2 N + n_\theta^3 B$$

olur. (3.13), (3.14), (3.19) ve (3.20) denklemleri kullanılırsa  $M$  kanal yüzeyinin 2. temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned} L &= -\langle x_s, n_s \rangle \\ &= -\langle x_s^1 T + x_s^2 N + x_s^3 B, n_s^1 T + n_s^2 N + n_s^3 B \rangle \\ &= -(x_s^1 n_s^1 + x_s^2 n_s^2 + x_s^3 n_s^3) \\ &= -(-(\sin^2 \varphi - rr'' - r\kappa \sin \varphi \cos \theta)(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta) - (r' \sin \varphi \cos \theta \\ &\quad - rr' \kappa - r\tau \sin \varphi \sin \theta - rr' \varphi' \cos \theta)(r' \kappa + r' \varphi' \cos \theta + \tau \sin \varphi \sin \theta) \tag{3.21} \\ &\quad + (r' \sin \varphi \sin \theta + r\tau \sin \varphi \cos \theta - rr' \varphi' \sin \theta)(\tau \sin \varphi \cos \theta - r' \varphi' \sin \theta)) \\ &= -r(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta \\ &\quad + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta) + (r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= - \langle x_\theta, n_s \rangle \\
&= - \langle x_\theta^2 N + x_\theta^3 B, n_s^1 T + n_s^2 N + n_s^3 B \rangle \\
&= -(x_\theta^2 n_s^2 + x_\theta^3 n_s^3) \\
&= -(-(-r \sin \varphi \sin \theta)(r' \kappa + r' \varphi' \cos \theta + \tau \sin \varphi \sin \theta) + (r \sin \varphi \cos \theta) \\
&\quad (\tau \sin \varphi \cos \theta - r' \varphi' \sin \theta)) \\
&= -(rr' \kappa \sin \varphi \sin \theta + rr' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + r\tau \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \\
&\quad + r\tau \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - rr' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta) \\
&= -r\tau \sin^2 \varphi - rr' \kappa \sin \varphi \sin \theta,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
N &= - \langle x_\theta, n_\theta \rangle \\
&= - \langle x_\theta^2 N + x_\theta^3 B, n_\theta^2 N + n_\theta^3 B \rangle \\
&= -(x_\theta^2 n_\theta^2 + x_\theta^3 n_\theta^3) \\
&= -((-r \sin \varphi \sin \theta)(-\sin \varphi \sin \theta) + (r \sin \varphi \cos \theta)(\sin \varphi \cos \theta)) \\
&= -(r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \\
&= -r \sin^2 \varphi
\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.19) ve (3.20) denklemleri kullanılırsa,  $M$  kanal yüzeyinin 3. temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned}
e &= \langle n_s, n_s \rangle \\
&= \langle n_s^1 T + n_s^2 N + n_s^3 B, n_s^1 T + n_s^2 N + n_s^3 B \rangle \\
&= (n_s^1)^2 + (n_s^2)^2 + (n_s^3)^2 \\
&= (r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)^2 + (r' \kappa + r' \varphi' \cos \theta + \tau \sin \varphi \sin \theta)^2 + (\tau \sin \varphi \cos \theta \\
&\quad - r' \varphi' \sin \theta)^2 \\
&= r''^2 + 2r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta + \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 (\kappa + \varphi' \cos \theta)^2 \\
&\quad + 2r' \tau \sin \varphi \sin \theta (\kappa + \varphi' \cos \theta) + \tau^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \tau^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \\
&\quad - 2r' \varphi' \tau \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + r'^2 \varphi'^2 \sin^2 \theta \\
&= \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle n_\theta, n_s \rangle \\
&= \langle n_\theta^2 N + n_\theta^3 B, n_s^1 T + n_s^2 N + n_s^3 B \rangle \\
&= (n_\theta^2 n_s^2 + n_\theta^3 n_s^3) \\
&= (\sin \varphi \sin \theta)(r' \kappa + r' \varphi' \cos \theta + \tau \sin \varphi \sin \theta) + (\sin \varphi \cos \theta)(\tau \sin \varphi \cos \theta \\
&\quad - r' \varphi' \sin \theta) \\
&= r' \kappa \sin \varphi \sin \theta + r' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \tau \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \tau \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \\
&\quad - r' \varphi' \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \\
&= \tau \sin^2 \varphi + r' \kappa \sin \varphi \sin \theta,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle n_\theta, n_\theta \rangle \\
&= \langle n_\theta^2 N + n_\theta^3 B, n_\theta^2 N + n_\theta^3 B \rangle \\
&= (n_\theta^2)^2 + (n_\theta^3)^2 \\
&= (-\sin \varphi \sin \theta)^2 + (\sin \varphi \cos \theta)^2 \\
&= \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \\
&= \sin^2 \varphi
\end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir.

**Lemma :** (3.12) parametrizasyonu ile verilen  $M$  kanal yüzeyinin 1. 2. ve 3. temel formlarının katsayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlar [5].

$$\begin{aligned}
L &= \frac{E + P}{-r}, & M &= \frac{F}{-r}, & N &= \frac{G}{-r}; \\
e &= \frac{L - Q}{-r}, & f &= \frac{M}{-r}, & g &= \frac{N}{-r}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

ve

$$EG - F^2 = r^2 P^2, \quad LN - M^2 = rPQ, \quad eg - f^2 = Q^2, \tag{3.28}$$

burada,

$$P = rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi = rQ - \sin^2 \varphi, \quad (3.29)$$

$$Q = r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta \quad (3.30)$$

dır.

**Açıklama:**  $M$  kanal yüzeyi regüler olduğundan  $P$  her yerde sıfırdan farklıdır.

**İspat:** (3.15), (3.21) ve (3.29) denklemleri birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} L &= \frac{r^2(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta)}{-r} \\ &\quad - \frac{(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta)}{-r} \\ &= \frac{r^2(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta)}{-r} \\ &\quad - \frac{2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \sin \theta) + \sin^2 \varphi + (rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta) - \sin^2 \varphi}{-r} \\ &= \frac{E + P}{-r} \end{aligned}$$

bulunur. (3.16) ve (3.22) denklemleri birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned} M &= -r(\tau \sin^2 \varphi + r' \kappa \sin \varphi \sin \theta) \\ &= \frac{r^2(\tau \sin^2 \varphi + r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)}{-r} \\ &= \frac{F}{-r} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.17) ve (3.23) denklemleri birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned} N &= -r \sin^2 \varphi \\ &= \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{-r} \\ &= \frac{G}{-r} \end{aligned}$$

bulunur. (3.21), (3.24) ve (3.30) denklemleri birlikte ele alınırsa,

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{-r(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta)}{-r} \\
 &= \frac{-r(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta)}{-r} \\
 &\quad + \frac{(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta) - (r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)}{-r} \\
 &= \frac{L - Q}{-r}
 \end{aligned}$$

bulunur. (3.22), (3.25) denklemleri birlikte ele alınırsa,

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{-r(\tau \sin^2 \varphi + r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)}{-r} \\
 &= \frac{(-r\tau \sin^2 \varphi - rr' \kappa \sin \varphi \sin \theta)}{-r} \\
 &= \frac{M}{-r}
 \end{aligned}$$

bulunur. (3.23), (3.26) denklemleri birlikte ele alınırsa,

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{-r(\sin^2 \varphi)}{-r} \\
 &= \frac{(-r \sin^2 \varphi)}{-r} \\
 &= \frac{N}{-r}
 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.18) ve (3.29) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
 EG - F^2 &= r^2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2 \\
 &= r^2 P^2
 \end{aligned}$$



bulunur. (3.21), (3.22), (3.23), (3.29) ve (3.30) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
LN - M^2 &= (-r(\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta \\
&\quad + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta) + r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)(-r \sin^2 \varphi) - (-r \tau \sin^2 \varphi \\
&\quad - r r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)^2 \\
&= r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 r''^2 + 2r^2 r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta \\
&\quad - r(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta) \sin^2 \varphi \\
&= r(r r'' + r \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta) \\
&= rPQ
\end{aligned}$$

bulunur. (3.24), (3.25), (3.26) ve (3.30) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
eg - f^2 &= (\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r'^2 \kappa^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 + 2\varphi' \kappa \cos \theta \\
&\quad + 2r' \kappa \tau \sin \varphi \sin \theta)(\sin^2 \varphi) - (\tau \sin^2 \varphi + r' \kappa \sin \varphi \sin \theta)^2 \\
&= \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r''^2 + 2r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta \\
&= (r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)^2 \\
&= Q^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Lemma 3.6.** (3.12) parametrizasyonu ile verilen  $M$  kanal yüzeyinin  $K$  Gauss eğriliği ve  $H$  ortalama eğriliği aşağıdaki şekilde verilir [5].

$$K = \frac{Q}{rP}, \quad (3.31)$$

$$H = \frac{2P + \sin^2 \varphi}{-2rP} \quad (3.32)$$

**İspat:** (2.3) denkleminde (3.28) denklemindeki birinci ve ikinci eşitlikler kullanılırsa,

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{rPQ}{r^2P^2} \\ &= \frac{Q}{rP} \end{aligned}$$

bulunur. (2.4), (3.26), (3.27) ve (3.28) denklemleri birlikte ele alınırsa,

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{\frac{EG}{-r} - \frac{2F^2}{-r} + \frac{G(E+P)}{-r}}{2r^2P^2} \\ &= \frac{EG - F^2 + EG - F^2 + PG}{2r^2P^2} \\ &= \frac{-r}{2r^2P^2} \\ &= \frac{2r^2P^2 + PG}{2r^2P^2} \\ &= \frac{-r}{2r^2P^2} \\ &= \frac{2r^2P^2 + PN(-r)}{2r^2P^2} \\ &= \frac{-r}{2r^2P^2} \\ &= \frac{2r^2P^2 + Pgr^2}{2r^2P^2} \\ &= \frac{-r}{2r^2P^2} \\ &= \frac{2P + g}{-2rP} \\ &= \frac{2P + \sin^2 \varphi}{-2rP} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.7.** (3.12) parametrizasyonu ile verilen  $M$  kanal yüzeyinin  $K$  Gauss eğriliği ile  $H$  ortalama eğriliği arasında aşağıdaki bağıntı vardır [5].

$$H = -\frac{1}{2} \left( Kr + \frac{1}{r} \right). \quad (3.33)$$

**İspat:** (3.29), (3.31) ve (3.32) denklemleri birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{2P + \sin^2 \varphi}{-2rP} \\
&= \frac{-1}{2} \left( \frac{2P + \sin^2 \varphi}{rP} \right) \\
&= \frac{-1}{2} \left( \frac{2P + rQ - P}{rP} \right) \\
&= \frac{-1}{2} \left( \frac{rQ + P}{rP} \right) \\
&= \frac{-1}{2} \left( \frac{Q}{P} + \frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{-1}{2} \left( Kr + \frac{1}{r} \right).
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.8.** (3.12) parametrizasyonu ile verilen  $M$  kanal yüzeyinin asli eğrilikleri  $k_1$  ve  $k_2$  aşağıdaki gibi verilir [5].

$$k_1 = -Kr$$

ve

$$k_2 = \frac{1}{r}$$

**İspat:** (2.5) ve (3.33) denklemleri kullanılırsa,  $M$  yüzeyinin asli eğrilikleri  $k_1$  ve  $k_2$ ,

$$\begin{aligned}
k_1 &= H - \sqrt{H^2 - K} \\
&= \frac{-1}{2} \left( Kr + \frac{1}{r} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( Kr + \frac{1}{r} \right)^2 - K} \\
&= \frac{-1}{2} \left( Kr + \frac{1}{r} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( Kr - \frac{1}{r} \right)^2} \\
&= \frac{-1}{2} \left( Kr + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \left( Kr - \frac{1}{r} \right) \\
&= -Kr
\end{aligned} \tag{3.34}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde (2.6) ve (3.33) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
k_2 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\
&= \frac{-1}{2} \left( Kr + \frac{1}{r} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( Kr + \frac{1}{r} \right)^2 - K} \\
&= \frac{-1}{2} \left( Kr + \frac{1}{r} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( Kr - \frac{1}{r} \right)^2} \\
&= \frac{-1}{2} \left( Kr + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \left( Kr - \frac{1}{r} \right) \\
&= -\frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

olarak hesaplanır.

**Teorem 3.9.**  $M$  yüzeyinin ikinci Gauss eğriliği  $K_{II}$ ,

$$K_{II} = \frac{1}{r^2 P^2 Q^2} \sum_{i=0}^4 w_i \cos^i \theta \tag{3.36}$$

dir. Burada  $w_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) katsayıları,

$$\begin{aligned}
w_0 &= -r^3 \varphi'^4 \sin^4 \varphi + \frac{1}{4} r \varphi'^2 \sin^4 \varphi (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{3}{2} r^2 \varphi'^3 \sin^5 \varphi - \frac{1}{4} r \kappa^2 \sin^6 \varphi \\
&\quad - \frac{1}{4} r \varphi'' \sin^5 \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi' \sin^5 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} r \kappa \tau \sin^5 \varphi \cos \varphi \sin \theta, \\
w_1 &= -4r^3 \varphi'^3 \kappa \sin^4 \varphi + \frac{9}{2} r^2 \varphi'^2 \kappa \sin^5 \varphi + \frac{1}{4} r \varphi' \kappa \sin^4 \varphi (1 - 5 \sin^2 \varphi) \\
&\quad + \frac{1}{4} \kappa \sin^5 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} r \kappa' \sin^5 \varphi \cos \varphi, \\
w_2 &= -6r^3 \varphi'^2 \kappa^2 \sin^4 \varphi + \frac{9}{2} r^2 \varphi' \kappa^2 \sin^5 \varphi - \frac{1}{4} r \kappa^2 \sin^6 \varphi, \\
w_3 &= -4r^3 \varphi' \kappa^3 \sin^4 \varphi + \frac{3}{2} r^2 \kappa^3 \sin^5 \varphi, \\
w_4 &= -r^3 \kappa^4 \sin^4 \varphi
\end{aligned} \tag{3.37}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$$r^2 P^2 Q^2 = \sum_{i=0}^4 v_j \cos^j \theta \tag{3.38}$$

yazılır. Burada  $v_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ) katsayıları,

$$\begin{aligned}
v_0 &= r^4 \varphi'^4 \sin^4 \varphi + r^2 \varphi'^2 \sin^6 \varphi - 2r^3 \varphi'^3 \sin^5 \varphi, \\
v_1 &= 4r^4 \varphi'^3 \kappa \sin^4 \varphi - 6r^3 \varphi'^2 \kappa \sin^5 \varphi + 2r^2 \varphi' \kappa \sin^6 \varphi, \\
v_2 &= 6r^4 \varphi'^2 \kappa^2 \sin^4 \varphi - 6r^3 \varphi' \kappa^2 \sin^5 \varphi + r^2 \kappa^2 \sin^6 \varphi, \\
v_3 &= 4r^4 \varphi' \kappa^3 \sin^4 \varphi - 2r^3 \kappa^3 \sin^5 \varphi, \\
v_4 &= r^4 \kappa^4 \sin^4 \varphi
\end{aligned} \tag{3.39}$$

şeklindedir [5].

**İspat:** (2.7) denkleminde  $M$  yüzeyinin ikinci Gauss eğriliği,

$$K_{II} = \frac{1}{(LN - M^2)^2} \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}L_{\theta\theta} + M_{s\theta} - \frac{1}{2}N_{ss} & \frac{1}{2}L_s & M_s - \frac{1}{2}L_\theta \\ M_\theta - \frac{1}{2}N_s & L & M \\ \frac{1}{2}N_\theta & M & N \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2}L_\theta & \frac{1}{2}N_s \\ \frac{1}{2}L_\theta & L & M \\ \frac{1}{2}N_s & M & N \end{array} \right| \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. (3.28) denkleminde  $LN - M^2 = rPQ$  olduğundan,  $(LN - M^2)^2 = r^2P^2Q^2$  dir. Ayrıca (3.29), (3.30) denklemleri ve  $r'' = \varphi' \sin \varphi$  eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
r^2P^2Q^2 &= r^2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin^2 \varphi)^2 (r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)^2 \\
&= r^2((rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta)^2 - 2(rr'' + r\kappa \sin \varphi \cos \theta) \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) \\
&\quad (r''^2 + 2r''\kappa \sin \varphi \cos \theta + \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \\
&= (r^4 \varphi'^4 \sin^4 \varphi + r^2 \varphi'^2 \sin^6 \varphi - 2r^3 \varphi'^3 \sin^5 \varphi) \cos^0 \theta + (4r^4 \varphi'^3 \kappa \sin^4 \varphi \\
&\quad - 6r^3 \varphi'^2 \kappa \sin^5 \varphi + 2r^2 \varphi' \kappa \sin^6 \varphi) \cos \theta + (6r^4 \varphi'^2 \kappa^2 \sin^4 \varphi \\
&\quad - 6r^3 \varphi' \kappa^2 \sin^5 \varphi + r^2 \kappa^2 \sin^6 \varphi) \cos^2 \theta + (4r^4 \varphi' \kappa^3 \sin^4 \varphi \\
&\quad - 2r^3 \kappa^3 \sin^5 \varphi) \cos^3 \theta + (r^4 \kappa^4 \sin^4 \varphi) \cos^4 \theta
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece (3.39) ile verilen  $v_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ) katsayıları bulunur.

O halde  $K_{II}$  'nin ifadesinde,

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}L_{\theta\theta} + M_{s\theta} - \frac{1}{2}N_{ss} & \frac{1}{2}L_s & M_s - \frac{1}{2}L_\theta \\ M_\theta - \frac{1}{2}N_s & L & M \\ \frac{1}{2}N_\theta & M & N \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}L_\theta & \frac{1}{2}N_s \\ \frac{1}{2}L_\theta & L & M \\ \frac{1}{2}N_s & M & N \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^4 w_i \cos^i \theta$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}L_{\theta\theta} + M_{s\theta} - \frac{1}{2}N_{ss} & \frac{1}{2}L_s & M_s - \frac{1}{2}L_\theta \\ M_\theta - \frac{1}{2}N_s & L & M \\ \frac{1}{2}N_\theta & M & N \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\det A = A_1 A_2 - A_3 A_4 + A_5 A_6$$

dır. Burada,

$$A_1 = -\frac{1}{2}L_{\theta\theta} + M_{s\theta} - \frac{1}{2}N_{ss}, \quad (3.40)$$

$$A_2 = LN - M^2, \quad (3.41)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}L_s, \quad (3.42)$$

$$A_4 = M_\theta N - \frac{1}{2}NN_s - \frac{1}{2}N_\theta M, \quad (3.43)$$

$$A_5 = M_s - \frac{1}{2}L_\theta, \quad (3.44)$$

$$A_6 = M_\theta M - \frac{1}{2}N_s M - \frac{1}{2}LN_\theta \quad (3.45)$$

dır. Benzer şekilde,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}L_\theta & \frac{1}{2}N_s \\ \frac{1}{2}L_\theta & L & M \\ \frac{1}{2}N_s & M & N \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\det B = -B_1B_2 + B_3B_4$$

dır. Burada,

$$B_1 = \frac{1}{2}L_\theta, \quad (3.46)$$

$$B_2 = \frac{1}{2}L_\theta N - \frac{1}{2}N_s M, \quad (3.47)$$

$$B_3 = \frac{1}{2}N_s, \quad (3.48)$$

$$B_4 = \frac{1}{2}ML_\theta - \frac{1}{2}N_s L \quad (3.49)$$

dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \det A - \det B &= A_1A_2 - A_3A_4 + A_5A_6 + B_1B_2 - B_3B_4 \\ &= \sum_{i=0}^4 w_i \cos^i \theta \end{aligned} \quad (3.50)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Verilen matrislerin determinantlarının hesabında kullanılacak olan  $L, M, N$  ikinci temel formunun bazı kısmi türevleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} L_s &= (\kappa^2 \cos^3 \varphi + \tau^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + 2\varphi'^2 \cos \varphi - 2\kappa\tau \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \theta \\ &\quad + 2r\varphi'\kappa^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2r\kappa\kappa' \cos^2 \varphi - 2r\tau\tau' \sin^2 \varphi - 2r\varphi'\tau^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad - 2r\varphi'\varphi'' - 2r\varphi'\kappa\tau \sin^2 \varphi \sin \theta + 2r\kappa'\tau \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \\ &\quad + 2r\kappa\tau' \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + 2r\varphi'\kappa\tau \cos^2 \varphi \sin \theta + \varphi'' \sin \varphi) \\ &\quad + (2\varphi'\kappa \cos \varphi - 2r\varphi'\kappa' - 2r\varphi''\kappa + \kappa' \sin \varphi + \varphi'\kappa \cos \varphi) \cos \theta \\ &\quad + (\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi - 2r\kappa\kappa' \sin^2 \varphi - 2r\varphi'\kappa^2 \sin \varphi \cos \varphi) \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$L_\theta = (2r\varphi'\kappa \sin \theta - \kappa \sin \varphi \sin \theta) + (2r\kappa^2 \sin^2 \varphi \sin \theta + 2r\kappa\tau \sin \varphi \cos \varphi) \cos \theta, \quad (3.52)$$

$$L_{\theta\theta} = (-2r\kappa^2 \sin^2 \varphi - 2r\kappa\tau \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta) + (2r\varphi'\kappa - \kappa \sin \varphi) \cos \theta + (4r\kappa^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta, \quad (3.53)$$

$$M_s = \tau \sin^2 \varphi \cos \varphi - \kappa \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \theta - r\tau' \sin^2 \varphi - 2r\varphi'\tau \sin \varphi \cos \varphi - r\varphi'\kappa \sin^2 \varphi \sin \theta + r\kappa' \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + r\varphi'\kappa \cos^2 \varphi \sin \theta, \quad (3.54)$$

$$M_\theta = r\kappa \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta, \quad (3.55)$$

$$M_{s\theta} = (-\kappa \sin \varphi \cos^2 \varphi - r\varphi'\kappa \sin^2 \varphi + r\varphi'\kappa \cos^2 \varphi + r\kappa' \sin \varphi \cos \varphi) \cos \theta, \quad (3.56)$$

$$N_s = \sin^2 \varphi \cos \varphi - 2r\varphi' \sin \varphi \cos \varphi, \quad (3.57)$$

$$N_\theta = 0, \quad (3.58)$$

$$N_{ss} = 2\varphi' \sin \varphi \cos \varphi - \varphi' \sin^3 \varphi + 2\varphi' \sin \varphi \cos^2 \varphi - 2r\varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - 2r\varphi'^2 \cos^2 \varphi + 2r\varphi'^2 \sin^2 \varphi \quad (3.59)$$

(3.40), (3.53), (3.56) ve (3.59) denklemleri kullanılırsa,

$$A_1 = (r\kappa^2 \sin^2 \varphi + r\kappa\tau \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta - \varphi' \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2}\varphi' \sin^3 \varphi - \varphi' \sin \varphi \cos^2 \varphi + r\varphi'' \sin \varphi \cos \varphi + r\varphi'^2 \cos^2 \varphi - r\varphi'^2 \sin^2 \varphi) + (\frac{1}{2}\kappa \sin \varphi - \kappa \sin \varphi \cos^2 \varphi - 2r\varphi'\kappa \sin^2 \varphi + r\kappa' \sin \varphi \cos \varphi) \cos \theta + (-2r\kappa^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta \quad (3.60)$$

elde edilir. (3.28) denklemindeki ikinci denklem ve (3.21), (3.22), (3.23) ve (3.41) denklemleri ile birlikte düşünülürse,

$$A_2 = (r^2\varphi'^2 \sin^2 \varphi - r\varphi' \sin^3 \varphi) + (2r^2\varphi'\kappa \sin^2 \varphi - r\kappa \sin^3 \varphi) \cos \theta + (r^2\kappa^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta \quad (3.61)$$

bulunur. (3.42) ve (3.51) denklemlerinden



$$\begin{aligned}
A_3 = & \left( \frac{1}{2} \kappa^2 \cos^3 \varphi + \frac{1}{2} \tau^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - \kappa \tau \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \theta \right. \\
& + r \varphi' \kappa^2 \sin \varphi \cos \varphi - r \kappa \kappa' \cos^2 \varphi - r \tau \tau' \sin^2 \varphi - r \varphi' \tau^2 \sin \varphi \cos \varphi - r \varphi' \varphi'' \\
& - r \varphi' \kappa \tau \sin^2 \varphi \sin \theta + r \kappa' \tau \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + r \kappa \tau' \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \\
& \left. + r \varphi' \kappa \tau \cos^2 \varphi \sin \theta + \frac{1}{2} \varphi'' \sin \varphi \right) + (\varphi' \kappa \cos \varphi - r \varphi' \kappa' - r \varphi'' \kappa \\
& + \frac{1}{2} \kappa' \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi' \kappa \cos \varphi) \cos \theta + \left( \frac{1}{2} \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi - r \kappa \kappa' \sin^2 \varphi \right. \\
& \left. - r \varphi' \kappa^2 \sin \varphi \cos \varphi \right) \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{3.62}$$

elde edilir. (3.22), (3.23), (3.43), (3.55), (3.57) ve (3.58) denklemleri kullanılırsa,

$$A_4 = \left( \frac{1}{2} r \sin^4 \varphi \cos \varphi - r^2 \varphi' \sin^3 \varphi \cos \varphi \right) + (-r^2 \kappa \sin^3 \varphi \cos \varphi) \cos \theta \tag{3.63}$$

hesaplanır. (3.44), (3.52) ve (3.54) denklemleri birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned}
A_5 = & \left( \tau \sin^2 \varphi \cos \varphi - \kappa \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \theta - r \tau' \sin^2 \varphi - 2r \varphi' \tau \sin \varphi \cos \varphi \right. \\
& - r \varphi' \kappa \sin^2 \varphi \sin \theta + r \kappa' \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + r \varphi' \kappa \cos^2 \varphi \sin \theta - r \varphi' \kappa \sin \theta \\
& \left. + \frac{1}{2} \kappa \sin \varphi \sin \theta \right) + (-r \kappa^2 \sin^2 \varphi \sin \theta - r \kappa \tau \sin \varphi \cos \varphi) \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.64}$$

bulunur. (3.21), (3.22), (3.45), (3.55), (3.57) ve (3.58) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
A_6 = & \left( \frac{1}{2} r \tau \sin^4 \varphi \cos \varphi - r^2 \varphi' \tau \sin^3 \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} r \kappa \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \sin \theta \right. \\
& \left. + r^2 \varphi' \kappa \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin \theta \right) + (-r^2 \kappa \tau \sin^3 \varphi \cos \varphi \\
& + r^2 \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin \theta) \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.65}$$

elde edilir. (3.46) ve (3.52) denklemleri kullanılırsa,

$$B_1 = (r \varphi' \kappa \sin \theta - \frac{1}{2} \kappa \sin \varphi \sin \theta) + (r \kappa^2 \sin^2 \varphi \sin \theta + r \kappa \tau \sin \varphi \cos \varphi) \cos \theta \tag{3.66}$$

hesaplanır. (3.22), (3.23), (3.47), (3.52) ve (3.57) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
B_2 = & (-r^2\varphi'\kappa\sin^2\varphi\sin\theta + \frac{1}{2}r\kappa\sin^3\varphi\sin\theta + \frac{1}{2}r\tau\sin^4\varphi\cos\varphi - r^2\varphi'\tau\sin^3\varphi\cos\varphi \\
& - \frac{1}{2}r\kappa\sin^3\varphi\cos^2\varphi\sin\theta + r^2\varphi'\kappa\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\theta) + (-r^2\kappa^2\sin^4\varphi\sin\theta \\
& - r^2\kappa\tau\sin^3\varphi\cos\varphi)\cos\theta
\end{aligned} \quad (3.67)$$

elde edilir. (3.48), (3.57) denklemleri kullanılırsa,

$$B_3 = \frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi\cos\varphi \quad (3.68)$$

bulunur. (3.21), (3.22), (3.49), (3.52) ve (3.57) denklemleri birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned}
B_4 = & (-r^2\varphi'\kappa\tau\sin^2\varphi\sin\theta + \frac{1}{2}r\kappa\tau\sin^3\varphi\sin\theta - \frac{1}{2}r\kappa^2\sin^4\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}r\tau^2\sin^4\varphi\cos\varphi \\
& + \frac{3}{2}r\varphi'^2\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi'\sin^3\varphi\cos\varphi - r\kappa\tau\sin^3\varphi\cos^2\varphi\sin\theta \\
& - r^2\varphi'\tau^2\sin^3\varphi\cos\varphi - r^2\varphi'^3\sin\varphi\cos\varphi + r^2\varphi'\kappa^2\sin^3\varphi\cos\varphi \\
& + 2r^2\varphi'\kappa\tau\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\theta) + (-r^2\kappa^2\tau\sin^4\varphi\sin\theta - r^2\kappa\tau^2\sin^3\varphi\cos\varphi \\
& + r^2\kappa^3\sin^3\varphi\cos\varphi + r^2\kappa^2\tau\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\theta + 2r\varphi'\kappa\sin^2\varphi\cos\varphi \\
& - \frac{1}{2}\kappa\sin^3\varphi\cos\varphi - 2r^2\varphi'^2\kappa\sin\varphi\cos\varphi)\cos\theta + (\frac{1}{2}r\kappa^2\sin^4\varphi\cos\varphi \\
& - r^2\varphi'\kappa^2\sin^3\varphi\cos\varphi - r^2\varphi'\kappa^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}r\kappa^2\sin^2\varphi\cos\varphi)\cos^2\theta \\
& + (-r^2\kappa^3\sin^3\varphi\cos\varphi)\cos^3\theta
\end{aligned} \quad (3.69)$$

hesaplanır. (3.60), (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.66), (3.67), (3.68), (3.69) denklemleri (3.52) denkleminde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa (3.50) ile verilen eşitlikler elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 3.10.** (3.12) parametrizasyonu ile verilen  $M$  yüzeyinin ikinci Gauss eğriliği  $K_{II}$  ve ortalama eğriliği  $H$  arasında aşağıdaki bağıntı vardır [5].

$$K_{II} = H + \frac{R}{4r^2P^2Q^2}, \quad (3.70)$$

burada

$$R = \sum_{i=0}^2 u_k \cos^k \theta \quad (3.71)$$

ve  $u_k$  katsayıları ( $k = 0, 1, 2$  için) aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} u_0 &= 2rr'^2 r''^2 \sin^2 \varphi - r\kappa^2 \sin^6 \varphi + rr' r''' \sin^4 \varphi + r'^2 r'' \sin^4 \varphi \\ &\quad + rr' \kappa \tau \sin^5 \varphi \sin \theta, \\ u_1 &= rr'^2 r'' \kappa \sin^3 \varphi + r'^2 \kappa \sin^5 \varphi + rr' \kappa' \sin^5 \varphi, \\ u_2 &= r\kappa^2 \sin^6 \varphi. \end{aligned} \quad (3.72)$$

**İspat:** (3.32) denkleminde

$$\begin{aligned} H &= \frac{2P + \sin^2 \varphi}{-2rP} \\ &= -\frac{(4rP^2Q^2 + 2rPQ^2 \sin^2 \varphi)}{4r^2P^2Q^2} \end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda

$$H + \frac{R}{4r^2P^2Q^2} = -\frac{(4rP^2Q^2 + 2rPQ^2 \sin^2 \varphi + \sum_{i=0}^2 u_k \cos^k \theta)}{4r^2P^2Q^2}$$

elde edilir. Diğer yandan (3.36) denkleminde

$$K_{II} = \frac{1}{r^2P^2Q^2} \sum_{i=0}^4 w_i \cos^i \theta$$

olduğundan

$$\frac{-(4rP^2Q^2 + 2rPQ^2 \sin^2 \varphi + \sum_{i=0}^2 u_k \cos^k \theta)}{4} = \sum_{i=0}^4 w_i \cos^i \theta \quad (3.73)$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. (3.38) denkleminde

$$-4rP^2Q^2 = -4 \sum_{j=0}^4 \frac{v_j}{r} \cos^j \theta$$

yazılır. (3.29) ve (3.30) denklemlerinden

$$-2rPQ^2 \sin^2 \varphi = -2 \sum_{l=0}^3 s_l \cos^l \theta$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} s_0 &= r^2 r''^3 \sin^2 \varphi - r r''^2 \sin^4 \varphi, \\ s_1 &= 3r^2 r''^2 \kappa \sin^3 \varphi - 2r r'' \kappa \sin^5 \varphi, \\ s_2 &= 3r^2 r'' \kappa^2 \sin^4 \varphi - r \kappa^2 \sin^6 \varphi, \\ s_3 &= r^2 \kappa^3 \sin^5 \varphi \end{aligned} \tag{3.74}$$

dir. Bu durumda sırasıyla (3.39), (3.72) ve (3.74) denklemleri ile verilen  $v_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ),  $s_l$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ) ve  $u_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) katsayıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} -\frac{v_0}{r} - \frac{s_0}{2} + \frac{u_0}{4} &= w_0, \\ -\frac{v_1}{r} - \frac{s_1}{2} + \frac{u_1}{4} &= w_1, \\ -\frac{v_2}{r} - \frac{s_2}{2} + \frac{u_2}{4} &= w_2, \\ -\frac{v_3}{r} - \frac{s_3}{2} &= w_3, \\ -\frac{v_4}{r} &= w_4 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar.

**Teorem 3.11.** (3.12) parametrizasyonu ile verilen  $M$  kanal yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart  $M$  yüzeyinin dairesel silindir veya dairesel koni olmasıdır [5].

**İspat:**  $M$  yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart Gauss eğriliğinin sıfır olmasıdır ( $K = 0$ ). Bu durumda (3.31) denkleminde  $Q = 0$  elde edilir. (3.30) denkleminde

$$r''(s) + \kappa(s) \sin \varphi(s) \cos \theta = 0 \quad (3.75)$$

olur. Yukarıdaki eşitliğin sağlanması için  $r''(s) = 0$  ve  $\kappa(s) \sin \varphi(s) = 0$  olmalıdır.  $M$  yüzeyi regüler olduğundan  $\sin \varphi(s) \neq 0$  dır. Bu durumda  $r''(s) = 0$  ve  $\kappa(s) = 0$  elde edilir.  $\kappa(s) = 0$  olması  $M$  kanal yüzeyinin merkez eğrisinin bir doğru olduğu anlamına gelir.  $r''(s) = 0$  ise  $r(s) = as + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq \mp 1$  olur.

$a = \mp 1$  olması durumunda  $r'(s) = -\cos \varphi = \mp 1$  olup  $\sin \varphi = 0$  olur. Bu ise yüzeyin regüler olması durumuyla çelişir. Böylece eğer  $a = 0$  ise yarıçap fonksiyonu  $r(s) = b$  olup  $M$  yüzeyi bir dairesel silindir olur. Eğer  $a \neq 0$  ve  $a \neq \mp 1$  ise yarıçap fonksiyonu  $r(s) = as + b$  şeklinde lineer bir fonksiyon olup  $M$  kanal yüzeyi dairesel bir koni olur.

**Uyarı:** Teorem (3.10) dan  $M$  kanal yüzeyinin flat olmaması için gerek ve yeter koşul  $Q \neq 0$  olmasıdır. Ancak bu şart altında ikinci Gauss eğriliği tanımlanabilir.

**Teorem 3.12.** (3.12) parametrizasyonu ile verilen  $M$  kanal yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart  $M$  yüzeyinin bir katenoid olmasıdır [5].

**İspat:**  $M$  kanal yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart  $M$  yüzeyinin ortalama eğriliğinin sıfıra eşit olmasıdır ( $H = 0$ ). (3.32) denkleminde

$$2P + \sin^2 \varphi = 0$$

yazılır. (3.29) eşitliğinden

$$2rr'' - \sin^2 \varphi + 2r\kappa \sin \varphi \cos \theta = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin gerçekleşmesi için  $2rr'' - \sin^2 \varphi = 0$  ve  $r\kappa \sin \varphi = 0$  olmalıdır.  $r \neq 0$  ve  $\sin \varphi \neq 0$  olduğundan  $\kappa = 0$  olur. Bu durumda  $M$  bir dönel yüzey olur. 3-boyutlu Öklid uzayında minimal dönel yüzey sadece katenoid olduğundan  $M$  yüzeyi katenoid olur.

**Teorem 3.13.** (3.12) parametrizasyonu ile verilen  $M$  kanal yüzeyi flat olmayan ve ikinci Gauss eğriliği sıfır olan bir yüzey olsun. Bu durumda  $M$  bir dönel yüzeydir [5].

**İspat:**  $M$  yüzeyinin ikinci Gauss eğriliğinin sıfır olduğunu ( $K_{II} = 0$ ) kabul edilsin. (3.70) denkleminde

$$H = -\frac{R}{4r^2 P^2 Q^2}$$

olur ve (3.32) denkleminde

$$R = 2rPQ^2(2P + \sin^2 \varphi) \quad (3.76)$$

olur. (3.76) ve (3.72) denklemleri kullanılırsa en yüksek dereceden  $\cos \theta$  katsayılarından  $\kappa = 0$  elde edilir. Bu durumda  $M$  bir dönel yüzey olur.

### 3.3. (X,Y)-Weingarten Kanal Yüzeylerinin Bazı Karakterizasyonları

Bu alt başlıkta [5] nolu çalışmada yer alan  $(X, Y)$ -Weingarten kanal yüzeyleriyle ilgili karakterizasyonlar detaylı olarak ele alınmıştır.  $(K, H)$ ,  $(K, K_{II})$  ve  $(H, K_{II})$ -Weingarten kanal yüzeyleriyle ilgili çeşitli teoremler ispatlanmıştır.

**Tanım 3.14.**  $M$  yüzeyinin  $K, H$  ve  $K_{II}$  eğriliklerinin bir  $(X, Y)$ ,  $X \neq Y$  çifti için  $\phi(X, Y) = 0$  şartı sağlamıyorsa, bu yüzeye  $(X, Y)$  Weingarten yüzeyi adı verilir. Burada  $\phi$ ,

$$\phi(X, Y) = \det \begin{bmatrix} X_s & X_\theta \\ Y_s & Y_\theta \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan Jacobi fonksiyonudur [5].

**Lemma 3.15.**  $M$  yüzeyinin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve ikinci Gauss eğriliğinin  $s$  ve  $\theta$  ya göre kısmi türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilir [5].

$$K_s = \frac{-2rr'\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + (r'\kappa - r\kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta - 5rr'r''\kappa \sin \varphi \cos \theta}{r^2 P^2} + \frac{+r'r'' \sin^2 \varphi - rr''' \sin^2 \varphi - 4rr'r''^2}{r^2 P^2}, \quad (3.77)$$

$$K_\theta = \frac{\kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{r P^2}, \quad (3.78)$$

$$H_s = \frac{2r^2 r' \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - (2rr'\kappa - r^2 \kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta + 5r^2 r' r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta}{2r^2 P^2} - \frac{-2rr'r'' \sin^2 \varphi + r^2 r''' \sin^2 \varphi + 4r^2 r' r''^2 + r' \sin^4 \varphi}{2r^2 P^2}, \quad (3.79)$$

$$H_\theta = -\frac{\kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{2P^2}, \quad (3.80)$$

$$(K_{II})_s = H_s + \frac{1}{4r^4 P^4 Q^4} \left\{ \frac{\partial R}{\partial s} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial s} \right\}, \quad (3.81)$$

$$(K_{II})_\theta = H_\theta + \frac{1}{4r^4 P^4 Q^4} \left\{ \frac{\partial R}{\partial \theta} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial \theta} \right\}. \quad (3.82)$$

**İspat:** Önce (3.29) ve (3.30) denklemleriyle verilen  $P$  ve  $Q$  eşitliklerini  $s$ 'ye ve  $\theta$ 'ya göre kimi türevleri hesaplanırsa,

$$P_s = r'Q + rQ' - 2r'' \cos \varphi,$$

$$P_\theta = rQ_\theta,$$

$$Q_s = r''' + (\kappa' \sin \varphi + \varphi' \kappa \cos \varphi) \cos \theta,$$

$$Q_\theta = -\kappa \sin \varphi \sin \theta$$

olarak bulunur. (3.31) denklemini kullanılırsa  $K$  Gauss eğriliğinin  $s$ 'ye göre kısmi türevi,

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{Q_s(rP) - Q(rP)_s}{r^2 P^2} \\ &= \frac{rPQ_s - Q(r'P + rP_s)}{r^2 P^2} \\ &= \frac{-r \sin^2 \varphi Q_s - 2rr'Q^2 + r' \sin^2 \varphi Q + 2rr'' \cos \varphi Q}{r^2 P^2} \\ &= \frac{-r \sin^2 \varphi (r''' + \kappa' \sin \varphi \cos \theta + \varphi' \kappa \cos \varphi \cos \theta) - 2rr'(r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)^2}{r^2 P^2} \\ &\quad + \frac{+r' \sin^2 \varphi (r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta) + 2rr'' \cos \varphi (r'' + \kappa \sin \varphi \cos \theta)}{r^2 P^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2rr'\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + (r'\kappa - r\kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta - 5rr'r''\kappa \sin \varphi \cos \theta}{r^2 P^2} \\
&\quad + \frac{r'r'' \sin^2 \varphi - rr''' \sin^2 \varphi - 4rr'r''^2}{r^2 P^2}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. (3.31) denklemi kullanılırsa  $K$  Gauss eğriliğinin  $\theta$ 'ya göre kısmi türevi,

$$\begin{aligned}
K_\theta &= \frac{Q_\theta(rP) - Q(rP)_\theta}{r^2 P^2} \\
&= \frac{rQQ_\theta - \sin^2 \varphi Q_\theta - rQQ_\theta}{rP^2} \\
&= \frac{\kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{rP^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.32) denklemi kullanılırsa  $H$  ortalama eğriliğinin  $s$ 'ye göre kısmi türevi,

$$\begin{aligned}
H_s &= -\frac{1}{2} \left( K_s r + Kr' - \frac{r'}{r^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{(-2rr'\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + (r'\kappa - r\kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta - 5rr'r''\kappa \sin \varphi \cos \theta)}{r^2 P^2} \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{+r'r'' \sin^2 \varphi - rr''' \sin^2 \varphi - 4rr'r''^2}{r^2 P^2} \right) r + rr'QP - r'P^2 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{(-2rr'\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + (r'\kappa - r\kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta - 5rr'r''\kappa \sin \varphi \cos \theta)}{r^2 P^2} \right) \\
&\quad \left( \frac{+r'r'' \sin^2 \varphi - rr''' \sin^2 \varphi - 4rr'r''^2}{r^2 P^2} \right) r + rr'Q(rQ - \sin^2 \varphi) \\
&\quad \left( \frac{-r'(rQ - \sin^2 \varphi)^2}{r^2 P^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{(-2rr'\kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + (r'\kappa - r\kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta - 5rr'r''\kappa \sin \varphi \cos \theta)}{r^2 P^2} \right) \\
&\quad \left( \frac{+r'r'' \sin^2 \varphi - rr''' \sin^2 \varphi - 4rr'r''^2}{r^2 P^2} \right) r + rr' \sin^2 \varphi Q - r' \sin^4 \varphi \\
&= \frac{2r^2 r' \kappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - (2rr'\kappa - r^2 \kappa') \sin^3 \varphi \cos \theta + 5r^2 r' r'' \kappa \sin \varphi \cos \theta}{2r^2 P^2} \\
&\quad - \frac{2rr'r'' \sin^2 \varphi + r^2 r''' \sin^2 \varphi + 4r^2 r' r''^2 + r' \sin^4 \varphi}{2r^2 P^2}
\end{aligned}$$



bulunur. (3.32) denklemini kullanılırsa  $H$  ortalama eğriliğinin  $\theta$ 'ya göre kısmi türevi,

$$\begin{aligned} H_\theta &= -\frac{1}{2}(K_\theta r) \\ &= -\frac{\kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{2P^2} \end{aligned}$$

olur. Son olarak (3.70) denklemini kullanılırsa  $K_{II}$  ikinci Gauss eğriliğinin  $s$ 'ye ve  $\theta$ 'ya göre kısmi türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} (K_{II})_s &= H_s + \frac{1}{4r^4 P^4 Q^4} \left\{ \frac{\partial R}{\partial s} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial s} \right\}, \\ (K_{II})_\theta &= H_\theta + \frac{1}{4r^4 P^4 Q^4} \left\{ \frac{\partial R}{\partial \theta} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial \theta} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \sum_{k=0}^2 \frac{\partial u_k}{\partial s} \cos^k \theta, \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \theta} &= \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \cos \theta - u_1 \sin \theta + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \cos^2 \theta - 2u_2 \sin \theta \cos \theta \\ &= (rr' \kappa \tau \sin^5 \varphi - 2u_2 \sin \theta) \cos \theta - u_1 \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial s} = \sum_{j=0}^4 \frac{\partial v_j}{\partial s} \cos^j \theta, \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial \theta} = -\sin \theta \sum_{j=1}^4 j v_j \cos^{j-1} \theta \quad (3.86)$$

dır.

**Teorem 3.16.** (3.12) parametrizasyonu ile verilen  $M$  kanal yüzeyinin  $(K, H)$ -Weingarten kanal yüzey olması için gerek ve yeter şart bir tüp veya bir dönel yüzey olmasıdır [5].

**İspat:**  $\Rightarrow$  Kabul edelim ki  $M$  yüzeyi  $(K, H)$ -Weingarten kanal yüzeyi olsun. Bu durumda Jacobi eşitliğinden,

$$H_s K_\theta = H_\theta K_s \quad (3.87)$$

yazılır. (3.77), (3.78), (3.79) ve (3.80) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \left( K_s r + K r' - \frac{r'}{r^2} \right) K_\theta &= -\frac{1}{2} r K_\theta K_s \\
-\frac{1}{2} r K_s K_\theta - \frac{1}{2} \left( K r' - \frac{r'}{r^2} \right) K_\theta &= -\frac{1}{2} r K_\theta K_s \\
\left( K r' - \frac{r'}{r^2} \right) K_\theta &= 0
\end{aligned} \tag{3.88}$$

elde edilir. (3.88) denkleminde  $K_\theta = 0$  olduğunu kabul edilsin. Bu durumda (3.78) denkleminde  $\kappa \sin^3 \varphi \sin \theta = 0$  dır. Burada  $\sin \varphi \neq 0$  dır. Aksi takdirde  $P = 0$  olup  $M$  regüler olmaz. O nedenle  $\kappa = 0$  olmalıdır. Bu durumda  $M$  bir dönele yüzey olur. Şimdi  $K_\theta \neq 0$  olduğu kabul edilsin. (3.88) denkleminde

$$r' \left( K - \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

olur. Burada  $K \neq \frac{1}{r^2}$ 'dir. Aksi takdirde,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{Q}{rP} = \frac{1}{r^2} \\
rQ &= P
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte (3.29) denklemini kullanılırsa,

$$\sin \varphi = 0$$

elde edilir. Bu ise  $M$  yüzeyinin regüler olmadığı anlamına gelir. Bu yüzden  $r' = 0$  dır. Bu durumda  $r = \text{sabit}$  olup  $M$  bir tüp yüzeyi olur.

⇐ Tersine  $M$  yüzeyinin bir dönele yüzey olduğunu kabul edilsin. Bu durumda merkez eğrisi bir doğru olup  $\kappa = 0$  dır.  $\kappa = 0$  için (3.29), (3.30), (3.31) ve (3.32) denklemleri düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
P &= r r'' - \sin^2 \varphi \\
&= r r'' - (1 - \cos^2 \varphi) \\
&= r r'' - 1 + r'^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= r'', \\
K &= \frac{r''}{r(rr'' - 1 + r'^2)}, \\
H &= \frac{2rr'' - 1 + r'^2}{-2r(rr'' - 1 + r'^2)}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

elde edilir. (3.89) ile verilen Gauss eğriliği  $K$  ve ortalama eğriliği  $H$ 'nin  $s$ 'ye ve  $\theta$ 'ya göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
K_s &= \left(\frac{1}{r^2}\right)' \left(\frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2}\right) + \left(\frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2}\right)' \\
&= \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2}\right)' - \frac{2r'r''}{rr'' - 1 + r'^2} \right\},
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$K_\theta = 0, \tag{3.91}$$

$$H_s = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2} + 1\right) \right\}', \tag{3.92}$$

$$H_\theta = 0 \tag{3.93}$$

elde edilir. (3.90), (3.91), (3.92) ve (3.93) denklemlerinden (3.87) ile verilen Jakobi eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece yüzey  $(K, H)$ -Weingarten kanal yüzeyi olur.

Diğer taraftan, eğer  $M$  bir tüp yüzey ise yani  $r$  sabit ise o zaman  $r' = -\cos \varphi = 0$  olup  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  bulunur. Böylece  $\sin \varphi = 1$  olur. Bu durumda (3.29), (3.30), (3.31) ve (3.32) denklemleri düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
P &= r\kappa \cos \theta - 1, \\
Q &= \kappa \cos \theta, \\
K &= \frac{\kappa \cos \theta}{r(r\kappa \cos \theta - 1)}, \\
H &= \frac{2r\kappa \cos \theta - 1}{-2r(r\kappa \cos \theta - 1)}
\end{aligned}$$

bulunur.  $K$  Gauss eğriliğinin  $s$  ve  $\theta$ 'ya göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
K_s &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{(\kappa \cos \theta)'(r\kappa \cos \theta - 1) - (\kappa \cos \theta)(r\kappa \cos \theta - 1)'}{(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\kappa' \cos \theta (r\kappa \cos \theta - 1) - (\kappa \cos \theta)(r\kappa' \cos \theta)}{(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \right\} \\
&= \frac{-\kappa' \cos \theta}{rP^2}, \tag{3.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_\theta &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{(\kappa \cos \theta)_\theta (r\kappa \cos \theta - 1) - (\kappa \cos \theta)(r\kappa \cos \theta - 1)_\theta}{(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{r} \left\{ \frac{(-\kappa \sin \theta)(r\kappa \cos \theta - 1) - (\kappa \cos \theta)(-r\kappa \sin \theta)}{(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \right\} \\
&= \frac{\kappa \sin \theta}{(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \\
&= \frac{\kappa \sin \theta}{rP^2} \tag{3.95}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $H$  ortalama eğriliğinin  $s$  ve  $\theta$ 'ya göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
H_s &= \frac{-1}{2r} \left\{ \frac{(2r\kappa \cos \theta - 1)'(r\kappa \cos \theta - 1) - (2r\kappa \cos \theta - 1)(r\kappa \cos \theta - 1)'}{(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \right\} \\
&= \frac{-1}{2r} \left\{ \frac{(2r\kappa' \cos \theta)(r\kappa \cos \theta - 1) - (2r\kappa \cos \theta - 1)(r\kappa' \cos \theta)}{(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \right\} \\
&= \frac{\kappa' \cos \theta}{2(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \\
&= \frac{\kappa' \cos \theta}{2P^2}, \tag{3.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_\theta &= \frac{-1}{2r} \left\{ \frac{(2r\kappa \cos \theta - 1)_\theta (r\kappa \cos \theta - 1) - (2r\kappa \cos \theta - 1)(r\kappa \cos \theta - 1)_\theta}{(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \right\} \\
&= \frac{-1}{2r} \left\{ \frac{(-2r\kappa \sin \theta)(r\kappa \cos \theta - 1) - (2r\kappa \cos \theta - 1)(-r\kappa \sin \theta)}{(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \right\} \\
&= -\frac{\kappa \sin \theta}{2(r\kappa \cos \theta - 1)^2} \\
&= -\frac{\kappa \sin \theta}{2P^2} \tag{3.97}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.94), (3.95), (3.96) ve (3.97) eşitlikleri (3.87) ile verilen Jacobi denklemini sağlar. Böylece yüzey  $(K, H)$ -Weingarten kanal yüzeyi olur.

**Teorem 3.17.** Flat olmayan  $M$  kanal yüzeyi için aşağıdaki durumlar denktir.

- (i)  $M$  yüzeyi bir döneel yüzey veya merkez eğrisi sıfırdan farklı sabit eğrilikli bir tüp yüzeyidir.
- (ii)  $M$  bir  $(H, K_{II})$ -Weingarten kanal yüzeyidir.
- (iii)  $M$  bir  $(K, K_{II})$ -Weingarten kanal yüzeyidir [5].

**İspat:** İlk olarak (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) olduğu gösterilecek. (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) olduğu benzer şekilde yapılabilir. Kabul edelim ki  $M$  flat olmayan kanal yüzeyi  $(H, K_{II})$ -Weingarten kanal yüzeyi olsun. O zaman,

$$(K_{II})_s H_\theta = (K_{II})_\theta H_s \quad (3.98)$$

eşitliği sağlanır. (3.79), (3.80), (3.81) ve (3.82) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left[ H_s + \frac{1}{4r^4 P^4 Q^4} \left\{ \frac{\partial R}{\partial s} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial s} \right\} \right] H_\theta \\ &= \left[ H_\theta + \frac{1}{4r^4 P^4 Q^4} \left\{ \frac{\partial R}{\partial \theta} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial \theta} \right\} \right] H_s \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten

$$H_\theta \left\{ \frac{\partial R}{\partial s} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial s} \right\} = H_s \left\{ \frac{\partial R}{\partial \theta} (r^2 P^2 Q^2) - R \frac{\partial (r^2 P^2 Q^2)}{\partial \theta} \right\}$$

bulunur. Burada (3.38), (3.71), (3.79), (3.80), (3.83) (3.84), (3.85) ve (3.86) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{-\kappa \sin^3 \varphi \sin \theta}{2P^2} \right) \left\{ \left( \sum_{k=0}^2 \frac{\partial u_k}{\partial s} \cos^k \theta \right) \left( \sum_{j=0}^4 v_j \cos^j \theta \right) - \left( \sum_{k=0}^2 u_k \cos^k \theta \right) \right. \\ & \left. \left( \sum_{j=0}^4 \frac{\partial v_j}{\partial s} \cos^j \theta \right) \right\} = \left\{ \frac{2rr'r'' \sin^2 \varphi + r^2 r''' \sin^2 \varphi + 4r^2 r' r''^2 + r' \sin^4 \varphi}{2r^2 P^2} \right. \\ & \left. + \frac{((-2rr'\kappa + r^2 \kappa') \sin^3 \varphi + 5r^2 r' r'' \kappa \sin \varphi) \cos \theta + (2r^2 r' \kappa^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta}{2r^2 P^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ (-u_1 \sin \theta + (-2u_2 \sin \theta + rr' \kappa \tau \sin^5 \varphi) \cos \theta) \left( \sum_{j=0}^4 v_j \cos^j \theta \right) - \left( \sum_{k=0}^2 u_k \cos^k \theta \right) \left( -\sin \theta \sum_{j=1}^4 j v_j \cos^{j-1} \theta \right) \right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte en yüksek dereceden  $\cos \theta$ 'nin katsayısından,

$$\frac{2r^2 r' \kappa^2 \sin^2 \varphi}{2r^2 P^2} \left\{ rr' \kappa \tau v_4 \sin^5 \varphi + 2u_2 v_4 \sin \theta \right\} = 0$$

denklemi elde edilir. (3.39) denklemi ile verilen  $v_4$  ve (3.72) denklemi ile verilen  $u_2$  eşitlikleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$r^5 \sin^{11} \varphi (r'^2 \kappa^7 \tau + 2r' \kappa^8 \sin \varphi \sin \theta) = 0$$

elde edilir.  $r$  ve  $\sin \varphi$  sıfırdan farklı olduğundan

$$r'^2 \kappa^7 \tau + 2r' \kappa^8 \sin \varphi \sin \theta = 0$$

olur. Yukarıdaki eşitlikten  $r'^2 \kappa^7 \tau = 0$  ve  $r' \kappa^8 \sin \varphi = 0$  elde edilir. İlk olarak  $\kappa \neq 0$  olduğu kabul edilsin. Bu durumda  $r' = 0$  dir. O zaman  $r' = -\cos \varphi = 0$  olup  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  elde edilir.

$r' = 0$  için  $R$  ve  $r^2 P^2 Q^2$  denklemleri tekrar düzenlenebilir. Bu durumda (3.72) denkleminden,

$$\begin{aligned} u_0 &= -r\kappa^2, \\ u_1 &= 0, \\ u_2 &= r\kappa^2, \end{aligned} \tag{3.99}$$

olup (3.71) ve (3.99) denklemlerinden

$$\begin{aligned} R &= u_0 + u_1 \cos \theta + u_2 \cos^2 \theta \\ &= -r\kappa^2 + r\kappa^2 \cos^2 \theta \\ &= r\kappa^2 (\cos^2 \theta - 1) \\ &= -r\kappa^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \tag{3.100}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.39) denkleminde,

$$\begin{aligned}
v_0 &= 0, \\
v_1 &= 0, \\
v_2 &= r^2 \kappa^2, \\
v_3 &= -2r^3 \kappa^3, \\
v_4 &= r^4 \kappa^4
\end{aligned} \tag{3.101}$$

olup (3.38) denkleminde (3.101) denklemleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
r^2 P^2 Q^2 &= v_0 + v_1 \cos \theta + v_2 \cos^2 \theta + v_3 \cos^3 \theta + v_4 \cos^4 \theta \\
&= r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta - 2r^3 \kappa^3 \cos^3 \theta + r^4 \kappa^4 \cos^4 \theta \\
&= r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta (1 - 2r\kappa \cos \theta + r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta) \\
&= r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta (r\kappa \cos \theta - 1)^2
\end{aligned} \tag{3.102}$$

elde edilir. Böylece (3.100) denkleminin  $s$  ve  $\theta$ 'ya göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial R}{\partial s} = -2r\kappa\kappa' \sin^2 \theta, \tag{3.103}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -2r\kappa^2 \sin \theta \cos \theta \tag{3.104}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.102) denkleminin  $s$  ve  $\theta$  'ya göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(r^2 P^2 Q^2)}{\partial s} &= (r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta)' (r\kappa \cos \theta - 1)^2 + (r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta) ((r\kappa \cos \theta - 1)^2)' \\
&= (2r^2 \kappa \kappa' \cos^2 \theta) (r\kappa \cos \theta - 1)^2 + (r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta) (2(r\kappa \cos \theta - 1) \\
&\quad (r\kappa' \cos \theta)) \\
&= 4r^4 \kappa^3 \kappa' \cos^4 \theta - 6r^3 \kappa^2 \kappa' \cos^3 \theta + 2r^2 \kappa \kappa' \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(r^2 P^2 Q^2)}{\partial \theta} &= (r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta)_\theta (r\kappa \cos \theta - 1)^2 + (r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta) ((r\kappa \cos \theta - 1)^2)_\theta \\
&= (-2r^2 \kappa^2 \sin \theta \cos \theta) (r\kappa \cos \theta - 1)^2 + (r^2 \kappa^2 \cos^2 \theta) (2(r\kappa \cos \theta - 1) \\
&\quad (-r\kappa \sin \theta))
\end{aligned}$$

$$= -4r^4\kappa^4 \sin \theta \cos^3 \theta + 6r^3\kappa^3 \sin \theta \cos^2 \theta - 2r^2\kappa^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.106)$$

bulunur. (3.81) denkleminde (3.96), (3.102), (3.103) ve (3.105) denklemleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (K_{II})_s &= \frac{\kappa' \cos \theta}{2P^2} + \frac{1}{4r^4\kappa^4 \cos^4 \theta (r\kappa \cos \theta - 1)^4} \left\{ (-2r\kappa\kappa' \sin^2 \theta)(r^2\kappa^2 \cos^2 \theta \right. \\ &\quad (r\kappa \cos \theta - 1)^2) + (r\kappa^2 \sin^2 \theta)(4r^4\kappa^3\kappa' \cos^4 \theta - 6r^3\kappa^2\kappa' \cos^3 \theta \\ &\quad \left. + 2r^2\kappa\kappa' \cos^2 \theta) \right\} \\ &= \frac{\kappa' \cos \theta}{2P^2} + \frac{1}{4r^2\kappa^2 \cos^2 \theta (r\kappa \cos \theta - 1)^4} \left\{ (-2r\kappa\kappa' \sin^2 \theta) \right. \\ &\quad (r\kappa \cos \theta - 1)^2 + (2r\kappa\kappa' \sin^2 \theta)((r\kappa \cos \theta - 1)^2 + r^2\kappa^2 \cos^2 \theta \\ &\quad \left. - r\kappa \cos \theta) \right\} \\ &= \frac{\kappa' \cos \theta}{2P^2} + \frac{\kappa' \sin^2 \theta}{2 \cos \theta P^3} \\ &= \frac{\kappa'(r\kappa \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta + 1)}{2 \cos \theta P^3} \end{aligned} \quad (3.107)$$

elde edilir. (3.82) denkleminde (3.97), (3.102), (3.104) ve (3.106) denklemleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (K_{II})_\theta &= \frac{-\kappa \sin \theta}{2P^2} + \frac{1}{4r^4\kappa^4 \cos^4 \theta (r\kappa \cos \theta - 1)^4} \left\{ (-2r\kappa^2 \sin \theta \cos \theta)(r^2\kappa^2 \cos^2 \theta \right. \\ &\quad (r\kappa \cos \theta - 1)^2) + (r\kappa^2 \sin^2 \theta)(-4r^4\kappa^4 \cos^3 \theta \sin \theta + 6r^3\kappa^3 \cos^2 \theta \sin \theta \\ &\quad \left. - 2r^2\kappa^2 \cos \theta \sin \theta) \right\} \\ &= \frac{-\kappa \sin \theta}{2P^2} + \frac{1}{4r^4\kappa^4 \cos^4 \theta (r\kappa \cos \theta - 1)^4} \left\{ (-2r\kappa^2 \sin \theta \cos \theta)(r^2\kappa^2 \cos^2 \theta \right. \\ &\quad (r\kappa \cos \theta - 1)^2) + (r\kappa^2 \sin^2 \theta)(2r^2\kappa^2 \cos \theta(-2r^2\kappa^2 \sin \theta \cos^2 \theta + 3r\kappa \sin \theta \cos \theta \\ &\quad \left. - \sin \theta)) \right\} \\ &= \frac{-\kappa \sin \theta}{2P^2} + \frac{(-\sin \theta \cos^2 \theta)(r\kappa \cos \theta - 1) + (-2r\kappa \sin^3 \theta \cos \theta + \sin^3 \theta)}{2r \cos^3 \theta P^3} \\ &= \frac{-\sin \theta(r^2\kappa^2 \cos^4 \theta - 2r\kappa \cos^3 \theta + 2r\kappa \cos \theta - 1)}{2r \cos^3 \theta P^3} \end{aligned} \quad (3.108)$$



bulunur. (3.96), (3.97), (3.107) ve (3.108) denklemleri (3.98) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\kappa'(r\kappa \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta + 1)}{2 \cos \theta P^3} \right) \left( -\frac{\kappa \sin \theta}{2P^2} \right) \\
&= \left( \frac{-\sin \theta (r^2 \kappa^2 \cos^4 \theta - 2r\kappa \cos^3 \theta + 2r\kappa \cos \theta - 1)}{2r \cos^3 \theta P^3} \right) \left( \frac{\kappa' \cos \theta}{2P^2} \right) \\
& \frac{\kappa \kappa' (r\kappa \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta + 1)}{\cos \theta} = \frac{\kappa' (r^2 \kappa^2 \cos^4 \theta - 2r\kappa \cos^3 \theta + 2r\kappa \cos \theta - 1)}{r \cos^2 \theta}
\end{aligned} \tag{3.109}$$

bulunur. (3.109) denkleminde

$$\kappa \kappa' r \cos \theta - \kappa' = 0$$

elde edilir.  $\kappa$  ve  $r$  sıfırdan farklı olduğundan yukarıdaki eşitlikten  $\kappa' = 0$  elde edilir. Bu durumda  $\kappa = \text{sabit}$  olur. Böylece  $M$  kanal yüzeyi merkez eğrisi sabit eğrilikli olan bir tüp yüzeyi olur. Şimdi  $\kappa = 0$  olduğu kabul edilsin. Bu durumda  $M$  bir dönele yüzeyin açık bir parçası olur. Fakat ikinci Gauss eğriliğinin varlığını garantilemek amacıyla yarıçap fonksiyonunun sabit olmayacağına dikkat edilmelidir.

Tersine  $M$  yüzeyi bir dönele yüzey veya merkez eğrisi sıfırdan farklı sabit eğrilikli bir dönele yüzey olduğu kabul edilsin. Eğer  $M$  dönele yüzey ise  $\kappa = 0$  dır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
R &= r'(1 - r'^2)[(rr'' - 1 + r'^2)'(rr'') - (rr'' - 1 + r'^2)(rr'')'] \\
r^2 P^2 Q^2 &= (rr'')^2 (rr'' - 1 + r'^2)^2 \\
K_{II} &= H + \frac{r'}{4} \left( \frac{1}{rr''} - \frac{1}{rr'' - 1 + r'^2} \right) \left( \log \left| \frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2} \right| \right)'
\end{aligned} \tag{3.110}$$

elde edilir. (3.92) ve (3.110) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
(K_{II})_s &= -\frac{1}{2r^2} \left\{ r \left( \frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2} + 1 \right) \right\}' \\
&+ \frac{r''}{4} \left( \frac{1}{rr''} - \frac{r''}{rr'' - 1 + r'^2} \right) \left( \log \left| \frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2} \right| \right)' \\
&+ \frac{r'}{4} \left( \frac{1}{rr''} - \frac{1}{rr'' - 1 + r'^2} \right)' \left( \log \left| \frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2} \right| \right)' \\
&+ \frac{r'}{4} \left( \frac{1}{rr''} - \frac{1}{rr'' - 1 + r'^2} \right) \left( \log \left| \frac{rr''}{rr'' - 1 + r'^2} \right| \right)''
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.93) ve (3.110) denklemleri kullanılırsa,

$$(K_{II})_{\theta} = 0 \quad (3.111)$$

olur. (3.92), (3.93), (3.111) ve (3.112) eşitlikleri (3.98) denkleminde verilen Jacobi denklemini sağlar. Böylece yüzey  $(H, K_{II})$ -Weingarten kanal yüzeyi olur.  $M$  yüzeyi merkez eğrisi sıfırdan farklı sabit eğrilikli bir tüp yüzey olması durumunda da Jacobi eşitliğini sağladığı kolayca görülür. Bu da ispatı tamamlar.



#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, 3-boyutlu öklid uzayında kanal yüzeyleri çalışıldı. İlk olarak [5] nolu çalışmada yer alan kanal yüzeyleriyle ilgili bazı temel hesaplamalar detaylı olarak ele alındı. Bu anlamda kanal yüzeylerinin 1. temel formunun katsayıları, 2. temel formunun katsayıları, 3. temel formunun katsayıları, yüzeyin ortalama eğriliği, Gauss eğriliği, ikinci Gauss eğriliği ve asli eğrilik fonksiyonları gibi yüzeye ait bazı temel hesaplamalar yapıldı. Daha sonra yüzeyin ortalama eğriliği, Gauss eğriliği ve ikinci Gauss eğriliği arasındaki bağıntılar elde edildi ve flat kanal yüzeyleri, minimal kanal yüzeyleri ve ikinci Gauss eğriliği sıfır olan kanal yüzeyleri için bazı karakterizasyonlar verildi.

Son olarak yine [5] nolu çalışmada yer alan  $(K, H)$ ,  $(K, K_{II})$  and  $(H, K_{II})$  Weingarten kanal yüzeyleri için bazı sonuçlar detaylı olarak ele alındı.

Bu tezde yer alan kanal yüzeyleri merkez eğrisinin Frenet çatısına göre parametrelendirilmiştir. Kanal yüzeyleri merkez eğrisinin Bishop çatısı, Darboux çatısı veya  $\{N, C, W\}$  çatısı gibi farklı çatılarına göre tekrar parametrelendirilebilir ve [5] nolu çalışmada yer alan çeşitli karakterizasyonlar bu yeniden parametrelendirilen kanal yüzeyleri için tekrar ele alınarak yeni çalışmalar yapılabilir. Bu anlamda bu tez literatüre önemli bir katkı sunacaktır.

## KAYNAKLAR

- [1]. Blair, D.E. and Koufogiorgos, Th., 1992, Ruled surfaces with vanishing second Gaussian curvature, *Monatsh. Math.*, 113(3), 177-181.
- [2]. Dođan, F., 2012, *Genelleřtirilmiř Kanal Yüzeyleleri*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [3]. Gray, A., 1998, *Modern Diferensial Geometry of Curves and Surfaces with Matemetica*, CRC Press, USA.
- [4]. Hacısalihoğlu, H.H., 2000, *Diferensiyel Geometri 1. Cilt*, 3. Baskı, Ertem Matbaa, Ankara
- [5]. Kim, Y.H., Liu, H. and Qian, J., 2016, Some characterizations of canal surfaces, *Bull. Korean Math. Soc.*, 53(2), 461-477.
- [6]. Krivoschapko, S.N. and Bock Hyeng, C.A., 2012, Classification of cyclic surfaces and geometrical research of canal surfaces, *Int. J. Res. Rev. Appl. Sci.*, 12(3), 360-374.
- [7]. Maekawa, T., Patrikalakis, M.N., Sakkalis, T. and Yu, G., 1998, Analysis and Application of pipe surfaces, *Comput. Aided Geom. Desing*, 15(5), 437-458.
- [8]. Ro, J.S. and Yoon, D.W., 2009, Tubes of Weingarten types in a Euclidean 3- space, *J. Chungcheong Math.Soc.*, 22, 360-366.
- [9]. Sabuncuođlu, A., 1994, *Diferensiyel Geometri*, 5. Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [10]. Soliman, M.A., Mahmoud, W.M., Solouma, E.M., Bary, M., 2019, The new study of some characterization of canal surfaces with Weingarten and linear Weingarten types according to Bishop frame *J. Egyptian Math. Soc.*, 27(1), paper No.26, 17pp.

- [11]. Tunçer, Y. and Yoon, D.W., 2016, Weingarten and Lieer Weingarten canal surfaces in Euclidean 3-space, *General Mathematics Notes*, 36(1), 48.
- [12]. Xu, Z.Q., Freng, R.Z. and Sun, J.G., 2006, Analytic and algebraic properties of canal surfaces, *J. Comput. Appl. Math.*, 195(1-2), 220-228.



## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Büşra GAFA
Doğum Yeri	KIRŞEHİR
Doğum Tarihi	27.10.1992
Uyruğu	T.C.
Telefon	
E-Posta Adresi	busragafa@gmail.com
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölüm	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2015