T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

# KOMPLEKS AL-TEMEME İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜNÜN GENELLEŞTİRİLMESİ VE UYGULAMALARI

**Mustafa Jameel HUSSEIN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KIRŞEHİR / 2022**

T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

# KOMPLEKS AL-TEMEME İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜNÜN GENELLEŞTİRİLMESİ VE UYGULAMALARI

**Mustafa Jameel HUSSEIN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**

**Prof. Dr. Yılmaz ALTUN**

**KIRŞEHİR / 2022**

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mustafa Jameel HUSSEİN

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; bu lisansüstü teze, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

# ÖNSÖZ

Yüksek lisansa başlamamda ve yüksek lisans ders ve tez yazım sürecinde kendisini tanıdığım günden bu yana gösterdiği sakin ve sabırlı hali ile her zaman bana örnek olmasının yanı sıra bir bilim adamının nasıl çalışması gerektiğini kendisinden öğrendiğim değerli danışmanım Doç. Dr. Yılmaz Altun'a teşekkür ederim. Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, beni bugünlere getiren aileme de sonsuz teşekkürler ederim.

Mart 2022 Mustafa Jameel HUSSEİN

# İÇİNDEKİLER

# ÖZET

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

## Kompleks Al-Tememe İntegral Dönüşümünün Genelleştirilmesi ve Uygulamaları

**Mustafa Jameel HUSSEİN**

**Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ALTUN**

Bu çalışmada, yeni bir integral dönüşümü olarak bilinen “ Genel Kompleks Al-Tememe İntegral Dönüşümü” hakkında bilgi verilecektir.

Başlangıç verilerine (koşullara) tabitutulan veya verilmeyen değişken katsayılı lineer adi diferansiyel denklemler çözülecektir. İlaveten, genel kompleks Al-Tememe integral dönüşümünün türev formulü k=1,2,3,… , x>0 , i=$\sqrt{-}$ olmak üzere

$$\frac{d^k}{d(q(p))^k} T_g^c[f(x)] = (-i)^k \, T_g^c[(\ln(x))^k \, f(x)],$$

yukarıdaki gibi ifade edilir.

Yeni fonksiyonların integral dönüşümünü bulmak ve değişken katsayılara sahip lineer tipteki adi diferansiyel denklemlerin tam çözümünü hesaplamak için genel kompleks Al-Teme integral dönüşümü kullanılmıştır.

Genel kompleks Al-Tememe integral dönüşümünün integrasyonunu elde etmek için bu integral dönüşümü uygululanarak q(p) bir fonksiyon, p parametre olmak üzere

$$T_g^{c^{-1}} \quad \frac{-1 - iq(p)}{1 + q(p)} T_g^c [xf(x)] \Bigg| = f(u)du = g(x)$$

elde edilmiştir.

Mart 2022,  43 sayfa.

**Anahtar Kelimeler:** Kompleks Al-Tememe İntegral Dönüşümü, Genelleşitrilmiş Kompleks Al Tememe, Genelelleştirilmiş Kompleks Al-Tememe Uygulamaları.

# ABSTRACT

**MSc THESIS**

## Generalization of Complex Al-Tememe Integral Transform and its Applications

**Mustafa Jameel HUSSEİN**

**Kırşehir Ahi Evran University**

**Science and Engineering Institute**

**Mathematics Department**

**Supervisor: Prof. Yılmaz ALTUN**

In this work, we use a new integral transformation which is said to be “A general Complex Al-Tememe Integral Transformation “.

Solve linear ordinary differential equations with variable coefficients that are either submitted or not subjected to starting data (conditions).Also, we find the derivation formula of a general complex Al-Tememe integral transformation:

$$\frac{d^k}{d(q(p))^k} T_g^c[f(x)] = (-i)^k \, T_g^c[(\ln(x))^k \, f(x)],$$

where k=1,2,3,… , x>0 , i=$\sqrt{-1}$.

A general complex Al-Tememe integral transformation is applied to find the integral transform of new functions and to make apply of it to calculate the exact solution of ordinary differential equations of linear type that have variable coefficients.

We applied this integral transformation to derive the integration of a general complex Al-Tememe integral transformation:

$$T_g^{c^{-1}} \left. \frac{-1 - iq(p)}{1 + q(p)} T_g^c[xf(x)] \right| = f(u)du = g(x)$$

Where q(p) is a function of a parameter p.

March 2022, 43pages.

**Keywords:** Generalization of Complex Al-Tememe, Generalization of Complex Al-Tememe Integral Transform, Generalization of Complex Al-Tememe Integral Transform and Applications

# 1. GİRİŞ

İki yüzyıldan fazla bir süredir, integral dönüşümü uygulamalarındaki çalışmalar matematik, fizik ve benzeri bilim alanlarına genişletilmiştir. İntegral dönüşümünün doğuşu, Fourier ve Laplace dönüşümlerinin yanı sıra P.S.Laplace'ın 1780'lerde uygulamalı matematik üzerine yaptığı önemli çalışmasına kadar uzanabilir [2] [3].

Aslında Laplace veya Fourier dönüşüm yöntemleri, güçlü bir matematiksel temele dayandıklarından, modern hesaplama işlemleri ile hemen hemen aynıdır. Hilbert, Stieltjes ve Hankel dönüşümleri gibi bazı integral dönüşümler matematik, bilim ve mühendislikte yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu dönüşümler, kısmi ve adi diferansiyel denklemler dahil ancak bunlarla sınırlı olmamak üzere başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılabilir.

G.H. Hardy (1877-1947) ve E.C. Titchmarsh (1899-1963) adını, yirminci yüzyılın en iyi matematikçilerinden biri olan David Hilbert'ten(1892-1943) alan Hilbert dönüşümünü kapsamlı bir şekilde incelemişlerdir.

# 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, integral dönüşüm tanımı ve kompleks Al-Tememe dönüşümü tanımı dahil olmak üzere birkaç temel terminoloji sunulacaktır [7]. Ayrıca, çeşitli kavram ve teoremlerle birlikte genel kompleks Al-Tememe integral dönüşümü verilecektir.

**Tanım 2.1.** g(x), (a,b) periyodunda tanımlı bir fonksiyon olsun. g(x) fonksiyonun integral dönüşümü (G(s) ile gösterilir) aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mathrm{G(s)} = \mathrm{I\{g(x)\}} = \int_{x=a}^{b} k(s,x)g(x)dx$$

Yakınsak integral için, k(s,x) iki değişkenli bir fonksiyon olan dönüşümün çekirdeğidir ve a, b reel sayı olmak üzere dönüşüm (a,b) aralığı üzerinden alınmaktadır [4].

**Tanım 2.2.** g(x) fonksiyonu için kompleks Al-Tememe integral dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$T^{c}\{g(x)\} = \int_{x=1}^{\infty} x^{-iP}\ g(x)dx = F(iP)\ ,x > 1$$

Dikkat edilmeli ki, yukarıdaki integral [1,∞ ) aralığında yakınsaktır. Burada P bir konum sabiti ve xiP, i=$\sqrt{-1}$ dönüşümünün bir çekirdeğidir [7].

# 3. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

**Tanım 3.1.** $f(x)$, $x$>1 fonksiyonu için genel kompleks Al-Teme integral dönüşümü

$$\mathcal{T}_g^c[f(x)]=\int_1^\infty x^{-i\,q(p)} f(x)dx=F(\mathrm{i}\ \mathrm{q}(p))$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, Al-Teme integral dönüşümü [1,∞) aralığında yakınsaktır. Burada q(p), p parametresine bağlı bir fonksiyon ve $x^{-i\,q(p)}$, i=$\sqrt{-1}$ dönüşümünün bir çekirdeğidir.

**Önerme 3.2.** Genel kompleks Al-Tememe dönüşümü $A$, $\beta$ keyfi sabitler için f(x) ve g(x) fonksiyonları x>1 için tanımlı olmak üzere,

$$T_g^c\ (\mathrm{Af}(x) \pm \beta g(x)) = A T_g^c\ (\mathrm{f}(x)) \pm \beta\, T_g^c\ (\mathrm{g}(x))$$

eşitliği ile lineer bir dönüşüm olarak adlandırılır.

**İspat:**

$T_g^c(\mathrm{Af}(x) \pm \beta\ \mathrm{g}(x)) = \int_1^\infty x^{-i\,q(p)}\ (\mathrm{Af}(x) \pm \beta \mathrm{g}(x))\mathrm{d}x$ ,

$= \int_1^\infty x^{-i\,q(p)}$ A $\mathrm{f}(x)\mathrm{dx} \pm \int_1^\infty x^{-i\,q(p)}\ \beta \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x$ ,

$=\mathrm{A} \int_1^\infty x^{-i\,q(p)}\ \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \pm \beta \int_1^\infty x^{-i\,q(p)}\ \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x$ ,

$=\mathrm{A}\ T_g^c\ (\mathrm{f}(x)) \pm \beta T_g^c\ (\mathrm{g}(x))$ .

**Tanım 3.3.** $T_g^c[f(x)]$ =F(i q(p)), f$(x)$ fonksiyonun genel kompleks Al-Teme dönüşümünü temsil ediyorsa, o zaman f$(x)$ fonksiyonu genel kompleks Al-Tememe dönüşümünün tersi

$$\mathrm{f}(x)=T_g^{c-1}\ [\mathrm{F}(\mathrm{i}\ \mathrm{q}(\mathrm{p}))]$$

olarak yazılır.

**Önerme 3.4.** $T_g^c$ fonksiyonun tersi lineerdir. Yani diğer bir ifadeyle, A ve β keyfi sabitler olmak üzere

$$T_g^{c-1}[AF_1\ (\mathrm{i}\ \mathrm{q}(\mathrm{p})) \pm \beta F_2\ (\mathrm{i}\ \mathrm{q}(\mathrm{p})) = \mathrm{A}\ T_g^{c-1}([F_1(iq(p))] \pm \beta\ T_c^{c-1}(\mathrm{F2}(\mathrm{i}\ \mathrm{q}(\mathrm{p}))]$$

eşitliği sağlanıyorsa $T_g^{c-1}$ fonksiyonu lineerdir.

**İspat:**

$T_g^c$ [A$f_1$ $(x)$±B$f_2$ $(x)$]=A$T_g^c$ ($f_1$ $(x)$)± B $T_g^c$ ($f_2$ $(x)$)

=A$f_1$ (i q(p)) ± B$f_2$ (i q(p)) .

A$f_1$ $(x)$±$\beta f_2$ $(x)$=$T_g^{c-1}$ [A$f_1$ (i q(p))±$\beta f_2$ (i q(p)) ]

=A$T_g^{c-1}$ [ ($f_1$(i q(p))] ± $\beta T_g^{c-1}$ [($f_2$ (i q(p))]

=$T_g^{c-1}$ [A$f_1$ (i q(p))±$\beta f_2$ (i q(p)) ].

**Önerme 3.5.** $T_g^c$ [f($x$)] =F(i q(p)) ve a herhangi bir sabit olmak üzere

$$T_g^c[x^{-a}\ \mathrm{f}(x)] = \mathrm{F(i\ q(p)+a)}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**

$$T_g^c\big(f(x)\big) = \int_1^{\infty} x^{-i\,q(p)} f(x)d\,x \ = F\big(i\,q(p)\big)$$

$$T_g^c[x^{-a}f(x)] = \int_1^{\infty} x^{-i\,q(p)}x^{-a}f(x)d\,x$$

$$= \int_1^{\infty} x^{-(i\,q(p)+a)}\, f(x)d\,x \ = F(i\,q(p)+a)$$

elde edilir.

**Önerme 3.6.**. $a_0$,$a_1$ ,…$a_n$ keyfi sabitler ve f(x), $x$ değişkenine bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$a_0x^ny^{(n)} + a_2x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}xy' + a_n\mathrm{y} = \mathrm{f}(x)$$

denklemine "Euler denklemi" denir [6].

**Önerme 3.7.** [a,b] aralığı sonlu sayıda nokta ile bölünebilir bir nokta ve f(x) fonkisyonu [a,b] üzerinde parçalı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

1) f(x), $i = 0,1,2,\ldots,n-1\ için\ (x_1, x_i\ +1)$ aralığında süreklidir,

2) f(x), $x_i$'de sıçrama süreksizliğine sahip olsun. Bu durumda $i = 0,1,2,..,n$ için

$$\left| lim_{x\to x_i} + f(x)\right| < \infty. i = 0,1,2,..,n-1; \left| lim_{x\to x_i} - f(\mathrm{x})\right| < \infty,$$

olur. Burada a=$x_0$<$x_1$<….<$x_n$ =b olarak alınmıştır [5].

### 3.1. Bazı Temel Fonksiyonların Genel Kompleks Al-Tememe İntegral Dönüşümü

**(1)** $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ and $\mathrm{q(p)} > 1i$ olmak üzere

$$\mathrm{T_g^c}\ (1) = \frac{-1}{1+(\mathrm{q(p)})^2} - \frac{\mathrm{q(p)}}{1+(\mathrm{q(p)})^2}\mathrm{i}$$

elde edilir.

**İspat:**

$$\mathrm{T_g^c} = \int_1^\infty \mathrm{x}^{-\mathrm{i\,q(p)}}\,\mathrm{f(x)dx} = \int_1^\infty \mathrm{x}^{-\mathrm{i\,q(p)}}\,\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^{-\mathrm{iq(p)}+1}}{-\mathrm{iq(p)}+1}\Big|_1^\infty,$$

$$= 0 - \frac{1}{-\mathrm{iq(p)}+1} = \frac{1}{-1+\mathrm{iq(p)}} \cdot \frac{-1-\mathrm{iq(p)}}{-1-\mathrm{iq(p)}},$$

$$= \frac{-1-\mathrm{iq(p)}}{1+(\mathrm{q(p)})^2} = \frac{-1}{1+(\mathrm{q(p)})^2} - \frac{\mathrm{p}}{1+(\mathrm{q(p)})^2}\mathrm{i}$$

olur.

**(2)** n∈ ℝ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$T_g^c(x^n) = \frac{-(n+1)}{(q(p))^2+(n+1)^2} - \frac{q(p)}{(q(p))^2+(n+1)^2}i$$

elde edilir.

**İspat:**

$$T_g^c\ (x^n) = \int_1^\infty x^{-iq(p)}x^n dx = \int_1^\infty x^{n-i\,q(p)}dx = \frac{x^{n-i\,q(p)+1}}{n-i\,q(p)+1}\Big|_1^\infty = 0 - \frac{1}{n-i\,q(p)+1} = \frac{1}{i\,q(p)-(n+1)} \cdot \frac{-i\,q(p)-(n+1)}{-i\,q(p)-(n+1)} = \frac{-i\,q(p)-(n+1)}{(q(p))^2+(n+1)^2} = \frac{-(n+1)}{(q(p))^2+(n+1)^2} - \frac{q(p)}{(q(p))^2+(n+1)^2}$$

olur.

**(3)** $\mathrm{x} > 0$ *and* $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$T_g^c\ (\ln x)=\frac{1-(q(p))^2}{((q(p))^2+1)^2}+\frac{2\,q(p)}{((q(p))^2+1)^2}\,i$$

elde edilir.

**İspat:**

$T_g^c$ (ln x)$=\int_1^\infty x^{-iq(p)}\, lnx\, dx$

$=$lnx. $\frac{x^{-i\,q(p)+1}}{-i\,q(p)+1}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{x^{-i\,q(p)+1}}{-i\,q(p)+1}.\frac{1}{x}\ dx$

$=0\text{-}0\text{-}\frac{1}{-i\,q(p)+1}\left[\int_1^\infty x^{-i\,q(p)}\ dx\right]$

$=\frac{1}{i\,q(p)-1}\left[\frac{x^{-i\,q(p)+1}}{-i\,q(p)+1}\right]\Big|_1^\infty -= \frac{1}{i\,q(p)-1}\left[0+\frac{1}{i\,q(p)-1}\right]=\frac{1}{i\,q(p)-1}\left[\frac{1}{i\,q(p)-1}\right]=$

$\frac{1}{(i\,q(p)-1)^2}.\frac{(-i\,q(p)-1)^2}{(-i\,q(p)-1)^2}==\frac{1-(q(p))^2}{((q(p))^2+1)^2}+\frac{2\,q(p)}{((q(p))^2+1)^2}\,i$

olur.

**(4)** $|q(p)-1|>a,\ x>0\ ve$ i $=\sqrt{-1}$ sabit olmak üzere

$$T_g^c\left(\sinh\ (\mathrm{aln}x)\right)=\frac{-a\left[\left((q(p))^2-1\right)+a^2\right.}{(q(p))^2+1)^2+2a^2(q(p))^2+a^4}+\frac{2a\,q(p)}{(q(p))^2+1)^2+2a^2(q(p))^2-1)+a^4}\,i$$

olur.

**İspat:**

$T_g^c$ (sinh(alnx))$=T_g^c(\frac{e^{alnx}-e^{-alnx}}{2})=\frac{1}{2}T_g^c(x^a-x^{-a})$

$=\frac{1}{2}\ [T_g^c\ (x^a)\text{-}T_g^c\ (x^{-a})]$ ,

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i\,q(p)-(a+1)}-\frac{1}{i\,q(p)-(-a+1)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{i\,q(p)+a-1-iq(p)+a+1}{(i\,q(p)-a-1)(i\,q(p)+a-1)}\right]=$

$\frac{2a}{2\left((i\,q(p)-1)-a\right)\left((i\,q(p)-1)+a\right)}=\frac{a}{(i\,q(p)-1)^2-a^2}.\frac{(-i\,q(p)-1)^2-(a)^2}{(-i\,q(p)-1)^2-(a)^2}=$

$\frac{a[(-i\,q(p)-1)^2-a^2]}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}=\frac{a\left((-(q(p))^2+1-a^2)+2i\,q(p)\right)}{((q(p))^2+1)^2+\ 2a^2(q\ (p))^2-1)+a^4}=$

$\frac{a-\left(a(q(p))^2+a^3\right)}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}+\frac{2ap}{\left((q(p))^2+1\right)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}\,i$

$=\frac{a-[((q(p))^2-1)+a^2]}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}+\frac{2ap}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}\,i$

olur.

**(5)**

$T_g^c$ (cosh(alnx))$=\frac{(q(p))^2+1+a^2}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1\,)+a^4}-\frac{q(p)\left((q(p))^2+1\right)+a^2)}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1\,)+a^4}\,i$

olur, burada i$=\sqrt{-1}$ sabit ve $|q(p)-1|>a,\ x>0$ dır.

**İspat:**

$T_g^c$ (cosh (aln x) )= $T_g^c\left(\frac{e^{alnx}+e^{-alnx}}{2}\right)=\frac{1}{2}T_g^c(x^a+x^{-a})$

$=\frac{1}{2}$ $[T_g^c\ (x^a)$+$T_g^c\ (x^{-a})]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i\,q(p)-(a+1)}+\frac{1}{i\,q(p)—(-a+1)}\right]=\ \frac{1}{2}\left[\frac{i\,q(p)+a-1+iq(p)-a-1}{(i\,q(p)-1-a)(iq(p)-1+a)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2i\,q(p)-2}{(iq(p)-1)^2-a^2}\right]=$
$\frac{i\,q(p)-1}{(i\,q(p)-1)^2-a^2}.\frac{(-i\,q(p)-1)^2-a^2}{(-i\,q(p)-1)^2-a^2}=\frac{(i\,q(p)-1)((-i\,q(p)-1)^2-a^2)}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}=$
$\frac{(-(q(p))^2+1-a^2+2i\,q(p))(i\,q(p)-1)}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}=\frac{-i(q(p))^3+i\,q(p)-i\,q(p)a^2-2\left(q(p)\right)^2+(q(p))^2-1+a^2-2i\,q(p)}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}=$
$\frac{-(q(p))^2+a^2-1}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}-\frac{[\left(q(p)\right)^3+a^2\,q(p)+q(p)]}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}i=$

$\frac{-\left((q(p)^2+1\right)+a^2}{((q(p))^2+1)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}-\frac{q(p)\left((q(p)^2+1\right)+a^2)}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2+2a^2((q(p))^2-1)+a^4}i$

elde edilir.

**(6**) $T_G^C$ (sin(aln$x$)) $=\frac{-a[\left(q(p)\right)^2-1)-a^2]}{((q(p))^2+1)^2-2a^2(q(p))^2-1)+a^4}+\frac{2a\,q(p)}{((q(p))^2+1)^2-2a^2(q(p))^2-1)+a^4}i$

olur, burada i=$\sqrt{-1}$ sabit ve $x$>1 ve q(p)>1 dir.

**İspat:**

$T_g^c(\sin(alnx))=\ T_g^c(\frac{e^{ialnx}-e^{-ialnx}}{2i})=\frac{1}{2i}T_g^c(x^{ia}-x^{-ia})$

$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i\,q(p)-(ia+1)}-\frac{1}{i\,q(p)—(-ia+1)}\right]=\frac{1}{2i}\left[\frac{i\,q(p)+ia-1-iq(p)+ia+1}{(i\,q(p)-ia-1)(i\,q(p)+ia-1)}\right]=$
$\frac{2ia}{2i\left((i\,q(p)-1)-ia\right)\left((i\,q(p)-1)+ia\right)}=\frac{a}{(i\,q(p)-1)^2-a^2}.\frac{(-i\,q(p)-1)^2+a^2}{(-i\,q(p)-1)^2+a^2}=$
$\frac{a\left[(-iq(p)-1)^2+a^2\right]}{((q(p))^2+1)^2-2a^2((q(p))^2-1)+^{a^4}}$

$=\frac{a\left(\left(-(q(p))^2+1+a^2\right)+2ip\right)}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2-2a^2((q(p))^2-1)+^{a^4}}\ =$
$\frac{a+a^3-a\left(q(p)\right)^2}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2-2a^2((q(p))^2-1)+^{a^4}}\ +\frac{2aq(p)}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2-2a^2((q(p))^2-1)+^{a^4}}i$

$=\frac{-a\left[((q(p))^2-1)-a^2\right]}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2-2a^2((q(p))^2-1)+^{a^4}}+\frac{2a\,q(p)}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2-2a^2((q(p))^2-1)+^{a^4}}i$

elde edilir.

**(7)** $T_g^c$ (cosh(alnx))=$\frac{-a\left[\left(q(p)\right)^2[+1)+a^2\right]}{((q(p))^2+1)^2-2a^2\left(q(p^{))^2}-1\right)+a^4}-\frac{q(p)\left((q(p)^2+1\right)-a^2)}{((q(p))^2+1)^2-2a^2(q(p))^2-1)+a^4}$

olur, burada i=$\sqrt{-1}$ sabit ve $x$>1 ve q(p)>1 dir.

**İspat:**

$T_g^c(\cos(aln\,x)) = T_g^c\left(\frac{e^{ialnx}+e^{-ialnx}}{2}\right)=$

$$\frac{1}{2}T_g^c\left(x^{ia}+x^{-ia}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i\,q(p)-(ia+1)}+\frac{1}{iq(p)-(-ia+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{iq(p)+ia-1+iq(p)-ia-1}{(i\,q(p)-1-ia)(ip-1+ia)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2iq(p)-2}{(iq(p)-1)^2+a^2}\right]$$

$$=\frac{iq(p)-1}{(iq(p)-1)^2+a^2}\cdot\frac{(-iq(p)-1)^2+a^2}{(-iq(p)-1)^2+a^2}$$

$$=\frac{(iq(p)-1)((-iq(p)-1)^2+a^2)}{((q(p))^2+1)^2-2a^2((q(p))^2-1)+a^4}$$

$$=\frac{(-(q(p))^2+1+a^2+2iq(p))(iq(p)-1)}{((q(p))^2+1)^2-2a^2\left(\left(q(p)\right)^2-1\right)+a^4}$$

$$=\frac{-i\left(q(p)\right)^3+iq(p)+iq(p)a^2-2(q(p))^2+(q(p))^2-1-a^2-2iq(p)}{((q(p))^2+1)^2-2a^2\left(\left(q(p)\right)^2-1\right)+a^4}$$

$$=\frac{-((q(p))^2+a^2+1)}{((q(p))^2+1)^2-2a^2\left(\left(q(p)\right)^2-1\right)+a^4}$$

$$+\frac{(-(q(p))^3+a^2q(p)-q(p))}{((q(p))^2+1)^2-2a^2\left(\left(q(p)\right)^2-1\right)+a^4}i=$$

$$\frac{-[\left(q(p)\right)^2+1)+a^2]}{((q(p))^2+1)^2-2a^2(q(p))^2-1)+a^4}-\frac{q(p)((q(p)^2+1)-a^2)}{((q(p))^2+1)^2-2a^2(q(p))^2-1)+a^4}i$$

elde edilir.

**(8)** $T_g^c$ ($x^m$ f(x)); f(x) =sin (alnx) ya da f(x) =cos (alnx),m∈ $\mathbb{R}$ ,

$x>0$ *ve a sabit olmak üzere*

$T_g^c$ ($x^m$ f(x))=$\frac{-a[\left(q(p)\right)^2-(m+1)^2-a^2]}{((q(p))^2+(m+1)^2)^2-2a^2\left(q(p^{))2}-(m+1)^2\right)+a^4}+$

$$\frac{2a(m+1)q(p)}{((q(p))^2+(m+1)^2)^2-2a^2(q(p))^2-(m+1)^2)+a^4}i$$

elde edilir.

**İspat:**

$T_g^c$ ( $x^m\sin(alnx)) = T_g^c\left(\frac{x^m e^{ialnx}-x^m e^{-ialnx}}{2i}\right)=$

$\frac{1}{2i}T_g^c\left(x^{ia+m}-x^{-ia+m}\right) =$

$\frac{1}{2i}$ [$T_g^c$ ($x^{ia+m}$) - $T_g^c$ ($x^{-ia+m}$)]

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i\,q(p)-(ia+m+1)} - \frac{1}{iq(p)-(-ia+m+1)}\right],$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{iq(p)+ia-1-m-iq(p)+ia+1+m}{(i\,q(p)-ia-(m+1))(iq(p)+ia)-(m+1))}\right],$$

$$=\frac{a}{(i\,q(p)-(m+1))^2+a^2}\cdot\frac{(-i\,q(p)-(m+1))^2+a^2}{(-iq(p)-(m+1))^2+a^2},$$

$$=\frac{a[-iq(p)-(m+1)^2+a^2]}{((q(p))^2+(m+1)^2)^2-2a^2((q(p))^2-(m+1)^2)+a^4}$$

$$\frac{a((-q(p))^2+(m+1)+a^2)+2\,(m+1)i\,q(p)}{(q(p))^2+(m+1)^2)^2-2a^2((q(p))^2-(m+1)^2)+a^4}$$

$$\frac{a(m+1)^2+a^3-\ a(q(p))^2}{(q(p))^2+(m+1)^2)^2-2a^2((q(p))^2-(m+1)^2)+a^4}$$

$$+\frac{2(m+1)\,aq(p)}{(q(p))^2+(m+1)^2)^2-2a^2((q(p))^2-(m+1)^2)+a^4}i$$

$$=\frac{-a[\left(q(p)\right)^2-(m+1)^2)-a^2]}{(q(p))^2+(m+1)^2)^2-2a^2((q(p))^2-(m+1)^2)+a^4}$$

$$+\frac{2a(m+1)\,q(p)}{(q(p))^2+(m+1)^2)^2-2a^2((q(p))^2-(m+1)^2)+a^4}i$$

elde edilir.

Aynı işlemler tekrarlanarak $T_g^c\,(\,x^m\cos(alnx))$ fonksiyonu

$$T_g^c\,(\,x^m\cos(alnx)) = \frac{-(m+1)[(q(p))^2+(m+1)^2)+a^2]}{((q(p))^2+(m+1)^2)^2-2a^2((q(p))^2-(m+1)^2)+a^4}$$

$$-\frac{q(p)((q(p))^2+(m+1)^2)-\ a^2)}{(q(p))^2+(m+1)^{2)^2}-2a^2((q(p))^2-(m+1)^2)+a^2}i$$

olarak bulunur.

**Örnek 3.8.** Aşağıda verilen eşitlikler açıktır.

**(1)** $T_g^c$(-10)=$\frac{10}{1+(q(p))^2}+\frac{10i\,q(p)}{1+(q(p))^2}$.

**(2)** $T_g^c(x^3)$=$\frac{-4}{(q(p))^2+16}-\frac{q(p)}{(q(p^{))2}+16}i$.

**(3)** $T_g^c$(-4ln$x$)=$\frac{-4+4(q(p))^2}{(1+(q(p))^2)^2}-\frac{8q(p)}{(1+(q(p))^2)^2}i$.

**(4)** (sinh (5ln$x$))=$\frac{-(120+5(q(p))^2)}{((q(p))^2+1)^2+50((q(p))^2-1)+625}+\frac{10q(p)}{((q(p))^2+1)^2+50((q(p))^2-1)+625}i$.

**(5)** $T_g^c$(cosh (3ln$x$))=$\frac{-(q(p))^2+8}{((q(p))^2+1)^2+18((q(p))^2-1)+81}-\frac{((q(p))^3+10q(p))}{((q(p))^2+1)^2+18((q(p))^2-1)+81}$i.

**(6)** $T_g^c$(sin (-4ln$x$))=$\frac{4(q(p))^2-68}{((q(p))^2+1)^2-32((q(p))^2-1)+256}-\frac{8q(p)i}{((q(p))^2+1)^2-32((q(p))^2-1)+256}$.

**(7)** $T_g^c(\cos(2\ln x))= -\frac{((q(p))^2+5)}{((q(p))^2+1)^2-8((q(p))^2-1)+16} - \frac{((q(p))^3-3q(p)}{((q(p))^2+1)^2-8((q(p))^2-1)+16} i.$

**(8)** $T_g^c(x^{-3}\sin(2\ln x))$

( $T_g^c(\sin(2\ln x))= \frac{2}{(iq(p)-1))^2+4}$ olduğu için

$T_g^c(x^{-3}\sin(2\ln x)) =\frac{2}{(iq(p)+2)^2+4}$

$=\frac{-2(q(p)^2+16}{\left((q(p))^2+4\right)^2-8((q(p))^2-4)+16} +$

$$\frac{-8iq(p)}{((q(p))^2+4)^2-8((q(p))^2-4)+16}$$

elde edilir.

**( 9 )** $T_g^c(x^{\frac{3}{2}}\cos(3\ln x))$

$T_g^c(\cos(3\ln x))= \frac{iq(p)-1}{(iq(p-1)^2+9}$ *olduğu için*

$T_g^c(x^{\frac{3}{2}}\cos(3\ln x)) = \frac{iq(p)-\frac{5}{2}}{(iq(p-\frac{5}{2})^2+9}=$

$$\frac{-\frac{5}{2}(q(p))^2+\frac{61}{4}}{\left((q(p))^2+\frac{25}{4}\right)^2-18((q(p))^2-\frac{25}{4})+81} -$$

$$\frac{q(p)((q(p))^2+\frac{11}{4}i}{\left((q(p))^2+\frac{25}{4}\right)^2-18((q\left(p\right))^2-\frac{2}{5}\right)+81}$$

olur.

## 3.2. Temel Terimlerin Genel Kompleks Al-Tememe İntegral Dönüşümünün Tersi

Aşağıda bazı sonuçlar elde edilmiştir:

**(1)** $T_g^{c-1}\left(\frac{-1}{1+(q(p))^2} - \frac{q(p)}{1+(q(p))^2} i\right) = 1$ olur.

**(2)** $n \in \mathbb{R}$, i= $\sqrt{-1}$ olmak üzere

$$T_g^{c-1}\left(\frac{-(n+1)}{(q(p))^2+(n+1)^2} - \frac{q(p)}{(q(p))^2+(n+1)^2} i\right) = x^n$$

olur.

**(3)** $x$>1 , i= $\sqrt{-1}$ $olmak$ üzere $T_g^{c-1}\left(\frac{1-(q(p))^2}{((q(p))^2+1)^2}+\frac{2\,q(p)}{((q(p))^2+1)^2}i\right)=lnx$

olur.

**(4)** $T_g^{c-1}\left(\frac{-a\left[\left(q(p)\right)^2-1\right)+a^2]}{(q(p))^2+1)^2+2a^2(q(p))^2-1)+a^4}+\frac{2a\,q(p)}{(q(p))^2+1)^2+2a^2(q(p))^2-1)+a^4}i\right)=\sinh(alnx)$

olur, burada $a\ sabit$ i $=\sqrt{-1}\ ve\ x>1$ dir.

**(5)** $T_g^{c-1}\left(\frac{-\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)+a^2}{(q(p))^2+1)^2+2a^2(q(p))^2-1)+a^4}-\frac{q(p)\left((q(p))^2+1\right)+a^2}{(q(p))^2+1)^2+2a^2(q(p))^2-1)+a^4}i\right)=\cosh(alnx)$

olur, $burada\ a\ sabit$ i $=\sqrt{-1}$ $ve\ x>1$ dir.

**(6)** $T_g^{c-1}\left(\frac{-a\left[\left(q(p)\right)^2-1\right)+a^2]}{(q(p))^2+1)^2-2a^2(q(p))^2-1)+a^4}+\frac{2a\,q(p)}{(q(p))^2+1)^2-2a^2(q(p))^2-1)+a^4}i\right)=\sin(alnx)$

elde edilir. Burada $a\ sabit$ , i $=\sqrt{-1}$ $ve\ x>1$ dir.

**(7)** $T_g^{c-1}\left(\frac{-[((q(p))^2+1)+a^2]}{(q(p))^2+1)^2-2a^2(q(p))^2-1)+a^4}-\frac{(q(p)((q(p))^2+1)+a^2}{(q(p))^2+1)^2-2a^2(q(p))^2-1)+a^4}i\right)=\cos(alnx)$

olur, $burada\ a\ sabit\ ve$ $x>1$ , i $=\sqrt{-1}$ dir.

**Örnek 3.9.**

**(1)** $T_g^{c-1}\left(\frac{iq(p)-4}{(q(p))^2+16}\right)=T_g^{c-1}\left(\frac{-4}{(q(p))^2+16}\right)+\left(\frac{q(p)}{(q(p))^2+16}i\right)=x^3$=f($x$) elde edilir.

**(2)** $T_g^{c-1}\left(\frac{-2(q(p))^2+((2q(p)-\left(q(p)\right)^3)i}{(q(p))^4+4}\right)=T_g^{c-1}(\frac{-2(q(p))^2-2}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2-2((q(p))^2-1)+1}-$

$\frac{(q(p))^3}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2-2((q(p))^2-1)+1}i)+$

$T_g^{c-1}(\frac{2-(q(p)^2}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2-2((q(p))^2-1)+1}$ - $\frac{2q(p)}{\left(\left(q(p)\right)^2+1\right)^2-2((q(p))^2-1)+1}i)$

= cos(ln $x$)+sin(ln $x$) =f($x$)

elde edilir.

**(3)** $T_g^{c-1}[\frac{2iq(p)-1}{-(q(p))^2-2iq(p)-8}]=T_g^{c-1}[\frac{2iq(p)-1}{(iq(p)+2)(iq(p)-4)}]$

$T_g^{c-1}\left[\frac{2iq(p)-1}{-(q(p))^2-2iq(p)-8)}\right]=T_g^{c-1}\left[\frac{2iq(p)-1}{(iq(p)+2)(iq(p)-4)}\right]$ olur.

Böylece $\frac{2iq(p)-1}{(iq(p)+2)(iq(p)-4)}=\frac{A}{(iq(p)+2)}+\frac{B}{(iq(p)-4)}$ elde edilir.

Basit hesaplamalardan sonra A=$\frac{5}{6}$ ,B =$\frac{7}{6}$ olmak üzere

$T_g^{c-1}[\frac{2iq(p)-1}{-(q(p))^2-2iq(p)-8}] = \frac{\frac{5}{6}}{(iq(p)+2)} + \frac{\frac{7}{6}}{(iq(p)-4)}$

$= \frac{\frac{-5}{6}iq(p)+\frac{5}{3}}{(q(P))^2+4} + \frac{\frac{-7}{6}iq(p)-\frac{14}{3}}{(q(P))^2+16} = \frac{5}{6}x^{-3} + \frac{7}{6}x^3 = \frac{1}{6}[\frac{5}{x^3} + 7x^3]$=f($x$)

elde edilir.

### 3.3 Türev Teoreminin Genel Kompleks AL-Tememe İntegral Dönüşümü

**Teorem 3.10.** y(x), x>1 için bir fonksiyon olsun ve türevleri $y'$(x),$y''(x), \dots, y^{(n)}$(x) olsun. Bu durumda n pozitif tam sayı ve (iq(p) - (n-1)) ...(iq(p)-2)y(1)+(iq(p)-n) (iq(p)- (n-1)) (iq(p)-1)F(iq(p)) olmak üzere

$$T_g^c\ [x^n y^n\ (\text{x})] = -y(^{n-1)}\ (1) - (\text{iq(p)-n})\ \ y^{(n-2)}(1) - \dots - (\text{iq(p)-n})$$

olur.

**İspat:**

n=1 ise aşağıdaki durum göz önüne alınarak

$$T_g^c\ (xy' = -\text{y}(1) + (\text{iq(p)}-1)T_g^c\ (\text{y})\ \ ,$$

$$T_g^c(xy') = \int_1^\infty x^{-iq(p)} \text{x}y'\text{d}\, x = \int_1^\infty x^{-iq(p)+1}\, y'\text{d}\, x,$$

kismi integral yardımıyla

$$T_g^c\ (xy') = -\text{y}(1) + (\text{iq(p)}-1)T_g^c\ (\text{y}(x))$$

elde edilir.

Şimdi n=2 ise ,

$$T_g^c(x^2y'') = -y'(1) - (\text{iq(p)}-2)\text{y}(1) + (\text{iq(p)}-2)(\text{iq(p)}-1)T_g^c(\text{y}(x))$$

$$T_g^c(x^2y'') = \int_1^\infty x^{-iq(p)}\, x^2y''\text{d}\, x = \int_1^\infty x^{-iq(p)+2}\, y''\text{d}\, x$$

tekrar kismi integral yardımıyla

$$= x^{-iq(p)+2}y'|_1^\infty - \int_1^\infty(-iq(p)+2)x^{-iq(p)+1}\, y'dx$$

elde edilir.

Şimdi de n=3 ise,

$T_g^c(x^3y''')$=-$y''$(1)-(iq(p)-3)y′ (1)- (iq(p)-3)(iq(p) $y(1) + (iq(p) - 3)(iq(p)\ 2)(iq(p) - 1)$

$T_g^c\ (y(x)$ .

$T_g^c(x^3y''') = \int_1^\infty x^{-iq(p)}\, x^3y'''$dx=$\int_1^\infty x^{-iq(p)+3}\, y'''$dx

$=x^{-iq(p)+3}y''|_1^\infty - \int_1^\infty(-iq(p)+3)x^{-iq(p)+2}\,y''dx$

=-y″(1)+(iq(p)-3)(-y′(1)-(iq(p)-2)y(1)+(iq(p)-2)(iq(p)-1)

$T_g^c$(y)) = -y″(1)- (iq(p)-3)y′(1)- (yq(p)-3)(iq(p)-2)y(1)+(iq(p)-3)

(iq(p)-2)(iq(p)-1)$T_g^c$(y))

elde edilir. Böylece,

$T_g^c$ $(x^n y^{(n)})$ =-$y^{n-1}$(1)-(iq(p)-n)$y^{n-2}$(1)-(iq(p)-n)(iq(p)- (n-1)$y^{n-3}$(1)-(iq(p)-n) (iq(p)-(n-1))…(iq(p)-2)y(1)+(iq(p)-n) (iq(p)-(n-1))…(iq(p)-2)(iq(p)-1)$T_g^c$(y)

elde edilir, burada n pozitif tam sayıdır.

# 4. TÜREV VE İNTEGRAL VE UYGULAMALARI

Bu bölümde, ($T_g^c$((lnx)$^n$)) and ($T_g^c(x^m$(lnx)$^n$)) fonksiyonları bulunarak türevlerin genel kompleks Al-Teme integral dönüşümünü elde edebilmek için kullanılabilecek teknikler araştırılacaktır.

Ayrıca, genel kompleks Al-Teme integral dönüşümünün integralini bulmak için [7]'de var olan teknikler genişletilip genelleştirilmiştir.

($T_g^c$) genel kompleks Al-Teme integral dönüşümü değişken katsayılı lineer adi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için kullanılmıştır.Bu teknik kısaca özetlenecek olursa; Adi diferansiyel denklemin her iki tarafının genel kompleks Al-Tememe integral dönüşümü alınıp ve genel kompleks Al-Tememe integral dönüşümünde genel çözümde yazılır. Bu çözümdeki kesrin pay ve paydası iq(p)'nin polinomu olduğu göz önünde bulundurulmalıdır. ($\mathrm{T}_g^{c-1}$) ters genel kompleks Al-Tememe integral dönüşümü alındıktan sonra diferansiyel denkleminin adi tipinin tam çözümü bulunmuş olur.

## 4.1 Bazı Temel Fonksiyonlar için Genel Kompleks Al-Tememe İntegral Dönüşümü

**Teorem 4.1.** Teorem 3.10. yardımıyla

n tek sayı ise

$$T_g^c(\ln x)^n = \frac{n!(iq(p)+1)^{n+1}}{((q(p))^2+1)^{n+1}},$$

n çift sayı ise

$$T_g^c(\ln x)^n = \frac{-(n!)(iq(p)+1)^{n+1}}{((q(p))^2+1)^{n+1}}$$

eşitliklerinin doğruluğu gösterilir.

**İspat:**

n=1 için

$$T_g^c(\ln x)^1 = \frac{(iq(p)+1)^2}{(q(p))^2+1)^2} \qquad (2.1)$$

elde edilir.

n=2 için, y=$(lnx)^2$ olsun. y(1) =0 koşulu ile y′= 2ln$x.\frac{1}{x}$ ve xy′=2ln$x$ olmak üzere

$$T_g^c(xy')=2T_g^c(\ln x) that\ is\text{-}y(1)+(iq(p)-1)T_g^c(y)=\frac{2}{(iq(p)-1)^2}$$

elde edilir. Bu durumda

$$T_g^c(\mathrm{y})= =\frac{-(iq(p)+1)^3}{(q(p))^2+1)^3} \qquad (2.2)$$

olur.

n=3için, y=(ln$x)^3$olsun. y(1)=0 koşulu göz önüne alınarak y′=3(ln$x)^2$ .$\frac{1}{x}$ $yani$ $x$y′ =3(ln$x)^2$ olmak üzere $T_g^c(x$y′)=3$T_g^c$(ln$x)^2$ ve -y(1)+(iq(p)-1) $T_g^c$(y) =$\frac{3.2}{(iq(p)-1)^3}$ ile

$$T_g^c(\mathrm{y})= =\frac{3!(iq(p)+1)^4}{(q(p))^2+1)^4} \qquad (2.3)$$

elde edilir.

Ayrıca, y =(lnx)$^n$ve y(1)=0 koşuluyla y′ = n(lnx)$^{n-1}$.$\frac{1}{x}$ $yani$ $x$y′ =n(ln$x)^{n-1}$ olmak üzere

$T_g^c(x$y′)=n$T_g^c$(ln$x)^{n-1}$ ve -y(1)+(iq(p)-1) $T_g^c$(y) =$\frac{n.(n-1)!}{(iq(p)-1)^n}$ ile

n tek ise

$$T_g^c(\mathrm{y})= =\frac{n!(-iq(p)-1)^{n+1}}{(q(p))^2+1)^{n+1}} \qquad (2.n)$$

$$=\frac{n!(iq(p)-1)^{n+1}}{(q(p))^2+1)^{n+1}}$$

olur.

n çift ise

$$T_g^c(\mathrm{y}) =\frac{-(n!)(iq(p)+1)^{n+1}}{(q(p))^2+1)^{n+1}}$$

olur.

Ayrıca, teorem Teorem 3.10 yardımıyla $T_g^c(x^m$(ln$x)^n)$ elde edilir. Burada, m pozitif tam sayıdır.

**Birinci durum:** Eğer n=1 ise m ∈ $N$ , $x > 0$ için

$$T_g^c(x^m(\ln x))= \frac{1}{(iq(p)-(m+1))^2}.\frac{(-iq(p)-(m+1))^2}{(-iq(p)-(m+1))^2}=\frac{(iq(p)+(m+1))^2}{(iq(p))^2+(m+1)^2)^2}$$

elde edilir.

**İkinci durum:** n $=2$ için $T_g^c(x^m$(lnx)$^2)$ olur. m=1ise, $T_g^c(x^1$(ln$x)^2)$ olur. y =$x^1$(ln$x)^2$ ve y(1)=0 koşuluyla

y′=$x$.2ln$x$.$\frac{1}{x}$ + (ln$x)^2$ ,

$x$y′=2$x$lnx + x(ln$x)^2$ ,

$T_g^c(x$y′)=2$T_g^c(x$ln$x)$+$T_g^c$(y) ,

-y(1)+(iq(p)-1) $\mathrm{T_g^c}$(y) =$\frac{2}{(\mathrm{iq(p)}-2)^2}$ +$\mathrm{T_g^c}$(y) , (iq(p)-1) $T_g^c$(y) -$T_g^c$(y) = $\frac{2}{(iq(p)-2)^2}$ ile

$$T_g^c(y)=\frac{2}{(iq(p)-2)^3}\cdot\frac{(-iq(p)-2)^3}{(-iq(p)-2)^3}=\frac{-2(iq(p)+2)^3}{((q(p))^2+4)^3} \qquad (2.4)$$

elde edilir.

m =2 ise , $T_g^c(x^2((\ln x)^2)$ olur. y=$x^2(\ln x)^2$ ve y(1)=0 koşuluyla

$y'=x^2.2\ln x.\frac{1}{x}+2x(\ln x)^2$ ,

$x\,y'=2x^2\ln x+2x^2(\ln x)^2$ ,

$T_g^c(x\,y') = 2T_g^c(x^2(\ln x)^2)+2T_g^c(y)$

-y(1)+(iq(p)-1) $T_g^c$(y) =$\frac{2}{(iq(p)-3)^2}$ +2$T_g^c$(y) ,

(iq(p)-1) $T_g^c$(y) -2$T_g^c$(y) = $\frac{2}{(iq(p)-3)^2}$ ile

$$T_g^c(y)=\frac{2}{(iq(p)-3)^3}\cdot\frac{(-iq(p)-3)^3}{(-iq(p)-3)^3}=\frac{-2(iq(p)+3)^3}{(iq(p))^2)+9)^3} \qquad (2.5)$$

elde edilir.

m=3 ise, $T_g^c(x^3(\ln x)^2)$ olur. y=$(x^3(\ln x)^2)$ ve y(1)=0 koşuluyla

$y'=x^3.2\ln x.\frac{1}{x}+3x^2(\ln x)^2$ ,

$x\,y'=2x^3\ln x+3x^3(\ln x)^2$ ,

$T_g^c(x\,y') = 2T_g^c(x^3\ln x)^2)+3T_g^c(y)$ ,

-y(1)+(iq(p)-1) $T_g^c$(y) =$\frac{2}{(iq(p)-4)^2}$ +3$T_g^c$(y) ile

$$(iq(p)-1)\,T_g^c(y)-3T_g^c(y)=\frac{2}{(iq(p)-4)^2}=\frac{-2(iq(p)+4)^3}{(iq(p))^2)+16)^3}. \qquad (2.6)$$

.

.

.

$m\in N$, $x$>0 olmak üzere $T_g^c(x^m(\ln x)^2)$, y=$x^m(\ln x)^2$ ve y(1)=0 koşuluyla ,

$y'=x^m.2\ln x.\frac{1}{x}+mx^{m-1}(\ln x)^2$ ,

$x\,y'=2x^m\ln x+mx^m(\ln x)^2$ ,

$T_g^c(x\,y') = 2T_g^c(x^m(\ln x)^2)+mT_g^c(y)$ ,

-y(1)+(iq(p)-1) $T_g^c$(y) =$\frac{2}{(iq(p)-(m+1))^2}$ +$mT_g^c$(y) , (iq(p)-1) $T_g^c$(y) -$mT_g^c$(y) = $\frac{2}{(iq(p)-(m+1))^2}$ ile

$$T_g^c(\text{y})=\frac{2}{(iq(p)-(\text{m}+1))^3}.\frac{(-iq(p)-(\text{m}+1))^3}{(-iq(p)-(\text{m}+1))^3} = \frac{-2(iq(p)+(\text{m}+1))^3}{((q(p))^2+(\text{m}+1))^3} \quad ; \text{m} \in N \ , \text{i}=\sqrt{-1}$$

elde edilir.

**<u>Üçüncü durum:</u>** $T_g^c(x^m(\ln x)^3)$ fonksiyonu için;

m=1 ise,$T_g^c(x^1(\ln x)^3)$ bulmak için y =$x^1(\ln x)^3$olsun ve y(1)=0 koşuluyla

$x$ y′=3 $x$ $(\ln x)^2$+ $x$ $(\ln x)^3$

$T_g^c$ $x$ (y′)=3$T_g^c((\ln x)^2)$+$T_g^c$(y) ,

-y(1)+(iq(p)-1) $T_g^c$(y) =3.$\frac{2}{(iq(p)-2)^3}$ +$T_g^c$(y) ,

(iq(p)-1) $T_g^c$(y) -$T_g^c$(y) = $\frac{3!}{(iq(p)-2)^3}$ ile

$$T_g^c(\text{y})=\frac{3!}{(iq(p)-2)^4}.\frac{(-iq(p)-2)^4}{(-iq(p)-2)^4}=\frac{3!(iq(p)+2)^4}{((q(p))^2)+4)^4} \tag{2.7}$$

olur.

m= 2 ise $T_g^c(x^2(\ln x)^3)$ bulmak için y =$(x^2(\ln x)^3)$ $olsun$ ve y(1)=0 değeri ile

$x$y′=3$x^2$ $(\ln x)^2$+ 2$x^2(\ln x)^3$ ,

$T_g^c(x$y')=3$T_g^c(x^2(\ln x)^2)$+2 $T_g^c$(y)

(iq(p)-1) $T_g^c$(y) -2$T_g^c$(y) = $\frac{3!}{(iq(p)-3)^3}$ ,

$$T_g^c(\text{y})=\frac{3!}{(iq(p)-3)^4}.\frac{(-iq(p)-3)^4}{(-iq(p)-3)^4}=\frac{3!(iq(p)+3)^4}{(iq(p))^2)+9)^4} \tag{2.8}$$

elde edilir.

m= 2 ise $T_g^c(x^3(\ln x)^3)$ bulmak için y =$(x^2(\ln x)^3)$ $olsun$ ve y(1)=0 değeri ile ,

y′=$x^3$. 3$(\ln x)^2$.$\frac{1}{x}$ +2x $(\ln x)^3$ ,

$x$ y′=3$x^2$ $(\ln x)^2$+ 3$x^2(\ln x)^3$ ,

$T_g^c(x$y′)=3$T_g^c(x^3(\ln x)^2)$+3 $T_g^c$(y) ,

(iq(p)-1) $T_g^c$(y) -3$T_g^c$(y) = $\frac{3!}{(iq(p)-4)^3}$ ,

$$T_g^c(\text{y})=\frac{3!}{(iq(p)-4)^4}.\frac{(-iq(p)-4)^4}{(-iq(p)-4)^4}\ ,=\frac{3!(-iq(p)+4)^4}{(iq(p))^2)+16)^4} \tag{2.9}$$

elde edilir.

.

.

.

m $\in N$ ve $x$>0 için $T_g^c(x^m(\ln x)^3)$ bulmak için y $=x^m(\ln x)^3$olsun ve y(1)=0 koşuluyla

$y'=x^m.\, 3(\ln x)^2.\frac{1}{x}+mx^{m-1}(\ln x)^3$ ,

$xy'=3x^m(\ln x)^2+mx^m(\ln x)^3$ ,

$T_g^c(xy')=3T_g^c(x^m(\ln x)^2)+m\,T_g^c(y)$ ,

$(iq(p)-1)\,T_g^c(y)-mT_g^c(y)=\frac{3!}{(iq(p)-(m+1))^3}$ ,

$$T_g^c(y)=\frac{3!}{(iq(p)-(m+1))^4}.\frac{(-iq(p)-(m+1))^4}{(-iq(p)-(m+1))^4}=\frac{3!(-iq(p)+(m+1))^4}{(q(p))^2+(m+1)^2)^4} \quad (2.h)$$

Şimdi de $T_g^c(x^m(\ln x)^n)$ bulmak için m $\in \mathbb{R}$ ,n $\in$ N , $x$>0 olmak üzere y $=x^m(\ln x)^n$ ve y(1)=0 olsun. Bu durumda

$y'=x^m.\, n(\ln x)^{n-1}.\frac{1}{x}+mx^{m-1}(\ln)x^n$ ,

$xy'=nx^m(\ln x)^{n-1}+mx^m(\ln x)^n$ ,

$T_g^c(xy')=nT_g^c(x^m(\ln x)^{n-1})+m\,T_g^c(y)$

$-y(1)+(iq(p)-1)\,T_g^c(y)=n.\frac{(n-1)!}{(iq(p)-(m+1))^n}+mT_g^c(y)$ ,

$(iq(p)-1)\,T_g^c(y)-mT_g^c(y)=\frac{n!}{(iq(p)-(m+1))^n}$ ile

$T_g^c(y)=\frac{n!}{(iq(p)-(m+1))^{n+1}}.\frac{(-iq(p)-(m+1))^{n+1}}{(-iq(p)-(m+1))^{n+1}}=\frac{n!(-iq(p)-(m+1))^{n+1}}{(iq(p))^2)+(m+1)^2)^{n+1}}$

elde edilir.

**Örnek 4.2.**

**(1)** $T_g^c(x^{\frac{7}{2}}T_g^c(x^{-5}(\ln x)^4))=\frac{4!(-iq(p)-(-5+1))^5}{(q(p))^2+(-5+1)^2)^5}=\frac{4!(-iq(p)+4)^5}{((q(p))^2+16)^5}$

**(2)** $(\ln x)^7))=\frac{7!(-iq(p)-(\frac{7}{2}+1))^8}{((q(p))^2+(\frac{7}{2}+1)^2)^8}=\frac{7!(-iq(p)-\frac{9}{2})^8}{((q(p))^2+\frac{81}{4})^8}$

**(3)** $T_g^c(x^5\ln x)$

$T_g^c(\ln x)=\frac{1}{(iq(p)-1)^2}$

$T_g^c(x^5\ln x)=\frac{1}{(iq(p)-6)^2}=\frac{(q(p))^2+36}{((q(p))^2+36)^2}+\frac{12q(p)i}{((q(p))^2+36)^2}$

## 4.2 Genel Kompleks Al-Tememe İntegral Dönüşümünün Türevi

**Teorem 4.3.** $[1,\infty)$ periyodunda f(x) parçalı sürekli fonksiyonu ve $T_g^c$ (f(x))= F(i q(p)) için k=1,2,… olmak üzere

$$\frac{d^k}{dq(p)^k} T_g^c\ (f(x)) = (-i)^k T_g^c[(\ln(x))^k\ f(x)\ ]$$

elde edilir.

**İspat:**

$T_g^c(\mathrm{f}(x)) = \int_1^\infty x^{-iq(p)}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$ integrali için

$k = 1$ ise

$\frac{d}{dq(p)} T_g^c\ (\mathrm{f}(x)) = \frac{d}{dq(p)} \int_1^\infty x^{-iq(p)}\ \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x,$

$= \int_1^\infty \frac{d}{dq(p)} x^{-iq(p)}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$

$x^{-iq(p)} = e^{-iq(p)ln(x)}$and $,\frac{d}{dq(p)}(x^{-iq(p)}) = -ix^{-iq(p)}\ln(x)$

olduğu için

$\frac{d}{dq(p)} T_g^c\ (\mathrm{f}(x)) = \int_1^\infty -i\ x^{-iq(p)}\ \ln(x))\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x,$

$= (-i)^1 \int_1^\infty \ln(x)\ x^{-iq(p)}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$

olur. Böylece,

$$\frac{d}{dq(p)} T_g^c\ (\mathrm{f}(x)) = (-i)^1 T_g^c\ [\ln(x)\ \mathrm{f}(x)] \qquad (2.10)$$

elde edilir.

$k = 2$ ise

$\frac{d^2}{d(q(p))^2} T_g^c(\mathrm{f}(x)) = \frac{d}{dq(p)}[\frac{d}{dq(p)} T_g^c(\mathrm{f}(x))\ ]\ ,$

$= \frac{d}{dq(p)}[\ (-i)^1 T_g^c\ [\ln(x)\ \mathrm{f}(x)]\ ].$

$= (-i)^1 \frac{d}{dq(p)} \int_1^\infty \ln(x)x^{-iq(p)}\mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}\ x,$

$= (-i)^1 \int_1^\infty \frac{d}{dq(p)} x^{-iq(p)}\ \ln(x)\ \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x\ ,$

$=(-i)^1 \int_1^\infty (-i\ x^{-iq(p)} \ln x)\ lnx\ \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x\ ,$

$= (-i)^2 \int_1^\infty x^{-iq(p)}\ (\ln x)^2\ \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x$

olur. Böylece,

$$\frac{d^2}{d(q(p))^2} T_g^c \text{ (f}(x)) = (\text{-i})^2 T_g^c \text{ [(ln}x)^2 \text{ f}(x)] \qquad (2.11)$$

olur. Genel olarak

$$\frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{dq(p)^k}} T_g^c\big(\mathrm{f}(x)\big) = (-\mathrm{i})^{\mathrm{k}-1} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,q(p)}} x^{-\mathrm{iq(p)}} (\ln x)^{\mathrm{k}-1} \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x \quad ,$$

$$= (-\mathrm{i})^{\mathrm{k}-1} \int_1^\infty \big(-\mathrm{i}\ \mathrm{x}^{-\mathrm{iq(p)}} \ln x\big)(\ln x)^{\mathrm{k}-1} \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x$$

$$= (-\mathrm{i})^{\mathrm{k}} \int_1^\infty \mathrm{x}^{-\mathrm{iq(p)}} (\ln x)^{\mathrm{k}} \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x$$

olur. Böylece,

$\frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{dq(p)^k}} T_g^c[\big(\mathrm{f}(x)\big)] = (-\mathrm{i})^{\mathrm{k}} T_g^c\big[(\ln x)^{\mathrm{k}} \mathrm{f}x\big]$ ile

$$(2.\mathrm{k}) T_g^c[(\ln x)^{\mathrm{k}} \mathrm{f}(x)] = (\mathrm{i})^{\mathrm{k}} \frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{dq(p)^k}} T_g^c[\mathrm{f}(x)$$

elde edilir.

**Örnek 4.4.**

**(1 )** $x > 0$ $için$ $T_g^c(\ln\mathrm{x} \cos(\ln\mathrm{x})) = (\mathrm{i}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq(p)}} T_g^c(\cos \ln\mathrm{x})$ fonksiyonunu hesaplayınız.

**Çözüm:**

$T_g^c(\ln\mathrm{x} \cos(\ln\mathrm{x}))$

$$= (\mathrm{i}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq(p)}} \Bigg[\frac{-\mathrm{q(p)})^2 - 2}{(\mathrm{q(p)})^2 + 1)^2 - 2(\mathrm{q(p)})^2 - 1) + 1} - \frac{(\mathrm{q(p)})^3}{(\mathrm{q(p)})^2 + 1)^2 - 2(\mathrm{q(p)})^2 - 1) + 1}\ \mathrm{i}\Bigg],$$

$$= (\mathrm{i}) \Bigg[ \frac{2\mathrm{q(p)}^5 + 8\mathrm{pq(p)}^3 - 8\mathrm{q(p)}}{(\mathrm{q(p)})^2 + 1)^2 - 2((\mathrm{q(p)})^2 - 1) + 1)^2} - \frac{-\mathrm{q(p)}^6 + 12(\mathrm{q(p)})^2}{((\mathrm{q(p)})^2 + 1)^2 - 2(\mathrm{q(p)})^2 - 1) + 1)^2}\ \mathrm{i} \Bigg]$$

$$= \frac{-\mathrm{q(p)}^6 + 12(\mathrm{q(p)})^2}{(\mathrm{q(p)})^2 + 1)^2 - 2((\mathrm{q(p)})^2 - 1) + 1)^2} + \frac{2\mathrm{q(p)}^5 + 8\mathrm{q(p)})^3 - 8\mathrm{q(p)}}{((\mathrm{q(p)})^2 + 1)^2 - 2(\mathrm{q(p)})^2 - 1) + 1)^2}\ \mathrm{i}$$

elde edilir.

**(2)** $T_g^c[(\ln\mathrm{x})^3 \mathrm{x}^{-2})] = (\mathrm{i})^3 T_g^c(\mathrm{x}^{-2})$ fonksiyonunu hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$= (\mathrm{i})^3 \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{dq(p)}^3} \left(\frac{1}{\mathrm{q(p)})^2 + 1} - \frac{\mathrm{q(p)}}{\mathrm{q(p)})^2 + 1}\ \mathrm{i}\right)$$

$$= (-\mathrm{i}) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dq(p)})^2} \left( \frac{1}{\mathrm{q(p)})^2 + 1} - \frac{\mathrm{q(p)}}{\mathrm{q(p)})^2 + 1}\ \mathrm{i} \right)$$

$$= (-i)\frac{d}{dq(p)}\left(\frac{6q(p))^2-2}{(q(p))^2+1)^3} - \frac{2q(p)^3-6q(p)}{(q(p))^2+1)^3}\, i\right)$$

$$= \frac{6q(p)^4-36(q(p))^2+6}{(q(p))^2+1)^4} - \frac{24q(p)-24q(p)^3}{(q(p))^2+1)^4}\, i$$

elde edilir.

## 4.2 Genel Kompleks AL-Tememe İntegral Dönüşümünün İntegrali

**Teorem 4.5.** $T_g^c[(f(x)) = F(iq(p))$ ise

$$T_g^c\left(\int_1^x f(t)dt\right) = \frac{-1-iq(p)}{1+(q(p))^2} T_g^c\{x\, f(x)\}$$

elde edilir.

**İspat:**

$\int_1^x f(t)dt = g(x)$ olsun . $g'(x) = f(x)$ ve $g(1)=0$ olmak üzere

$$T_g^c\left(\int_1^x f(t)dt\right) = T_g^c\,(g(x)) = \int_1^\infty x^{-iq(p)}\, g(x)dx$$

integrali alındığında

$$= \frac{1+iq(p)}{1+(q(p))^2} x^{-iq(p)+1}\, g(x)\Big|_1^\infty \qquad \int_1^\infty \frac{1+iq(p)}{1+(q(p))^2} x^{-iq(p)+1}\, g'(x)d\,x$$

$$= \frac{-1-iq(p)}{1+(q(p))^2}\int_1^\infty x^{-iq(p)} x\, g'(x)dx$$

elde edilir. Dolayısıyla

$T_g^c\,(g(x)) = \frac{-1-iq(p)}{1+(q(p))^2} T_g^c[xf(x)]$ böylece, $g(x) = T_g^{c-1}\left[\frac{-1-iq(p)}{1+(q(p))^2} T_g^c[xf(x)]\right]$

olur.

**Örnek 4.6.**

$$T_g^{c-1}\left[\frac{-(q(p))^2+5iq(p)+4}{p(q(p))^4+17(q(p))^2+16}\right] = T_g^{c-1}\left[\frac{(-1-iq(p)(-4-iq(p))}{((q(p))^2+1)((q(p))^2+16)}\right]$$

$$T_g^{c-1}\left[\frac{(-1-iq(p)}{((q(p))^2+1)} T_g^c\,(x^3)\right] = T_g^{c-1}\left[\frac{(-1-iq(p)}{((q(p))^2+1)} T_g^c\,(x\,x^2)\right]$$

$$= \int_1^x f(t)dt = \int_1^x t^2\,dt = = \frac{1}{3}\,(x^3-1)\ .$$

**Örnek 4.7.**

$$T_g^{c-1}\left[\frac{-1-iq(p)}{\left(-(q(p))^2+iq(p)-6\right)+((q(p))^2+1)}\right] = T_g^{c-1}\left[\frac{(-1-iq(p)}{((q(p))^2+1)}\left(\frac{1}{-(q(p))^2+iq(p)-6}\right)\right]$$

$$\frac{1}{-(q(p))^2+iq(p)-6} = \frac{A}{(iq(p)-2)} + \frac{B}{(iq(p)+3)}\ .$$

olur. Basit hesaplamalardan sonra

$A = \frac{1}{5}$ $B = \frac{-1}{5}$ alınırsa

$$\frac{1}{-(q(p))^2+iq(p)-6} = \frac{\frac{1}{5}}{(iq(p)-2)} - \frac{\frac{1}{5}}{(iq(p)+3)}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{-iq(p)-2}{(q(p))^2+4}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{3-iq(p)}{(q(p))^2+9}\right)$$

$$= T_g^c\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}x^{-4}\right)$$

$$= T_g^{c-1}\left[\frac{(-1-iq(p))}{(q(p))^2+1} T_g^c\left(x\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}x^{-5}\right)\right)\right] = \int_1^x f(t)\ dt = \int_1^x \frac{1}{5} - \frac{1}{5}t^{-5}\ dt$$

$$= \frac{x}{5} + \frac{x^{-4}}{20} - \frac{1}{4} = f(x)$$

elde edilir.

### 4.3 Genel Kompleks Al-Tememe İntegral Dönüşümü kullanarak lineer adi diferansiyel denklemleri çözme

(n) dereceli lineer değişken katsayılı ve başlangıç koşullu adi diferansiyel denkleminin genel formu

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x) \qquad (2.12)$$

şeklindedir. a, 0, a 1,..., a n keyfi sabitler ve y(x) in n'inci türevi $y^{(n)}$ olmak üzere f(x), genel kompleks Al-Teme integral dönüşümü ile sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, burada $y(1), \ldots\ldots, y(n-1)$ değerleri bilinmektedir. Denklemin her iki tarafına $T_g^c$ genel kompleks Al-Teme integral dönüşümü uygulanarak (2.12) adi diferansiyel denkleminin çözümü elde edilir. Gerekli işlemlerden sonra

$$T_g^c(y) = \frac{h(iq(p))}{k(iq(p))};\ k(iq(p)) \neq 0\ , i=\sqrt{-1}\ ,\ q(p)>0 \qquad (2.15)$$

olur. Burada, h ve k, iq(p)'nin polinomları ve h'nin mertebesi k'ninkinden küçüktür. Diğer bir ifadeyle, iyi bilinen asal kofaktörlere sahip bir polinomdur. (2.13) denkleminin her iki tarafına $T_g^{c-1}$ uygulanırsa

$$y = T_g^{c-1} = \left[\frac{h(iq(p))}{k(iq(p))}\right];\ k(iq(p)) \neq 0\ , i=\sqrt{-1}\ ,\ q(p)>0 \qquad (2.14)$$

elde edilir. (2.14) denklemi, (2.12) adi diferansiyel denkleminin genel çözümünü temsil eder, ki bu

$$y = A_0\, K_0\,(x) + A_1\, K_1\,(x) + \ldots + A_m\, K_m\,(x). \qquad (2.15)$$

olarak verilmiştir. Burada, $K_0 , K_1 , \dots , K_m$ $x'infonksiyonlar$□, $A_0 , A_1 , \dots , A_m$ keyfi sabitler ve sayılar ık(iq(p)) mertebesine eşittir. $A_0 , A_1 , \dots , A_m$ değerlerini hesaplamak için başlangıç koşulları yerine koyulur. Bunlardan biri y(1) olduğundan

$$A_0 K_0 (1) + A_1 K_1 (1) + \dots + A_m K_m (1) = y(1 \qquad (2.16)$$

olur. (2.16)'nın m defa türevi alınırsa

$$A_0 K_0'(1) + A_1 K_1'(1) + \dots + A_m K_m'(1) = y'(1) \qquad (2.17)$$

$$A_0 K_0''(1) + A_1 K_1''(1) + \dots + A_m K_m''(1) = y''(1) \qquad (2.18)$$

$$A_0 K_0^{(m)}(1) + A_1 K_1^{(m)}(1) + \dots + A_m K_m^{(m)}(1) = y^{(m)}(1) \qquad (2.18+m)$$

elde edilir. Bu bir lineer cebir sistemi ile çözülebilir. Böylece gerekli (2.12) adi diferansiyel denklemin çözümü hesaplanır. (2.14) denkleminde, h(iq(p) polinomu gereksiz olarak tanımlanır, bu sembol dışında hiçbir şey kategorize edilmez. Ancak (iq(p)polinomu f(x) fonksiyonu için genel kompleks Al-Teme integral dönüşümünün paydası ile $(a_0(iq(p))^n + a_1(iq(p))^{n-1} + \dots + a_n)$ çarpanlarını içerir.

**Uyarı 4.8.** a bir sabit olmak üzere

$T_g^c(xy') = (iq(p)-1)T_g^c(y) + a$

$T_g^c(cx^2y'') = (iq(p)-2)(iq(p)-1)T_g^c(y) + h_1(iq(p))$ ; $h_1(iq(p))$ mertebesi 2'den küçük.

$T_g^c(x^3y''') = (iq(p)-3)\,(iq(p)-2)(iq(p)-1)T_g^c(y) + h_2(iq(p)$ ; $h_2$mertebesi(iq(p)  3'ten küçük.

.

.

.

$T_g^c\left(x^m y^{(m)}\right) = (iq(p)-m)\,(iq(p)-m+1)\dots(iq(p)-1)T_g^c(y) + h_{m-1}(iq(p)$ ;  $h_{m-1}$mertebesi(iq(p) m'den küçük olur.

**Örnek 4.9.** Başlangıç değeri y(1) = 0 olan

$$xy' - 2y = x^4$$

adi diferansiyel denklemini çözünüz.

**Çözüm:**

Adi diferansiyel denklemin her iki tarafınada genel kompleks Al-Tememe integral dönüşümü uygulanırsa

$$T_g^c(y) = \frac{1}{(iq(p)-3)(iq(p)-5)}$$

elde edilir. Kompleks Al-Teme integral dönüşümünün tersini aldıktan sonra, yukarıda belirtilen denklemin genel çözümü

$$y = Ax^2 + Bx^4 \ldots (2.19)$$

olur. (2.19) denklemi , A ve B sabitlerini içerir. Dolayısıyla, y(1)=0 kullanarak

A+B=0 ... (2.20)

elde edilir. İkinci denklemi çözmek için, y(1)=0 başlangıç değerinden yararlanarak $y'(1) - 2y(1) = 1$ denklemde yazılırsa $y'(1) = 1$ olur.

(2.19) denkleminin türevi alınıp $y'(1) = 1$ yerine yazılırsa

2A+4B=1 ...(2.21)

elde edilir. (2.20) ve (2.21) denklemlerinin yardımıyla

$$A = \frac{-1}{2} \ , B = \frac{1}{2}$$

olur ve böylece

$$y(x) = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

elde edilir.

**Örnek 4.10.** Başlangıç değeri $y'(1) = y(1) = 0$ ve $x > 0$ olmak üzere

$$x^2y''3xy' - 3y = x^{-4}lnx$$

adi diferansiyel denklemini çözünüz.

**Çözüm:**

$$T_g^c(y) = \frac{1}{(iq(p)-2)(iq(p)+2)(iq(p)+3)^2} \qquad (2.22)$$

denkleminin her iki tarafının $T_g^{c-1}$ alınırsa

$$y = Ax + Bx^{-3} + Cx^{-4} + Dx^{-4}lnx \qquad (2.23)$$

elde edilir. Burada A, B, C ve D keyfi sabitlerdir.A ,B,C ve D'nin değerlerini bulmak için dört lineer denklem gereklidir. (2.23) denkleminde y(1)=0 yerine yazılarak ilk denklem elde edilir. İkinci denklemi, (2.23) denkleminin genel çözümünde y'(1)=0 yerine koyarak elde edilir. Ancak üçüncü ve dördüncü denklemler için iki değere daha ihtiyaç vardır. Bunlar,

y''(1)+3y'(1)-3y(1)=0 yani, y''(1)=0 ve y''(1)+2y'' (1)+3y''(1)+3y'(1)-3y'(1)=1 yani, y'''(1)=1 olur. Böylece y, y'', y'', y'" her biri sırasıyla yerine yazıldığında y(1) =y'(1)= y''=0 , y'''(1)=1 ile

A+B+C=0 (2.24)

A-3B-4C+D=0 (2.25)

12B+20C-9D=0 (2.26)

-60B-120C+74D=1 (2.27)

elde edilir. (2.24),(2.25),(2.26) ve (2.27) denklemlerinden

$$A = \frac{1}{100}, B = \frac{-1}{4}, C = \frac{6}{25}, D = \frac{1}{5}$$

elde edilir. Böylece adi diferensiyel denklemi

$$Y=\frac{1}{100}x-\frac{1}{4}x^{-3}+\frac{6}{25}x^{-4}+\frac{1}{5}x^{-4}lnx$$

olarak bulunur.

**Örnek 4.11.** y"(1)=0 with x>0 için

$$x^3y''-3xy'+3y=\sin(2\ln x) \;;y(1)=-2 \;,y'(1)=1$$

adi diferansiyel denklemini çözünüz.

**Çözüm:**

Adi diferansiyel denkleminin her iki tarafını $T_g^c$ alınıp başlangıç degerler yerine yazılınca

$$T_g^c(y) = \frac{\mathrm{h(iq(p)}}{(-\mathrm{i(qp)}^3 + 6(q(\mathrm{p}))^2 + 11\mathrm{iq(p)} - 6 - 3iq(\mathrm{p}) + 3 + 3)[(\mathrm{iq(p)} - 1)^2 + 4]} \quad (2.28)$$

$$T_g^c(y) = \frac{\mathrm{h(iq(p)}}{-\mathrm{iq(p)}(-\mathrm{iq(p)} + 4)(\mathrm{iq(p)} - 2)[(\mathrm{iq(p)} - 1)^2 + 4]} .$$

elde edilir. Her ikitarafın$T_g^{c-1}$ alınırsa

$$y=Ax^{-1}+BX+Cx^3+D\sin(2\ln x)+E\cos(2\ln x) \quad ...(2.29)$$

elde edilir. A,B,C,D ve E'nin değerlerini hesaplamak için beş lineer denkleme ihtiyaç vardır. (2.29) denkleminde y(1)=-2 yerine koyularak birinci denklem elde edilir. İkinci denklemi, (2.29) denkleminin genel çözümünde bir kez türev alınıp y'(1)=0 yerine koyularak elde edilir. Üçüncü denklemi, (2.29) denkleminin genel çözümünde iki kez türev alınıp y"(1)=0 yerine koyularak elde edilir. Ancak dördüncü ve beşinci denklemler için iki değere daha ihtiyaç vardır. Bunlar,

$$y''(1) - 3y'(1) + 3y(1) = 0 \Rightarrow y''(1) = 9$$

ve

$$y^{(4)}(1) + 3y'''(1) - 3y''(1) - 3y'(1) + 3y'(1) = 2 \Rightarrow y^{(4)}(1) = -25$$

dir. Böylece

$$A + B + C + E = -2 \ldots..(2.30)$$

$$-A + B + 3C + 2D = 1 \ldots.(2.31)$$

olur. Yani,

$$2A+6C-2D-4E=0 \quad ...(2.32)$$

$$-6A+6C-4D+12E=9 \quad ...(2.33)$$

$$24A+36D-28E=-26 \quad ...(2.34)$$

elde edilir. (2.30) 2.31)( 2.32)( 2.33) ve (2.36) denklem sistemlerini çözdükten sonra

$$A = \frac{-129}{120}, B = \frac{-351}{260}, C = \frac{41}{104}, D = \frac{3}{65}, E = \frac{2}{65}$$

elde edilir ve tam çözüm

$$y = \frac{-129}{120}x^{-1} - \frac{351}{260}x + \frac{41}{104}x^3 + \frac{3}{65}\sin(2\ln x) + \frac{2}{65}\cos(2\ln x)$$

olur.

**Örnek 4.12.** $x^4y^{(4)} + 5x^3y'' = 3x^{-1}, y(1) = y'(1) = y''(1) = y''(1) = 0$

adi difrenasiyel denklemini çözünüz.

**Çözüm:**

Her iki tarafın$\left(T_g^c\right)$ alınırsa

$$T_g^c(y) = \frac{\mathrm{h(iq(p))}}{\mathrm{(iq(p)-3)(iq(p)-2)(iq(p)-1)(iq(p)+1)iq(p)}} \qquad (2.35)$$

elde edilir. Bu denklemin he iki tarafının $T_g^{c-1}$ alınırsa tam çözüm

$$y(x) = Ax^2 + Bx + C + Dx^{-2} + Ex^{-1} \qquad (2.36)$$

olur. A,B,C,D ve E'nin değerlerini hesaplamak için beş lineer denkleme ihtiyaç vardır. (2.36) denkleminde y(1)=0 koyularak birinci denklem elde edilir. İkinci denklemi(2.36) denkleminin genel çözümünde bir kez türev alınıp y'(1)=0 yerine koyularak elde edilir. Üçüncü denklemi, (2.36) denkleminin genel çözümünde iki kez türev alınıp başlangıç değeri olan $y''$(1)=0 yerine yazılarak elde edilir. Dördüncü denklemi, (2.36) denkleminin genel çözümünde üç kez türev alınıp y''(1)=0 yerine koyularak elde edilir. Ancak beşinci denklem için bir değere daha ihtiyaç vardır. Bu durumda

$$y^{(4)}(1) + 5y''(1) = 9 \ \text{ yani } \ y^{(4)}(1) = 3$$

elde edilir. Bu durumda

A+B+C+D+E=0 (2.37)

2A+B-2D-E=0 (2.38)

2A+6D+2E=0 (2.39)

-24D-6E=0 (2.40)

120D +24E=3 (2.41)

elde edilir Yukarıdaki eşitliklerden

$$A = \frac{1}{8}, B = \frac{-1}{2}, C = \frac{3}{4}, D = \frac{1}{8}, \text{ve } E = \frac{-1}{2}$$

olur ve tam çözüm

$y(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-3}$

olarak bulunur.

### 4.4 Çoklu Polinom ve Logaritma Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Genel Karmaşık Al-Tememe İntegral Dönüşümü ile Çözümü

**Teorem 4.13.** f(x) fonksiyonu [1,∞) aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon olmak üzere $k=1,2,3,\ldots$ için

$$F[\mathrm{i}q(\mathrm{p})]=T_g^c[f(x)]$$

$$\mathrm{T}_g^c\left[(\ln x)^{\mathrm{k}}f(x)\right]=(\mathrm{i})^k\frac{d^k}{dp^k}T_g^c[f(x)]$$

elde edilir.

**İspat:**

k=1 ise

$$\mathrm{T}_g^c[\ln x\cdot y]=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq(p)}}\mathrm{T}_g^c(y)$$

olur. Şimdi, $\mathrm{T}_g^c[\ln x\cdot xy']=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq(p)}}\mathrm{T}_g^c(xy')$

$$=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d(p)}}\left[-y(1)+(\mathrm{iq}(p)-1)\mathrm{T}_g^c(y)\right]$$

$$=\mathrm{i}\left[(\mathrm{iq}(p)-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq(p)}}T_g^c(y)+\mathrm{i}\mathrm{T}_g^c(y)\right]$$

$$T_g^c[\ln x\cdot xy']=-\left((\mathrm{q(p)}+\mathrm{i})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq(p)}}T_g^c(y)+T_g^c(y)\right).$$

elde edilir. Şimdi de

$$T_g^c[\ln x x^2y'']=(\mathrm{i})\frac{d}{dq(p)}\left[-y(1)-(\mathrm{iq}(p)-2)\mathrm{y}(1)+(\mathrm{iq}(p)-1)(\mathrm{iq(p)}-2)T_g^c(y)\right]$$

$$=(\mathrm{i})\left(-\mathrm{i}y(1)+(\mathrm{iq}(p)-2)(\mathrm{iq}(p)-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq(p)}}T_g^c(y)-(\,2\mathrm{iq(p)}+3\mathrm{i})\,T_g^c(y)\right)]$$

olur. Böylece

$$T_g^c[\ln x x^2y'']=-\left(-y(1)-\mathrm{i}(\mathrm{iq}(p)-2)(\mathrm{iq}(p)-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq(p)}}T_g^c(y)+(\,2\mathrm{iq(p)}\text{- }3)\,T_g^c(y)\right)$$

elde edilir.

Bir çok durumda bu formüller, değişken katsayılı lineer adi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanışlıdır.

**Örnek 4.14** $x\ln x . y' - y = (\ln x)^3$

değişken katsayılı adi diferansiyel denklemi çözünüz.

**Çözüm:** Denklemin her ikitarafının$\left(T_g^c\right)$alınırsa:

$$T_g^c[x\ln x \cdot y'] - T_g^c(y) = T_g^c[(\ln x)^3]$$
$$-\left((\mathrm{q(p)+i})\frac{d}{dp}T_g^c(y) + T_g^c(y)\right) - T_g^c(y) = \frac{3!\,(-\mathrm{iq(p)}-1)^4}{((q(p))^2+1)^4}$$
$$\frac{d}{dp}T_g^c(y) + \frac{2}{\mathrm{q(p)}+1}T_g^c(y) = \frac{-3!\,(-ip-1)^4}{(q(\mathrm{p}))^2+1)^4(\mathrm{q(p)+i})}$$

elde edilir. Lineer adi diferansiyel denklemve integral faktörü

$$\mu = e^{\int\frac{2}{q(p)+i}dq(p)} = e^{2\ln(q(p)+i)} = (q(p)+i)^2$$

olur. Böylece

$$\frac{d}{dq(p)}\left[T_g^c(y)\cdot \mathrm{q(p)}+i)^2\right] = \frac{-3!\,(\mathrm{iq(p)}+1)^4\mathrm{q(p)+i})^2}{(q(\mathrm{p}))^2+1)^4(\mathrm{q(p)+i})} = -3!\,(\mathrm{q(p)}+i)^{-3}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$T_g^c(y)(\mathrm{q}(p)+i)^2 = -\int 3!\,\mathrm{q}(p)+i)^{-3}dq(p)$$

$$T_g^c(y)\cdot(\mathrm{q}(p)+i)^2 = \frac{-3!}{-2(\mathrm{q}(p)+i)^2} + c$$

olur. Bu durumda

$$y = T_g^{c-1}\left(\frac{3(\mathrm{q}(p)-i)^4}{(q(p))^2+1)^4} + \frac{c(\mathrm{q}(p)-i)^2}{(q(p))^2+1)^2}\right)$$

ile

$$y(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^3 - c\ln x$$

elde edilir.

**Örnek 4.15.** Başlangıç değeri $y(1) = 1$ olmak üzere

$$\ln x\,.\,x^2y'' + xy' = x(\ln(x))^2$$

denklemini çözünüz

**Çözüm:**

Denklemin her iki tarafının$\left(\,T_g^c\right)$ alınırsa

$T_g^c(\ln(x)\cdot x^2y'') + T_g^c(xy') = T_g^c(x(\ln x)^2)$

$$-\left(-y(1) - \mathrm{i}(\mathrm{i}p-q)(\mathrm{i}p-1)\frac{d}{dp}T_g^c(y) + (2ip-3)T_g^c(y)\right) - y(1) + (iq(p)-1)T_g^c$$

olur. Böylece

$$(y) = \frac{2}{(iq(p)-2)^3}$$

$$-1(iq(p)-q)(\mathrm{iq}(p)-1)\frac{d}{dq(p)}T_g^c(y) + (2iq(p)-3-iq(p)+1)T_g^c(y) = \frac{-2}{(iq(p)-2)^3}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{d}{dq(p)}T_g^c(y) + \frac{1}{(iq(p)-1)}T_g^c(y) = \frac{-2\mathrm{i}}{(\mathrm{iq(p)}-2)^4(iq(p)-1)}$$

olur. Lineer adi diferansiyel denklem ve integral faktörü

$$\mu = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{ip-1}\mathrm{dp}} = \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{iq(p)}-1)} = (\mathrm{iq(p)}-1)$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dp}\left[T_g^c(y) - (\mathrm{iq(p)}-1)\right] = \frac{-2\mathrm{i}}{(\mathrm{q(p)}-2)^4}$$

elde edilir. Böylece

$$T_g^c(y), (\mathrm{iq(p)}-1) = \int \frac{-2\mathrm{i}}{(\mathrm{iq(p)}-2)^4}\mathrm{dp} \rightarrow T_g^c(y)\cdot(\mathrm{iq(p)}-1) = \frac{2}{3(\mathrm{iq(p)}-2)^3} + \mathrm{c}$$

$$T_g^c(y) = \frac{2}{3(\mathrm{iq(p)}-2)^3(\mathrm{iq(p)}-1)} + \frac{\mathrm{c}}{(\mathrm{iq(p)}-1)}$$

ile

$$\frac{\frac{2}{3}}{(\mathrm{iq(p)}-2)^3(iq(p)-1)} = \frac{A}{(iq(p)-2)} + \frac{B}{(iq(p)-2)^2} + \frac{C_1}{(iq(p)-2)^3} + \frac{D}{(iq(p)-1)}$$

elde edilir. Bu durumda

$$A - D = 0 \qquad (2.42)$$

$$3\mathrm{A} - B + 6D = 0 \qquad (2.43)$$

$$5\mathrm{A}-3\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+12\mathrm{D}=0 \qquad (2.44)$$

$$-4\mathrm{A}+2\mathrm{B}-\mathrm{C}-8\mathrm{D}=\frac{2}{3} \qquad (2.45)$$

olur. Yukarıdaki denklemlerden

$$\mathrm{A} = \frac{2}{3}, \mathrm{B} = -\frac{2}{3}, \mathrm{C} = \frac{2}{3}, \mathrm{D} = -\frac{2}{3}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$T_g^c(y) = \frac{\frac{2}{3}}{(\mathrm{iq(p)}-2)} - \frac{\frac{2}{3}}{(\mathrm{iq(p)}-2)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{(\mathrm{iq(p)}-2)^3} - \frac{\frac{2}{3}}{(\mathrm{iq(p)}-1)} + \frac{\mathrm{c}}{(\mathrm{iq(p)}-1)}$$

olur. Her iki tarafın $T_g^{c-1}$ alınırsa

$$y = \frac{2}{3}T_g^{c-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{iq(p)}-2)}\right] - \frac{2}{3}T_g^{c-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{iq(p)}-2)^2}\right] + \frac{2}{3}T_g^{c-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{iq(p)}-2)^3}\right]$$

$$-\frac{2}{3}T_g^{c-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{iq(p)}-1)}\right]+T_g^{c-1}\left[\frac{\mathrm{c}}{(\mathrm{iq(p)}-1)}\right]$$

elde edilir. Böylece

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x\ln x+\frac{1}{3}x(\ln x)^2-\frac{2}{3}+\mathrm{c}$$

$$\mathrm{y}=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x\ln x+\frac{1}{3}x(\ln x)^2+\mathrm{C}_2 \quad ;\mathrm{C}_2=\frac{-2}{3}+\mathrm{c}$$

$$y(1)=1\Rightarrow C_2=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{y}=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x\ln x+\frac{1}{3}x(\ln x)^2+\frac{1}{3}$$

elde edilir.

# KAYNAKLAR


[1]. Mohammed A.H., Hussain , Z.M. ,Hadi , A.S, , 2015, “On Al-Tememe Transform and solve some kinds of ordinary Differential Equations with Initial Conditions and without it and some Applications in Another sciences” .A thesis of MSC. submitted to the council of university of kufa, Faculty of Education for girls.

[2] George Carrler ,1952, ” Partial Differential Equation”,Dover New York.

[3] Mohammed, A.H. Ahera Nema Kathem, 2008, ”Solving Euler’s Equation by using New Transformation “,Karbrala University magazine for completely sciences ,vol.(6) no(4).

[4] Steven J. Desjardins, Re’mi Vaillancourt , 2011, “Ordinary Differential Equations Laplace Transforms and Numerical Methods for Engineers” Spring , Canada.

[5] Richard Bronson, 2003, “Differential Equations “ 2nd edition, McGraw –Hill companies ,Inc., NewYork.

[6] James C. Robinson, 2004, “An Introduction to ordinary Differential Equations”, Cambridge University press , New York.

[7] Sara F.M., Alii H.M., 2018, “Integral transform for solving some kinds of Differential equations “,University of Kufa, College of Education for gail ,MSC. Thesis.

# ÖZGEÇMİŞ

| Kişisel Bilgiler | |
|---|---|
| Adı Soyadı | Mustafa Jameel HUSSEİN |
| Doğum Yeri | Bağdat |
| Uyruğu | Irak |

| Eğitim Bilgileri | |
|---|---|
| **Lisans** | |
| Üniversite | Irak Teknoloji Üniversitesi |
| Fakülte | Uygulamalı Matematik |
| Mezuniyet Yılı | 2007 |

| Yüksek Lisans | |
|---|---|
| Üniversite | Kırsehir Ahi Evran Üniversitesi |
| Enstitü Adı | Fen Bilimleri Enstitüsü |
| Anabilim Dalı | Matematik |
| Programı | Tezli Yüksek Lisans |
| Mezuniyet Tarihi | 2022 |