T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

k-SRIVASTAVA HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Sena HALICI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2022

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

k-SRIVASTAVA HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Sena HALICI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

KIRŞEHİR / 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sena HALICI

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının gerçekleştirilmesinde gece gündüz demeden değerli zamanını ve bilgilerini benimle paylaşan, her sorun yaşadığımda çekinmeden kapısını çalabildiğim, güler yüzü ve samimiyeti ile ilk günkü çalışma heyecanımı kaybettirmeyen, hayatıma dokunduğu günden bu yana desteğini esirgemeyen, çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA'ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Kırşehir Akpınar Çok Programlı Anadolu Lisesindeki değerli hocalarıma desteklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında bana inanan, destek olan, varlıklarıyla şükrettiğim yanımda olamasalarda yanı başımda hissettiğim canım aileme ve özellikle de hayatımdaki en büyük şansım babam Murat HALICI'ya en derin duygularla teşekkür ederim.

Haziran, 2022 — Sena HALICI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
$B(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$(\alpha)_n$	: Pochhammer sembolü
${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
F_1, F_2, F_3, F_4	: Appell hipergeometrik fonksiyonları
H_A, H_B, H_C	: Srivastava hipergeometrik fonksiyonları
X_4	: Exton hipergeometrik fonksiyonu
$\Gamma_k(x)$	: k-Gamma fonksiyonu
$B_k(x,y)$	: k-Beta fonksiyonu
$(\alpha)_{n,k}$	: Pochhammer k-sembolü
${}_2F_{1,k}(\alpha,\beta;\gamma;x)$	: k-Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$F_{1,k}, F_{2,k}, F_{3,k}, F_{4,k}$	: k-Appell hipergeometrik fonksiyonları
$H_{A,k}, H_{B,k}, H_{C,k}$	: k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları
$X_{4,k}$	: k-Exton hipergeometrik fonksiyonu

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k-SRIVASTAVA HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Sena HALICI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde Gamma, Beta, Gauss hipergeometrik ve Appell hipergeometrik fonksiyonları gibi bazı klasik fonksiyonların özelliklerine yer verilmiştir. Bununla birlikte bu fonksiyonların k-genelleştirilmelerinin ve Pochhammer k-sembolünün özelliklerine değinilmiştir.
Üçüncü bölümde, klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının tanımları hatırlatılmıştır. Bu fonksiyonların integral gösterimleri ve yineleme formülleri de listelenmiştir.
Dördüncü bölüm, tezin özgün kısmıdır. Bu bölümde, Pochhammer k-sembolü kullanılarak k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının tanımları verilmiştir. Ayrıca k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları ile klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Daha sonra bu ilişkiler yardımıyla k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının integral gösterimleri ve yineleme formülleri kolayca ispatlanmıştır.
Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlardan ve ileride yapılacak çalışmalar için önerilerden bahsedilmiştir.

Haziran 2022, 51 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Pochhammer sembolü, Srivastava hipergeometrik fonksiyonları, İntegral gösterimi, Yineleme formülü.

ABSTRACT

M.Sc. THESIS

k-SRIVASTAVA HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Sena HALICI

Kırşehir Ahi Evran University
Graduate School of Sciences and Engineering
Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

This thesis consists of five chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In the second chapter, properties of some classical functions such as Gamma, Beta, Gaussian hypergeometric and Appell hypergeometric functions are presented. In addition, the properties of the k-generalizations of these functions and the Pochhammer k-symbol are referred.
In the third chapter, the definitions of classical Srivastava hypergeometric functions are reminded. Also, the integral representations and recursion formulas of these functions are listed.
The fourth chapter is the original part of the thesis. In this section, the definitions of k-Srivastava hypergeometric functions are given using the Pochhammer k-symbol. Furthermore, the relations between k-Srivastava hypergeometric functions and classical Srivastava hypergeometric functions are obtained. Then, with the help of these relations, the integral representations and recursion formulas of k-Srivastava hypergeometric functions are easily proved.
In the fifth chapter, the results obtained in this thesis and the suggestions for further studies are mentioned.

June 2022, 51 Pages.

Keywords: Gamma function, Beta function, Pochhammer symbol, Srivastava hypergeometric functions, Integral representation, Recursion formula.

1. GİRİŞ

Hipergeometrik fonksiyonlarıyla matematik, istatistik, fizik ve çeşitli mühendislik bilimlerinde oldukça sık karşılaşılır. İlk olarak 1812 yılında Gauss tarafından tek değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar tanımlanmış, bunu ilerleyen yıllarda Appell, Lauricella, Horn ve Srivastava tarafından verilen çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonların tanımları takip etmiştir. Özel fonksiyonların hemen hemen hepsinin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebildiği düşünüldüğünde ve uygulama alanlarının zenginliği dikkate alındığında hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili çalışmaların oldukça yoğun ilgi görmesi şaşırtıcı değildir.

Günümüzde bu fonksiyonların yeni genelleştirilmelerine de sıkça rastlanmaktadır. Bunlardan biri de bu fonksiyonların k-genelleştirilmeleri olup, bu konu ile ilgili yapılan çalışmalardan bazıları şunlardır:

2007 yılında, Diaz ve Pariguan [7] tarafından k-Gamma fonksiyonu, k-Beta fonksiyonu ve Pochhammer k-sembolü tanımlandı. Yine aynı makalede Pochhammer k-sembolü kullanılarak k-hipergeometrik fonksiyonları da literatüre kazandırıldı.

2012 yılında, Mubeen ve Habibullah [14] tarafından bazı k-hipergeometrik ve k-konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının integral gösterimleri verildi. Yine aynı yıl bir başka makalede Mubeen [13] Kummer'in birinci formülünün k-benzerini ispatladı.

2015 yılında, Mubeen vd. [16] tarafından F_1 birinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonunun k-genelleştirilmesi sunuldu ve bir integral gösterimi verildi.

2017 yılında, Kıymaz vd. [11] bazı klasik fonksiyonlar ve kesirli operatörler ile, onların k-genelleştirilmeleri arasındaki ilişkiler üzerinde durdular. Bu ilişkilerin önemini vurgulamak için, mevcut literatürde bulunan k-genelleştirilmeleri hakkında bilinen bazı sonuçların ispatlarının nasıl kısaltılacağına dair bazı örnekler sundular. Ayrıca F_2, F_3 ve F_4 klasik Appell hipergeometrik fonksiyonlarının k-genelleştirilmelerini tanımladılar. Bu k-genelleştirilmeleri ile klasik Appell hipergeometrik fonksiyonları arasındaki ilişkileri elde ettiler. Bu ilişkiler yardımıyla k-Appell hipergeometrik fonksiyonlarının birçok özelliğinin uzun ispatlar olmadan da elde edilebileceğine dikkat çekmek adına integral gösterimlerini ve çift katlı Mellin dönüşümlerini verdiler.

2020 yılında, Yılmaz vd. [9] ise yukarıda bahsedilen k-Appell hipergeometrik fonksiyonlarının dönüşüm formüllerini, indirgeme formüllerini ve doğurucu fonksiyon ilişkilerini incelediler.

Bu tez çalışmasının amacı, Pochhammer k-sembolünü kullanarak k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları olarak adlandırılacak olan Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının yeni bir genelleştirilmesini tanımlamaktır. Daha sonra k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları ile klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonları arasındaki ilişkileri elde etmektir. Son olarak bu ilişkileri ve klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının bilinen özelliklerini kullanarak, k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının birçok özelliğinin uzun ispatlara gerek kalmadan kolayca elde edilebileceğine dikkat çekmektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan özel fonksiyonlar ile ilgili bazı temel kavramlar hatırlatılacaktır. Aşağıdaki ilk beş tanım ve özellikleri için [1, 2, 8, 12, 18–20, 23, 24] nolu kaynaklara bakılabilir.

Tanım 2.1. $Re(x) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{2.1}$$

ile tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.2}$$

özelliğini sağlar.

Tanım 2.2. $Re(x) > 0, Re(y) > 0$ olmak üzere

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir. Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.4}$$

ilişkisi gerçeklenir.

Tanım 2.3. $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere Pochhammer sembolü

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1), \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{2.5}$$
$$(\alpha)_0 = 1$$

biçiminde tanımlanır. Bu sembol

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \tag{2.6}$$

$$\frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} = \frac{B(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}, \tag{2.7}$$

$$(\alpha)_{m+n} = (\alpha)_m(\alpha+m)_n \tag{2.8}$$

özelliklerine sahiptir.

Tanım 2.4. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$ olmak üzere Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}, \quad |x|<1 \tag{2.9}$$

serisi ile tanımlanır. Bu fonksiyon

$$_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt \tag{2.10}$$

$$(Re(\gamma) > Re(\beta) > 0)$$

integral gösterimine sahiptir. Ayrıca, (2.9) da $\beta=\gamma$ olması özel durumu

$$_2F_1(\alpha,\gamma;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n\frac{x^n}{n!} = (1-x)^{-\alpha}, \quad |x|<1 \tag{2.11}$$

dir.

Tanım 2.5. $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{C}$ ve $\gamma, \gamma' \neq 0,-1,-2,\ldots$ olmak üzere Appell hipergeometrik fonksiyonları

$$F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.12}$$

$$(|x|<1, |y|<1),$$

$$F_2(\alpha,\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.13}$$

$$(|x|+|y|<1),$$

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta';\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.14}$$

$$(|x|<1,\ |y|<1),$$

$$F_4(\alpha,\beta;\gamma,\gamma^{'};x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma^{'})_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.15}$$

$$(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}<1)$$

şeklinde tanımlanırlar. Appell hipergeometrik fonksiyonları

$$F_1(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$
$$\times\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}(1-yt)^{-\beta^{'}}dt$$

$$(Re(\gamma)>Re(\alpha)>0),$$

$$F_1(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}$$
$$\times\iint_D t^{\beta-1}s^{\beta^{'}-1}(1-t-s)^{\gamma-\beta-\beta^{'}-1}(1-xt-ys)^{-\alpha}dtds$$

$$(Re(\beta)>0,\ Re(\beta^{'})>0, Re(\gamma-\beta-\beta^{'})>0),$$

$$F_2(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma,\gamma^{'};x,y)=\frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)B(\beta',\gamma'-\beta')}$$
$$\times\int_0^1\int_0^1 t^{\beta-1}s^{\beta^{'}-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-s)^{\gamma^{'}-\beta^{'}-1}(1-xt-ys)^{-\alpha}dtds$$

$$(Re(\gamma)>Re(\beta)>0,\ Re(\gamma^{'})>Re(\beta^{'})>0),$$

$$F_2(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma,\gamma^{'};x,y)=\frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}$$
$$\times\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\beta^{'};\gamma^{'};\frac{y}{1-xt}\right)dt$$

$$(Re(\gamma)>Re(\beta)>0),$$

$$F_3(\alpha,\alpha^{'},\beta,\beta^{'};\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}$$
$$\times\iint_D t^{\beta-1}s^{\beta^{'}-1}(1-xt)^{-\alpha}(1-ys)^{-\alpha^{'}}(1-t-s)^{\gamma-\beta-\beta^{'}-1}dtds$$

$$(Re(\beta)>0,\ Re(\beta^{'})>0, Re(\gamma-\beta-\beta^{'})>0)$$

integral gösterimlerine sahiptirler. Burada $D = \{(t,s) : t \geq 0, s \geq 0, t+s \leq 1\}$ dir.

Bu çalışma boyunca ilk beş tanımda verilen kavramlardan sırasıyla klasik Gamma fonksiyonu, klasik Beta fonksiyonu, klasik Pochhammer sembolü, klasik Gauss hipergeometrik fonksiyonu ve klasik Appell hipergeometrik fonksiyonları olarak bahsedilecektir.

Şimdi de k-Gamma, k-Beta fonksiyonu, Pochhammer k-sembolü, k-Gauss hipergeometrik fonksiyonu ve k-Appell hipergeometrik fonksiyonlarının tanımları ve özellikleri verilecektir.

Tanım 2.6. $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere k-Gamma fonksiyonu

$$\Gamma_k(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt, \quad Re(x) > 0 \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanır [7]. k-Gamma fonksiyonunun klasik Gamma fonksiyonu ile ilişkisi

$$\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1} \Gamma\left(\frac{x}{k}\right) \tag{2.17}$$

olup, ayrıca

$$\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x) \tag{2.18}$$

özelliği sağlanır [7].

Tanım 2.7. $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere k-Beta fonksiyonu

$$B_k(x,y) = \frac{1}{k} \int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1} (1-t)^{\frac{y}{k}-1} dt, \quad Re(x) > 0, Re(y) > 0 \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanır [7]. Bu fonksiyonun klasik Beta fonksiyonu ile ilişkisi

$$B_k(x,y) = \frac{1}{k} B\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \tag{2.20}$$

olup, k-Gamma fonksiyonuyla olan ilişkisi de

$$B_k(x,y) = \frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)} \tag{2.21}$$

dir [7].

Tanım 2.8. $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere Pochhammer k-sembolü

$$(\alpha)_{n,k} = \alpha(\alpha+k)(\alpha+2k)\cdots(\alpha+(n-1)k), \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{2.22}$$
$$(\alpha)_{0,k} = 1$$

olarak tanımlanır [7, 17]. Pochhammer k-sembolü

$$(\alpha)_{n,k} = \frac{\Gamma_k(\alpha+nk)}{\Gamma_k(\alpha)}, \tag{2.23}$$
$$\frac{(\beta)_{n,k}}{(\gamma)_{n,k}} = \frac{B_k(\beta+kn,\gamma-\beta)}{B_k(\beta,\gamma-\beta)}, \tag{2.24}$$
$$(\alpha)_{m+n,k} = (\alpha)_{m,k}(\alpha+mk)_{n,k} \tag{2.25}$$

özelliklerine sahiptir ve klasik Pochhammer sembolü ile ilişkisi

$$(\alpha)_{n,k} = k^n \left(\frac{\alpha}{k}\right)_n \tag{2.26}$$

dır [7, 14, 15, 17] .

Tanım 2.9. $k \in \mathbb{R}^+$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \neq 0,-k,-2k,\ldots$ olmak üzere ${}_2F_{1,k}$ k-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_{1,k}(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n,k}(\beta)_{n,k}}{(\gamma)_{n,k}} \frac{x^n}{n!} \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanır [7]. Bu fonksiyon

$${}_2F_{1,k}(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}(1-kxt)^{-\frac{\alpha}{k}}dt$$

$$(Re(\gamma) > Re(\beta) > 0)$$

integral gösterimine sahiptir [14]. Özel olarak (2.27) de $\beta = \gamma$ alındıktan sonra sırasıyla (2.26) ve (2.11) kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_2F_{1,k}(\alpha,\gamma;\gamma;x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n,k}(\gamma)_{n,k}}{(\gamma)_{n,k}} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{k}\right)_n \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= (1-kx)^{-\frac{\alpha}{k}}, \quad |x| < \frac{1}{k} \end{aligned}$$

olur. Buradan görüldüğü üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_{n,k}\frac{x^n}{n!} = (1-kx)^{-\frac{\alpha}{k}}, \qquad |x| < \frac{1}{k} \tag{2.28}$$

dir [7]. Ayrıca ${}_2F_{1,k}$ k-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun ${}_2F_1$ klasik Gauss hipergeometrik fonksiyonu cinsinden ifadesi ise

$${}_2F_{1,k}(\alpha,\beta;\gamma;x) = {}_2F_1\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k};\frac{\gamma}{k};kx\right) \tag{2.29}$$

şeklindedir [11].

Tanım 2.10. $k \in \mathbb{R}^+,\ \alpha,\beta,\beta^{'},\gamma \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \neq 0,-k,-2k,\ldots$ olmak üzere $F_{1,k}$ k-Appell hipergeometrik fonksiyonu

$$F_{1,k}(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n,k}(\beta)_{m,k}(\beta^{'})_{n,k}}{(\gamma)_{m+n,k}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.30}$$

$$(|x| < \frac{1}{k}, |y| < \frac{1}{k})$$

şeklinde tanımlanır [16]. Bu fonksiyon

$$F_{1,k}(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma;x,y) = \frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\gamma-\alpha)} \times\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\alpha}{k}-1}(1-kxt)^{-\frac{\beta}{k}}(1-kyt)^{-\frac{\beta^{'}}{k}}dt$$

$$(Re(\gamma) > Re(\alpha) > 0)$$

integral gösterimine sahiptir [16]. Ayrıca $F_{1,k}$ k-Appell hipergeometrik fonksiyonunun F_1 klasik Appell hipergeometrik fonksiyonu ile arasındaki ilişki

$$F_{1,k}(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma;x,y) = F_1\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k},\frac{\beta^{'}}{k};\frac{\gamma}{k};kx,ky\right) \tag{2.31}$$

dir [11] .

Tanım 2.11. $k \in \mathbb{R}^+,\ \alpha,\alpha^{'},\beta,\beta^{'},\gamma,\gamma^{'} \in \mathbb{C}$ ve $\gamma,\gamma^{'} \neq 0,-k,-2k,\ldots$ olmak üzere $F_{2,k}$, $F_{3,k}$ ve $F_{4,k}$ k-Appell hipergeometrik fonksiyonları

$$F_{2,k}(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma,\gamma^{'};x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n,k}(\beta)_{m,k}(\beta^{'})_{n,k}}{(\gamma)_{m,k}(\gamma^{'})_{n,k}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.32}$$

$$(|x|+|y|<\frac{1}{k}),$$

$$F_{3,k}(\alpha,\alpha^{'},\beta,\beta^{'};\gamma;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m,k}(\alpha^{'})_{n,k}(\beta)_{m,k}(\beta^{'})_{n,k}}{(\gamma)_{m+n,k}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.33}$$

$$(|x|<\frac{1}{k},\ |y|<\frac{1}{k}),$$

$$F_{4,k}(\alpha,\beta;\gamma,\gamma^{'};x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n,k}(\beta)_{m+n,k}}{(\gamma)_{m,k}(\gamma^{'})_{n,k}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.34}$$

$$(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}<\frac{1}{\sqrt{k}})$$

şeklinde tanımlanır [11]. k-Appell hipergeometrik fonksiyonları ile klasik Appell hipergeometrik fonksiyonları arasındaki ilişkiler

$$F_{2,k}(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma,\gamma^{'};x,y)=F_2\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k},\frac{\beta^{'}}{k};\frac{\gamma}{k},\frac{\gamma^{'}}{k};kx,ky\right), \tag{2.35}$$

$$F_{3,k}(\alpha,\alpha^{'},\beta,\beta^{'};\gamma;x,y)=F_3\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha^{'}}{k},\frac{\beta}{k},\frac{\beta^{'}}{k};\frac{\gamma}{k};kx,ky\right), \tag{2.36}$$

$$F_{4,k}(\alpha,\beta;\gamma,\gamma^{'};x,y)=F_4\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k};\frac{\gamma}{k},\frac{\gamma^{'}}{k};kx,ky\right) \tag{2.37}$$

dir [11]. k-Appell hipergeometrik fonksiyonları

$$F_{1,k}(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma;x,y)=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{k^2\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\beta')\Gamma_k(\gamma-\beta-\beta')}$$
$$\times\iint_D t^{\frac{\beta}{k}-1}s^{\frac{\beta^{'}}{k}-1}(1-t-s)^{\frac{\gamma-\beta-\beta^{'}}{k}-1}(1-kxt-kys)^{\frac{-\alpha}{k}}dtds$$

$$(Re(\beta)>0,\ Re(\beta^{'})>0,Re(\gamma-\beta-\beta^{'})>0),$$

$$F_{2,k}(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma,\gamma^{'};x,y)=\frac{1}{k^2B_k(\beta,\gamma-\beta)B_k(\beta',\gamma'-\beta')}$$
$$\times\int_0^1\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}s^{\frac{\beta^{'}}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}(1-s)^{\frac{\gamma^{'}-\beta^{'}}{k}-1}(1-kxt-kys)^{\frac{-\alpha}{k}}dtds$$

$$(Re(\gamma)>Re(\beta)>0,\ Re(\gamma^{'})>Re(\beta^{'})>0),$$

$$F_{2,k}(\alpha,\beta,\beta^{'};\gamma,\gamma^{'};x,y)=\frac{1}{kB_k(\beta,\gamma-\beta)}$$
$$\times\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}(1-kxt)^{\frac{-\alpha}{k}}\,{}_2F_{1,k}\left(\alpha,\beta^{'};\gamma^{'};\frac{y}{1-kxt}\right)dt$$
$$(Re(\gamma)>Re(\beta)>0),$$

$$F_{3,k}(\alpha,\alpha^{'},\beta,\beta^{'};\gamma;x,y)=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{k^2\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\beta')\Gamma_k(\gamma-\beta-\beta')}$$
$$\times\iint_D t^{\frac{\beta}{k}-1}s^{\frac{\beta^{'}}{k}-1}(1-kxt)^{-\frac{\alpha}{k}}(1-kys)^{-\frac{\alpha^{'}}{k}}(1-t-s)^{\frac{\gamma-\beta-\beta^{'}}{k}-1}dtds$$
$$(Re(\beta)>0,\ Re(\beta^{'})>0, Re(\gamma-\beta-\beta^{'})>0)$$

integral gösterimlerine sahiptirler [11]. Burada $D=\{(t,s):t\geq 0,s\geq 0,t+s\leq 1\}$ dir.

Uyarı 2.12. $k=1$ için k-Gamma fonksiyonu, k-Beta fonksiyonu, Pochhammer k-sembolü, k-Gauss hipergeometrik fonksiyonu ve k-Appell hipergeometrik fonksiyonları sırasıyla klasik Gamma fonksiyonuna, klasik Beta fonksiyonuna, klasik Pochhammer sembolüne, klasik Gauss hipergeometrik fonksiyonuna ve klasik Appell hipergeometrik fonksiyonlarına indirgenirler.

3. SRIVASTAVA HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

H_A, H_B ve H_C Srivastava hipergeometrik fonksiyonları sırasıyla

$$H_A(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+p}(\beta_1)_{m+n}(\beta_2)_{n+p}}{(\nu_1)_m(\nu_2)_{n+p}}\frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!} \tag{3.1}$$

$$\big(r_1<1, r_2<1, r_3<(1-r_1)(1-r_2)\big),$$

$$H_B(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+p}(\beta_1)_{m+n}(\beta_2)_{n+p}}{(\nu_1)_m(\nu_2)_n(\nu_3)_p}\frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!} \tag{3.2}$$

$$\big(r_1+r_2+r_3+2\sqrt{r_1r_2r_3}<1\big),$$

$$H_C(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+p}(\beta_1)_{m+n}(\beta_2)_{n+p}}{(\nu)_{m+n+p}}\frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!} \tag{3.3}$$

$$\big(r_1<1, r_2<1, r_3<1, r_1+r_2+r_3-2\sqrt{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)}<2\big)$$

şeklinde tanımlanır [21–24]. Burada $r_1:=|x_1|, r_2:=|x_2|, r_3:=|x_3|$ dir.

Yukarıdaki üç katlı seri gösterimlerine sahip olan H_A ve H_C Srivastava hipergeometrik fonksiyonları sırasıyla

$$H_A(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta_1)_m}{(\nu_1)_m}F_1(\beta_2,\beta_1+m,\alpha+m;\nu_2;x_2,x_3)\frac{x_1^m}{m!}$$

ve

$$H_C(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta_1)_n(\beta_2)_n}{(\nu)_n}F_1(\alpha,\beta_1+n,\beta_2+n;\nu+n;x_1,x_3)\frac{x_2^n}{n!}$$

tek katlı seri gösterimlerine de sahiptirler. Burada F_1, (2.12) de tanımlanan Appell hipergeometrik fonksiyonudur.

Srivastava hipergeometrik fonksiyonları hakkında daha ayrıntılı bilgi için [3–6, 10, 21–25] nolu kaynaklara bakılabilir.

3.1. Srivastava Hipergeometrik Fonksiyonlarının İntegral Gösterimleri

Bu kısımda, Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için literatürde mevcut olan bazı integral gösterimleri aşağıdaki teoremlerle verilmiştir. Bu integral gösterimlerinin ispatları için [3–6, 10, 21, 22] nolu kaynaklara bakılabilir.

Teorem 3.1. H_A fonksiyonu aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir.

$$\begin{aligned} H_A(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\nu_1-\beta_1)\Gamma(\nu_2-\beta_2)} \\ &\times \int_0^1\int_0^1 \xi^{\beta_1-1}\eta^{\beta_2-1}(1-\xi)^{\nu_1-\beta_1-1}(1-\eta)^{\nu_2-\beta_2-1} \\ &\times (1-x_2\eta)^{-\beta_1}(1-x_1\xi-x_3\eta)^{-\alpha}\left(1-\frac{x_1x_2\xi\eta}{(1-x_2\eta)(1-x_1\xi-x_3\eta)}\right)^{-\alpha} d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\big(Re(\nu_1) > Re(\beta_1) > 0, Re(\nu_2) > Re(\beta_2) > 0\big);$$

$$\begin{aligned} H_A(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\beta_2)\Gamma(\nu_2-\beta_2)}\int_0^1 \xi^{\beta_2-1}(1-\xi)^{\nu_2-\beta_2-1} \\ &\times (1-x_2\xi)^{-\beta_1}(1-x_3\xi)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\beta_1;\nu_1;\frac{x_1}{(1-x_2\xi)(1-x_3\xi)}\right)d\xi, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\big(Re(\nu_2) > Re(\beta_2) > 0\big);$$

$$\begin{aligned} H_A(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma(\nu_2)(1+\lambda)^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2)\Gamma(\nu_2-\beta_2)}\int_0^1 \xi^{\beta_2-1}(1-\xi)^{\nu_2-\beta_2-1} \\ &\times (1+\lambda\xi)^{\alpha+\beta_1-\nu_2}[1+\lambda\xi-(1+\lambda)x_2\xi]^{-\beta_1}[1+\lambda\xi-(1+\lambda)x_3\xi]^{-\alpha} \\ &\times {}_2F_1\left(\alpha,\beta_1;\nu_1;\frac{x_1(1+\lambda\xi)^2}{[1+\lambda\xi-(1+\lambda)x_2\xi][1+\lambda\xi-(1+\lambda)x_3\xi]}\right)d\xi, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\big(Re(\nu_2) > Re(\beta_2) > 0; \lambda > -1\big);$$

$$\begin{aligned} H_A(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\beta_2)\Gamma(\nu_2-\beta_2)}\int_0^\infty \xi^{\beta_2-1}(1+\xi)^{\alpha+\beta_1-\nu_2} \\ &\times (1+\xi-x_2\xi)^{-\beta_1}(1+\xi-x_3\xi)^{-\alpha} \\ &\times {}_2F_1\left(\alpha,\beta_1;\nu_1;\frac{x_1(1+\xi)^2}{(1+\xi-x_2\xi)(1+\xi-x_3\xi)}\right)d\xi, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\big(Re(\nu_2) > Re(\beta_2) > 0\big);$$

$$
\begin{aligned}
H_A(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\beta_2)\Gamma(\nu_2-\beta_2)}\frac{(b-c)^{\beta_2}(a-c)^{\nu_2-\beta_2}}{(b-a)^{\nu_2-\alpha-\beta_1-1}} \\
&\times \int_a^b (b-\xi)^{\nu_2-\beta_2-1}(\xi-a)^{\beta_2-1}(\xi-c)^{\alpha+\beta_1-\nu_2} \\
&\times [(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)x_2]^{-\beta_1} \\
&\times [(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)x_3]^{-\alpha}\,{}_2F_1(\alpha,\beta_1;\nu_1;x_1\sigma)d\xi, \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

$$
\big(Re(\nu_2)>Re(\beta_2)>0; c<a<b\big),
$$

$$
\sigma := \frac{(b-a)^2(\xi-c)^2}{[(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)x_2][(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)x_3]};
$$

$$
\begin{aligned}
H_A(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3) &= \frac{2\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\beta_2)\Gamma(\nu_2-\beta_2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\xi)^{\beta_2-\frac{1}{2}}(\cos^2\xi)^{\nu_2-\beta_2-\frac{1}{2}} \\
&\times (1-x_2\sin^2\xi)^{-\beta_1}(1-x_3\sin^2\xi)^{-\alpha} \\
&\times {}_2F_1\left(\alpha,\beta_1;\nu_1;\frac{x_1}{(1-x_2\sin^2\xi)(1-x_3\sin^2\xi)}\right)d\xi, \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

$$
\big(Re(\nu_2)>Re(\beta_2)>0\big).
$$

Burada ${}_2F_1$, (2.9) da tanımlanan Gauss hipergeometrik fonksiyonudur.

Teorem 3.2. H_B fonksiyonu aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir.

$$
\begin{aligned}
H_B(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta_1)}\int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta_1-1} \\
&\times X_4\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\xi(1-\xi),x_2(1-\xi),x_3\xi\right)d\xi, \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

$$
\big(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1)\}>0\big);
$$

$$
\begin{aligned}
H_B(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta_1)}\frac{(b-c)^{\alpha}(a-c)^{\beta_1}}{(b-a)^{\alpha+\beta_1-1}} \\
&\times \int_a^b (b-\xi)^{\beta_1-1}(\xi-a)^{\alpha-1}(\xi-c)^{-\alpha-\beta_1} \\
&\times X_4\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\sigma_1,x_2\sigma_2,x_3\sigma_3\right)d\xi, \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

$$
\big(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1)\}>0; c<a<b\big),
$$

$$\sigma_1 := \frac{(a-c)(b-c)(\xi-a)(b-\xi)}{(b-a)^2(\xi-c)^2}, \sigma_2 := \frac{(a-c)(b-\xi)}{(b-a)(\xi-c)}, \sigma_3 := \frac{(b-c)(\xi-a)}{(b-a)(\xi-c)};$$

$$\begin{aligned} H_B(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) &= \frac{2\Gamma(\alpha+\beta_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta_1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\xi)^{\alpha-\frac{1}{2}} (\cos^2\xi)^{\beta_1-\frac{1}{2}} \\ &\times X_4\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\sigma_1,x_2\sigma_2,x_3\sigma_3\right) d\xi, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\big(\min\{Re(\alpha), Re(\beta_1)\} > 0\big),$$

$$\sigma_1 := \sin^2\xi\cos^2\xi, \sigma_2 := \cos^2\xi, \sigma_3 := \sin^2\xi;$$

$$\begin{aligned} H_B(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) &= \frac{2\Gamma(\alpha+\beta_1)(1+\lambda)^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta_1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2\xi)^{\alpha-\frac{1}{2}} (\cos^2\xi)^{\beta_1-\frac{1}{2}}}{(1+\lambda\sin^2\xi)^{\alpha+\beta_1}} \\ &\times X_4\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\sigma_1,x_2\sigma_2,x_3\sigma_3\right) d\xi, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\big(\min\{Re(\alpha), Re(\beta_1)\} > 0; \lambda > -1\big),$$

$$\sigma_1 := \frac{(1+\lambda)\sin^2\xi\cos^2\xi}{(1+\lambda\sin^2\xi)^2}, \sigma_2 := \frac{\cos^2\xi}{1+\lambda\sin^2\xi}, \sigma_3 := \frac{(1+\lambda)\sin^2\xi}{1+\lambda\sin^2\xi};$$

$$\begin{aligned} H_B(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) &= \frac{2\Gamma(\alpha+\beta_1)\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta_1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2\xi)^{\alpha-\frac{1}{2}} (\cos^2\xi)^{\beta_1-\frac{1}{2}}}{(\cos^2\xi+\lambda\sin^2\xi)^{\alpha+\beta_1}} \\ &\times X_4\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\sigma_1,x_2\sigma_2,x_3\sigma_3\right) d\xi, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\big(\min\{Re(\alpha), Re(\beta_1)\} > 0; \lambda > 0\big),$$

$$\sigma_1 := \frac{\lambda\sin^2\xi\cos^2\xi}{(\cos^2\xi+\lambda\sin^2\xi)^2}, \sigma_2 := \frac{\cos^2\xi}{\cos^2\xi+\lambda\sin^2\xi}, \sigma_3 := \frac{\lambda\sin^2\xi}{\cos^2\xi+\lambda\sin^2\xi}.$$

Burada X_4, Exton tarafından tanımlanan yirmi hipergeometrik fonksiyondan biri olup

$$X_4\left(\alpha,\beta_1;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{2m+n+p}(\beta_1)_{n+p}}{(\nu_1)_m(\nu_2)_n(\nu_3)_p} \frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!} \tag{3.15}$$

$$\big(r_1 := |x_1|, r_2 := |x_2|, r_3 := |x_3|; 2\sqrt{r_1} + (\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3})^2 < 1\big)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.3. H_C fonksiyonu aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir.

$$H_C(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta_1)\Gamma(\nu-\alpha-\beta_1)}$$
$$\times\int_0^1\!\!\int_0^1 \xi^{\alpha-1}\eta^{\beta_1-1}(1-\xi)^{\nu-\alpha-1}(1-\eta)^{\nu-\alpha-\beta_1-1}(1-x_1\xi)^{\beta_2-\beta_1}$$
$$\times\left(1-x_1\xi-x_2\eta-x_3\xi+x_2\xi\eta+x_1x_3\xi^2\right)^{-\beta_2}d\xi d\eta, \tag{3.16}$$

$$\left(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1),Re(\nu-\alpha-\beta_1)\}>0\right);$$

$$H_C(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu-\alpha)}\int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\nu-\alpha-1}(1-x_1\xi)^{-\beta_1}$$
$$\times(1-x_3\xi)^{-\beta_2}{}_2F_1\left(\beta_1,\beta_2;\nu-\alpha;\frac{x_2(1-\xi)}{(1-x_1\xi)(1-x_3\xi)}\right)d\xi, \tag{3.17}$$

$$\left(Re(\nu)>Re(\alpha)>0\right);$$

$$H_C(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta_1+\beta_2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}$$
$$\times\int_0^1\!\!\int_0^1 \xi^{\alpha-1}\eta^{\alpha+\beta_1-1}(1-\xi)^{\beta_1-1}(1-\eta)^{\beta_2-1}$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta_1+\beta_2}{2},\frac{\alpha+\beta_1+\beta_2+1}{2};\nu;\Xi(\xi,\eta;x_1,x_2,x_3)\right)d\xi d\eta, \tag{3.18}$$

$$\left(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1),Re(\beta_2)\}>0\right),$$

$$\Xi(\xi,\eta;x_1,x_2,x_3):=4\eta[x_1\xi(1-\xi)\eta+x_2(1-\xi)(1-\eta)+x_3\xi(1-\eta)];$$

$$H_C(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma(\nu)(1+\lambda)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu-\alpha)}\int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\nu-\alpha-1}(1+\lambda\xi)^{\beta_1+\beta_2-\nu}$$
$$\times[1+\lambda\xi-(1+\lambda)x_1\xi]^{-\beta_1}[1+\lambda\xi-(1+\lambda)x_3\xi]^{-\beta_2}$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\beta_1,\beta_2;\nu-\alpha;\frac{x_2(1+\lambda\xi)(1-\xi)}{[1+\lambda\xi-(1+\lambda)x_1\xi][1+\lambda\xi-(1+\lambda)x_3\xi]}\right)d\xi, \tag{3.19}$$

$$\left(Re(\nu)>Re(\alpha)>0;\lambda>-1\right);$$

$$H_C(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu-\alpha)} \frac{(b-c)^{\alpha}(a-c)^{\nu-\alpha}}{(b-a)^{\nu-\beta_1-\beta_2-1}} \int_a^b (b-\xi)^{\nu-\alpha-1}$$
$$\times (\xi-a)^{\alpha-1}(\xi-c)^{\beta_1+\beta_2-\nu}[(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)x_1]^{-\beta_1}$$
$$\times [(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)x_3]^{-\beta_2} {}_2F_1(\beta_1,\beta_2;\nu-\alpha;x_2\sigma)d\xi, \tag{3.20}$$

$$\big(Re(\nu) > Re(\alpha) > 0; c < a < b\big),$$

$$\sigma := \frac{(b-a)(a-c)(\xi-c)(b-\xi)}{[(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)x_1][(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)x_3]};$$

$$H_C(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu-\alpha)} \int_0^{\infty} \xi^{\alpha-1}(1+\xi)^{\beta_1+\beta_2-\nu}$$
$$\times (1+\xi-x_1\xi)^{-\beta_1}(1+\xi-x_3\xi)^{-\beta_2} {}_2F_1\left(\beta_1,\beta_2;\nu-\alpha;x_2\sigma\right)d\xi, \tag{3.21}$$

$$\big(Re(\nu) > Re(\alpha) > 0\big),$$

$$\sigma := \frac{1+\xi}{(1+\xi-x_1\xi)(1+\xi-x_3\xi)};$$

$$H_C(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3) = \frac{2\Gamma(\nu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu-\alpha)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\xi)^{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos^2\xi)^{\nu-\alpha-\frac{1}{2}}$$
$$\times (1-x_1\sin^2\xi)^{-\beta_1}(1-x_3\sin^2\xi)^{-\beta_2} {}_2F_1\left(\beta_1,\beta_2;\nu-\alpha;x_2\sigma\right)d\xi, \tag{3.22}$$

$$\big(Re(\nu) > Re(\alpha) > 0\big),$$

$$\sigma := \frac{\cos^2\xi}{(1-x_1\sin^2\xi)(1-x_3\sin^2\xi)}.$$

Burada ${}_2F_1$, (2.9) da tanımlanan Gauss hipergeometrik fonksiyonudur.

3.2. Srivastava Hipergeometrik Fonksiyonlarının Yineleme Formülleri

Bu kısımda, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, Şahin [25] tarafından verilen Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için yineleme formülleri aşağıdaki teoremlerle ispatsız olarak ifade edildi.

Teorem 3.4. H_A fonksiyonu aşağıdaki yineleme formüllerine sahiptir.

$$
\begin{aligned}
&H_A[\alpha+n,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] = H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] \\
&+\frac{\beta_1}{\nu_1}x_1\sum_{m=1}^{n} H_A[\alpha+m,\beta_1+1,\beta_2;\nu_1+1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] \\
&+\frac{\beta_2}{\nu_2}x_3\sum_{m=1}^{n} H_A[\alpha+m,\beta_1,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2+1;x_1,x_2,x_3],
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_A[\alpha-n,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] = H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] \\
&-\frac{\beta_1}{\nu_1}x_1\sum_{m=0}^{n-1} H_A[\alpha-m,\beta_1+1,\beta_2;\nu_1+1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] \\
&-\frac{\beta_2}{\nu_2}x_3\sum_{m=0}^{n-1} H_A[\alpha-m,\beta_1,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2+1;x_1,x_2,x_3],
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_A[\alpha+n,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_j}{(\nu_1)_i(\nu_2)_j} \\
&\times x_1^i x_3^j H_A[\alpha+i+j,\beta_1+i,\beta_2+j;\nu_1+i,\nu_2+j;x_1,x_2,x_3],
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_A[\alpha-n,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_j}{(\nu_1)_i(\nu_2)_j} \\
&\times (-x_1)^i(-x_3)^j H_A[\alpha,\beta_1+i,\beta_2+j;\nu_1+i,\nu_2+j;x_1,x_2,x_3],
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_A[\alpha,\beta_1+n,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] = H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] \\
&+\frac{\alpha}{\nu_1}x_1\sum_{m=1}^{n} H_A[\alpha+1,\beta_1+m,\beta_2;\nu_1+1,\nu_2;x_1,x_2,x_3] \\
&+\frac{\beta_2}{\nu_2}x_2\sum_{m=1}^{n} H_A[\alpha,\beta_1+m,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2+1;x_1,x_2,x_3],
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

$$H_A[\alpha,\beta_1-n,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3]=H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3]$$
$$-\frac{\alpha}{\nu_1}x_1\sum_{m=0}^{n-1}H_A[\alpha+1,\beta_1-m,\beta_2;\nu_1+1,\nu_2;x_1,x_2,x_3]$$
$$-\frac{\beta_2}{\nu_2}x_2\sum_{m=0}^{n-1}H_A[\alpha,\beta_1-m,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2+1;x_1,x_2,x_3]\,, \tag{3.28}$$

$$H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2+n;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3]=H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3]$$
$$+\frac{\beta_1}{\nu_2}x_2\sum_{m=1}^{n}H_A[\alpha,\beta_1+1,\beta_2+m;\nu_1,\nu_2+1;x_1,x_2,x_3]$$
$$+\frac{\alpha}{\nu_2}x_3\sum_{m=1}^{n}H_A[\alpha+1,\beta_1,\beta_2+m;\nu_1,\nu_2+1;x_1,x_2,x_3]\,, \tag{3.29}$$

$$H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2-n;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3]=H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3]$$
$$-\frac{\beta_1}{\nu_2}x_2\sum_{m=0}^{n-1}H_A[\alpha,\beta_1+1,\beta_2-m;\nu_1,\nu_2+1;x_1,x_2,x_3]$$
$$-\frac{\alpha}{\nu_2}x_3\sum_{m=0}^{n-1}H_A[\alpha+1,\beta_1,\beta_2-m;\nu_1,\nu_2+1;x_1,x_2,x_3]\,, \tag{3.30}$$

$$H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-n,\nu_2;x_1,x_2,x_3]=H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3]$$
$$+\alpha\beta_1x_1\sum_{m=1}^{n}\frac{H_A[\alpha+1,\beta_1+1,\beta_2;\nu_1-m+2,\nu_2;x_1,x_2,x_3]}{(\nu_1-m)(\nu_1-m+1)}, \tag{3.31}$$

$$H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-n,\nu_2;x_1,x_2,x_3]=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\alpha)_m(\beta_1)_m}{(\nu_1)_m(\nu_1-n)_m}x_1^m$$
$$\times H_A[\alpha+m,\beta_1+m,\beta_2;\nu_1+m,\nu_2;x_1,x_2,x_3]\,, \tag{3.32}$$

$$H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2-n;x_1,x_2,x_3]=H_A[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3]$$
$$+\beta_1\beta_2x_2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_A[\alpha,\beta_1+1,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2-m+2;x_1,x_2,x_3]}{(\nu_2-m)(\nu_2-m+1)}$$
$$+\alpha\beta_2x_3\sum_{m=1}^{n}\frac{H_A[\alpha+1,\beta_1,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2-m+2;x_1,x_2,x_3]}{(\nu_2-m)(\nu_2-m+1)}. \tag{3.33}$$

Teorem 3.5. H_B fonksiyonu aşağıdaki yineleme formüllerine sahiptir.

$$\begin{aligned} &H_B\left[\alpha+n,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \\ &+\frac{\beta_1}{\nu_1}x_1\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\alpha+m,\beta_1+1,\beta_2;\nu_1+1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \\ &+\frac{\beta_2}{\nu_3}x_3\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\alpha+m,\beta_1,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2,\nu_3+1;x_1,x_2,x_3\right], \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} &H_B\left[\alpha-n,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \\ &-\frac{\beta_1}{\nu_1}x_1\sum_{m=0}^{n-1}H_B\left[\alpha-m,\beta_1+1,\beta_2;\nu_1+1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \\ &-\frac{\beta_2}{\nu_3}x_3\sum_{m=0}^{n-1}H_B\left[\alpha-m,\beta_1,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2,\nu_3+1;x_1,x_2,x_3\right], \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} &H_B\left[\alpha,\beta_1+n,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \\ &+\frac{\alpha}{\nu_1}x_1\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\alpha+1,\beta_1+m,\beta_2;\nu_1+1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \\ &+\frac{\beta_2}{\nu_2}x_2\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\alpha,\beta_1+m,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2+1,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right], \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} &H_B\left[\alpha,\beta_1-n,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \\ &-\frac{\alpha}{\nu_1}x_1\sum_{m=0}^{n-1}H_B\left[\alpha+1,\beta_1-m,\beta_2;\nu_1+1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \\ &-\frac{\beta_2}{\nu_2}x_2\sum_{m=0}^{n-1}H_B\left[\alpha,\beta_1-m,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2+1,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right], \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} &H_B\left[\alpha,\beta_1+n,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\alpha)_i\,(\beta_2)_j}{(\nu_1)_i\,(\nu_2)_j} \\ &\times x_1^ix_2^jH_B\left[\alpha+i,\beta_1+i+j,\beta_2+j;\nu_1+i,\nu_2+j,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right], \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$H_B\left[\alpha,\beta_1-n,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\alpha)_i\,(\beta_2)_j}{(\nu_1)_i\,(\nu_2)_j}$$
$$\times\left(-x_1\right)^i\left(-x_2\right)^j H_B\left[\alpha+i,\beta_1,\beta_2+j;\nu_1+i,\nu_2+j,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.39}$$

$$H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2+n;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\beta_1}{\nu_2}x_2\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\alpha,\beta_1+1,\beta_2+m;\nu_1,\nu_2+1,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\alpha}{\nu_3}x_3\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\alpha+1,\beta_1,\beta_2+m;\nu_1,\nu_2,\nu_3+1;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.40}$$

$$H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2-n;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$-\frac{\beta_1}{\nu_2}x_2\sum_{m=0}^{n-1}H_B\left[\alpha,\beta_1+1,\beta_2-m;\nu_1,\nu_2+1,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$-\frac{\alpha}{\nu_3}x_3\sum_{m=0}^{n-1}H_B\left[\alpha+1,\beta_1,\beta_2-m;\nu_1,\nu_2,\nu_3+1;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.41}$$

$$H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-n,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\alpha\beta_1x_1\sum_{m=1}^{n}\frac{H_B\left[\alpha+1,\beta_1+1,\beta_2;\nu_1-m+2,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\nu_1-m\right)\left(\nu_1-m+1\right)}, \tag{3.42}$$

$$H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-n,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\alpha)_m\,(\beta_1)_m}{(\nu_1)_m\,(\nu_1-n)_m}x_1^m$$
$$\times H_B\left[\alpha+m,\beta_1+m,\beta_2;\nu_1+m,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.43}$$

$$H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2-n,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\beta_1\beta_2x_2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_B\left[\alpha,\beta_1+1,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2-m+2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\nu_2-m\right)\left(\nu_2-m+1\right)}, \tag{3.44}$$

$$H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2-n,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\beta_1)_m\,(\beta_2)_m}{(\nu_2)_m\,(\nu_2-n)_m}x_2^m$$
$$\times H_B\left[\alpha,\beta_1+m,\beta_2+m;\nu_1,\nu_2+m,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.45}$$

$$H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3-n;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$

$$+\alpha\beta_2x_3\sum_{m=1}^{n}\frac{H_B\left[\alpha+1,\beta_1,\beta_2+1;\nu_1,\nu_2,\nu_3-m+2;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\nu_3-m\right)\left(\nu_3-m+1\right)}, \tag{3.46}$$

$$H_B\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3-n;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\alpha)_m\,(\beta_2)_m}{(\nu_3)_m\,(\nu_3-n)_m}x_3^m$$

$$\times H_B\left[\alpha+m,\beta_1,\beta_2+m;\nu_1,\nu_2,\nu_3+m;x_1,x_2,x_3\right]. \tag{3.47}$$

Teorem 3.6. H_C fonksiyonu aşağıdaki yineleme formüllerine sahiptir.

$$H_C\left[\alpha+n,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]$$

$$+\frac{\beta_1}{\nu}x_1\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\alpha+m,\beta_1+1,\beta_2;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right]$$

$$+\frac{\beta_2}{\nu}x_3\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\alpha+m,\beta_1,\beta_2+1;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.48}$$

$$H_C\left[\alpha-n,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]$$

$$-\frac{\beta_1}{\nu}x_1\sum_{m=0}^{n-1}H_C\left[\alpha-m,\beta_1+1,\beta_2;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right]$$

$$-\frac{\beta_2}{\nu}x_3\sum_{m=0}^{n-1}H_C\left[\alpha-m,\beta_1,\beta_2+1;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.49}$$

$$H_C\left[\alpha,\beta_1+n,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]$$

$$+\frac{\alpha}{\nu}x_1\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\alpha+1,\beta_1+m,\beta_2;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right]$$

$$+\frac{\beta_2}{\nu}x_2\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\alpha,\beta_1+m,\beta_2+1;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.50}$$

$$H_C\left[\alpha,\beta_1-n,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]$$

$$-\frac{\alpha}{\nu}x_1\sum_{m=0}^{n-1}H_C\left[\alpha+1,\beta_1-m,\beta_2;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right]$$

$$-\frac{\beta_2}{\nu}x_2\sum_{m=0}^{n-1}H_C\left[\alpha,\beta_1-m,\beta_2+1;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.51}$$

$$H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2+n;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\beta_1}{\nu}x_2\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\alpha,\beta_1+1,\beta_2+m;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\alpha}{\nu}x_3\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\alpha+1,\beta_1,\beta_2+m;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.52}$$

$$H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2-n;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$-\frac{\beta_1}{\nu}x_2\sum_{m=0}^{n-1}H_C\left[\alpha,\beta_1+1,\beta_2-m;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$-\frac{\alpha}{\nu}x_3\sum_{m=0}^{n-1}H_C\left[\alpha+1,\beta_1,\beta_2-m;\nu+1;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.53}$$

$$H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2+n;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\alpha)_j\,(\beta_1)_i}{(\nu)_{i+j}}$$
$$\times x_2^i x_3^j H_C\left[\alpha+j,\beta_1+i,\beta_2+i+j;\nu+i+j;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.54}$$

$$H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2-n;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\alpha)_j\,(\beta_1)_i}{(\nu)_{i+j}}$$
$$\times(-x_2)^i(-x_3)^j H_C\left[\alpha+j,\beta_1+i,\beta_2;\nu+i+j;x_1,x_2,x_3\right], \tag{3.55}$$

$$H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu-n;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\alpha\beta_1x_1\sum_{m=1}^{n}\frac{H_C\left[\alpha+1,\beta_1+1,\beta_2;\nu+m-2;x_1,x_2,x_3\right]}{(\nu-m)(\nu-m+1)}$$
$$+\beta_1\beta_2x_2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_C\left[\alpha,\beta_1+1,\beta_2+1;\nu+m-2;x_1,x_2,x_3\right]}{(\nu-m)(\nu-m+1)}$$
$$+\alpha\beta_2x_3\sum_{m=1}^{n}\frac{H_C\left[\alpha+1,\beta_1,\beta_2+1;\nu+m-2;x_1,x_2,x_3\right]}{(\nu-m)(\nu-m+1)}. \tag{3.56}$$

4. k-SRIVASTAVA HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

$H_{A,k}$, $H_{B,k}$ ve $H_{C,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları sırasıyla

$$H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+p,k}(\beta_1)_{m+n,k}(\beta_2)_{n+p,k}}{(\nu_1)_{m,k}(\nu_2)_{n+p,k}}\frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!} \tag{4.1}$$

$$\big(r_1<1, r_2<1, r_3<(1-r_1)(1-r_2)\big),$$

$$H_{B,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+p,k}(\beta_1)_{m+n,k}(\beta_2)_{n+p,k}}{(\nu_1)_{m,k}(\nu_2)_{n,k}(\nu_3)_{p,k}}\frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!} \tag{4.2}$$

$$\big(r_1+r_2+r_3+2\sqrt{r_1r_2r_3}<1\big),$$

$$H_{C,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+p,k}(\beta_1)_{m+n,k}(\beta_2)_{n+p,k}}{(\nu)_{m+n+p,k}}\frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!} \tag{4.3}$$

$$\big(r_1<1, r_2<1, r_3<1, r_1+r_2+r_3-2\sqrt{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)}<2\big)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $k\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $r_1:=k|x_1|, r_2:=k|x_2|, r_3:=k|x_3|$ dir.

Dikkat edilmelidir ki $k=1$ durumunda yukarıda tanımlanan fonksiyonlar, klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarına indirgenir. Klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarından kasıt bir önceki bölümde ele alınan H_A, H_B ve H_C Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarıdır. Bu bölüm boyunca $k\in\mathbb{R}^+$ olarak alınacaktır.

Teorem 4.1. (4.1)-(4.3) de verilen k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları ile (3.1)-(3.3) deki klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonları arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur:

$$H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=H_A\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right), \tag{4.4}$$

$$H_{B,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3)=H_B\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right), \tag{4.5}$$

$$H_{C,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3)=H_C\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right). \tag{4.6}$$

İspat. (4.4) ilişkisi, (4.1) de verilen $H_{A,k}$ fonksiyonunun tanımında (2.26) nın kullanılmasıyla ve gerekli düzenlemelerden sonra (3.1) deki H_A fonksiyonunun tanımının dikkate alınmasıyla

$$H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+p,k}(\beta_1)_{m+n,k}(\beta_2)_{n+p,k}}{(\nu_1)_{m,k}(\nu_2)_{n+p,k}}\frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!}$$
$$=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{k^{m+p}(\frac{\alpha}{k})_{m+p}k^{m+n}(\frac{\beta_1}{k})_{m+n}k^{n+p}(\frac{\beta_2}{k})_{n+p}}{k^m(\frac{\nu_1}{k})_m k^{n+p}(\frac{\nu_2}{k})_{n+p}}\frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!}$$
$$=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\frac{\alpha}{k})_{m+p}(\frac{\beta_1}{k})_{m+n}(\frac{\beta_2}{k})_{n+p}}{(\frac{\nu_1}{k})_m(\frac{\nu_2}{k})_{n+p}}\frac{(kx_1)^m}{m!}\frac{(kx_2)^n}{n!}\frac{(kx_3)^p}{p!}$$
$$=H_A\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right)$$

şeklinde elde edilir. Diğer ilişkilerde benzer şekilde ispatlanır. ■

4.1. k-Srivastava Hipergeometrik Fonksiyonlarının İntegral Gösterimleri

Bu kısımda $H_{A,k}$, $H_{B,k}$, $H_{C,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının integral gösterimlerinin, (4.4)-(4.6) ilişkileri ve Kısım 3.1. de verilen klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının integral gösterimleri kullanılarak kolayca ispatlanabileceği gösterilecektir.

Teorem 4.2. $H_{A,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir.

$$H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma_k(\nu_1)\Gamma_k(\nu_2)}{k^2\Gamma_k(\beta_1)\Gamma_k(\beta_2)\Gamma_k(\nu_1-\beta_1)\Gamma_k(\nu_2-\beta_2)}$$
$$\times\int_0^1\int_0^1\xi^{\frac{\beta_1}{k}-1}\eta^{\frac{\beta_2}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu_1-\beta_1}{k}-1}(1-\eta)^{\frac{\nu_2-\beta_2}{k}-1}$$
$$\times(1-kx_2\eta)^{\frac{-\beta_1}{k}}(1-kx_1\xi-kx_3\eta)^{\frac{-\alpha}{k}}\left(1-\frac{k^2x_1x_2\xi\eta}{(1-kx_2\eta)(1-kx_1\xi-kx_3\eta)}\right)^{\frac{-\alpha}{k}}d\xi d\eta,\quad (4.7)$$

$$\big(Re(\nu_1)>Re(\beta_1)>0,Re(\nu_2)>Re(\beta_2)>0\big);$$

$$H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma_k(\nu_2)}{k\Gamma_k(\beta_2)\Gamma_k(\nu_2-\beta_2)}\int_0^1\xi^{\frac{\beta_2}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu_2-\beta_2}{k}-1}$$
$$\times(1-kx_2\xi)^{\frac{-\beta_1}{k}}(1-kx_3\xi)^{\frac{-\alpha}{k}}{}_2F_{1,k}\left(\alpha,\beta_1;\nu_1;\frac{x_1}{(1-kx_2\xi)(1-kx_3\xi)}\right)d\xi,\quad (4.8)$$

$$\big(Re(\nu_2)>Re(\beta_2)>0\big);$$

$$H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma_k(\nu_2)(1+\lambda)^{\frac{\beta_2}{k}}}{k\Gamma_k(\beta_2)\Gamma_k(\nu_2-\beta_2)}\int_0^1 \xi^{\frac{\beta_2}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu_2-\beta_2}{k}-1}$$
$$\times(1+\lambda\xi)^{\frac{\alpha+\beta_1-\nu_2}{k}}[1+\lambda\xi-(1+\lambda)kx_2\xi]^{\frac{-\beta_1}{k}}[1+\lambda\xi-(1+\lambda)kx_3\xi]^{\frac{-\alpha}{k}}$$
$$\times{}_2F_{1,k}\left(\alpha,\beta_1;\nu_1;\frac{x_1(1+\lambda\xi)^2}{[1+\lambda\xi-(1+\lambda)kx_2\xi][1+\lambda\xi-(1+\lambda)kx_3\xi]}\right)d\xi, \tag{4.9}$$

$$\big(Re(\nu_2)>Re(\beta_2)>0;\lambda>-1\big);$$

$$H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma_k(\nu_2)}{k\Gamma_k(\beta_2)\Gamma_k(\nu_2-\beta_2)}\int_0^\infty \xi^{\frac{\beta_2}{k}-1}(1+\xi)^{\frac{\alpha+\beta_1-\nu_2}{k}}$$
$$\times(1+\xi-kx_2\xi)^{\frac{-\beta_1}{k}}(1+\xi-kx_3\xi)^{\frac{-\alpha}{k}}$$
$$\times{}_2F_{1,k}\left(\alpha,\beta_1;\nu_1;\frac{x_1(1+\xi)^2}{(1+\xi-kx_2\xi)(1+\xi-kx_3\xi)}\right)d\xi, \tag{4.10}$$

$$\big(Re(\nu_2)>Re(\beta_2)>0\big);$$

$$H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma_k(\nu_2)}{k\Gamma_k(\beta_2)\Gamma_k(\nu_2-\beta_2)}\frac{(b-c)^{\frac{\beta_2}{k}}(a-c)^{\frac{\nu_2-\beta_2}{k}}}{(b-a)^{\frac{\nu_2-\alpha-\beta_1}{k}-1}}$$
$$\times\int_a^b(b-\xi)^{\frac{\nu_2-\beta_2}{k}-1}(\xi-a)^{\frac{\beta_2}{k}-1}(\xi-c)^{\frac{\alpha+\beta_1-\nu_2}{k}}$$
$$\times[(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)kx_2]^{\frac{-\beta_1}{k}}$$
$$\times[(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)kx_3]^{\frac{-\alpha}{k}}{}_2F_{1,k}(\alpha,\beta_1;\nu_1;x_1\sigma)d\xi, \tag{4.11}$$

$$\big(Re(\nu_2)>Re(\beta_2)>0;c<a<b\big),$$

$$\sigma:=\frac{(b-a)^2(\xi-c)^2}{[(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)kx_2][(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)kx_3]};$$

$$H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3)=\frac{2\Gamma_k(\nu_2)}{k\Gamma_k(\beta_2)\Gamma_k(\nu_2-\beta_2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\xi)^{\frac{\beta_2}{k}-\frac{1}{2}}(\cos^2\xi)^{\frac{\nu_2-\beta_2}{k}-\frac{1}{2}}$$
$$\times(1-kx_2\sin^2\xi)^{\frac{-\beta_1}{k}}(1-kx_3\sin^2\xi)^{\frac{-\alpha}{k}}$$
$$\times{}_2F_{1,k}\left(\alpha,\beta_1;\nu_1;\frac{x_1}{(1-kx_2\sin^2\xi)(1-kx_3\sin^2\xi)}\right)d\xi, \tag{4.12}$$

$$\big(Re(\nu_2)>Re(\beta_2)>0\big).$$

Burada ${}_2F_{1,k}$, (2.27) de tanımlanan k-Gauss hipergeometrik fonksiyonudur.

İspat. (4.4) ilişkisinde, (3.4) de verilen H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimi kullanıldıktan sonra (2.17) ilişkisi göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&H_{A,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3) = H_A\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right)\\
&= \frac{\Gamma(\frac{\nu_1}{k})\Gamma(\frac{\nu_2}{k})}{\Gamma(\frac{\beta_1}{k})\Gamma(\frac{\beta_2}{k})\Gamma(\frac{\nu_1-\beta_1}{k})\Gamma(\frac{\nu_2-\beta_2}{k})}\\
&\times \int_0^1\!\!\int_0^1 \xi^{\frac{\beta_1}{k}-1}\eta^{\frac{\beta_2}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu_1-\beta_1}{k}-1}(1-\eta)^{\frac{\nu_2-\beta_2}{k}-1}\\
&\times (1-kx_2\eta)^{\frac{-\beta_1}{k}}(1-kx_1\xi-kx_3\eta)^{\frac{-\alpha}{k}}\left(1-\frac{k^2x_1x_2\xi\eta}{(1-kx_2\eta)(1-kx_1\xi-kx_3\eta)}\right)^{\frac{-\alpha}{k}}d\xi d\eta\\
&= \frac{k^{1-\frac{\nu_1}{k}}\Gamma_k(\nu_1)k^{1-\frac{\nu_2}{k}}\Gamma_k(\nu_2)}{k^{1-\frac{\beta_1}{k}}\Gamma_k(\beta_1)k^{1-\frac{\beta_2}{k}}\Gamma_k(\beta_2)k^{1-\frac{\nu_1-\beta_1}{k}}\Gamma_k(\nu_1-\beta_1)k^{1-\frac{\nu_2-\beta_2}{k}}\Gamma_k(\nu_2-\beta_2)}\\
&\times \int_0^1\!\!\int_0^1 \xi^{\frac{\beta_1}{k}-1}\eta^{\frac{\beta_2}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu_1-\beta_1}{k}-1}(1-\eta)^{\frac{\nu_2-\beta_2}{k}-1}\\
&\times (1-kx_2\eta)^{\frac{-\beta_1}{k}}(1-kx_1\xi-kx_3\eta)^{\frac{-\alpha}{k}}\left(1-\frac{k^2x_1x_2\xi\eta}{(1-kx_2\eta)(1-kx_1\xi-kx_3\eta)}\right)^{\frac{-\alpha}{k}}d\xi d\eta\\
&= \frac{\Gamma_k(\nu_1)\Gamma_k(\nu_2)}{k^2\Gamma_k(\beta_1)\Gamma_k(\beta_2)\Gamma_k(\nu_1-\beta_1)\Gamma_k(\nu_2-\beta_2)}\\
&\times \int_0^1\!\!\int_0^1 \xi^{\frac{\beta_1}{k}-1}\eta^{\frac{\beta_2}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu_1-\beta_1}{k}-1}(1-\eta)^{\frac{\nu_2-\beta_2}{k}-1}\\
&\times (1-kx_2\eta)^{\frac{-\beta_1}{k}}(1-kx_1\xi-kx_3\eta)^{\frac{-\alpha}{k}}\left(1-\frac{k^2x_1x_2\xi\eta}{(1-kx_2\eta)(1-kx_1\xi-kx_3\eta)}\right)^{\frac{-\alpha}{k}}d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

bulunur ki, bu da (4.7) nin ispatını tamamlar. $H_{A,k}$ nın diğer integral gösterimleri, (4.4) ilişkisinde (3.5)-(3.9) da verilen H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimleri kullanıldıktan sonra (2.17) ve (2.29) ilişkileri dikkate alınarak benzer şekilde ispatlanır. ■

Teorem 4.3. $H_{B,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir.

$$
\begin{aligned}
H_{B,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma_k(\alpha+\beta_1)}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta_1)}\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\beta_1}{k}-1}\\
&\times X_{4,k}\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\xi(1-\xi),x_2(1-\xi),x_3\xi\right)d\xi, \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

$$\left(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1)\}>0\right);$$

$$H_{B,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) = \frac{\Gamma_k(\alpha+\beta_1)}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta_1)} \frac{(b-c)^{\frac{\alpha}{k}}(a-c)^{\frac{\beta_1}{k}}}{(b-a)^{\frac{\alpha+\beta_1}{k}-1}}$$
$$\times \int_a^b (b-\xi)^{\frac{\beta_1}{k}-1}(\xi-a)^{\frac{\alpha}{k}-1}(\xi-c)^{\frac{-\alpha-\beta_1}{k}}$$
$$\times X_{4,k}\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\sigma_1,x_2\sigma_2,x_3\sigma_3\right)d\xi, \tag{4.14}$$

$$\big(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1)\}>0; c<a<b\big),$$

$$\sigma_1 := \frac{(a-c)(b-c)(\xi-a)(b-\xi)}{(b-a)^2(\xi-c)^2}, \sigma_2 := \frac{(a-c)(b-\xi)}{(b-a)(\xi-c)}, \sigma_3 := \frac{(b-c)(\xi-a)}{(b-a)(\xi-c)};$$

$$H_{B,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) = \frac{2\Gamma_k(\alpha+\beta_1)}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta_1)}$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\xi)^{\frac{\alpha}{k}-\frac{1}{2}}(\cos^2\xi)^{\frac{\beta_1}{k}-\frac{1}{2}}$$
$$\times X_{4,k}\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\sigma_1,x_2\sigma_2,x_3\sigma_3\right)d\xi, \tag{4.15}$$

$$\big(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1)\}>0\big),$$

$$\sigma_1 := \sin^2\xi\cos^2\xi, \sigma_2 := \cos^2\xi, \sigma_3 := \sin^2\xi;$$

$$H_{B,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) = \frac{2\Gamma_k(\alpha+\beta_1)(1+\lambda)^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta_1)}$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2\xi)^{\frac{\alpha}{k}-\frac{1}{2}}(\cos^2\xi)^{\frac{\beta_1}{k}-\frac{1}{2}}}{(1+\lambda\sin^2\xi)^{\frac{\alpha+\beta_1}{k}}}$$
$$\times X_{4,k}\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\sigma_1,x_2\sigma_2,x_3\sigma_3\right)d\xi, \tag{4.16}$$

$$\big(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1)\}>0; \lambda>-1\big),$$

$$\sigma_1 := \frac{(1+\lambda)\sin^2\xi\cos^2\xi}{(1+\lambda\sin^2\xi)^2}, \sigma_2 := \frac{\cos^2\xi}{1+\lambda\sin^2\xi}, \sigma_3 := \frac{(1+\lambda)\sin^2\xi}{1+\lambda\sin^2\xi};$$

$$
\begin{aligned}
H_{B,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) &= \frac{2\Gamma_k(\alpha+\beta_1)\lambda^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta_1)} \\
&\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2\xi)^{\frac{\alpha}{k}-\frac{1}{2}}(\cos^2\xi)^{\frac{\beta_1}{k}-\frac{1}{2}}}{(\cos^2\xi+\lambda\sin^2\xi)^{\frac{\alpha+\beta_1}{k}}} \\
&\times X_{4,k}\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\sigma_1,x_2\sigma_2,x_3\sigma_3\right)d\xi, \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

$$
\big(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1)\}>0;\lambda>0\big),
$$

$$
\sigma_1 := \frac{\lambda\sin^2\xi\cos^2\xi}{(\cos^2\xi+\lambda\sin^2\xi)^2}, \sigma_2 := \frac{\cos^2\xi}{\cos^2\xi+\lambda\sin^2\xi}, \sigma_3 := \frac{\lambda\sin^2\xi}{\cos^2\xi+\lambda\sin^2\xi}.
$$

Burada $X_{4,k}$, (3.15) de verilen X_4 Exton hipergeometrik fonksiyonunun k-genelleştirilmesi olup

$$
X_{4,k}\left(\alpha,\beta_1;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{2m+n+p,k}(\beta_1)_{n+p,k}}{(\nu_1)_{m,k}(\nu_2)_{n,k}(\nu_3)_{p,k}} \frac{x_1^m}{m!}\frac{x_2^n}{n!}\frac{x_3^p}{p!}
$$

şeklinde tanımlanır ve

$$
X_{4,k}\left(\alpha,\beta_1;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right) = X_4\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right) \qquad (4.18)
$$

ilişkisi sağlanır.

İspat. (4.5) ilişkisinde, (3.10) da verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimi kullanıldıktan sonra (2.17) ve (4.18) ilişkileri göz önüne alınır ve de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
H_{B,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3) &= H_B\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta_1}{k})}{\Gamma(\frac{\alpha}{k})\Gamma(\frac{\beta_1}{k})}\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\beta_1}{k}-1} \\
&\times X_4\left(\frac{\alpha+\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1\xi(1-\xi),kx_2(1-\xi),kx_3\xi\right)d\xi \\
&= \frac{k^{1-\frac{\alpha+\beta_1}{k}}\Gamma_k(\alpha+\beta_1)}{k^{1-\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha)k^{1-\frac{\beta_1}{k}}\Gamma_k(\beta_1)}\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\beta_1}{k}-1} \\
&\times X_{4,k}\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\xi(1-\xi),x_2(1-\xi),x_3\xi\right)d\xi \\
&= \frac{\Gamma_k(\alpha+\beta_1)}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta_1)}\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\beta_1}{k}-1} \\
&\times X_{4,k}\left(\alpha+\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1\xi(1-\xi),x_2(1-\xi),x_3\xi\right)d\xi
\end{aligned}
$$

bulunur ki, bu da (4.13) ün ispatını tamamlar. Benzer şekilde $H_{B,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun diğer integral gösterimleri, (4.5) ilişkisinde (3.11)-(3.14) de verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimleri kullanıldıktan sonra (2.17) ve (4.18) ilişkileri göz önüne alınarak ispatlanır. ■

Teorem 4.4. $H_{C,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir.

$$\begin{aligned}H_{C,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma_k(\nu)}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta_1)\Gamma_k(\nu-\alpha-\beta_1)} \\ &\times \int_0^1\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}\eta^{\frac{\beta_1}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu-\alpha}{k}-1}(1-\eta)^{\frac{\nu-\alpha-\beta_1}{k}-1}(1-kx_1\xi)^{\frac{\beta_2-\beta_1}{k}} \\ &\times \left(1-kx_1\xi-kx_2\eta-kx_3\xi+kx_2\xi\eta+k^2x_1x_3\xi^2\right)^{\frac{-\beta_2}{k}}d\xi d\eta, \qquad (4.19)\end{aligned}$$

$$\left(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1),Re(\nu-\alpha-\beta_1)\}>0\right);$$

$$\begin{aligned}H_{C,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma_k(\nu)}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\nu-\alpha)}\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu-\alpha}{k}-1}(1-kx_1\xi)^{\frac{-\beta_1}{k}} \\ &\times (1-kx_3\xi)^{\frac{-\beta_2}{k}}\,{}_2F_{1,k}\left(\beta_1,\beta_2;\nu-\alpha;\frac{x_2(1-\xi)}{(1-kx_1\xi)(1-kx_3\xi)}\right)d\xi, \qquad (4.20)\end{aligned}$$

$$\left(Re(\nu)>Re(\alpha)>0\right);$$

$$\begin{aligned}H_{C,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma_k(\alpha+\beta_1+\beta_2)}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta_1)\Gamma_k(\beta_2)} \\ &\times \int_0^1\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}\eta^{\frac{\alpha+\beta_1}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\beta_1}{k}-1}(1-\eta)^{\frac{\beta_2}{k}-1} \\ &\times {}_2F_{1,k}\left(\frac{\alpha+\beta_1+\beta_2}{2},\frac{\alpha+\beta_1+\beta_2+1}{2};\nu;\Xi(\xi,\eta;x_1,x_2,x_3)\right)d\xi d\eta, \qquad (4.21)\end{aligned}$$

$$\left(\min\{Re(\alpha),Re(\beta_1),Re(\beta_2)\}>0\right),$$

$$\Xi(\xi,\eta;x_1,x_2,x_3):=4\eta[x_1\xi(1-\xi)\eta+x_2(1-\xi)(1-\eta)+x_3\xi(1-\eta)];$$

$$\begin{aligned}H_{C,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3) &= \frac{\Gamma_k(\nu)(1+\lambda)^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\nu-\alpha)}\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu-\alpha}{k}-1}(1+\lambda\xi)^{\frac{\beta_1+\beta_2-\nu}{k}} \\ &\times [1+\lambda\xi-(1+\lambda)kx_1\xi]^{\frac{-\beta_1}{k}}[1+\lambda\xi-(1+\lambda)kx_3\xi]^{\frac{-\beta_2}{k}} \\ &\times {}_2F_{1,k}\left(\beta_1,\beta_2;\nu-\alpha;\frac{x_2(1+\lambda\xi)(1-\xi)}{[1+\lambda\xi-(1+\lambda)kx_1\xi][1+\lambda\xi-(1+\lambda)kx_3\xi]}\right)d\xi, \qquad (4.22)\end{aligned}$$

$$\big(Re(\nu) > Re(\alpha) > 0; \lambda > -1\big);$$

$$H_{C,k}(\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu; x_1, x_2, x_3) = \frac{\Gamma_k(\nu)}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\nu-\alpha)} \frac{(b-c)^{\frac{\alpha}{k}}(a-c)^{\frac{\nu-\alpha}{k}}}{(b-a)^{\frac{\nu-\beta_1-\beta_2}{k}-1}} \int_a^b (b-\xi)^{\frac{\nu-\alpha}{k}-1}$$
$$\times (\xi-a)^{\frac{\alpha}{k}-1}(\xi-c)^{\frac{\beta_1+\beta_2-\nu}{k}}[(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)kx_1]^{\frac{-\beta_1}{k}}$$
$$\times [(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)kx_3]^{\frac{-\beta_2}{k}} {}_2F_{1,k}(\beta_1, \beta_2; \nu-\alpha; x_2\sigma)d\xi, \tag{4.23}$$

$$\big(Re(\nu) > Re(\alpha) > 0; c < a < b\big),$$

$$\sigma := \frac{(b-a)(a-c)(\xi-c)(b-\xi)}{[(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)kx_1][(b-a)(\xi-c)-(b-c)(\xi-a)kx_3]};$$

$$H_{C,k}(\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu; x_1, x_2, x_3) = \frac{\Gamma_k(\nu)}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\nu-\alpha)} \int_0^\infty \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}(1+\xi)^{\frac{\beta_1+\beta_2-\nu}{k}}$$
$$\times (1+\xi-kx_1\xi)^{\frac{-\beta_1}{k}}(1+\xi-kx_3\xi)^{\frac{-\beta_2}{k}} {}_2F_{1,k}\left(\beta_1, \beta_2; \nu-\alpha; x_2\sigma)\right) d\xi, \tag{4.24}$$

$$\big(Re(\nu) > Re(\alpha) > 0\big),$$

$$\sigma := \frac{1+\xi}{(1+\xi-kx_1\xi)(1+\xi-kx_3\xi)};$$

$$H_{C,k}(\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu; x_1, x_2, x_3) = \frac{2\Gamma_k(\nu)}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\nu-\alpha)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\xi)^{\frac{\alpha}{k}-\frac{1}{2}}(\cos^2\xi)^{\frac{\nu-\alpha}{k}-\frac{1}{2}}$$
$$\times (1-kx_1\sin^2\xi)^{\frac{-\beta_1}{k}}(1-kx_3\sin^2\xi)^{\frac{-\beta_2}{k}} {}_2F_{1,k}\left(\beta_1, \beta_2; \nu-\alpha; x_2\sigma\right) d\xi, \tag{4.25}$$

$$\big(Re(\nu) > Re(\alpha) > 0\big),$$

$$\sigma := \frac{\cos^2\xi}{(1-kx_1\sin^2\xi)(1-kx_3\sin^2\xi)}.$$

Burada ${}_2F_{1,k}$, (2.27) de tanımlanan k-Gauss hipergeometrik fonksiyonudur.

İspat. (4.6) ilişkisinde, (3.16) da verilen H_C klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimi kullanıldıktan sonra (2.17) ilişkisi göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&H_{C,k}(\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3)=H_C\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right)\\
&=\frac{\Gamma(\frac{\nu}{k})}{\Gamma(\frac{\alpha}{k})\Gamma(\frac{\beta_1}{k})\Gamma(\frac{\nu-\alpha-\beta_1}{k})}\\
&\times\int_0^1\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}\eta^{\frac{\beta_1}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu-\alpha}{k}-1}(1-\eta)^{\frac{\nu-\alpha-\beta_1}{k}-1}(1-kx_1\xi)^{\frac{\beta_2-\beta_1}{k}}\\
&\times\left(1-kx_1\xi-kx_2\eta-kx_3\xi+kx_2\xi\eta+k^2x_1x_3\xi^2\right)^{\frac{-\beta_2}{k}}d\xi d\eta\\
&=\frac{k^{1-\frac{\nu}{k}}\Gamma_k(\nu)}{k^{1-\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha)k^{1-\frac{\beta_1}{k}}\Gamma_k(\beta_1)k^{1-\frac{\nu-\alpha-\beta_1}{k}}\Gamma_k(\nu-\alpha-\beta_1)}\\
&\times\int_0^1\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}\eta^{\frac{\beta_1}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu-\alpha}{k}-1}(1-\eta)^{\frac{\nu-\alpha-\beta_1}{k}-1}(1-kx_1\xi)^{\frac{\beta_2-\beta_1}{k}}\\
&\times\left(1-kx_1\xi-kx_2\eta-kx_3\xi+kx_2\xi\eta+k^2x_1x_3\xi^2\right)^{\frac{-\beta_2}{k}}d\xi d\eta\\
&=\frac{\Gamma_k(\nu)}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta_1)\Gamma_k(\nu-\alpha-\beta_1)}\\
&\times\int_0^1\int_0^1 \xi^{\frac{\alpha}{k}-1}\eta^{\frac{\beta_1}{k}-1}(1-\xi)^{\frac{\nu-\alpha}{k}-1}(1-\eta)^{\frac{\nu-\alpha-\beta_1}{k}-1}(1-kx_1\xi)^{\frac{\beta_2-\beta_1}{k}}\\
&\times\left(1-kx_1\xi-kx_2\eta-kx_3\xi+kx_2\xi\eta+k^2x_1x_3\xi^2\right)^{\frac{-\beta_2}{k}}d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

bulunur ki, bu da (4.19) un ispatını tamamlar. $H_{C,k}$ nın diğer integral gösterimleri, (4.6) ilişkisinde (3.17)-(3.22) de verilen H_C klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimleri kullanıldıktan sonra (2.17) ve (2.29) ilişkileri dikkate alınarak benzer şekilde ispatlanır. ■

Uyarı 4.5. Bu kısımda k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için verilen integral gösterimlerinde $k=1$ alınırsa, Kısım 3.1. de klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için verilen integral gösterimleri elde edilir.

4.2. k-Srivastava Hipergeometrik Fonksiyonlarının Yineleme Formülleri

Bu kısımda k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için yineleme formüllerinin, (4.4)-(4.6) ilişkileri ve Kısım 3.2. de verilen klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının yineleme formülleri kullanılarak kolayca ispatlanabileceği gösterilecektir. Bu kısım boyunca $n\in\mathbb{Z}^+$ alınacaktır.

Teorem 4.6. $H_{A,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\beta_1}{\nu_1}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_{A,k}\left[\alpha+km,\beta_1+k,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\beta_2}{\nu_2}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_{A,k}\left[\alpha+km,\beta_1,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2+k;x_1,x_2,x_3\right]
\end{aligned}\tag{4.26}$$

ve

$$\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha-kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&-\frac{\beta_1}{\nu_1}kx_1\sum_{m=0}^{n-1}H_{A,k}\left[\alpha-km,\beta_1+k,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&-\frac{\beta_2}{\nu_2}kx_3\sum_{m=0}^{n-1}H_{A,k}\left[\alpha-km,\beta_1,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2+k;x_1,x_2,x_3\right]
\end{aligned}\tag{4.27}$$

yineleme formüllerine sahiptir.

İspat. (4.4) ilişkisinde α yerine $\alpha+kn$ alındıktan sonra (3.23) ile verilen H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_A\left[\frac{\alpha}{k}+n,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&=H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&+\frac{\frac{\beta_1}{k}}{\frac{\nu_1}{k}}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_A\left[\frac{\alpha}{k}+m,\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}+1,\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&+\frac{\frac{\beta_2}{k}}{\frac{\nu_2}{k}}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_A\left[\frac{\alpha}{k}+m,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right]
\end{aligned}$$

olup, tekrar (4.4) ilişkisinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\beta_1}{\nu_1}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_{A,k}\left[\alpha+km,\beta_1+k,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\beta_2}{\nu_2}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_{A,k}\left[\alpha+km,\beta_1,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2+k;x_1,x_2,x_3\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu (4.26) nın ispatını tamamlar. Benzer şekilde (4.4) de α yerine $\alpha-kn$ alınır ve (3.24) ile verilen H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha-kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_A\left[\frac{\alpha}{k}-n,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&=H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&-\frac{\frac{\beta_1}{k}}{\frac{\nu_1}{k}}kx_1\sum_{m=0}^{n-1}H_A\left[\frac{\alpha}{k}-m,\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}+1,\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&-\frac{\frac{\beta_2}{k}}{\frac{\nu_2}{k}}kx_3\sum_{m=0}^{n-1}H_A\left[\frac{\alpha}{k}-m,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right]
\end{aligned}
$$

olup, tekrar (4.4) ilişkisinden yararlanılırsa

$$
\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha-kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&-\frac{\beta_1}{\nu_1}kx_1\sum_{m=0}^{n-1}H_{A,k}\left[\alpha-km,\beta_1+k,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&-\frac{\beta_2}{\nu_2}kx_3\sum_{m=0}^{n-1}H_{A,k}\left[\alpha-km,\beta_1,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2+k;x_1,x_2,x_3\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir ki, bu da istenilen (4.27) eşitliğidir. ■

Teorem 4.7. $H_{A,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\beta_1)_{i,k}(\beta_2)_{j,k}}{(\nu_1)_{i,k}(\nu_2)_{j,k}}\\
&\times(kx_1)^i(kx_3)^jH_{A,k}\left[\alpha+ik+jk,\beta_1+ik,\beta_2+jk;\nu_1+ik,\nu_2+jk;x_1,x_2,x_3\right] \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha-kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\beta_1)_{i,k}(\beta_2)_{j,k}}{(\nu_1)_{i,k}(\nu_2)_{j,k}}\\
&\times(-kx_1)^i(-kx_3)^jH_{A,k}\left[\alpha,\beta_1+ik,\beta_2+jk;\nu_1+ik,\nu_2+jk;x_1,x_2,x_3\right] \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

yineleme formüllerini gerçekler.

İspat. (4.4) ilişkisinde α yerine $\alpha+kn$ alınırsa

$$
H_{A,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_A\left[\frac{\alpha}{k}+n,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]
$$

olup, (3.25) ile verilen H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$H_{A,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{\left(\frac{\beta_1}{k}\right)_i\left(\frac{\beta_2}{k}\right)_j}{\left(\frac{\nu_1}{k}\right)_i\left(\frac{\nu_2}{k}\right)_j}$$
$$\times\,(kx_1)^i(kx_3)^j H_A\left[\frac{\alpha}{k}+i+j,\frac{\beta_1}{k}+i,\frac{\beta_2}{k}+j;\frac{\nu_1}{k}+i,\frac{\nu_2}{k}+j;kx_1,kx_2,kx_3\right]$$

bulunur. Böylece (2.26) ve (4.4) ilişkilerinden yararlanılırsa

$$H_{A,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{k^{-i}\left(\beta_1\right)_{i,k}k^{-j}\left(\beta_2\right)_{j,k}}{k^{-i}\left(\nu_1\right)_{i,k}k^{-j}\left(\nu_2\right)_{j,k}}$$
$$\times\,(kx_1)^i(kx_3)^j H_{A,k}\left[\alpha+ik+jk,\beta_1+ik,\beta_2+jk;\nu_1+ik,\nu_2+jk;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{\left(\beta_1\right)_{i,k}\left(\beta_2\right)_{j,k}}{\left(\nu_1\right)_{i,k}\left(\nu_2\right)_{j,k}}$$
$$\times\,(kx_1)^i(kx_3)^j H_{A,k}\left[\alpha+ik+jk,\beta_1+ik,\beta_2+jk;\nu_1+ik,\nu_2+jk;x_1,x_2,x_3\right]$$

elde edilir ki, bu (4.28) in ispatını tamamlar. Benzer şekilde (4.4) ilişkisinde α yerine $\alpha-kn$ alındıktan sonra sırasıyla (3.26), (2.26) ve tekrar (4.4) ün kullanılmasıyla (4.29) bulunur. ■

Teorem 4.8. $H_{A,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu için yineleme formülleri

$$H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1+kn,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\alpha}{\nu_1}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_{A,k}\left[\alpha+k,\beta_1+km,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\beta_2}{\nu_2}kx_2\sum_{m=1}^{n}H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1+km,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2+k;x_1,x_2,x_3\right] \tag{4.30}$$

ve

$$H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1-kn,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$-\frac{\alpha}{\nu_1}kx_1\sum_{m=0}^{n-1}H_{A,k}\left[\alpha+k,\beta_1-km,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$-\frac{\beta_2}{\nu_2}kx_2\sum_{m=0}^{n-1}H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1-km,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2+k;x_1,x_2,x_3\right] \tag{4.31}$$

şeklindedir.

İspat. (4.4) ilişkisinde β_1 yerine $\beta_1 + kn$ alınır ve (3.27) ile verilen H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha, \beta_1 + kn, \beta_2; \nu_1, \nu_2; x_1, x_2, x_3\right] = H_A\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta_1}{k} + n, \frac{\beta_2}{k}; \frac{\nu_1}{k}, \frac{\nu_2}{k}; kx_1, kx_2, kx_3\right] \\
&= H_A\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta_1}{k}, \frac{\beta_2}{k}; \frac{\nu_1}{k}, \frac{\nu_2}{k}; kx_1, kx_2, kx_3\right] \\
&+ \frac{\frac{\alpha}{k}}{\frac{\nu_1}{k}} kx_1 \sum_{m=1}^{n} H_A\left[\frac{\alpha}{k} + 1, \frac{\beta_1}{k} + m, \frac{\beta_2}{k}; \frac{\nu_1}{k} + 1, \frac{\nu_2}{k}; kx_1, kx_2, kx_3\right] \\
&+ \frac{\frac{\beta_2}{k}}{\frac{\nu_2}{k}} kx_2 \sum_{m=1}^{n} H_A\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta_1}{k} + m, \frac{\beta_2}{k} + 1; \frac{\nu_1}{k}, \frac{\nu_2}{k} + 1; kx_1, kx_2, kx_3\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlikte tekrar (4.4) ilişkisi göz önüne alındığında (4.30) un ispatı tamamlanır. Benzer şekilde (4.4) ilişkisinde β_1 yerine $\beta_1 - kn$ alındıktan sonra (3.28) ve tekrar (4.4) ün kullanılmasıyla (4.31) yineleme formülü elde edilir. ■

Teorem 4.9. $H_{A,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu için yineleme formülleri

$$\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2 + kn; \nu_1, \nu_2; x_1, x_2, x_3\right] = H_{A,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu_1, \nu_2; x_1, x_2, x_3\right] \\
&+ \frac{\beta_1}{\nu_2} kx_2 \sum_{m=1}^{n} H_{A,k}\left[\alpha, \beta_1 + k, \beta_2 + km; \nu_1, \nu_2 + k; x_1, x_2, x_3\right] \\
&+ \frac{\alpha}{\nu_2} kx_3 \sum_{m=1}^{n} H_{A,k}\left[\alpha + k, \beta_1, \beta_2 + km; \nu_1, \nu_2 + k; x_1, x_2, x_3\right] \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2 - kn; \nu_1, \nu_2; x_1, x_2, x_3\right] = H_{A,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu_1, \nu_2; x_1, x_2, x_3\right] \\
&- \frac{\beta_1}{\nu_2} kx_2 \sum_{m=0}^{n-1} H_{A,k}\left[\alpha, \beta_1 + k, \beta_2 - km; \nu_1, \nu_2 + k; x_1, x_2, x_3\right] \\
&- \frac{\alpha}{\nu_2} kx_3 \sum_{m=0}^{n-1} H_{A,k}\left[\alpha + k, \beta_1, \beta_2 - km; \nu_1, \nu_2 + k; x_1, x_2, x_3\right] \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

dür.

İspat. (4.4) ilişkisinde β_2 yerine $\beta_2 + kn$ alınırsa

$$H_{A,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2 + kn; \nu_1, \nu_2; x_1, x_2, x_3\right] = H_A\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta_1}{k}, \frac{\beta_2}{k} + n; \frac{\nu_1}{k}, \frac{\nu_2}{k}; kx_1, kx_2, kx_3\right]$$

olup, (3.29) daki H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülünden

$$H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2+kn;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\frac{\beta_1}{k}}{\frac{\nu_2}{k}}kx_2\sum_{m=1}^{n}H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k}+m;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\frac{\alpha}{k}}{\frac{\nu_2}{k}}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_A\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+m;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right]$$

yazılabilir. Böylece tekrar (4.4) ilişkisi dikkate alındığında (4.32) nin ispatı tamamlanır. Benzer şekilde (4.4) ilişkisinde β_2 yerine β_2-kn alındıktan sonra (3.30) ve tekrar (4.4) ilişkisinin kullanılmasıyla (4.33) yineleme formülü elde edilir. ■

Teorem 4.10. $H_{A,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-kn,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]&=H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\&+\frac{\alpha\beta_1}{k}x_1\sum_{m=1}^{n}\frac{H_{A,k}\left[\alpha+k,\beta_1+k,\beta_2;\nu_1-km+2k,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\frac{\nu_1}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_1}{k}-m+1\right)}\end{aligned}\tag{4.34}$$

ve

$$\begin{aligned}H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-kn,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\alpha)_{m,k}(\beta_1)_{m,k}}{(\nu_1)_{m,k}(\nu_1-kn)_{m,k}}(kx_1)^m\\&\times H_{A,k}\left[\alpha+km,\beta_1+km,\beta_2;\nu_1+km,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\end{aligned}\tag{4.35}$$

yineleme formüllerine sahiptir.

İspat. (4.4) ilişkisinde ν_1 yerine ν_1-kn alınır ve (3.31) ile verilen H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-kn,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}-n,\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$=H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\alpha}{k}\frac{\beta_1}{k}kx_1\sum_{m=1}^{n}\frac{H_A\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}-m+2,\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]}{\left(\frac{\nu_1}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_1}{k}-m+1\right)}$$

bulunur. Bu son eşitlikte tekrar (4.4) ilişkisinden yararlanıldığında (4.34) ün ispatı tamamlanır. Benzer şekilde (4.4) ilişkisinde ν_1 yerine ν_1-kn alınır ve (3.32) de verilen H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılır ve de (2.26) ile (4.4) ilişkilerinden yararlanılırsa

$$
\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-kn,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]=H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}-n,\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{\left(\frac{\alpha}{k}\right)_m\left(\frac{\beta_1}{k}\right)_m}{\left(\frac{\nu_1}{k}\right)_m\left(\frac{\nu_1}{k}-n\right)_m}(kx_1)^m\\
&\times H_A\left[\frac{\alpha}{k}+m,\frac{\beta_1}{k}+m,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}+m,\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{k^{-m}(\alpha)_{m,k}k^{-m}(\beta_1)_{m,k}}{k^{-m}(\nu_1)_{m,k}k^{-m}(\nu_1-kn)_{m,k}}(kx_1)^m\\
&\times H_{A,k}\left[\alpha+km,\beta_1+km,\beta_2;\nu_1+km,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\alpha)_{m,k}(\beta_1)_{m,k}}{(\nu_1)_{m,k}(\nu_1-kn)_{m,k}}(kx_1)^m\\
&\times H_{A,k}\left[\alpha+km,\beta_1+km,\beta_2;\nu_1+km,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir ki, bu da (4.35) in ispatını tamamlar. ■

Teorem 4.11. $H_{A,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2-kn;x_1,x_2,x_3\right]=H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\beta_1\beta_2}{k}x_2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1+k,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2-km+2k;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\frac{\nu_2}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_2}{k}-m+1\right)}\\
&+\frac{\alpha\beta_2}{k}x_3\sum_{m=1}^{n}\frac{H_{A,k}\left[\alpha+k,\beta_1,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2-km+2k;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\frac{\nu_2}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_2}{k}-m+1\right)}
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

yineleme formülünü gerçekler.

İspat. (4.4) ilişkisinde ν_2 yerine ν_2-kn alınır ve (3.33) ile verilen H_A klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&H_{A,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2-kn;x_1,x_2,x_3\right]=H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}-n;kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&=H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&+\frac{\beta_1}{k}\frac{\beta_2}{k}kx_2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_A\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}-m+2;kx_1,kx_2,kx_3\right]}{\left(\frac{\nu_2}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_2}{k}-m+1\right)}\\
&+\frac{\alpha}{k}\frac{\beta_2}{k}kx_3\sum_{m=1}^{n}\frac{H_A\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}-m+2;kx_1,kx_2,kx_3\right]}{\left(\frac{\nu_2}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_2}{k}-m+1\right)}
\end{aligned}
$$

bulunur. Sonuç olarak tekrar (4.4) ilişkisi göz önüne alındığında istenilen eşitlik elde edilir. ■

Teorem 4.12. $H_{B,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu için yineleme formülleri

$$\begin{aligned}
&H_{B,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\beta_1}{\nu_1}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_{B,k}\left[\alpha+km,\beta_1+k,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\beta_2}{\nu_3}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_{B,k}\left[\alpha+km,\beta_1,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2,\nu_3+k;x_1,x_2,x_3\right] \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&H_{B,k}\left[\alpha-kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]\\
&-\frac{\beta_1}{\nu_1}kx_1\sum_{m=0}^{n-1}H_{B,k}\left[\alpha-km,\beta_1+k,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]\\
&-\frac{\beta_2}{\nu_3}kx_3\sum_{m=0}^{n-1}H_{B,k}\left[\alpha-km,\beta_1,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2,\nu_3+k;x_1,x_2,x_3\right] \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. (4.5) ilişkisinde α yerine $\alpha+kn$ alınır ve (3.34) ile verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&H_{B,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\frac{\alpha}{k}+n,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&=H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&+\frac{\frac{\beta_1}{k}}{\frac{\nu_1}{k}}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\frac{\alpha}{k}+m,\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}+1,\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&+\frac{\frac{\beta_2}{k}}{\frac{\nu_3}{k}}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\frac{\alpha}{k}+m,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right]
\end{aligned}$$

olup, tekrar (4.5) ilişkisinden yararlanılırsa (4.37) elde edilir. Benzer şekilde (4.5) de α yerine $\alpha-kn$ alındıktan sonra (3.35) ve tekrar (4.5) in kullanılmasıyla (4.38) bulunur. ∎

Teorem 4.13. $H_{B,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu için yineleme formülleri

$$\begin{aligned}
&H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1+kn,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\alpha}{\nu_1}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_{B,k}\left[\alpha+k,\beta_1+km,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\beta_2}{\nu_2}kx_2\sum_{m=1}^{n}H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1+km,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2+k,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

ve

$$H_{B,k}[\alpha,\beta_1-kn,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3]=H_{B,k}[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3]$$
$$-\frac{\alpha}{\nu_1}kx_1\sum_{m=0}^{n-1}H_{B,k}[\alpha+k,\beta_1-km,\beta_2;\nu_1+k,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3]$$
$$-\frac{\beta_2}{\nu_2}kx_2\sum_{m=0}^{n-1}H_{B,k}[\alpha,\beta_1-km,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2+k,\nu_3;x_1,x_2,x_3] \tag{4.40}$$

dır.

İspat. (4.5) ilişkisinde β_1 yerine β_1+kn alınır ve (3.36) ile verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$H_{B,k}[\alpha,\beta_1+kn,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3]=H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k}+n,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$=H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\frac{\alpha}{k}}{\frac{\nu_1}{k}}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k}+m,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}+1,\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\frac{\beta_2}{k}}{\frac{\nu_2}{k}}kx_2\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k}+m,\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}+1,\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$

bulunur ve tekrar (4.5) ilişkisinden yararlanılırsa (4.39) yineleme formülünün ispatı tamamlanır. (4.40) yineleme formülü de benzer şekilde, (4.5) ilişkisinde β_1 yerine β_1-kn alındıktan sonra (3.37) ve tekrar (4.5) ilişkisinin kullanılmasıyla kolayca ispatlanır. ■

Teorem 4.14. $H_{B,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$H_{B,k}[\alpha,\beta_1+kn,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\alpha)_{i,k}(\beta_2)_{j,k}}{(\nu_1)_{i,k}(\nu_2)_{j,k}}$$
$$\times(kx_1)^i(kx_2)^jH_{B,k}[\alpha+ik,\beta_1+ik+jk,\beta_2+jk;\nu_1+ik,\nu_2+jk,\nu_3;x_1,x_2,x_3] \tag{4.41}$$

ve

$$H_{B,k}[\alpha,\beta_1-kn,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\alpha)_{i,k}(\beta_2)_{j,k}}{(\nu_1)_{i,k}(\nu_2)_{j,k}}$$
$$\times(-kx_1)^i(-kx_2)^jH_{B,k}[\alpha+ik,\beta_1,\beta_2+jk;\nu_1+ik,\nu_2+jk,\nu_3;x_1,x_2,x_3] \tag{4.42}$$

yineleme formüllerine sahiptir.

İspat. (4.5) ilişkisinde β_1 yerine $\beta_1 + kn$ yazılır ve (3.38) ile verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$H_{B,k}\left[\alpha, \beta_1 + kn, \beta_2; \nu_1, \nu_2, \nu_3; x_1, x_2, x_3\right] = H_B\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta_1}{k} + n, \frac{\beta_2}{k}; \frac{\nu_1}{k}, \frac{\nu_2}{k}, \frac{\nu_3}{k}; kx_1, kx_2, kx_3\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{\left(\frac{\alpha}{k}\right)_i\left(\frac{\beta_2}{k}\right)_j}{\left(\frac{\nu_1}{k}\right)_i\left(\frac{\nu_2}{k}\right)_j}$$
$$\times (kx_1)^i (kx_2)^j H_B\left[\frac{\alpha}{k} + i, \frac{\beta_1}{k} + i + j, \frac{\beta_2}{k} + j; \frac{\nu_1}{k} + i, \frac{\nu_2}{k} + j, \frac{\nu_3}{k}; kx_1, kx_2, kx_3\right]$$

olup, (2.26) ve (4.5) ilişkileri dikkate alınırsa

$$H_{B,k}\left[\alpha, \beta_1 + kn, \beta_2; \nu_1, \nu_2, \nu_3; x_1, x_2, x_3\right] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{k^{-i}(\alpha)_{i,k}\,k^{-j}(\beta_2)_{j,k}}{k^{-i}(\nu_1)_{i,k}\,k^{-j}(\nu_2)_{j,k}}$$
$$\times (kx_1)^i (kx_2)^j H_{B,k}\left[\alpha + ik, \beta_1 + ik + jk, \beta_2 + jk; \nu_1 + ik, \nu_2 + jk, \nu_3; x_1, x_2, x_3\right]$$

bulunur ki, bu (4.41) in ispatını tamamlar. Benzer olarak (4.5) ilişkisinde β_1 yerine $\beta_1 - kn$ alınır ve daha sonra (3.39) daki H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılır ve de (2.26) ile (4.5) ilişkilerinden yararlanılırsa (4.42) yineleme formülü elde edilir. ■

Teorem 4.15. $H_{B,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned} &H_{B,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2 + kn; \nu_1, \nu_2, \nu_3; x_1, x_2, x_3\right] = H_{B,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu_1, \nu_2, \nu_3; x_1, x_2, x_3\right] \\ &+ \frac{\beta_1}{\nu_2}kx_2\sum_{m=1}^{n} H_{B,k}\left[\alpha, \beta_1 + k, \beta_2 + km; \nu_1, \nu_2 + k, \nu_3; x_1, x_2, x_3\right] \\ &+ \frac{\alpha}{\nu_3}kx_3\sum_{m=1}^{n} H_{B,k}\left[\alpha + k, \beta_1, \beta_2 + km; \nu_1, \nu_2, \nu_3 + k; x_1, x_2, x_3\right] \end{aligned} \tag{4.43}$$

ve

$$\begin{aligned} &H_{B,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2 - kn; \nu_1, \nu_2, \nu_3; x_1, x_2, x_3\right] = H_{B,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu_1, \nu_2, \nu_3; x_1, x_2, x_3\right] \\ &- \frac{\beta_1}{\nu_2}kx_2\sum_{m=0}^{n-1} H_{B,k}\left[\alpha, \beta_1 + k, \beta_2 - km; \nu_1, \nu_2 + k, \nu_3; x_1, x_2, x_3\right] \\ &- \frac{\alpha}{\nu_3}kx_3\sum_{m=0}^{n-1} H_{B,k}\left[\alpha + k, \beta_1, \beta_2 - km; \nu_1, \nu_2, \nu_3 + k; x_1, x_2, x_3\right] \end{aligned} \tag{4.44}$$

yineleme formüllerini gerçekler.

İspat. (4.5) ilişkisinde β_2 yerine $\beta_2 + kn$ alınır ve (3.40) ile verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2+kn;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] = H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+n;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$= H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\frac{\beta_1}{k}}{\frac{\nu_2}{k}}kx_2\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k}+m;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}+1,\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\frac{\alpha}{k}}{\frac{\nu_3}{k}}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_B\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+m;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right]$$

bulunur. Böylece tekrar (4.5) ilişkisinden yararlanılırsa (4.43) yineleme formülü elde edilir. Benzer şekilde (4.5) ilişkisinde β_2 yerine $\beta_2 - kn$ alındıktan sonra (3.41) ve tekrar (4.5) in kullanılmasıyla (4.44) yineleme formülüne ulaşılır. ■

Teorem 4.16. *$H_{B,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu için yineleme formülleri*

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-kn,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] = H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\alpha\beta_1}{k}x_1\sum_{m=1}^{n}\frac{H_{B,k}\left[\alpha+k,\beta_1+k,\beta_2;\nu_1-km+2k,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\frac{\nu_1}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_1}{k}-m+1\right)} \tag{4.45}$$

ve

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-kn,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\alpha)_{m,k}(\beta_1)_{m,k}}{(\nu_1)_{m,k}(\nu_1-kn)_{m,k}}(kx_1)^m$$
$$\times H_{B,k}\left[\alpha+km,\beta_1+km,\beta_2;\nu_1+km,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \tag{4.46}$$

şeklindedir.

İspat. (4.5) ilişkisinde ν_1 yerine $\nu_1 - kn$ alınır ve (3.42) ile verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-kn,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] = H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}-n,\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$= H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\alpha}{k}\frac{\beta_1}{k}kx_1\sum_{m=1}^{n}\frac{H_B\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}-m+2,\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]}{\left(\frac{\nu_1}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_1}{k}-m+1\right)}$$

bulunur ki, tekrar (4.5) ilişkisinden yararlanılırsa bu (4.45) in ispatını tamamlar. Benzer şekilde (4.5) de ν_1 yerine $\nu_1 - kn$ alındıktan sonra sırasıyla (3.43), (2.26) ve (4.5) in kullanılmasıyla

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1-kn,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}-n,\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{\left(\frac{\alpha}{k}\right)_m\left(\frac{\beta_1}{k}\right)_m}{\left(\frac{\nu_1}{k}\right)_m\left(\frac{\nu_1}{k}-n\right)_m}(kx_1)^m$$
$$\times H_B\left[\frac{\alpha}{k}+m,\frac{\beta_1}{k}+m,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k}+m,\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{k^{-m}(\alpha)_{m,k}\,k^{-m}(\beta_1)_{m,k}}{k^{-m}(\nu_1)_{m,k}\,k^{-m}(\nu_1-kn)_{m,k}}(kx_1)^m$$
$$\times H_{B,k}\left[\alpha+km,\beta_1+km,\beta_2;\nu_1+km,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$

elde edilir ki, bu da (4.46) nın ispatını tamamlar. ■

Teorem 4.17. $H_{B,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu için yineleme formülleri

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2-kn,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\beta_1\beta_2}{k}x_2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1+k,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2-km+2k,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\frac{\nu_2}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_2}{k}-m+1\right)} \tag{4.47}$$

ve

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2-kn,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\beta_1)_{m,k}(\beta_2)_{m,k}}{(\nu_2)_{m,k}(\nu_2-kn)_{m,k}}(kx_2)^m$$
$$\times H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1+km,\beta_2+km;\nu_1,\nu_2+km,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right] \tag{4.48}$$

dir.

İspat. (4.5) ilişkisinde ν_2 yerine $\nu_2 - kn$ alınır ve (3.44) ile verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2-kn,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}-n,\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$=H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\beta_1}{k}\frac{\beta_2}{k}kx_2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k}-m+2,\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]}{\left(\frac{\nu_2}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_2}{k}-m+1\right)}$$

bulunur. Böylece tekrar (4.5) ilişkisinden yararlanıldığında (4.47) nin ispatı tamamlanır. Benzer şekilde (4.5) ilişkisinde ν_2 yerine $\nu_2 - kn$ alınır ve (3.45) de verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonun yineleme formülü kullanılır ve de (2.26) ile (4.5) ilişkilerinden yararlanılırsa (4.48) nin ispatı tamamlanır. ■

Teorem 4.18. $H_{B,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3-kn;x_1,x_2,x_3\right]=H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\alpha\beta_2}{k}x_3\sum_{m=1}^{n}\frac{H_{B,k}\left[\alpha+k,\beta_1,\beta_2+k;\nu_1,\nu_2,\nu_3-km+2k;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\frac{\nu_3}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_3}{k}-m+1\right)} \tag{4.49}$$

ve

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3-kn;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\alpha)_{m,k}(\beta_2)_{m,k}}{(\nu_3)_{m,k}(\nu_3-kn)_{m,k}}(kx_3)^m$$
$$\times H_{B,k}\left[\alpha+km,\beta_1,\beta_2+km;\nu_1,\nu_2,\nu_3+km;x_1,x_2,x_3\right] \tag{4.50}$$

yineleme formüllerine sahiptir.

İspat. (4.5) ilişkisinde ν_3 yerine ν_3-kn alınır ve (3.46) ile verilen H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$H_{B,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu_1,\nu_2,\nu_3-kn;x_1,x_2,x_3\right]=H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k}-n;kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$=H_B\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\alpha}{k}\frac{\beta_2}{k}kx_3\sum_{m=1}^{n}\frac{H_B\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu_1}{k},\frac{\nu_2}{k},\frac{\nu_3}{k}-m+2;kx_1,kx_2,kx_3\right]}{\left(\frac{\nu_3}{k}-m\right)\left(\frac{\nu_3}{k}-m+1\right)}$$

bulunur ki, tekrar (4.5) ilişkisinden yararlanılırsa (4.49) un ispatı tamamlanır. Benzer şekilde (4.5) ilişkisinde ν_3 yerine ν_3-kn alınır ve (3.47) deki H_B klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılır ve de (2.26) ile (4.5) ilişkilerinden yararlanılırsa (4.50) nin ispatı tamamlanır. ■

Teorem 4.19. $H_{C,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$H_{C,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\beta_1}{\nu}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_{C,k}\left[\alpha+km,\beta_1+k,\beta_2;\nu+k;x_1,x_2,x_3\right]$$
$$+\frac{\beta_2}{\nu}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_{C,k}\left[\alpha+km,\beta_1,\beta_2+k;\nu+k;x_1,x_2,x_3\right] \tag{4.51}$$

ve

$$
\begin{aligned}
H_{C,k}\left[\alpha-kn,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right] &= H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right] \\
&-\frac{\beta_1}{\nu}kx_1\sum_{m=0}^{n-1}H_{C,k}\left[\alpha-km,\beta_1+k,\beta_2;\nu+k;x_1,x_2,x_3\right] \\
&-\frac{\beta_2}{\nu}kx_3\sum_{m=0}^{n-1}H_{C,k}\left[\alpha-km,\beta_1,\beta_2+k;\nu+k;x_1,x_2,x_3\right]
\end{aligned} \tag{4.52}
$$

yineleme formüllerini gerçekler.

İspat. (4.6) ilişkisinde α yerine $\alpha+kn$ alınır ve (3.48) ile verilen H_C klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü göz önünde tutulursa

$$
\begin{aligned}
H_{C,k}\left[\alpha+kn,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right] &= H_C\left[\frac{\alpha}{k}+n,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right] \\
&= H_C\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right] \\
&+\frac{\frac{\beta_1}{k}}{\frac{\nu}{k}}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\frac{\alpha}{k}+m,\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right] \\
&+\frac{\frac{\beta_2}{k}}{\frac{\nu}{k}}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\frac{\alpha}{k}+m,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right]
\end{aligned}
$$

olup, tekrar (4.6) ilişkisinden yararlanıldığında (4.51) yineleme formülü elde edilir. Benzer olarak (4.6) ilişkisinde α yerine $\alpha-kn$ yazıldıktan sonra (3.49) formülünün ve tekrar (4.6) ilişkisinin kullanılmasıyla (4.52) yineleme formülü bulunur. ■

Teorem 4.20. $H_{C,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu için yineleme formülleri şunlardır:

$$
\begin{aligned}
H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1+kn,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right] &= H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right] \\
&+\frac{\alpha}{\nu}kx_1\sum_{m=1}^{n}H_{C,k}\left[\alpha+k,\beta_1+km,\beta_2;\nu+k;x_1,x_2,x_3\right] \\
&+\frac{\beta_2}{\nu}kx_2\sum_{m=1}^{n}H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1+km,\beta_2+k;\nu+k;x_1,x_2,x_3\right]
\end{aligned} \tag{4.53}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1-kn,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right] &= H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right] \\
&-\frac{\alpha}{\nu}kx_1\sum_{m=0}^{n-1}H_{C,k}\left[\alpha+k,\beta_1-km,\beta_2;\nu+k;x_1,x_2,x_3\right] \\
&-\frac{\beta_2}{\nu}kx_2\sum_{m=0}^{n-1}H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1-km,\beta_2+k;\nu+k;x_1,x_2,x_3\right].
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

İspat. (4.6) ilişkisinde β_1 yerine $\beta_1 + kn$ alınır ve (3.50) ile verilen H_C klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&H_{C,k}\left[\alpha, \beta_1 + kn, \beta_2; \nu; x_1, x_2, x_3\right] = H_C\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta_1}{k} + n, \frac{\beta_2}{k}; \frac{\nu}{k}; kx_1, kx_2, kx_3\right] \\
&= H_C\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta_1}{k}, \frac{\beta_2}{k}; \frac{\nu}{k}; kx_1, kx_2, kx_3\right] \\
&+ \frac{\frac{\alpha}{k}}{\frac{\nu}{k}} kx_1 \sum_{m=1}^{n} H_C\left[\frac{\alpha}{k} + 1, \frac{\beta_1}{k} + m, \frac{\beta_2}{k}; \frac{\nu}{k} + 1; kx_1, kx_2, kx_3\right] \\
&+ \frac{\frac{\beta_2}{k}}{\frac{\nu}{k}} kx_2 \sum_{m=1}^{n} H_C\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta_1}{k} + m, \frac{\beta_2}{k} + 1; \frac{\nu}{k} + 1; kx_1, kx_2, kx_3\right]
\end{aligned}
$$

bulunur ki, tekrar (4.6) ilişkisinden yararlanılırsa (4.53) yineleme formülünün ispatı tamamlanır. (4.54) yineleme formülü de benzer şekilde, (4.6) ilişkisinde β_1 yerine $\beta_1 - kn$ yazıldıktan sonra (3.51) formülünden ve (4.6) ilişkisinden faydalanılarak kolayca ispatlanır. ■

Teorem 4.21. $H_{C,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu için yineleme formülleri

$$
\begin{aligned}
&H_{C,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2 + kn; \nu; x_1, x_2, x_3\right] = H_{C,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu; x_1, x_2, x_3\right] \\
&+ \frac{\beta_1}{\nu} kx_2 \sum_{m=1}^{n} H_{C,k}\left[\alpha, \beta_1 + k, \beta_2 + km; \nu + k; x_1, x_2, x_3\right] \\
&+ \frac{\alpha}{\nu} kx_3 \sum_{m=1}^{n} H_{C,k}\left[\alpha + k, \beta_1, \beta_2 + km; \nu + k; x_1, x_2, x_3\right]
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&H_{C,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2 - kn; \nu; x_1, x_2, x_3\right] = H_{C,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2; \nu; x_1, x_2, x_3\right] \\
&- \frac{\beta_1}{\nu} kx_2 \sum_{m=0}^{n-1} H_{C,k}\left[\alpha, \beta_1 + k, \beta_2 - km; \nu + k; x_1, x_2, x_3\right] \\
&- \frac{\alpha}{\nu} kx_3 \sum_{m=0}^{n-1} H_{C,k}\left[\alpha + k, \beta_1, \beta_2 - km; \nu + k; x_1, x_2, x_3\right]
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

dır.

İspat. (4.6) ilişkisinde β_2 yerine $\beta_2 + kn$ alınırsa

$$
H_{C,k}\left[\alpha, \beta_1, \beta_2 + kn; \nu; x_1, x_2, x_3\right] = H_C\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta_1}{k}, \frac{\beta_2}{k} + n; \frac{\nu}{k}; kx_1, kx_2, kx_3\right]
$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ yanında (3.52) yineleme formülü göz önünde tutulursa

$$H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2+kn;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\frac{\beta_1}{k}}{\frac{\nu}{k}}kx_2\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k}+m;\frac{\nu}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$+\frac{\frac{\alpha}{k}}{\frac{\nu}{k}}kx_3\sum_{m=1}^{n}H_C\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+m;\frac{\nu}{k}+1;kx_1,kx_2,kx_3\right]$$

elde edilir ki, tekrar (4.6) ilişkisinden yararlanıldığında (4.55) formülünün ispatı tamamlanır. (4.56) yineleme formülü de benzer şekilde, (4.6) ilişkisinde β_2 yerine β_2-kn yazıldıktan sonra (3.53) formülü ve tekrar (4.6) ilişkisi kullanılarak ispatlanır. ■

Teorem 4.22. $H_{C,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2+kn;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\alpha)_{j,k}(\beta_1)_{i,k}}{(\nu)_{i+j,k}}$$
$$\times(kx_2)^i(kx_3)^jH_{C,k}\left[\alpha+jk,\beta_1+ik,\beta_2+ik+jk;\nu+ik+jk;x_1,x_2,x_3\right]\quad(4.57)$$

ve

$$H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2-kn;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(\alpha)_{j,k}(\beta_1)_{i,k}}{(\nu)_{i+j,k}}$$
$$\times(-kx_2)^i(-kx_3)^jH_{C,k}\left[\alpha+jk,\beta_1+ik,\beta_2;\nu+ik+jk;x_1,x_2,x_3\right]\quad(4.58)$$

yineleme formüllerine sahiptir.

İspat. (4.6) ilişkisinde β_2 yerine β_2+kn alınır ve (3.54) ile verilen H_C klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2+kn;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+n;\frac{\nu}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{\left(\frac{\alpha}{k}\right)_j\left(\frac{\beta_1}{k}\right)_i}{\left(\frac{\nu}{k}\right)_{i+j}}$$
$$\times(kx_2)^i(kx_3)^jH_C\left[\frac{\alpha}{k}+j,\frac{\beta_1}{k}+i,\frac{\beta_2}{k}+i+j;\frac{\nu}{k}+i+j;kx_1,kx_2,kx_3\right]$$

olup, (2.26) ile (4.6) ilişkilerinin dikkate alınmasıyla da

$$H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2+kn;\nu;x_1,x_2,x_3\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{k^{-j}(\alpha)_{j,k}k^{-i}(\beta_1)_{i,k}}{k^{-i-j}(\nu)_{i+j,k}}$$
$$\times(kx_2)^i(kx_3)^jH_{C,k}\left[\alpha+jk,\beta_1+ik,\beta_2+ik+jk;\nu+ik+jk;x_1,x_2,x_3\right]$$

elde edilir ki, bu da (4.57) nin ispatını tamamlar. Benzer şekilde (4.6) da β_2 yerine $\beta_2 - kn$ yazıldıktan sonra sırasıyla (3.55), (2.26) ve tekrar (4.6) nin kullanılmasıyla (4.58) yineleme formülü bulunur. ■

Teorem 4.23. $H_{C,k}$ k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
&H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu-kn;x_1,x_2,x_3\right]=H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu;x_1,x_2,x_3\right]\\
&+\frac{\alpha\beta_1}{k}x_1\sum_{m=1}^{n}\frac{H_{C,k}\left[\alpha+k,\beta_1+k,\beta_2;\nu+km-2k;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\frac{\nu}{k}-m\right)\left(\frac{\nu}{k}-m+1\right)}\\
&+\frac{\beta_1\beta_2}{k}x_2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1+k,\beta_2+k;\nu+km-2k;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\frac{\nu}{k}-m\right)\left(\frac{\nu}{k}-m+1\right)}\\
&+\frac{\alpha\beta_2}{k}x_3\sum_{m=1}^{n}\frac{H_{C,k}\left[\alpha+k,\beta_1,\beta_2+k;\nu+km-2k;x_1,x_2,x_3\right]}{\left(\frac{\nu}{k}-m\right)\left(\frac{\nu}{k}-m+1\right)}
\end{aligned}\tag{4.59}$$

yineleme formülünü gerçekler.

İspat. (4.6) ilişkisinde ν yerine $\nu - kn$ alınır ve de (3.56) ile verilen H_C klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonunun yineleme formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&H_{C,k}\left[\alpha,\beta_1,\beta_2;\nu-kn;x_1,x_2,x_3\right]=H_C\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu}{k}-n;kx_1,kx_2,kx_3\right)\\
&=H_C\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu}{k};kx_1,kx_2,kx_3\right]\\
&+\frac{\alpha}{k}\frac{\beta_1}{k}kx_1\sum_{m=1}^{n}\frac{H_C\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k};\frac{\nu}{k}+m-2;kx_1,kx_2,kx_3\right]}{\left(\frac{\nu}{k}-m\right)\left(\frac{\nu}{k}-m+1\right)}\\
&+\frac{\beta_1}{k}\frac{\beta_2}{k}kx_2\sum_{m=1}^{n}\frac{H_C\left[\frac{\alpha}{k},\frac{\beta_1}{k}+1,\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu}{k}+m-2;kx_1,kx_2,kx_3\right]}{\left(\frac{\nu}{k}-m\right)\left(\frac{\nu}{k}-m+1\right)}\\
&+\frac{\alpha}{k}\frac{\beta_2}{k}kx_3\sum_{m=1}^{n}\frac{H_C\left[\frac{\alpha}{k}+1,\frac{\beta_1}{k},\frac{\beta_2}{k}+1;\frac{\nu}{k}+m-2;kx_1,kx_2,kx_3\right]}{\left(\frac{\nu}{k}-m\right)\left(\frac{\nu}{k}-m+1\right)}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak tekrar (4.6) ilişkisi dikkate alındığında istenilen eşitlik elde edilir. ■

Uyarı 4.24. Bu kısımda k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için verilen yineleme formüllerinde $k = 1$ alınırsa, Kısım 3.2. de klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için verilen yineleme formülleri elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Pochhammer k-sembolü kullanılarak k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının tanımları verilmiştir. Ayrıca k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları ile klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Bu ilişkileri ve klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının bilinen özelliklerini kullanarak, k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonlarının özelliklerinin uzun ispatlara gerek kalmadan kolayca elde edilebileceğine dikkat çekmek adına integral temsilleri ve yineleme formülleri verilmiştir. Literatürde yer almayan bu sonuçlar orjinaldir.

$k = 1$ alınması durumunda k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için elde edilen integral gösterimleri ve yineleme formülleri, klasik Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için bilinen integral gösterimleri ve yineleme formülleri ile çakışır.

Bu tez kapsamında, CMES 2022 Uluslararası Sempozyumunda iki adet online sunum gerçekleştirilmiştir.

İlerleyen çalışmalarda, k-Srivastava hipergeometrik fonksiyonları için yeni integral gösterimleri, yineleme formülleri, dönüşüm formülleri ve türev formülleri de elde edilebileceği açıktır. Üstelik Pochhammer k-sembolü kullanılarak Exton, Horn ve Lauricella fonksiyonları gibi çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonların da k-genelleştirilmeleri tanımlanabilir ve bunların çeşitli özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1]. Altın, A., 2011, *Uygulamalı Matematik*, Gazi Kitabevi, Ankara.

[2]. Bailey, W. N., 1964, *Generalized Hypergeometric Series*, Stechert-Hafner. Inc., New York.

[3]. Choi, J., Hasanov, A., Srivastava, H. M., Turaev, M., 2011, Integral representations for Srivastava's triple hypergeometric functions, *Taiwanese J. Math.*, 15(6), 2751-2762.

[4]. Choi, J., Hasanov, A., Turaev, M., 2012, Integral representations for Srivastava's hypergeometric function H_A, *Honam Mathematical Journal*, 34(1), 113-124.

[5]. Choi, J., Hasanov, A., Turaev, M., 2012, Integral representations for Srivastava's hypergeometric function H_B, *The Pure and Applied Mathematics*, 19(2), 137-145.

[6]. Choi, J., Hasanov, A., Turaev, M., 2012, Integral representations for Srivastava's hypergeometric function H_C, *Honam Mathematical Journal*, 34(4), 473-482.

[7]. Diaz, R., Pariguan, E., 2007, On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol, *Divulg. Mat.*, 15, 179–192.

[8]. Erdelyi, A., Mangus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G., 1953, *Higher Transcendental Functions*, Vol. I, McGraw-Hill, New York, Toronto and London.

[9]. Gürel Yılmaz, Ö., Aktaş, R., Taşdelen, F., 2020, On some formulas for the k-analogue of Appell functions and generating relations via k-fractional derivative, *Fractal and Fractional*, 4, 48.

[10]. Hasanov, A., Srivastava, H. M., Turaev, M., 2006, Decomposition formulas for some triple hypergeometric functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 324, 955–969.

[11]. Kıymaz, İ. O., Çetinkaya, A., Agarwal, P., 2017, A study on the k-generalizations of some known functions and fractional operators, *Journal of Inequalities and Special Functions*, 8(4), 31-41.

[12]. Mathai, A. M., Haubold, H. J., 2008, *Special Functions for Applied Scientists*, Springer, New York.

[13]. Mubeen, S., 2012, k-analogue of Kummer's first formula, *J. Inequalities Spec. Funct.*, 3(3), 41-44.

[14]. Mubeen, S., Habibullah , G. M., 2012, An integral representation of some k-hypergeometric functions, *Int. Math. Forum*, 7(4), 203-207.

[15]. Mubeen, S., Habibullah, G. M., 2012, k-fractional integrals and application, *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 7(2), 89-94.

[16]. Mubeen, S., Iqbal, S., Rahman, G., 2015, Contiguous function relations and an integral representation for Appell k-series $F_{1,k}$, *International Journal of Mathematical Research*, 4(2), 53-63.

[17]. Mubeen, S., Rehman, A., 2014, A note on k-Gamma function and Pochhammer k-symbol, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, 6(2), 93-107.

[18]. Opps, S. B., Saad, N., Srivastava, H. M., 2005, Some reduction and transformation formulas for the Appell hypergeometric function F_2, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 302(1), 180-195.

[19]. Rainville, E. D., 1960, *Special Functions*, The Macmillan Company, New York.

[20]. Slater, L. J., 1966, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, Cambridge.

[21]. Srivastava, H. M., 1964, Hypergeometric functions of three variables, *Ganita*, 15, 97-108.

[22]. Srivastava, H. M., 1967, Some integrals representing triple hypergeometric functions, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 16, 99-115.

[23]. Srivastava, H. M., Karlsson, P. W., 1985, *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chicherster), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto.

[24]. Srivastava, H. M., Manocha, H. L., 1984, *A Treatise on Generating Functions*, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chicherster), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto.

[25]. Şahin, R., 2015, Recursion formulas for Srivastava hypergeometric functions, *Mathematica Slovaca*, 65(6), 1345-1360.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Sena HALICI
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2019

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	2022

Makale ve Bildiriler
Halıcı, S., Çetinkaya, A., 2022, Integral representations of k-Srivastava hypergeometric functions, *The sixth international conference on computational mathematics and engineering sciences (CMES)*, 20-22 May 2022 Ordu.
Halıcı, S., Çetinkaya, A., 2022, Recursion formulas of k-Srivastava hypergeometric functions, *The sixth international conference on computational mathematics and engineering sciences (CMES)*, 20-22 May 2022 Ordu.