

T.C.  
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL GÖSTERGELERİ KONİKLER OLAN  
EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Mesut ALTINOK

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR - 2016

T.C.  
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL GÖSTERGELERİ KONİKLER OLAN  
EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Mesut ALTINOK

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:  
Prof. Dr. Levent KULA

KIRŞEHİR - 2016

**Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne**

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Üye: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Üye: Prof. Dr. Levent KULA

Üye: Doç. Dr. İsmail GÖK

Üye: Yrd. Doç. Dr. Bülent ALTUNKAYA

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Prof. Dr. Levent KULA  
Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik, davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mesut ALTINOK



# KÜRESEL GÖSTERGELERİ KONİKLER OLAN EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

(Doktora Tezi)

Mesut ALTINOK

Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Aralık 2016

## ÖZET

Bu tez günümüzde matematiğin yaygın kullanılan konusu olan küre geometrisi hakkında yazılmıştır. Daha doğrusu küre geometrisi içinde bir çalışma sahası olan küresel eğrilerle ilgilidir. Bu çalışmada küresel konikler temel alınmaktadır. Ayrıca "T-konik", "B-konik" ve "N-konik" eğri aileleri tanımlanmış, "T-konik" ile "B-konik" eğrilerinin aynı eğri ailesine ait oldukları gösterilmiştir. Buradan "T-konik" ve "N-konik" eğri aileleri ile ilgili karakterizasyonlar elde edilmekte ve bu karakterizasyonların sonuçlarından birinde "T-konik" konik eğri ailesinin genel helisleri ve "N-konik" eğri ailesinin de slant helisleri içerisine alan geniş eğri aileleri oluşturdukları gösterilmiştir. Dahası "T-konik" eğri aileleri ile ilgili çeşitli parametrik denklemler verilmiş, bu eğrilerin genel helisleri kapsadığı denklemlerle anlatılmıştır. Son olarak bu "T-konik" eğri aileleri ile ilgili çeşitli örnekler figürlerle verilmiştir.

**Bilim Kodu:**

**Anahtar Kelimeler:** Konikler, Küresel eğriler, Küresel konikler

**Sayfa Adedi:** 64

**Tez Yöneticisi:** Prof. Dr. Levent KULA

**ON THE CHARACTERICATIONS OF CURVES WHICH SPHERICAL  
INDICATRICES ARE CONICS**

**(PhD Thesis)**

**Mesut ALTINOK**

**Ahi Evran University**

**Institute of Science**

**December 2016**

**ABSTRACT**

This thesis is written about the sphere geometry which is widely used today in mathematics. More precisely, it concerns the spherical curves, which are a field of study within the sphere geometry. This work is based on spherical conics. In addition, "T-conic", "B-conic" and "N-conic" curve families are defined, and "T-conic" and "B-conic" curves belong to the same curve family. From these results, the characterizations of the "T-conic" and "N-conic" curve families are obtained and in the result of these characterizations, the general helices belong to the "T-conic" curve family and the slant helices belong to the "N-conic" curve family. Moreover, various parametric equations related to "T-conic" curve families are given, which are explained by equations covering general helices. Finally, various examples of these "T-conic" curve families are given in figures.

**Science Code :**

**Key Words :** Conics, Spherical curves, Spherical conics

**Number of Pages :** 64

**Advisor of Thesis :** Prof. Dr. Levent KULA

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her safhasında büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, danışman hocam sayın Prof. Dr. Levent KULA'ya, değerli yorumları ve yönlendirmelerinden dolayı tez izleme komitesi üyelerim sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN ve sayın Yrd. Doç. Dr. Bülent ALTUNKAYA'ya, her türlü destek ve anlayışlarından dolayı çalışma arkadaşlarıma ve bu tez çalışması boyunca beni desteklemelerinin yanı sıra çok büyük fedakarlık gösteren eşim Maya ALTINOK, oğlum Yusuf Deha ALTINOK'a içtenlikle teşekkür ederim.

Tübitak'a (TÜBİTAK<sup>1</sup>) ve Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri birimi'ne (BAP<sup>2</sup>) maddi ve manevi desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Mesut ALTINOK

---

<sup>1</sup>Tezin yazarı Tübitak 2211-A Genel Yurtiçi Doktora Burs Programı ile desteklenmektedir.

<sup>2</sup>Tezin yazarı PYOFEN. 4003.13.002 numaralı proje ile desteklenmektedir.

## İÇİNDEKİLER LİSTESİ

|   |      |
|---|------|
| TEZ BİLDİRİMİ . . . . .   | iv   |
| ÖZET . . . . .  | v    |
| ABSTRACT . . . . .  | vi   |
| TEŞEKKÜR . . . . .  | vii  |
| İÇİNDEKİLER LİSTESİ . . . . .   | viii |
| ŞEKİLLER LİSTESİ . . . . .  | x    |
| SİMGELER VE KISALTMALAR . . . . .   | xii  |
| 1 GİRİŞ . . . . .   | 1    |
| 2 TEMEL KAVRAMLAR . . . . .   | 2    |
| 3 KÜRESEL KONİKLER . . . . .  | 11   |
| 4 T-konik, B-konik ve N-konik Eğriler ve Karakterizasyonları .              | 16   |
| 4.1 T-konik Eğri . . . . .  | 16   |
| 4.2 B-konik Eğri . . . . .  | 22   |
| 4.3 N-konik Eğri . . . . .  | 25   |
| 4.4 T-konik Eğri Ailesi . . . . .   | 30   |
| 5 $T^H$ -konik, $B^H$ -konik ve $N^H$ -konik Eğriler ve Karakterizasyonları | 38   |
| 5.1 $T^H$ -konik Eğri . . . . .   | 38   |
| 5.2 $B^H$ -konik Eğri . . . . .   | 41   |
| 5.3 $N^H$ -konik Eğri . . . . .   | 43   |



|     |  |    |
|-----|--|----|
| 5.4 | $T^H$ -konik Eğri Ailesi . . . . .               | 45 |
| 6   | TEĞETLER GÖSTERGESİ KÜRESEL PARABOL OLAN EĞRİLER | 48 |
| 7   | ÖRNEKLER . . . . .                               | 52 |
|     | KAYNAKLAR . . . . .                              | 62 |
|     | ÖZGEÇMİŞ . . . . .                               | 64 |



## ŞEKİLLER LİSTESİ

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Elips . . . . .  | 7  |
| 2.2 | Hiperbol . . . . .   | 8  |
| 2.3 | Parabol . . . . .  | 8  |
| 2.4 | Sırasıyla, $a = \pi/3, b = \pi/4$ ; $a = \pi/3, b = \pi/8$ ; $a = \pi/3, b = \pi/12$<br>değerleri için özel kuartik düzlem eğrileri . . . . .  | 9  |
| 3.1 | Dirnbock tarafından verilen küresel elips ve evolütü . . . . .   | 12 |
| 3.2 | Eliptik koni ile kürenin arakesiti olan küresel elips . . . . .  | 13 |
| 3.3 | $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{4}$ ve $c = \frac{\pi}{4}$ değerleri için, (3.7) denklemi ile verilen<br>silindirin küre ile arakesiti(a), (3.8) denklemi ile verilen silindirin<br>küre ile arakesiti(b) ve (3.9) denklemi ile verilen silindirin küre ile<br>arakesiti(c) . . . . . | 14 |
| 3.4 | $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{4}$ ve $c = \frac{\pi}{4}$ değerleri için, küresel elipsin asal (a) ve<br>yede (b) eksenini . . . . .   | 15 |
| 4.1 | $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{4}$ değerleri için $\alpha_{a,b}$ eğrisinin teğetler göstergesi(a), $\alpha_{a,b}$<br>eğrisinin binormaller göstergesi(b) . . . . .   | 33 |
| 4.2 | $\alpha_{a,b}$ eğrisinin asli normaller göstergesi (tepe noktası orijin olan<br>kuartik koni ile kürenin arakesiti) . . . . .  | 34 |
| 4.3 | $\alpha_{a,b}$ eğrisinin asli normaller göstergesi (tepe noktası $z = (0, 0, 1)$<br>olan kuartik koni ile kürenin arakesiti) . . . . .   | 34 |
| 4.4 | $\alpha_{a,b}$ eğrisinin asli normaller göstergesi (kuartik silindir ile kürenin<br>arakesiti) . . . . .   | 35 |
| 4.5 | $a = 4, b = 3, c = 1$ değerleri için $\hat{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin teğetler göster-<br>gesi(a), $\hat{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin binormaller göstergesi(b) . . . . .  | 38 |
| 5.1 | $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{4}$ değerleri için, $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin teğetler göstergesi(a),<br>$\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin binormaller göstergesi(b) . . . . .  | 47 |
| 6.1 | Küresel parabol . . . . .  | 48 |
| 6.2 | $c = \frac{\pi}{3}$ için $\delta_c$ eğrisinin teğetler göstergesi . . . . .  | 50 |
| 6.3 | $c = \frac{\pi}{3}$ için $\delta_c$ eğrisinin binormaller göstergesi . . . . .   | 51 |
| 7.1 | $a = \frac{\pi}{3}$ ve $b = \frac{\pi}{4}$ için $\alpha_{a,b}$ eğrisi . . . . .  | 52 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 7.2  | $a = \frac{\pi}{3}$ ve $b = \frac{\pi}{4}$ , $\alpha_{a,b}$ eğrisinin teğetler göstergesi(a), $\alpha_{a,b}$ eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve $\alpha_{a,b}$ eğrisinin binormaller göstergesi(c)                                | 53 |
| 7.3  | $a = \frac{\pi}{3}$ ve $b = \frac{\pi}{4}$ için $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisi . . . . .  | 53 |
| 7.4  | $a = \frac{\pi}{3}$ ve $b = \frac{\pi}{4}$ , $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin teğetler göstergesi(a), $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin binormaller göstergesi(c)              | 54 |
| 7.5  | $a = b = \frac{\pi}{4}$ için $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisi . . . . .   | 55 |
| 7.6  | $a = b = \frac{\pi}{4}$ , $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin teğetler göstergesi(a), $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin binormaller göstergesi(c) .                               | 55 |
| 7.7  | $a = \frac{\pi}{3}$ ve $b = \frac{\pi}{4}$ için $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisi . . . . .  | 56 |
| 7.8  | $a = \frac{\pi}{3}$ ve $b = \frac{\pi}{4}$ , $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin teğetler göstergesi(a), $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin binormaller göstergesi(c)        | 56 |
| 7.9  | $c = \frac{\pi}{5}$ için $\delta_c$ eğrisi . . . . .   | 57 |
| 7.10 | $c = \frac{\pi}{5}$ için $\delta_c$ eğrisinin teğetler göstergesi(a), $\delta_c$ eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve $\delta_c$ eğrisinin binormaller göstergesi(c) . . . .  | 57 |
| 7.11 | $a = \frac{\pi}{3}$ ve $b = \frac{\pi}{6}$ için $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisi . . . . .  | 58 |
| 7.12 | $a = \frac{\pi}{3}$ ve $b = \frac{\pi}{6}$ için $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin teğetler göstergesi(a), $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve $\bar{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin binormaller göstergesi(c) . . . . . | 59 |
| 7.13 | $a = 4$ , $b = 3$ and $c = 1$ değerleri için $\hat{\alpha}_{a,b}$ T-konik eğrisi . . . . .   | 59 |
| 7.14 | $a = 4$ , $b = 3$ and $c = 1$ değerleri için $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin teğetler göstergesi(a), $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin normaller göstergesi(b) ve $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin binormaller göstergesi(c) . . . . .   | 60 |
| 7.15 | $a = b = 3$ and $c = 1$ değerleri için $\hat{\alpha}_{a,b}$ T-konik eğrisi . . . . .   | 60 |
| 7.16 | $a = b = 3$ and $c = 1$ değerleri için $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin teğetler göstergesi(a), $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin normaller göstergesi(b) ve $\tilde{\alpha}_{a,b}$ eğrisinin binormaller göstergesi(c) . . . . .         | 61 |

## SİMGELELER VE KISALTMALAR

|                     |   |                            |
|---------------------|---|----------------------------|
| $\mathbb{R}^3$      | : | 3-boyutlu Öklid uzayı      |
| $S^2$               | : | Birim küre                 |
| $\langle , \rangle$ | : | İç çarpım fonksiyonu       |
| $\times$            | : | Vektörel çarpım fonksiyonu |
| $T$                 | : | Teğetler göstergesi        |
| $N$                 | : | Normaller göstergesi       |
| $B$                 | : | Binormaller göstergesi     |
| $\kappa$            | : | Eğrilik                    |
| $\tau$              | : | Torsion (burulma)          |



# 1 GİRİŞ

$S^2$  üzerinde sabit iki noktaya yay uzunlukları toplamı sabit olan noktaların cümlesi küresel elips, sabit iki noktaya yay uzunlukları mutlak farkı sabit olan noktaların cümlesi küresel hiperbol ve sabit bir noktaya ve sabit bir doğrultuya uzaklıkları eşit olan noktaların cümlesi küresel parabol olarak tanımlanmaktadır [15]. Ayrıca Küresel konikler, birim küre ile tepe noktası kürenin merkezinde olan eliptik koninin arakesiti olarak tanımlanmaktadır [19].

Ayrıca, küresel elips, küresel hiperbol ve küresel parabol düzlemdeki aksine küre üzerinde denk olarak ifade edilmektedirler [14].

Küresel koniklerin denklemi ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmış ve bazı parametrik denklemler verilmiştir [1, 2, 5].

Bu çalışmada küresel konikler temel alınmaktadır ve teğetler göstergesi, normaller göstergesi ve binormaller göstergeleri küresel konik olan eğriler üzerine çalışılmıştır. Yani "T-konik", "B-konik" ve "N-konik" eğri aileleri tanımlanmış, bu yeni eğri ailelerinin özellikleri üzerine çalışılmış ve çeşitli karakterizasyonlar elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçlarla birlikte genel helislerin "T-konik" eğri ailesine ait olduğu ve slant helislerin "N-konik" eğri ailesine ait olduğu gösterilmiştir.

## 2 TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1**  $\mathbb{R}$  reel sayılar cismini göstermek üzere,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

vektör uzayında,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu,  $\mathbb{R}^n$  uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma,  $\mathbb{R}^n$  uzayının **doğal iç çarpımı** veya **Öklid iç çarpımı** denir.

$x \in \mathbb{R}^n$  için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

fonksiyonu,  $\mathbb{R}^n$  uzayında bir normdur. Buna göre,  $\mathbb{R}^n$  uzayına normlu vektör uzayı denir.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlanan  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu,  $\mathbb{R}^n$  uzayında bir metriktir. Bu durumda, bu metrik ile,  $\mathbb{R}^n$  bir metrik uzay olur. Bu uzaya **Öklid uzayı** denir ve genellikle  $\mathbb{E}^n$  ile gösterilir [18].

**Tanım 2.2**  $I, \mathbb{R}$  nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir  $\alpha$  dönüşümüne,  $\mathbb{R}^n$  uzayı içinde bir **eğri** denir [18].

**Tanım 2.3**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eğrisi verilsin.  $I$  aralığının bir  $u$  noktasındaki teğet uzayı olan  $T_u(\mathbb{R}^1)$  uzayı 1-boyutlu bir vektör uzayıdır.  $\mathbb{R}^1$  deki koordinat fonksiyonu  $x$  olmak üzere,  $T_u(\mathbb{R}^1)$  uzayının doğal tabanı

$$\left\{ \frac{d}{dx}(u) \right\}$$

kümesidir.  $\frac{d}{dx}$ ,  $\mathbb{R}^1$  uzayının her bir  $u$  noktasına  $\frac{d}{dx}(u)$  vektörünü karşılık getiren vektör alanıdır.

$\alpha_{*u} : T_u(\mathbb{R}) \rightarrow T_{\alpha(u)}(\mathbb{R}^n)$  dönüşümünde,  $\alpha_{*u}\left(\frac{d}{dx}(u)\right)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(u)$  noktasındaki **hız vektörü** denir ve kısaca  $\alpha'(u)$  ile gösterilir [18].

**Tanım 2.4** Bir

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

eğrisi için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1, \quad \forall s \in I$$

ise  $\alpha$  eğrisine **birim hızlı** eğri denir. Bu durumda eğrinin  $s \in I$  parametresine **yay parametresi** adı verilir [8, 18].

**Tanım 2.5**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli  $T(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **birim teğet vektörü** denir.  $T$  vektör alanına,  $\alpha$  eğrisinin **teğet vektör alanı** adı verilir [18].

**Tanım 2.6**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir.  $\kappa(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **eğriliği** denir [18].

**Tanım 2.7**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliğiyle belirli  $N(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **birinci dik vektörü (asli normal)** denir.  $N$  vektör alanına,  $\alpha$  eğrisinin **birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı)** adı verilir [18].

**Tanım 2.8**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı  $B(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **ikinci dik vektörü (binormali)** denir.  $B$  vektör alanına,  $\alpha$  eğrisinin **ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı)** adı verilir [18].

**Tanım 2.9**  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B(s)$  vektörlerine,  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **Frenet vektörleri** denir.

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

kümesine,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **Frenet çatısı** ve  $T$ ,  $N$ ,  $B$  vektör alanlarına,  $\alpha$  eğrisi üstünde **Frenet vektör alanları** adı verilir [18].

**Tanım 2.10**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları  $T$ ,  $N$ ,  $B$  olmak üzere,

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin burulma fonksiyonu denir.  $\tau(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **torsionu (burulması)** denir [18].

**Teorem 2.1**  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki birim hızlı  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları  $T$ ,  $N$ ,  $B$  ve bu eğrinin eğrilik ve torsionu sırasıyla  $\kappa$ ,  $\tau$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= \tau N \end{aligned}$$

dir [18].

**Teorem 2.2** Birim hızlı olmayan,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\rightarrow \alpha(u) \end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları  $T$ ,  $N$ ,  $B$  ve bu eğrinin eğrilik ve torsionu, sırasıyla,  $\kappa$ ,  $\tau$  olmak üzere,

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad N = B \times T, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}, \quad \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

dir [18].



**Teorem 2.3** Birim hızlı olmayan,

$$\begin{aligned}\alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\longrightarrow \alpha(u)\end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları  $T$ ,  $N$ ,  $B$  ve bu eğrinin eğrilik ve torsionu (burulması), sırasıyla,  $\kappa$ ,  $\tau$  olsun.  $\|\alpha'(u)\| = \nu$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}T' &= \nu\kappa N \\ N' &= \nu(-\kappa T + \tau B) \\ B' &= \nu\tau N\end{aligned}$$

dir [18].

**Tanım 2.11**  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $T$ ,  $N$ ,  $B$  olsun.

$\{T(s), N(s)\}$  kümesinin gerdiği düzleme,  $\alpha(s)$  noktasındaki dokunum düzlemi veya **oskületör düzlem** denir.

$\{T(s), B(s)\}$  kümesinin gerdiği düzleme,  $\alpha(s)$  noktasındaki doğrultma düzlemi veya **rektifiyan düzlem** denir.

$\{N(s), B(s)\}$  kümesinin gerdiği düzleme,  $\alpha(s)$  noktasındaki dik düzlem veya **normal düzlem** denir [18].

**Tanım 2.12** Eğer bir eğrinin bütün noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye **düzlemseldir** denir [10].

**Tanım 2.13**

$$\begin{aligned}\alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha(s)\end{aligned}$$

birim hızlı bir eğri olsun.  $\kappa(s) \neq 0$  olacak şekilde  $\alpha$  eğrisinin, teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu  $\alpha$  eğrisine **genel helis** adı verilir.  $\kappa(s) \neq 0$  ve  $\tau(s)$  ikisi birden sabit ise  $\alpha$  eğrisine **daireysel helis** denir [7].

**Teorem 2.4**

$$\begin{aligned}\alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha(s)\end{aligned}$$

birim hızlı bir eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin, genel helis olması için gerek ve yeter şart,

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) = \text{sbt}, \forall s \in I$$

olmasıdır [18].

**Teorem 2.5**  $\alpha$  eğrisinin teğetler göstergesinin geodezik eğriliği,  $\frac{\tau}{\kappa}$  oranıdır [8].

**Tanım 2.14**

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

birim hızlı bir eğri olsun.  $\kappa(s) \neq 0$  olacak şekilde  $\alpha$  eğrisinin, asli normal vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu  $\alpha$  eğrisine **slant helis** adı verilir [6].

**Teorem 2.6** Eğriliği sıfırdan farklı olan bir birim hızlı  $\alpha$  eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart,

$$\sigma(s) = \left( \frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)(s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [6].

**Tanım 2.15**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  birim hızlı eğrisi ve  $S^2$  küresi verilsin. Eğer  $\alpha \subset S^2$  ise  $\alpha$  eğrisine küresel eğri denir [8].

**Teorem 2.7**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi verilsin. Aşağıdaki denklemler denktir:

1.  $\alpha$  bir küresel eğridir.
2.  $\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)^2 = r^2$ .
3.  $\frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{\nu\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' + \frac{\tau}{\kappa} = 0$ .
4.  $\frac{1}{\kappa} = A \cos \left(\int \nu\tau ds\right) + B \sin \left(\int \nu\tau ds\right)$

burada,  $A, B$  sabitler ve  $\sqrt{A^2 + B^2} = r$  dir [21].

**Tanım 2.16** Antipodal nokta, küre yüzeyindeki bir noktaya diametrik olarak karşıt olan noktaya denir [12].

**Tanım 2.17** Uzayda bir dairesel koni yüzeyi ile bir düzlemin arakesitlerinden elde edilen eğrilere konik eğrileri adı verilir [17].

**Tanım 2.18** Düzlemde, sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine elips denir, sabit olan iki noktaya elipsin odakları adı verilir, yani,

$$E = \{P \mid |f_1P| + |f_2P| = 2a, f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}^+\}$$

dir. Burada  $f_1 = (c, 0)$ ,  $f_2 = (-c, 0)$  elipsin odakları ve  $a^2 = b^2 + c^2$  dir. Elipsin parametrik ve kartezyen koordinatlardaki denklemleri sırasıyla,

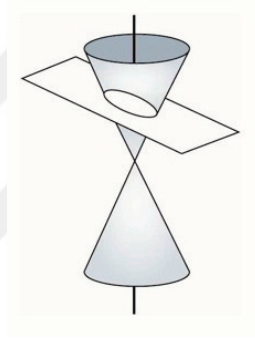
$$x = a \cos t,$$

$$y = b \sin t,$$

ve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dir. Burada  $a, b \in \mathbb{R}$  dir [4].



Şekil 2.1: Elips

**Tanım 2.19** Düzlemde, sabit iki noktaya olan uzaklıkları mutlak farkı sabit olan noktaların geometrik yerine hiperbol denir, sabit olan iki noktaya hiperbolün odakları adı verilir, yani,

$$E = \{P \mid ||f_1P| - |f_2P|| = 2a, f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}^+\}$$

dir. Burada  $f_1 = (c, 0)$ ,  $f_2 = (-c, 0)$  elipsin odakları ve  $c^2 = a^2 + b^2$  dir. Hiperbolün parametrik ve kartezyen koordinatlardaki denklemleri sırasıyla,

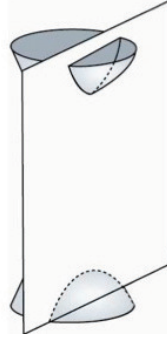
$$x = a \sec t,$$

$$y = b \tan t,$$

ve

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dir. Burada  $a, b \in \mathbb{R}$  dir [4].



Şekil 2.2: Hiperbol

**Tanım 2.20** Düzlemde, sabit bir doğruya uzaklığı, doğru üzerinde bulunmayan sabit bir noktaya olan uzaklığına eşit olan noktaların geometrik yerine Parabol denir. Sabit noktaya parabolün odağı ve sabit doğruya da parabolün doğrultmanı adı verilir. Parabolün standart denklemi, doğrultmanı  $x = -\frac{p}{2}$  alınırsa,

$$x - x_0 = \frac{1}{2p}t^2, \quad (2.1)$$

$$y - y_0 = t \quad (2.2)$$

ya da

$$x - x_0 = \frac{1}{2p}(y - y_0)^2$$

dir. Burada  $p, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  dir [4].



Şekil 2.3: Parabol

**Tanım 2.21** Düzlemde, 4. dereceden cebirsel eğriye kuartik düzlem eğrisi denir ve aşağıdaki 2 değişkenli kuartik denklem formunda verilebilir:

$$Ax^4 + By^4 + Cx^3y + Dx^2y^2 + Exy^3 + Fx^3 + Gy^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Jx^2 + Ky^2 + Lxy + Mx + Ny + P = 0.$$

Burada A, B, C, D, E sabitlerinden en az biri sıfırdan farklıdır [11].

**Tanım 2.22** Düzlemde,

$$Ax^4 + By^4 + Dx^2y^2 + Jx^2 + Ky^2 = 0$$

denklemini ile verilen eğriye özel kuartik düzlem eğrisi adı verilir. Burada  $A, B, D$  en az biri sıfırdan farklı sabitlerdir.

Özel olarak

$$A = \cos^2 b$$

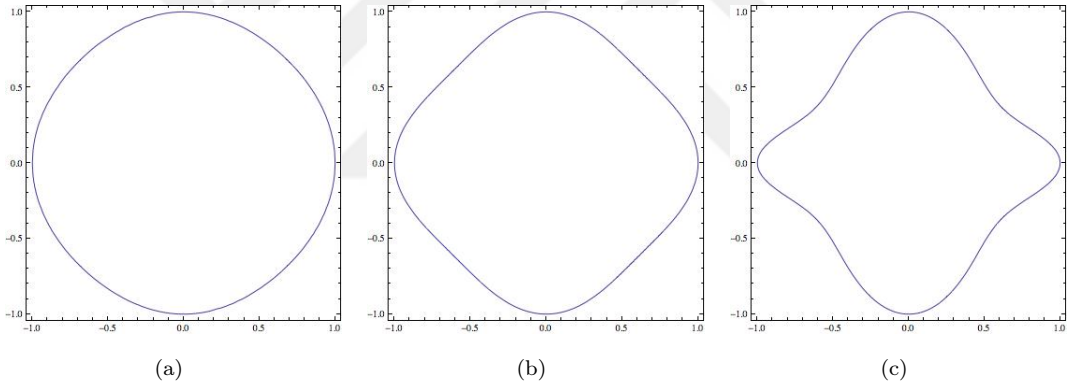
$$B = \cos^2 a \csc^2 b \sin^2 a$$

$$D = \cos^2 a + \cot^2 b \sin^2 a$$

$$J = -\cos^2 b$$

$$K = -\cos^2 a \csc^2 b \sin^2 a$$

olarak seçilirse elde edilen özel kuartik düzlem eğrisinin grafiği Şekil 2.4 de ki gibidir.



Şekil 2.4: Sırasıyla,  $a = \pi/3, b = \pi/4$ ;  $a = \pi/3, b = \pi/8$ ;  $a = \pi/3, b = \pi/12$  değerleri için özel kuartik düzlem eğrileri

**Tanım 2.23** Uzayda bir  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi ile bir  $u$  vektörü verilsin. Burada  $I, \mathbb{R}$  nin bir alt aralığıdır. Eğrinin her bir  $\alpha(t)$  noktasında,  $u$  vektörüne paralel olan bir ve yalnız bir  $L(t)$  doğrusu vardır. Bu  $L(t)$  doğrularının birleşimi olan yüzeye silindir yüzeyi adı verilir.  $\alpha$  eğrisine silindir yüzeyinin dayanak eğrisi,  $u$  vektörüne silindir yüzeyinin doğrultman vektörü denir.  $L(t)$  doğrusuna, silindir yüzeyinin,  $\alpha(t)$  noktasındaki ana doğrusu adı verilir [17].

**Tanım 2.24** Uzayda bir  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi ile bu eğri üstünde bulunmayan bir  $H$  noktası verilsin. Burada  $I, \mathbb{R}$  nin bir alt aralığıdır. Eğrinin her bir  $\alpha(t)$  noktası için  $\alpha(t)$  ve  $H$  noktası bit  $L(t)$  doğrusu belirler. Bu  $L(t)$  doğrularının birleşimi olan yüzeye koni yüzeyi adı verilir.  $\alpha$  eğrisine koni yüzeyinin dayanak eğrisi,  $H$

noktasına koni yüzeyinin tepe noktası denir.  $L(t)$  doğrusuna, koni yüzeyinin,  $\alpha(t)$  noktasındaki ana doğrusu adı verilir [17].

**Tanım 2.25** Dayanak eğrisi kuartik düzlem eğrisi olan silindir yüzeyine kuartik silindir yüzeyi adı verilir.

**Tanım 2.26** Dayanak eğrisi kuartik düzlem eğrisi olan koni yüzeyine kuartik koni yüzeyi denir.



### 3 KÜRESEL KONİKLER

Bu bölümde, küresel koniklerle ilgili literatür taraması yapılmış ve bulunan çalışmalar ile ilgili bilgi verilmiştir. Ayrıca bu bölüm boyunca farklı küresel iki  $X$  ve  $Y$  noktaları arasındaki yay uzunluğu  $|\widehat{XY}| = |\widehat{XOY}|$  ile gösterilecektir.

Geometride konikler çok önemli bir yer tutmaktadır. 1877'de Sykes, küresel konikleri "Küresel konikler küre ile tepe noktası kürenin merkezi olan eliptik koninin arakesitidir" olarak tanımlamıştır [19].

1959'da, Namikawa küresel elips ve hiperbollerini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:  $F_1$  ve  $F_2$ , küre üzerinde sabit iki nokta olsun.

$$|\widehat{F_1P}| + |\widehat{F_2P}| = sbt, \quad F_1 \neq F_2 \quad (3.1)$$

olacak şekilde küre üzerindeki  $P$  noktalarının kümesine küresel elips adı verilir [15].

Benzer şekilde

$$||\widehat{F_1P'}| - |\widehat{F_2P'}|| = sbt, \quad F_1 \neq F_2 \quad (3.2)$$

olacak şekilde küre üzerindeki  $P'$  noktalarının kümesine küresel hiperbol adı verilir [15].

Dirnbock, 1999 yılında Sykes'in vermiş olduğu tanım ve teoremler yardımıyla küresel konikler için

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{R} \tan a \cos t, \\ y(t) &= \frac{1}{R} \tan b \sin t, \\ z(t) &= \pm \frac{1}{R}, \end{aligned}$$

parametrik denklemini vermiştir. Burada  $R = \sqrt{(\tan a \cos t)^2 + (\tan b \sin t)^2 + 1}$  dir. Ayrıca bu küresel konik için küresel evölüt eğrisinin parametrik denklemini

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{m}{R_1} \cos^3 t, \\ y(t) &= \frac{n}{R_1} \sin^3 t, \\ z(t) &= \pm \frac{1}{R_1}, \end{aligned}$$

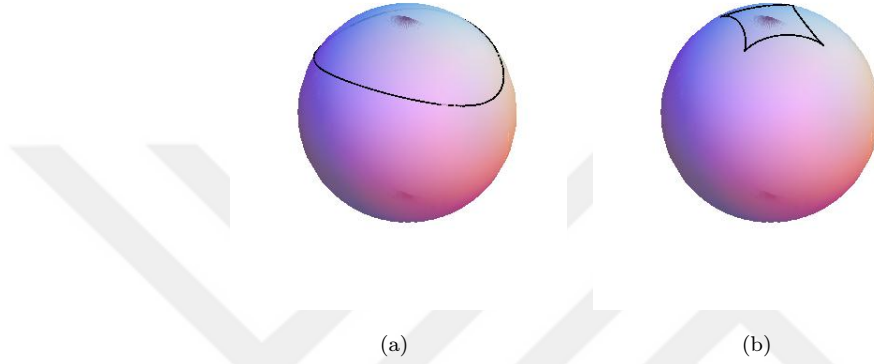
biçiminde elde etmiştir. Burada

$$m = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a},$$

$$n = \frac{\sin^2 b - \sin^2 a}{\sin b \cos b},$$

$$R_1 = \sqrt{(m^2 \cos^6 t) + (n^2 \sin^6 t) + 1},$$

ve  $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$  dir [5].



Şekil 3.1: Dirnbock tarafından verilen küresel elips ve evolütü

2004 yılında Xiong, küresel eğrilerin geometrisi isimli doktora tez çalışmasını yayınlamış ve küresel eğriler için gerçek açı ve yansıma açısının eşit olduğunu ispatlamıştır [20].

2005 yılında Maeda, Sykes'in çalışmalarını derlemiş, tanım ve teoremlerini kullanarak aşağıdaki teorem ve sonuca ulaşmıştır:

**Teorem 3.1** Küresel elipsler,  $S^2$  birim küre ile tepe noktası kürenin merkezi olan

$$\frac{x^2}{\tan^2 a} + \frac{y^2}{\tan^2 b} = z^2 \quad (z > 0) \quad (3.3)$$

eliptik konisinin arakesitidir.

**İspat.**  $P(x, y, z)$  küresel elips üzerinde bir nokta ve  $C(\sin c, 0, \cos c)$ ,  $C'(-\sin c, 0, \cos c)$  küresel elipsin odak noktaları olsun. Böylece

$$\cos(|\widehat{COP}|) = x \sin c + z \cos c, \quad \sin(|\widehat{COP}|) = \sqrt{1 - (x \sin c + z \cos c)^2}$$

$$\cos(|\widehat{C'OP}|) = -x \sin c + z \cos c, \quad \sin(|\widehat{C'OP}|) = \sqrt{1 - (-x \sin c + z \cos c)^2}$$

dir.  $\cos(|\widehat{COP}| + |\widehat{C'OP}|) = \cos(2a)$  olduğundan gerekli işlemler yapılırsa

$$z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c - \cos(2a) = \sqrt{(1 - (x \sin c + z \cos c)^2)(1 - (-x \sin c + z \cos c)^2)}$$



olarak bulunur. Her iki tarafın karesi alınırsa

$$-2 \cos(2a)(z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c) + \cos^2(2a) = 1 - 2(x^2 \sin^2 c + z^2 \cos^2 c)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\frac{x^2}{\sin^2 a / \sin^2 c} + \frac{y^2}{\cos^2 a / \cos^2 c} = 1 \quad (3.4)$$

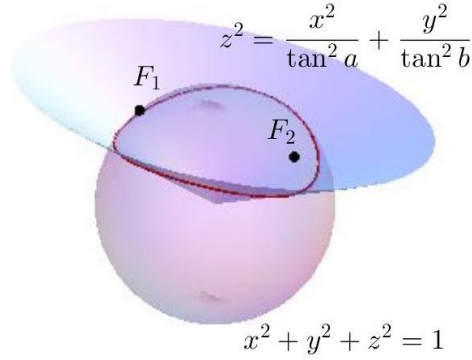
elde edilir.  $\cos a = \cos b \cos c$  ve  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{x^2}{\sin^2 a / \sin^2 c} + \frac{z^2}{\cos^2 b} = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.5)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{x^2}{\tan^2 a} + \frac{y^2}{\tan^2 b} = z^2 \quad (3.6)$$

olarak bulunur [13]. ■



Şekil 3.2: Eliptik koni ile kürenin arakesiti olan küresel elips

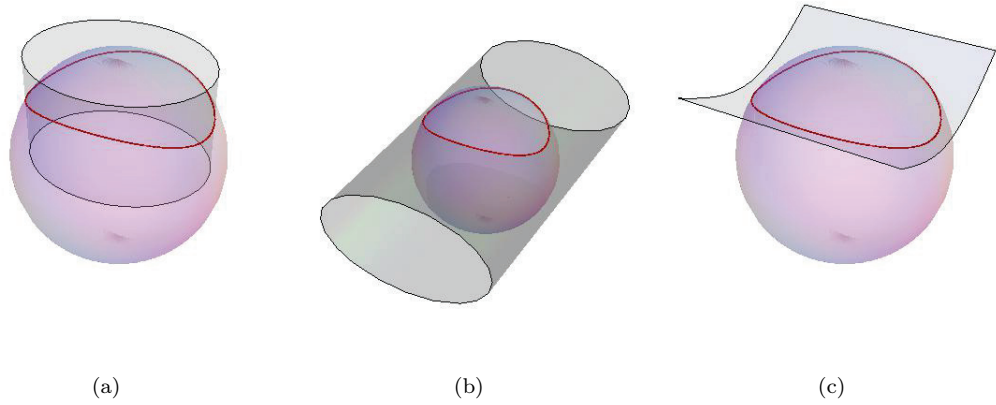
Maeda, yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak küresel elipslerin küre ile eliptik silindirin arakesiti olarak da verilebileceğini aşağıdaki sonuçta vermiştir.

**Sonuç 3.1** Küresel elips,  $S^2$  birim küresi ile aşağıda denklemleri verilen üç eliptik silindirin herhangi birinin arakesiti olarak belirlenir:

$$\frac{x^2}{\sin^2 a} + \frac{y^2}{\sin^2 b} = 1 \quad (z > 0), \quad (3.7)$$

$$\frac{x^2}{\frac{\sin^2 a}{\sin^2 c}} + \frac{z^2}{\cos^2 b} = 1 \quad (z > 0), \quad (3.8)$$

$$-\frac{y^2}{\frac{\cos^2 a \tan^2 b}{\sin^2 c}} + \frac{z^2}{\cos^2 a} = 1 \quad (z > 0), \quad (3.9)$$



Şekil 3.3:  $a = \frac{\pi}{3}$ ,  $b = \frac{\pi}{4}$  ve  $c = \frac{\pi}{4}$  değerleri için, (3.7) denklemi ile verilen silindirin küre ile arakesiti(a), (3.8) denklemi ile verilen silindirin küre ile arakesiti(b) ve (3.9) denklemi ile verilen silindirin küre ile arakesiti(c)

[13].

Maeda, 2006'da küresel konik tanımının düzlemdeki konik tanımından odak noktalarına olan uzaklığın yay uzunluğu olmasından dolayı oldukça farklı olduğunu belirtmiş ve aşağıdaki önerme, uyarıyı ve bunlara ek olarak bir sonuç vermiştir:

**Önerme 3.1**  $F_1 = (\sin c, 0, \cos c)$ ,  $F_2 = (-\sin c, 0, \cos c)$ ,  $S^2$  de iki nokta olsun. Küresel elips,  $|\widehat{F_1 P}| + |\widehat{F_2 P}| = 2a$  koşulunu sağlayan  $S^2$  üzerindeki  $P$  noktaları tarafından belirlenir. Buradan bu küresel elips,  $S^2$  ile

$$\frac{x^2}{\tan^2 a} + \frac{y^2}{\tan^2 b} = z^2$$

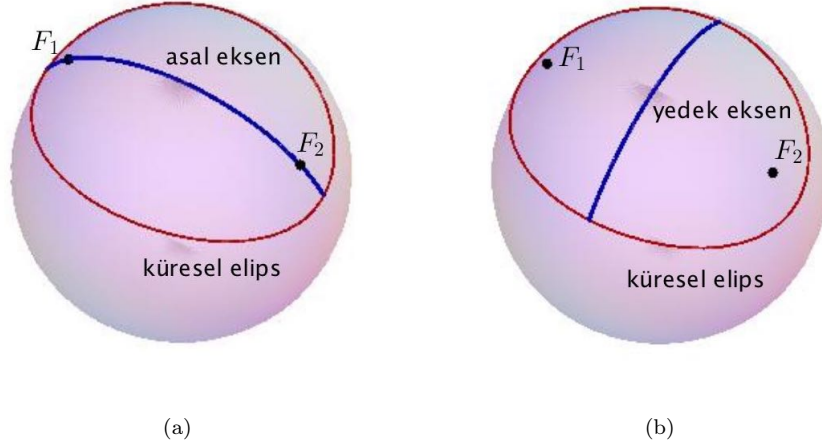
denklemleriyle verilen eliptik koninin arakesitidir. Burada  $0 < c < \frac{\pi}{2}$  ve  $\cos a = \cos b \cos c$  dir [14].

**Uyarı 3.1**  $F_1 = (\sin c, 0, \cos c)$  ve  $F_2 = (-\sin c, 0, \cos c)$ , küresel elipsin odak noktaları olsun.  $0 < b < a$  için  $F'_1 = (\sin a, 0, \cos a)$  noktası, küresel elipsin asal ekseninin uç noktası ve  $F'_2 = (0, \sin b, \cos b)$  noktası, küresel elipsin yedek ekseninin uç noktasıdır [14].

**Sonuç 3.2**  $S^2$  üzerindeki herhangi bir  $C$  küresel koniği için  $S^2$  üzerinde  $F_1, F_2$  noktaları ve  $a < \frac{\pi}{2}$  pozitif sayısı vardır öyle ki,

$$\begin{aligned} C &= \{P \mid |\widehat{PF_1}| + |\widehat{PF_2}| = 2a\} \cup \{P \mid |\widehat{PF_1^*}| + |\widehat{PF_2^*}| = 2a\}, \\ &= \{P \mid |\widehat{PF_2^*}| - |\widehat{PF_1}| = \pi - 2a\} \cup \{P \mid |\widehat{PF_1}| - |\widehat{PF_2^*}| = \pi - 2a\}, \end{aligned}$$

burada  $F_1^*$  ve  $F_2^*$ , sırasıyla,  $F_1$  ve  $F_2$  nin antipodal noktalarıdır [14].



Şekil 3.4:  $a = \frac{\pi}{3}$ ,  $b = \frac{\pi}{4}$  ve  $c = \frac{\pi}{4}$  değerleri için, küresel elipsin asal (a) ve yedek (b) eksenini

2012 de Kopacz ([16]), Maeda ([14]) ya ek olarak, küresel parabol için aşağıdaki eşitliği vermiştir.

$$||P\widehat{F}_1| - |P\widehat{F}_2^*|| = \frac{\pi}{2} = sbt.$$

2012 de Altunkaya, Yaylı, Hacısalihoğlu ve Arslan ([2]), sırasıyla, aşağıda verilen tek parametrelili küresel elips, hiperbol ve parabol denklemlerini elde etmiş ve bununla ilgili örnekler vermiştir:

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{F}_2}{\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\|}$  lineer bağımsız vektörler ve  $\theta, \vec{F}_3$  ile konikler üzerindeki keyfi bir  $P$  noktası arasındaki açı olmak üzere

$$X(t) = \frac{\cos t - \cos 2c \cos(2b - t)}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{-\cos 2c \cos t + \cos(2b - t)}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3,$$

$$Y(t) = \frac{\cos t - \cos 2c \cos \phi}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{-\cos 2c \cos t + \cos \phi}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3,$$

$$Z(t) = \frac{\cos t + \cos 2c \sin t}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{-\cos 2c \cos t - \sin t}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

dir. Burada  $|t - \phi| = 2b$  ve  $b, c$  sabittir [2].

## 4 T-konik, B-konik ve N-konik Eğriler ve Karakterizasyonları

Bu bölümde, T-konik, B-konik ve N-konik eğri aileleri tanımlanacak ve bu eğri aileleri için karakterizasyonlara ulaşılabilecek. Elde edilen karakterizasyonlar ışığında bazı sonuçlar verilecektir.

### 4.1 T-konik Eğri

$\beta$  bir uzay eğrisi,  $\beta$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsionu  $\tau$  olsun.

Ayrıca,  $L_1, L_2$  fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin:

$$L_1 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi) \\ L_1(t) = \arccos\langle T(t), F_1 \rangle$$

ve

$$L_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi). \\ L_2(t) = \arccos\langle T(t), F_2 \rangle$$

Burada  $F_1, F_2 \in S^2$  farklı sabit iki noktadır.

**Tanım 4.1** Teğetler göstergesi  $F_1, F_2$  odaklı küresel elips olan eğriye T-konik eğri denir.

Yani  $\beta$  bir T-konik eğri ise

$$L_1 + L_2 = 2a \tag{4.1}$$

dir. Burada  $\langle F_1, F_2 \rangle = \cos(2c)$  ve  $0 < c < a < \frac{\pi}{2}$ .

T-konik eğriler için aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

**Teorem 4.1**  $\beta$ , T-konik bir eğridir gerek ve yeter koşul

$$\frac{\langle N, F_1 \rangle}{\langle N, F_2 \rangle} = -\frac{\sin L_1}{\sin L_2} \tag{4.2}$$

dir.

**İspat.**  $\beta$ , T-konik bir eğri olsun. Dolayısıyla

$$\arccos\langle T, F_1 \rangle + \arccos\langle T, F_2 \rangle = 2a \quad (4.3)$$

dir. (4.3) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\frac{-\kappa\langle N, F_1 \rangle}{\sqrt{1 - \langle T, F_1 \rangle^2}} + \frac{-\kappa\langle N, F_2 \rangle}{\sqrt{1 - \langle T, F_2 \rangle^2}} = 0 \quad (4.4)$$

olarak bulunur. (4.4) düzenlenirse (4.2) elde edilmiş olur.

İspatın tersi kolayca gösterilebilir. ■

**Teorem 4.2**  $\beta : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\beta$  bir T-konik eğridir gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} F_1 &= \cos L_1 T - \lambda_1 \sin L_1 N + \mu_1 \sin L_1 B, \\ F_2 &= \cos(2a - L_1) T + \lambda_1 \sin(2a - L_1) N + \mu_1 \sin(2a - L_1) B, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ve

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\sqrt{\cos(2c) - \cos(2a)}}{(\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2a))^{\frac{3}{2}}} \sin(2a) \quad (4.6)$$

dir. Burada  $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2c)}{\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2a)}}$ ,  $\mu_1 = \sqrt{\frac{\cos(2c) - \cos(2a)}{\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2a)}}$  dir.

**İspat.**  $\beta$  T-konik eğri olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F_1 &= \langle T, F_1 \rangle T + \langle N, F_1 \rangle N + \langle B, F_1 \rangle B, \\ F_2 &= \langle T, F_2 \rangle T + \langle N, F_2 \rangle N + \langle B, F_2 \rangle B \end{aligned} \quad (4.7)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $\cos L_1 = \langle T, F_1 \rangle$  eşitliğinin türevi alınır ve  $\langle T, F_1 \rangle^2 + \langle N, F_1 \rangle^2 + \langle B, F_1 \rangle^2 = 1$  eşitliği kullanılır ise

$$\begin{aligned} \langle N, F_1 \rangle &= -\sin(L_1) \frac{L'_1}{\nu\kappa}, \\ \langle B, F_1 \rangle &= \sin(L_1) \sqrt{1 - \left(\frac{L'_1}{\nu\kappa}\right)^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.1) denklemi kullanılırsa, benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle T, F_2 \rangle &= \cos(2a - L_1), \\ \langle N, F_2 \rangle &= \sin(2a - L_1) \frac{L'_1}{\nu\kappa}, \\ \langle B, F_2 \rangle &= \sin(2a - L_1) \sqrt{1 - \left(\frac{L'_1}{\nu\kappa}\right)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
F_1 &= \cos L_1 T - \sin(L_1) \frac{L'_1}{\nu\kappa} N + \sin(L_1) \sqrt{1 - \left(\frac{L'_1}{\nu\kappa}\right)^2} B, \\
F_2 &= \cos(2a - L_1) T + \sin(2a - L_1) \frac{L'_1}{\nu\kappa} N \\
&\quad + \sin(2a - L_1) \sqrt{1 - \left(\frac{L'_1}{\nu\kappa}\right)^2} B
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dir. Buradan  $F_1$  ve  $F_2$  iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\langle F_1, F_2 \rangle &= \cos L_1 \cos(2a - L_1) - \frac{(L'_1)^2}{(\nu\kappa)^2} \sin L_1 \sin(2a - L_1) \\
&\quad + \frac{\sin L_1 \sin(2a - L_1)}{(\nu\kappa)^2} (\nu\kappa)^2 - (L'_1)^2 \\
&= \cos(2L_1 - 2a) - \frac{2 \sin L_1 \sin(2a - L_1) (L'_1)^2}{(\nu\kappa)^2}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

dir. Burada  $\langle F_1, F_2 \rangle = \cos(2c)$  olduğundan

$$\frac{(L'_1)^2}{(\nu\kappa)^2} = \frac{\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2c)}{\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2a)} \tag{4.10}$$

bulunur. Böylece  $\lambda_1 = \frac{L'_1}{\nu\kappa}$  ve  $\mu_1 = \sqrt{1 - \lambda_1^2}$  seçilir ve (4.8) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_1 &= \cos L_1 T - \lambda_1 \sin(L_1) N + \mu_1 \sin(L_1) B, \\
F_2 &= \cos(2a - L_1) T + \lambda_1 \sin(2a - L_1) N + \mu_1 \sin(2a - L_1) B
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Ayrıca  $F_1, F_2$  sabit olduklarından  $F_1$  in türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
F'_1 &= -(L'_1) \sin L_1 + \lambda_1 \nu\kappa \sin L_1 T \\
&\quad + (-\lambda'_1 \sin L_1 - \lambda_1 (L'_1) \cos L_1 + \nu\kappa \cos L_1 - \sqrt{1 - \lambda_1^2} \sin L_1 \nu\tau) N \\
&\quad + \left(-\frac{\lambda_1 \lambda'_1}{\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \sin L_1 + \sqrt{1 - \lambda_1^2} L'_1 \cos L_1 - \lambda_1 \nu\tau \sin L_1\right) B
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.  $F'_1 = 0$  ve  $L'_1 = \nu\kappa\lambda_1$  olduğundan

$$-\lambda'_1 \sin L_1 - \lambda_1^2 \nu\kappa \cos L_1 + \nu\kappa \cos L_1 - \nu\tau \sqrt{1 - \lambda_1^2} \sin L_1 = 0 \tag{4.11}$$

denklemi elde edilir. O halde (4.10) denkleminde türev alınırsa

$$\lambda'_1 = \frac{-\nu\kappa(1 - \lambda_1^2) \sin(2L_1 - 2a)}{\cos(2L_1 - 2a) - \cos 2a}$$

dir ve (4.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\sqrt{1 - \lambda_1^2} \sin 2a}{\cos(2L_1 - 2a) - \cos 2a} = \frac{\sqrt{\cos 2c - \cos 2a} \sin 2a}{(\cos(2L_1 - 2a) - \cos 2a)^{\frac{3}{2}}}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer olarak  $F_2' = 0$  olduğundan aynı sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Tersine (4.5) ve (4.6) denklemleri sağlansın. Buradan (4.5) den} \\ \arccos\langle T, F_1 \rangle + \arccos\langle T, F_2 \rangle &= \arccos(\cos L_1) + \arccos(\cos(2a - L_1)) \\ &= 2a \end{aligned}$$

dir. Ayrıca  $L_1 = \arccos\langle T, F_1 \rangle$  olduğundan

$$\begin{aligned} L_1' &= \frac{-\nu\kappa\langle N, F_1 \rangle}{\sqrt{1 - \langle T, F_1 \rangle^2}} \\ &= \nu\kappa\lambda_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

dir. Bu son eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle F_1, F_2 \rangle &= \cos L_1 \cos(2a - L_1) - \sin L_1 \sin(2a - L_1) \lambda_1^2 + \sin L_1 \sin(2a - L_1) \mu_1^2 \\ &= \cos(2a - 2L_1) - 2 \sin L_1 \sin(2a - L_1) \lambda_1^2 \\ &= \cos(2c) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $F_1, F_2 \in S^2$  nin sabit oldukları gösterilirse,  $\beta$  eğrisinin teğetler göstergesinin  $F_1, F_2$  odaklı küresel elips olduğu gösterilmiş olur.  $F_1$  in türevi alınır ise

$$\begin{aligned} F_1' &= -(L_1') \sin L_1 + \lambda_1 \nu \kappa \sin L_1 T \\ &\quad + (-\lambda_1' \sin L_1 - \lambda_1 (L_1') \cos L_1 + \nu \kappa \cos L_1 - \sqrt{1 - \lambda_1^2} \sin L_1 \nu \tau) N \\ &\quad + \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_1'}{\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \sin L_1 + \sqrt{1 - \lambda_1^2} L_1' \cos L_1 - \lambda_1 \nu \tau \sin L_1\right) B \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. (4.12) ve (4.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$F_1' = 0$$

bulunur. Benzer şekilde  $F_2' = 0$  dir. O halde ispat tamamlanmış olur. ■

**Teorem 4.3**  $\beta : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\beta$  bir T-konik eğridir gerek ve yeter koşul

$$(\sin L_2)F_1 + (\sin L_1)F_2 = \sin 2a T + \frac{\kappa}{\tau} \sin 2a \left(1 - \frac{(L_1')^2}{\nu^2 \kappa^2}\right) B \quad (4.13)$$

dir.

**İspat.**  $\beta$  bir T-konik eğri olsun. (4.1) eşitliğinden

$$\arccos\langle T, F_1 \rangle + \arccos\langle T, F_2 \rangle = 2a$$

dir. Buradan eşitliğin her iki tarafının türevi alınır ve  $\sin L_1 = \sqrt{1 - \langle T, F_1 \rangle^2}$ ,  $\sin L_2 = \sqrt{1 - \langle T, F_2 \rangle^2}$  eşitlikleri kullanılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} (\sin L_2)\langle T, F_1 \rangle + (\sin L_1)\langle T, F_2 \rangle &= \sin 2a, \\ (\sin L_2)\langle N, F_1 \rangle + (\sin L_1)\langle N, F_2 \rangle &= 0, \\ (\sin L_2)\langle B, F_1 \rangle + (\sin L_1)\langle B, F_2 \rangle &= \frac{\kappa}{\tau} \sin 2a \left(1 - \frac{(L'_1)^2}{\nu^2 \kappa^2}\right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

(4.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$(\sin L_2)F_1 + (\sin L_1)F_2 = \sin 2aT + \frac{\kappa}{\tau} \sin 2a \left(1 - \frac{(L'_1)^2}{\nu^2 \kappa^2}\right) B$$

dir.

Tersine, (4.13) eşitliği sağlansın.  $F_1$  ve  $F_2$  birim olduklarından

$$\begin{aligned} F_1 &= \cos(L_1) T - \sin(L_1) \frac{L'_1}{\nu \kappa} N + \sin(L_1) \sqrt{1 - \left(\frac{L'_1}{\nu \kappa}\right)^2} B, \\ F_2 &= \cos(L_2) T - \sin(L_2) \frac{L'_2}{\nu \kappa} N + \sin(L_2) \sqrt{1 - \left(\frac{L'_2}{\nu \kappa}\right)^2} B \end{aligned} \quad (4.15)$$

dir. Burada (4.15) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\sin L_2)F_1 + (\sin L_1)F_2 &= \sin(L_1 + L_2) T - \sin(L_1) \sin(L_2) \left[\frac{L'_1}{\nu \kappa} + \frac{L'_2}{\nu \kappa}\right] N \\ &\quad + \sin(L_1) \sin(L_2) \left[\left(1 - \frac{(L'_1)^2}{\nu^2 \kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{(L'_2)^2}{\nu^2 \kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] B \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.13) ve (4.16) eşitliklerinin sol taraflarının eşitliğinden

$$L_1 + L_2 = 2a$$

bulunur. Böylece

$$(\sin L_2)F_1 + (\sin L_1)F_2 = \sin(2a) T + 2 \sin(L_1) \sin(L_2) \left(1 - \frac{(L'_1)^2}{\nu^2 \kappa^2}\right) B \quad (4.17)$$

olur. (4.13) ve (4.17) eşitliklerinin sol taraflarının eşitliği kullanılırsa

$$(\sin L_2)F_1 + (\sin L_1)F_2 = \sin(2a) T + \frac{\tau}{\kappa} \frac{4 \sin^2(L_1) \sin^2(L_2)}{\sin(2a)} B. \quad (4.18)$$

Buradan (4.18) eşitliğinin normu alınırsa

$$\begin{aligned} \sin^2 L_1 + \sin^2 L_2 + 2 \sin(2c) &= \sin^2(2a) + \frac{\tau^2}{\kappa^2} \frac{16 \sin^4 L_1 \sin^4 L_2}{\sin^2(2a)} \\ &= \sin^2 L_1 \cos^2 L_2 + \sin^2 L_2 \cos^2 L_1 \\ &\quad + 2 \sin L_1 \cos L_2 \sin L_2 \cos L_1 \\ &\quad + \frac{\tau^2}{\kappa^2} \frac{16 \sin^4 L_1 \sin^4 L_2}{\sin^2(2a)} \end{aligned}$$



dir. Böylece gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\sqrt{\cos(2c) - \cos(2a)}}{(\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2a))^{\frac{3}{2}}} \sin(2a) \quad (4.19)$$

olarak bulunur.  $L_1 + L_2 = 2a$ , (4.15), (4.19) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_1 &= \cos L_1 T - \lambda_1 \sin L_1 N + \mu_1 \sin L_1 B, \\ F_2 &= \cos(2a - L_1) T - \lambda_1 \sin(2a - L_1) N + \mu_1 \sin(2a - L_1) B, \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. O halde Teorem 4.2 gereği  $\beta$  bir T-konik eğridir. ■

Teorem 4.3 ve Teorem 4.2 un bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.4** Teorem 4.3 de  $F_1 = F_2 = F$  olması durumunda  $\beta$  eğrisi, eksenini  $F$  olan bir genel helistir.

**İspat.** Teorem 4.3 de  $F_1 = F_2 = F$  olsun. Böylece

$$F = \cos a T + \cos a \frac{\kappa}{\tau} B$$

elde edilir.  $F$ ,  $\beta$  eğrisinin teğetler göstergesi ile iç çarpılırsa

$$\langle F, T \rangle = \cos a = sbt$$

dir.  $\beta$  eğrisinin teğetler göstergesi sabit bir doğrultu ile sabit açı yapar. Bunun anlamı ise  $\beta$  eğrisi, eksenini  $F$  olan bir genel helistir. ■

**Sonuç 4.1** Genel helisler özel T-konik eğrilerdir.

**Sonuç 4.2**  $\beta$  bir T-konik eğri ise

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\sqrt{\cos(2c) - \cos(2a)}}{(\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2a))^{\frac{3}{2}}} \sin(2a)$$

veya

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\sqrt{\cos(2c) - \cos(2a)}}{(\cos(2a - 2L_2) - \cos(2a))^{\frac{3}{2}}} \sin(2a)$$

dir.

**Sonuç 4.3**  $\beta$  eğrisinin teğetler göstergesinin geodezik eğriliği, (4.6) ile verilen  $\frac{\tau}{\kappa}$  oranına eşittir [8].

**Teorem 4.5**  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğri olsun.  $\beta$  bir T-konik eğri ise

$$\frac{d}{dL_1} \left[ \frac{d \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}}}{dL_1} \right] + 4 \left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right] = sbt \quad (4.21)$$

dir.

**İspat.**  $\beta$  bir T-konik eğri olsun. Burada

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\sqrt{\cos(2c) - \cos(2a)}}{(\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2a))^{\frac{3}{2}}} \sin(2a)$$

dir. Buradan  $\frac{\kappa}{\tau}$  eşitliği (4.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL_1} \left[ \frac{d \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}}}{dL_1} \right] + 4 \left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right] &= \frac{-4 \cos(2L_1 - 2a)}{((\cos(2c) - \cos(2a)) \sin^2(2a))^{\frac{1}{3}}} \\ &+ \frac{\cos(2L_1 - 2a) - \cos(2a)}{((\cos(2c) - \cos(2a)) \sin^2(2a))^{\frac{1}{3}} - \cos(2a)} \\ &= \frac{-4 \cos(2L_1 - 2a)}{((\cos(2c) - \cos(2a)) \sin^2(2a))^{\frac{1}{3}}} \\ &= \text{sabit} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Theorem 4.5 aşağıdaki teoremde olduğu gibi de verilebilir.

**Teorem 4.6**  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğri olsun.  $\beta$  bir T-konik eğri ise

$$\frac{1}{(\nu\kappa\lambda)^2} \left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right]'' - \frac{(\nu\kappa\lambda)'}{(\nu\kappa\lambda)^2} \left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right]' + 4 \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} = sbt \quad (4.22)$$

dir.

## 4.2 B-konik Eğri

$\zeta$  bir uzay eğrisi,  $\zeta$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsionu  $\tau$  olsun.

Ayrıca,  $K_1, K_2$  fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned} K_1 : \quad I \subset \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi) \\ K_1(t) &= \arccos\langle B(t), E_1 \rangle \end{aligned}$$

ve

$$K_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi).$$

$$K_2(t) = \arccos\langle B(t), E_2 \rangle$$

Burada  $E_1, E_2 \in S^2$  sabit iki noktadır.

**Tanım 4.2** Binormaller göstergesi  $E_1, E_2$  odaklı küresel elips olan eğriye B-konik eğri denir.

Yani  $\zeta$  bir B-konik eğri ise

$$K_1 + K_2 = 2b \quad (4.23)$$

dir. Burada  $\langle E_1, E_2 \rangle = \cos(2d)$  ve  $0 < d < b < \frac{\pi}{2}$ .

B-konik eğriler için aşağıdaki teoremleri verebiliriz. Ayrıca B-konik eğriler için verilecek teoremler, T-konik eğriler için verilen teoremler ile benzer şekilde ispatlanabileceği için ispatsız olarak verilecektir.

**Teorem 4.7**  $\zeta$  bir B-konik eğridir gerek ve yeter koşul

$$\frac{\langle N, E_1 \rangle}{\langle N, E_2 \rangle} = -\frac{\sin K_1}{\sin K_2} \quad (4.24)$$

dir.

**Teorem 4.8**  $\zeta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\zeta$  bir B-konik eğridir gerek ve yeter koşul

$$E_1 = \mu_2 \sin K_1 T - \lambda_2 \sin K_1 N + \cos K_1 B,$$

$$E_2 = \mu_2 \sin(2b - K_1) T - \lambda_2 \sin(2b - K_1) N + \cos(2b - K_1) B,$$

ve

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sqrt{\cos(2d) - \cos(2b)}}{(\cos(2K_1 - 2b) - \cos(2b))^{\frac{3}{2}}} \sin(2b) \quad (4.25)$$

dir. Burada  $\lambda_2 = \sqrt{\frac{\cos(2K_1 - 2b) - \cos(2d)}{\cos(2K_1 - 2b) - \cos(2b)}}$ ,  $\mu_2 = \sqrt{\frac{\cos(2d) - \cos(2b)}{\cos(2K_1 - 2b) - \cos(2b)}}$  dir.

**Teorem 4.9**  $\zeta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\zeta$  bir B-konik eğridir gerek ve yeter koşul

$$(\sin K_2)E_1 + (\sin K_2)E_2 = \frac{\tau}{\kappa} \sin 2b \left( 1 - \frac{(L'_1)^2}{\nu^2 \kappa^2} \right) T + \sin 2b B \quad (4.26)$$

dir.

Teorem 4.9 nin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.10** Teorem 4.9 de  $E_1 = E_2 = E$  olması durumunda  $\zeta$  eğrisi eksenini  $E$  olan bir genel helistir.

**Sonuç 4.4**  $\zeta$  bir B-konik eğri ise

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sqrt{\cos(2d) - \cos(2b)}}{(\cos(2K_1 - 2b) - \cos(2b))^{\frac{3}{2}}} \sin(2b)$$

veya

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sqrt{\cos(2d) - \cos(2b)}}{(\cos(2b - 2K_2) - \cos(2b))^{\frac{3}{2}}} \sin(2b)$$

dir.

**Sonuç 4.5**  $\zeta$  nin binormaller göstergesinin geodezik eğriliği, (4.25) ile verilen  $\frac{\tau}{\kappa}$  oranına eşittir [8].

**Teorem 4.11**  $\beta$  bir T-konik eğridir gerek ve yeter koşul  $\beta$  bir B-konik eğridir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\cos b \tan c}{\sin a} \mathcal{A}_{\frac{\pi}{2}}[F_1] + O(t) \\ E_2 &= \frac{\cos b \tan c}{\sin a} \mathcal{A}_{\frac{\pi}{2}}[F_2] + O(t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

ve

$$K_1 = b - \arccos \left[ \frac{\sin c \sin b \cos(a - L_1)}{\sqrt{\sin(2a - L_1) \sin L_1}} \right] \quad (4.28)$$

dir. Burada  $\mathcal{A}_{\frac{\pi}{2}}$ ,  $\frac{F_1+F_2}{\|F_1+F_2\|}$  etrafında  $\frac{\pi}{2}$  radyanlık dönme matrisi,

$$\begin{aligned} O(t) &= \left( \frac{\cos b \sin b \tan c \sqrt{\sin(2a - L_1) \sin L_1 - \sin^2 b \sin^2 c \cos^2(L_1 - a)}}{\cos a \sqrt{\sin(2a - L_1) \sin L_1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos b \sin b \sin c \cos(L_1 - a)}{\cos a \sqrt{\sin(2a - L_1) \sin L_1}} \right) B \end{aligned} \quad (4.29)$$

dir.

**İspat.**  $\beta$  T-konik eğri olsun.  $F_1$  in  $\frac{F_1+F_2}{\|F_1+F_2\|}$  etrafında  $\frac{\pi}{2}$  kadarlık dönme matrisi

$$\mathcal{A}_{\frac{\pi}{2}}[F_1] = \frac{1}{2} \left( (F_1 + F_2) + \frac{1}{\cos c} (F_1 \wedge F_2) \right)$$

dir. Böylece (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\cos b \tan c}{\sin a} \mathcal{A}_{\frac{\pi}{2}}[F_1] + O(t) &= \frac{\sqrt{2} \cos b}{2\sqrt{\cos(2b) - \cos(2a)}} \left( (F_1 + F_2) + \frac{1}{\cos c} (F_1 \wedge F_2) \right) \\
&+ O(t) \\
&= \mu_2 \sin \left( b - \arccos \left[ \frac{\sin c \sin b \cos(a - L_1)}{\sqrt{\sin(2a - L_1) \sin L_1}} \right] \right) \\
&+ \lambda_2 \sin \left( b - \arccos \left[ \frac{\sin c \sin b \cos(a - L_1)}{\sqrt{\sin(2a - L_1) \sin L_1}} \right] \right) \\
&+ \cos \left( b - \arccos \left[ \frac{\sin c \sin b \cos(a - L_1)}{\sqrt{\sin(2a - L_1) \sin L_1}} \right] \right)
\end{aligned}$$

dir. Burada  $\mu_2 = \frac{\cot a \sin b}{\sqrt{\cos^2 b + \cos^2(L_1 - a) \sin^2 b \sin^2 c \csc(2a - L_1) \csc L_1}}$ ,  $\mu_2^2 + \lambda_2^2 = 1$  dir. (4.30) da (4.28) denklemini,  $\cos a = \cos b \cos c$  ve  $\sin b = \sin a \sin d$  eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\cos b \tan c}{\sin a} \mathcal{A}_{\frac{\pi}{2}}[F_1] + O(t) &= \frac{\sqrt{\cos(2d) - \cos(2b)}}{\sqrt{\cos(2K_1 - 2b) - \cos(2a)}} \sin K_1 \quad T \\
&- \frac{\sqrt{\cos(2K_1 - 2b) - \cos(2d)}}{\sqrt{\cos(2K_1 - 2b) - \cos(2a)}} \sin K_1 \quad N \\
&+ \cos K_1 \quad B \\
&= E_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde  $E_2$  bulunabilir. Ayrıca, (4.28),  $\cos a = \cos b \cos c$  ve  $\sin b = \sin a \sin d$  eşitlikleri (4.6) denkleminde kullanılırsa

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sqrt{\cos(2d) - \cos(2b)}}{(\cos(2K_1 - 2b) - \cos(2b))^{\frac{3}{2}}} \sin(2b)$$

elde edilir. O halde Teorem 4.8 gereği  $\beta$  eğrisinin binormaller göstergesi  $E_1, E_2$  odaklı küresel elipstir. Yani, B-konik eğridir.

Tersine (4.27)  $\frac{F_1 + F_2}{\|F_1 + F_2\|} = \frac{E_1 + E_2}{\|E_1 + E_2\|}$  ve  $F_1 = \frac{\sin a}{\cos b \tan c} \mathcal{A}_{-\frac{\pi}{2}}[F_1 - O(t)]$  eşitlikleri ile ispat ilk bölüme benzer şekilde yapılabilir. ■

### 4.3 N-konik Eğri

$\psi$  birim hızlı bir uzay eğrisi,  $\psi$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsionu  $\tau$  olsun.

Ayrıca,  $M_1, M_2$  fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned} M_1 : \quad I \subset \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi) \\ M_1(t) &= \arccos\langle N(t), R_1 \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} M_2 : \quad I \subset \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi). \\ M_2(t) &= \arccos\langle N(t), R_2 \rangle \end{aligned}$$

Burada  $R_1, R_2 \in S^2$  sabit iki noktadır.

**Tanım 4.3** Normaller göstergesi  $R_1, R_2$  odaklı küresel elips olan eğriye N-konik eğri denir.

Yani  $\zeta$  bir N-konik eğri ise

$$M_1 + M_2 = 2f \quad (4.30)$$

dir. Burada  $\langle R_1, R_2 \rangle = \cos(2e)$ ,  $0 < e < f < \frac{\pi}{2}$ .

N-konik eğriler için aşağıdaki teoremleri verebiliriz. Ayrıca N-konik eğriler için verilecek bazı teoremler, N-konik eğriler için verilen teoremler ile benzer şekilde ispatlanabileceği için ispatsız olarak verilecektir.

**Teorem 4.12**  $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\psi$  bir N-konik eğridir gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \sin M_1 (\kappa \lambda_3 \mp \tau \mu_3) T - \cos M_1 N \\ &+ \sin M_1 \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2 + \tau^2} (\kappa \lambda_3 \mp \tau \mu_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} B, \\ R_2 &= -\frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \sin(2f - M_1) (\kappa \lambda_3 \mp \tau \mu_3) T - \cos(2f - M_1) N \\ &+ \sin(2f - M_1) \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2 + \tau^2} (\kappa \lambda_3 \mp \tau \mu_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} B, \end{aligned} \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' &= \cot M_1 \left( \frac{\kappa}{\kappa \mu_3 - \lambda_3 \tau} - \frac{\lambda_3 (\lambda_3 \kappa + \mu_3 \tau)}{\kappa \mu_3 - \lambda_3 \tau} \right) \\ &- \frac{\sin(2f - 2M_1)}{2 \sin M_1 \sin(2f - M_1)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

dir. Burada  $\lambda_3 = \sqrt{\frac{\cos(2M_1 - 2f) - \cos(2e)}{\cos(2M_1 - 2f) - \cos(2f)}}$ ,  $\mu_3 = \sqrt{\frac{\cos(2e) - \cos(2f)}{\cos(2M_1 - 2f) - \cos(2f)}}$  dir.

**İspat.**  $\psi$  bir N-konik eğri olsun.

$$\begin{aligned} R_1 &= \langle T, R_1 \rangle T + \langle N, R_1 \rangle N + \langle B, R_1 \rangle B, \\ R_2 &= \langle T, R_2 \rangle T + \langle N, R_2 \rangle N + \langle B, R_2 \rangle B \end{aligned} \quad (4.33)$$

olarak alınabilir. Burada  $\cos M_1 = \langle T, R_1 \rangle$  eşitliğinin türevi alınır ve  $\langle T, R_1 \rangle^2 + \langle N, R_1 \rangle^2 + \langle B, R_1 \rangle^2 = 1$  kullanılır ise

$$R_1 = \sin M_1 \frac{\kappa M_1' \mp \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - (M_1')^2}}{\kappa^2 + \tau^2} T \cos(M_1) N \quad (4.34)$$

$$+ \sin(M_1) \sqrt{1 - \left( \frac{\kappa M_1' \mp \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - (M_1')^2}}{\kappa^2 + \tau^2} \right)^2} B,$$

$$R_2 = \sin(2f - M_1) \frac{\kappa M_1' \mp \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - (M_1')^2}}{\kappa^2 + \tau^2} T \cos(2f - M_1) N \quad (4.35)$$

$$+ \sin(2f - L_1) \sqrt{1 - \left( \frac{\kappa M_1' \mp \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - (M_1')^2}}{\kappa^2 + \tau^2} \right)^2} B,$$

$$(4.36)$$

bulunur.  $R_1$  ve  $R_2$  iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle R_1, R_2 \rangle &= \cos M_1 \cos(2f - M_1) \\ &+ \sin M_1 \sin(2f - M_1) \left( \frac{-\kappa M_1' \mp \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - (M_1')^2}}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \\ &\quad \left( \frac{\kappa M_1' \mp \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - (M_1')^2}}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \\ &+ \sin M_1 \sin(2f - M_1) \left[ \left( 1 - \left( \frac{\kappa M_1' \mp \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - (M_1')^2}}{\kappa^2 + \tau^2} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. \left( 1 - \left( \frac{-\kappa M_1' \mp \tau \sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - (M_1')^2}}{\kappa^2 + \tau^2} \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \cos(2M_1 - 2f) - 2 \sin M_1 \sin(2f - M_1) \left( \frac{(M_1')^2}{\kappa^2 + \tau^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $\langle R_1, R_2 \rangle = \cos(2e)$  eşitliği kullanılırsa

$$\frac{(L_1')^2}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\cos(2M_1 - 2f) - \cos(2e)}{\cos(2M_1 - 2f) - \cos(2f)} \quad (4.37)$$

bulunur. Burada  $\lambda_3^2 = \frac{(M_1')^2}{\kappa^2 + \tau^2}$  ve  $\mu_3 = \sqrt{1 - \lambda_3^2}$  seçilir ve (4.34) denklemlerinde

kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \sin M_1 (\kappa \lambda_3 \mp \tau \mu_3) T - \cos M_1 N \\
&\quad + \sin M_1 \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2 + \tau^2} (\kappa \lambda_3 \mp \tau \mu_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} B, \\
R_2 &= -\frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \sin(2f - M_2) (\kappa \lambda_3 \mp \tau \mu_3) T - \cos(2f - M_2) N \\
&\quad + \sin(2f - M_2) \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2 + \tau^2} (\kappa \lambda_3 \mp \tau \mu_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} B,
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Ayrıca  $R_1, R_2$  sabit olduklarından  $R_1$  in türevi alınır ve  $(L'_1)^2 = (\kappa^2 + \tau^2)\lambda_3$  eşitliği kullanılırsa

$$\left( \frac{\sin M_1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\lambda_3 \kappa \mp \sqrt{1 - \lambda^2} \tau) \right)' = \kappa \cos M_1$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' &= \cot M_1 \left( \frac{\kappa}{\kappa \mu_3 - \lambda_3 \tau} - \frac{\lambda_3 (\lambda_3 \kappa + \mu_3 \tau)}{\kappa \mu_3 - \lambda_3 \tau} \right) \\
&\quad - \frac{\sin(2f - 2M_1)}{2 \sin M_1 \sin(2f - M_1)}
\end{aligned}$$

dir.

Tersine, (4.38) ve (4.32) denklemleri sağlansın. Buradan (4.38) den

$$\arccos \langle T, R_1 \rangle + \arccos \langle T, R_2 \rangle = 2f$$

bulunur. Böylece  $R_1$  ve  $R_2$  vektörlerinin sabit oldukları gösterilirse,  $\psi$  eğrisinin normaller göstergesinin  $R_2, R_2$  odaklı küresel elips olduğu gösterilmiş olur.  $R_1$  in türevi alınır,  $(L'_1)^2 = (\kappa^2 + \tau^2)\lambda_3$  ve (4.32) eşitlikleri kullanılırsa

$$R'_1 = 0$$

dir. Benzer şekilde  $R_2 = 0$  dır. O halde ispat tamamlanmış olur. ■

**Teorem 4.13** Teorem 4.12 de  $R_1 = R_2$  olması durumunda,  $\psi$  bir slant helistir.

**İspat.** Teorem 4.12 de  $R_1 = R_2$  seçilirse  $M_1 = M_2 = f$  bulunur. Böylece  $\lambda_3 = 0$ ,  $\mu_3 = 1$  olur (4.32) denklemini

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' = \cot f$$



olarak bulunur. Yani  $\psi$  eğrisinin normaller göstergesinin geodezik eğriliği sabittir. O halde  $\psi$  bir slant helisdir. ■

**Sonuç 4.6** Slant helisler özel N-konik eğrilerdir.

**Sonuç 4.7**  $\psi$  bir N-konik eğri ise

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \cot M_1 \left( \frac{\kappa}{\kappa\mu_3 - \lambda_3\tau} - \frac{\lambda_3(\lambda_3\kappa + \mu_3\tau)}{\kappa\mu_3 - \lambda_3\tau} \right) - \frac{\sin(2f - 2M_1)}{2 \sin M_1 \sin(2f - M_1)}$$

veya

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \cot(2a - M_2) \left( \frac{\kappa}{\kappa\mu_3 - \lambda_3\tau} - \frac{\lambda_3(\lambda_3\kappa + \mu_3\tau)}{\kappa\mu_3 - \lambda_3\tau} \right) - \frac{\sin(2M_2 - 2f)}{2 \sin M_2 \sin(2f - M_2)}$$

dir.

**Önerme 4.1**  $\psi$  bir N-konik eğridir gerek ve yeter koşul  $\psi$  eğrisinin  $T$  teğetler göstergesi T-konik eğri ve  $B$  binormaller göstergesi B-konik eğridir.

**İspat.**  $\psi$  eğrisi bir N-konik eğri,  $\psi$  nin teğetler göstergesi  $\psi_T$  ve  $\psi_T$  nin Frenet çatısı  $\{T_T, N_T, B_T\}$  olsun. Buradan

$$\arccos\langle N, R_1 \rangle + \arccos\langle N, R_2 \rangle = 2f$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \psi_T &= T, \\ \psi_T' &= \kappa N, \\ \|\psi_T'\| T_T &= \kappa N \end{aligned}$$

ve

$$\|\psi_T'\| = \kappa$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\arccos\langle T_T, R_1 \rangle + \arccos\langle T_T, R_2 \rangle = 2f$$

dir. Yani  $\psi$  eğrisinin  $\psi_T$  teğetler göstergesi, odakları  $R_1, R_2$  olan küresel elipstir. Benzer şekilde  $\psi_B$  binormaller göstergesinin B-konik eğri olduğu gösterilebilir. ■

**Sonuç 4.8** (4.32) eşitliği,  $\psi$  eğrisinin normaller göstergesinin geodezik eğriliğini ifade eder [8].

#### 4.4 T-konik Eğri Ailesi

Önceki bölümde gösterdik ki T-konik eğriler aynı zamanda B-konik eğrilerdir. Böylece T-konik eğri ailesi ele alındığın da B-konik eğri ailesi de ele alınmış olmaktadır.

Bu bölümde, T-konik eğri ailesi için Parametrik denklemler verilecek ve bu eğri ailesinin özellikleri incelenecektir.

**Teorem 4.14**  $\alpha_{a,b} : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\alpha_{a,b}(t) = \left( \frac{1}{3}(\cos(2a) - \cos(2b)) \sin a \cos^3 t, \frac{1}{3}(-\cos(2a) + \cos(2b)) \sin b \sin^3 t, \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 + \cos(2a) \cos^2 t + \cos(2b) \sin^2 t)^{\frac{3}{2}} \right)$$

parametrik denklemlerle verilen bir eğri ailesi olsun.  $\alpha_{a,b}$  bir T-konik eğridir. Burada  $F_1^T = (\sin c, 0, \cos c)$ ,  $F_2^T = (-\sin c, 0, \cos c)$ ,  $0 < c < a < \frac{\pi}{2}$  ve  $\cos c \cos b = \cos a$  dir.

**İspat.**  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin küresel göstergeleri  $T$ ,  $N$ ,  $B$ , sırasıyla,

$$T(t) = \left( \sin a \cos t, \sin b \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t + \cos(2b) \sin^2 t} \right),$$

$$N(t) = \frac{\sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t + \cos(2b) \sin^2 t}}{\sqrt{1 - \cos(2b) \cos(2t) + \cos(2a)(-\cos(2b) + \cos(2t))}} \left( \sqrt{2} \sin a \sin t, -\sqrt{2} \sin b \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\cos(2a) - \cos(2b)) \sin(2t)}{\sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t + \cos(2b) \sin^2 t}} \right),$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(2b) \cos(2t) + \cos(2a)(-\cos(2b) + \cos(2t))}} \left( -2 \cos^2 a \sin b \cos t, -2 \cos^2 b \sin a \sin t, \frac{2}{\sqrt{2}} \sin a \sin b \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t + \cos(2b) \sin^2 t} \right).$$

olarak elde edilir.

Şimdi  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi  $T$  nin herhangi bir  $P$  noktasının  $F_1^T = (\sin c, 0, \cos c)$  ve  $F_2^T = (-\sin c, 0, \cos c)$  noktalarına yay uzaklıkları toplamı  $2a$  olduğunu göstereceğiz.

$\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $T$  teğetler göstergesinin herhangi bir  $P$  noktası için

$$\langle \vec{F}_1^T, \vec{OP} \rangle = \cos(\widehat{F_1^T OP}) = \cos(|F_1^T P|),$$

$$\langle \vec{F}_2^T, \vec{OP} \rangle = \cos(\widehat{F_2^T OP}) = \cos(|F_2^T P|),$$

ve

$$\begin{aligned}\sin(\widehat{F_1^T OP}) &= \sqrt{1 - \langle \vec{F_1^T}, \vec{OP} \rangle^2}, \\ \sin(\widehat{F_2^T OP}) &= \sqrt{1 - \langle \vec{F_2^T}, \vec{OP} \rangle^2}\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\cos(|\widehat{F_1^T P}| + |\widehat{F_2^T P}|) &= \cos(|\widehat{F_1^T P}|) \cos(|\widehat{F_2^T P}|) - \sin(|\widehat{F_1^T P}|) \sin(|\widehat{F_2^T P}|) \\ &= \langle (\sin c, 0, \cos c), (-\sin a \cos t_0, -\sin b \sin t_0, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t_0 + \cos(2b) \sin^2 t_0}) \rangle \\ &\quad \langle (-\sin c, 0, \cos c), (-\sin a \cos t_0, -\sin b \sin t_0, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t_0 + \cos(2b) \sin^2 t_0}) \rangle \\ &= \sqrt{1 - \langle (\sin c, 0, \cos c), (-\sin a \cos t_0, -\sin b \sin t_0, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t_0 + \cos(2b) \sin^2 t_0}) \rangle^2} \\ &\quad \sqrt{1 - \langle (-\sin c, 0, \cos c), (-\sin a \cos t_0, -\sin b \sin t_0, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t_0 + \cos(2b) \sin^2 t_0}) \rangle^2} \\ &= (-\sin c \sin a \cos t_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos c \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t_0 + \cos(2b) \sin^2 t_0}) \\ &\quad (\sin c \sin a \cos t_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos c \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t_0 + \cos(2b) \sin^2 t_0}) \\ &= \sqrt{1 - (-\sin c \sin a \cos t_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos c \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t_0 + \cos(2b) \sin^2 t_0})^2} \\ &\quad \sqrt{1 - (\sin c \sin a \cos t_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos c \sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t_0 + \cos(2b) \sin^2 t_0})^2}\end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\cos a = \cos b \cos c$  eşitliği kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\cos(|\widehat{F_1^T P}| + |\widehat{F_2^T P}|) &= \cos(|\widehat{F_1^T P}|) \cos(|\widehat{F_2^T P}|) - \sin(|\widehat{F_1^T P}|) \sin(|\widehat{F_2^T P}|) \\ &= \cos^2 a + \sin^2 c \cos^2 t - \sin^2 a - \sin^2 c \cos^2 t \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos(2a)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde  $T$  teğetler göstergesi, odakları  $F_1^T$  ve  $F_2^T$  olan bir küresel elipstir. ■

**Teorem 4.15**  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $T$  teğetler göstergesi,  $S^2$  ile

$$\frac{x^2}{\tan^2 a} + \frac{y^2}{\tan^2 b} = z^2, \quad z > 0 \quad (4.38)$$

eliptik konisinin arakesit eğrisidir.

**İspat.**  $P(x, y, z)$ ,  $\alpha_{a,b}$  nin  $T$  teğetler göstergesi üzerinde bir nokta ve

$F_1^T = (\sin c, 0, \cos c)$ ,  $F_2^T = (-\sin c, 0, \cos c)$ ,  $T$  nin odak noktaları olsun. Böylece

$$\begin{aligned}\cos(|\widehat{F_1^T P}|) &= x \sin c + z \cos c, & \sin(|\widehat{F_1^T P}|) &= \sqrt{1 - (x \sin c + z \cos c)^2} \\ \cos(|\widehat{F_2^T P}|) &= -x \sin c + z \cos c, & \sin(|\widehat{F_2^T P}|) &= \sqrt{1 - (-x \sin c + z \cos c)^2}\end{aligned}$$

dir.  $\cos(|\widehat{F_1^T P}| + |\widehat{F_2^T P}|) = \cos(2a)$  olduğu dikkate alınırsa

$$z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c - \cos(2a) = \sqrt{(1 - (x \sin c + z \cos c)^2)(1 - (-x \sin c + z \cos c)^2)}$$

biçiminde bulunur. Son eşitliğin her iki tarafın karesi alınır ve düzenlenirse

$$-2 \cos(2a)(z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c) + \cos^2(2a) = 1 - 2(x^2 \sin^2 c + z^2 \cos^2 c)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{x^2}{\sin^2 a / \sin^2 c} + \frac{y^2}{\cos^2 a / \cos^2 c} = 1 \quad (4.39)$$

dir.  $\cos a = \cos b \cos c$  ve  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{x^2}{\sin^2 a / \sin^2 c} + \frac{y^2}{\cos^2 b} = x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.40)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\frac{x^2}{\tan^2 a} + \frac{y^2}{\tan^2 b} = z^2 \quad (4.41)$$

bulunur. ■

$\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $T$  teğetler göstergesi  $a = \pi/3$ ,  $b = \pi/4$  değerleri için Şekil 4.1(a) da gösterilmiştir.

**Teorem 4.16**  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $B$  binormaller göstergesi, odak noktaları

$F_1^B = (0, \cos d, \sin d)$ ,  $F_2^B = (0, -\cos d, \sin d)$  olan bir elipstir. Burada  $0 < d < b < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin b = \sin a \sin d$  dir.

**İspat.**  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $B$  binormaller göstergesinin herhangi bir  $P$  noktası için

$$\langle \vec{F_1^B}, \vec{OP} \rangle = \cos(\widehat{F_1^B OP}) = \cos(|\widehat{F_1^B P}|),$$

$$\langle \vec{F_2^B}, \vec{OP} \rangle = \cos(\widehat{F_2^B OP}) = \cos(|\widehat{F_2^B P}|),$$

ve

$$\sin(\widehat{F_1^B OP}) = \sqrt{1 - \langle \vec{F_1^B}, \vec{OP} \rangle^2},$$

$$\sin(\widehat{F_2^B OP}) = \sqrt{1 - \langle \vec{F_2^B}, \vec{OP} \rangle^2}$$

dir. Böylece  $\sin b = \sin a \sin d$  eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \cos(|\widehat{F_1^B P}| + |\widehat{F_2^B P}|) &= \cos(|\widehat{F_1^B P}|) \cos(|\widehat{F_2^B P}|) - \sin(|\widehat{F_1^B P}|) \sin(|\widehat{F_2^B P}|) \\ &= \cos^2 b + \sin^2 d \cos^2 t - \sin^2 b - \sin^2 d \cos^2 t \\ &= \cos^2 b - \sin^2 b \\ &= \cos(2b) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde  $B$  binormaller göstergesi, odakları  $F_1^B$  ve  $F_2^B$  olan bir küresel elipstir. ■

**Sonuç 4.9**  $\alpha_{a,b}$  eğrisi için  $a + b = \frac{\pi}{2}$  ise  $c + d = \frac{\pi}{2}$  olduğundan binormaller göstergesinin odakları  $F_1^B = (0, \sin c, \cos c)$  ve  $F_2^B = (0, -\sin c, \cos c)$  olacak şekilde yazılabilir.

**Teorem 4.17**  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $B$  binormaller göstergesi,  $S^2$  ile

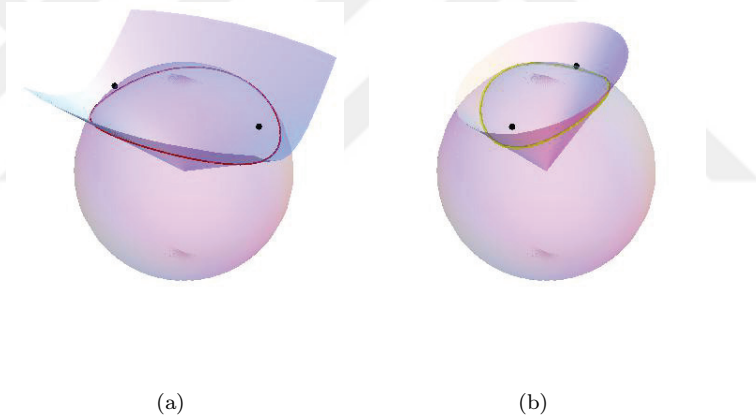
$$\frac{x^2}{\cot^2 a} + \frac{y^2}{\cot^2 b} = z^2, \quad z > 0 \quad (4.42)$$

eliptik konisinin arakesit eğrisidir.

**İspat.** Teorem 4.16 ün ispatı Teorem 4.14 in ispatına benzer olarak yapılabilir.

■

$\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $B$  binormaller göstergesi  $a = \pi/3$ ,  $b = \pi/4$  değerleri için Şekil 4.1(b) de gösterilmiştir.



Şekil 4.1:  $a = \frac{\pi}{3}$ ,  $b = \frac{\pi}{4}$  değerleri için  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin binormaller göstergesi(b)

**Teorem 4.18**  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $N$  normaller göstergesi,  $S^2$  ile tepe noktası orijin olan

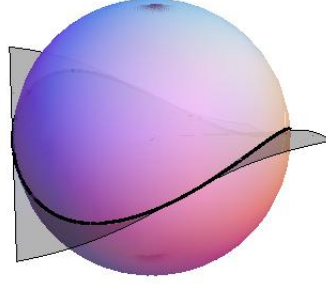
$$z = -\frac{xy(\cos(2a) - \cos(2b))}{\sqrt{2(y^2 \sin^2 a + x^2 \sin^2 b)\left(1 + \frac{\cos(2b) \sin^2 b}{\sin^2 a + \sin^2 b} + \frac{y^2 \cos(2a)}{y^2 + x^2 \csc^2 a + \sin^2 b}\right)}}$$

kuartik koni yüzeyinin arakesit eğrisidir.

**İspat.** Teorem 4.18 in ispatı, Teorem 4.14 in ispatına benzer olarak yapılabilir.

■

$\alpha_{a,b}$  eğrisinin normaller göstergesi  $a = \pi/3$ ,  $b = \pi/4$  değerleri için Şekil 4.2 de gösterilmiştir.



Şekil 4.2:  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin asli normaller göstergesi (tepe noktası orijin olan kuartik koni ile kürenin arakesiti)

**Teorem 4.19**  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $N$  normaller göstergesi,  $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$  ile tepe noktası  $(0, 0, 1)$  olan

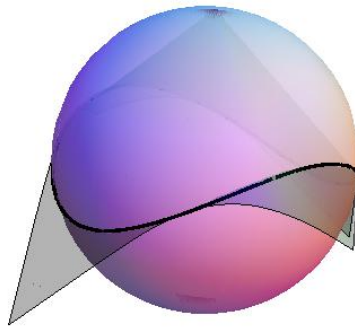
$$z-1 = \frac{(x^2 y (\cos(2a) - \cos(2b)) - \sqrt{x^2 + y^2 - y^2} \cos(2a) - x^2 \cos(2b)) \sqrt{x^2 + y^2 + y^2} \cos(2a) + x^2 \cos(2b)}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 (2y^2 \cos^2 a \sin^2 a + (x^2 + y^2 \cos(2b)) \sin^2 b)}}$$

kuartik koni yüzeyinin arakesit eğrisidir.

**İspat.** Teorem 4.19 in ispatı, Teorem 4.14 in ispatına benzer olarak yapılabilir.

■

$\alpha_{a,b}$  eğrisinin normaller göstergesi  $a = \pi/3$ ,  $b = \pi/4$  değerleri için Şekil 4.3 de gösterilmiştir.



Şekil 4.3:  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin asli normaller göstergesi (tepe noktası  $z = (0, 0, 1)$  olan kuartik koni ile kürenin arakesiti)

**Teorem 4.20**  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin  $N$  normaller göstergesi,  $S^2$  ile

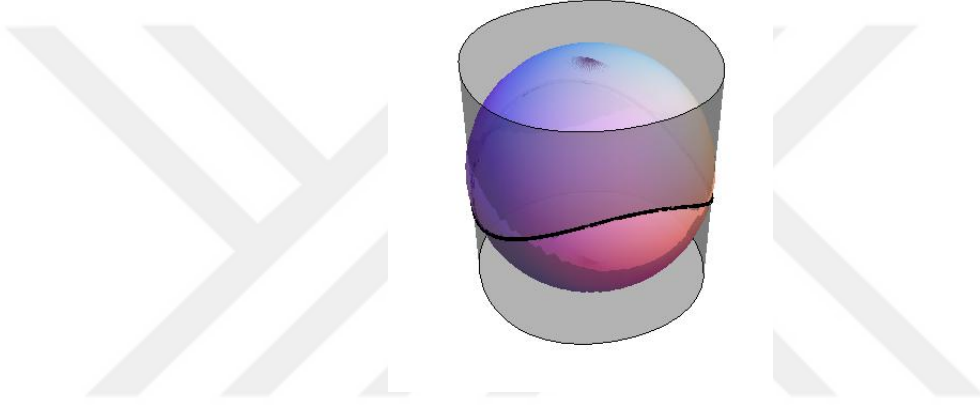
$$\cos^2 b x^4 - \cos^2 b x^2 + \cos^2 a \csc^2 b \sin^2 a y^4 - \cos^2 a \csc^2 b \sin^2 a y^2 \\ (\cos^2 a + \cot^2 b \sin^2 a)x^2 y^2 = 0, \quad xyz < 0$$

kuartik silindir yüzeyinin arakesit eğrisidir.

**İspat.** Teorem 4.20 in ispatı, Teorem 4.14 in ispatına benzer olarak yapılabilir.

■

$\alpha_{a,b}$  eğrisinin normaller göstergesi  $a = \pi/3$ ,  $b = \pi/4$  değerleri için Şekil 4.4 de gösterilmiştir.



Şekil 4.4:  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin asli normaller göstergesi (kuartik silindir ile kürenin arakesiti)

**Teorem 4.21**  $\bar{\alpha}_{a,b} : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\bar{\alpha}_{a,b}(t) = \left( \ln[\tan^2(\frac{t}{2}) \right. \\ \left. + \frac{2(-\cos(2a) + \cos(2b)) \cos t \sec^2(\frac{t}{2}) \tan^2(\frac{t}{2})}{1 + \cos(2a) \cos t \sec^2(\frac{t}{2}) + (1 + 2 \cos(2b)) \tan^2(\frac{t}{2}) + \cos a \sqrt{2(\cos(2a) \cos^2 t) \sec^4(\frac{t}{2}) + 8 \cos(2b) \tan^2(\frac{t}{2})}}] \tan a, \right. \\ \left. \frac{\ln[\cos b(2 \cos b \tan t + \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(2a) + 2 \cos^2 b \tan^2 t})] \tan b}{2\sqrt{2}}, \frac{\ln[\tan t]}{2\sqrt{2}} \right)$$

parametrik denklemlerle verilen bir eğri ailesi olsun.  $\bar{\alpha}_{a,b}$  bir T-konik eğridir. Burada  $F_1^T = (\sin c, 0, \cos c)$ ,  $F_2^T = (-\sin c, 0, \cos c)$ ,  $0 < c < a < \frac{\pi}{2}$  ve  $\cos c \cos b = \cos a$  dir.

**İspat.** Teorem 4.21 nin ispatı, Teorem 4.14 nin ispatına benzer olarak yapılabilir.

■

Teorem 4.21 in bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

**Teorem 4.22** Teorem 4.21 da verilen  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisi için  $a = b$  alınrsa  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisi bir genel helistir.

**İspat.** Teorem 4.21 da verilen  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisi için  $a = b$  olsun. Böylece  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin denklemi

$$\bar{\alpha}_{a,b}(t) = \left( \frac{\ln[\tan^2(\frac{t}{2})] \tan a}{4\sqrt{2}}, \frac{\ln[2 \cos^2 a (\tan t + \sec t)] \tan a}{2\sqrt{2}}, \frac{\ln[\tan t]}{2\sqrt{2}} \right)$$

olarak bulunur. Buradan gerekli hesaplamalar yapılırsa  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin eğrilikleri

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \sqrt{2} \cos a \sin a \sin(2t), \\ \bar{\tau} &= \sqrt{2} \cos^2 a \sin(2t) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \cot a = sbt$$

elde edilir. O halde  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisi bir genel helistir. ■

**Teorem 4.23**  $\alpha_{a,b}$  ve  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrileri aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar:

$$\left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right]'' + 4 \left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right] = C_1. \quad (4.43)$$

Burada  $C_1 = (1 - \cos(2a) \cos(2b))(\csc^2 a \csc^2 b \sec^4 a \sec^4 b)^{\frac{1}{3}}$  sabitidir.

**İspat.**  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin eğriliği ve torsionu,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\sqrt{1 - \cos(2b) \cos(2t) + \cos(2a)(-\cos(2b) + \cos(2t))} \csc t \sec t}{\sqrt{2}(\cos(2a) - \cos(2b))\sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t + \cos(2b) \sin^2 t}}, \\ \tau(t) &= \frac{\sqrt{1 + \cos(2a) \cos^2 t + \cos(2b) \sin^2 t}}{8\sqrt{2} \cos^2 a \cos^2 b \sin a \sin b \csc t \sec t} \\ &\quad ((\cos(2a) - \cos(2b))(-2 \cos[2(a - b)] \\ &\quad + \cos[2(a + b)] + 2(-\cos(2a) + \cos(2b)) \cos(2t))) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right]'' + 4 \left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right] &= (-\cos(2a) + \cos(2b))(\csc^2 a \csc^2 b \sec^4 a \sec^4 b)^{\frac{1}{3}} \cos(2t) \\ &\quad - \frac{1}{2}((\csc^2 a \csc^2 b \sec^4 a \sec^4 b)^{\frac{1}{3}}(2 - \cos[2(a - b)] \\ &\quad - \cos[2(a + b)] + 2(\cos(2a) - \cos(2b)) \cos(2t))) \\ &= (1 - \cos(2a) \cos(2b))(\csc^2 a \csc^2 b \sec^4 a \sec^4 b)^{\frac{1}{3}} \\ &= C_1 \end{aligned}$$

elde edilir.  $a$  ve  $b$  sabit olduğundan  $C_1$  sabittir. Ayrıca,  $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}$  olduğundan  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisi için de diferansiyel denklem aynı  $C_1$  e eşittir. ■

Aşağıdaki teoremler ispatsız olarak verilecektir.



**Teorem 4.24**  $\hat{\alpha}_{a,b} : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\hat{\alpha}_{a,b}(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$$

parametrik denkleminle verilen bir eğri ailesi olsun.  $\hat{\alpha}_{a,b}$  T-konik eğridir. Burada  $F_1^T = (\frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{\sqrt{a^2+c^2}}, 0, \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}})$ ,  $F_2^T = (-\frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{\sqrt{a^2+c^2}}, 0, \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}})$ ,  $0 < b < a$  ve  $0 < c$  dir.

**Teorem 4.25**  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $T$  teğetler göstergesi,  $S^2$  ile

$$\frac{x^2}{(a/c)} + \frac{y^2}{(b/c)} = z^2, \quad (z > 0) \quad (4.44)$$

eliptik konisinin arakesit eğrisidir.

$\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $T$  teğetler göstergesi  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$  değerleri için Şekil 4.5(a) da gösterilmiştir.

**Teorem 4.26**  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $B$  binormaller göstergesi, odak noktaları

$F_1^B = (0, \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}, \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}})$ ,  $F_2^B = (0, -\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}, \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}})$  olan bir elipstir. Burada  $0 < b < a$  ve  $0 < c$  dir.

**Teorem 4.27**  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $B$  binormaller göstergesi,  $S^2$  ile

$$\frac{x^2}{(c/a)} + \frac{y^2}{(c/b)} = z^2, \quad (z > 0) \quad (4.45)$$

eliptik konisinin arakesit eğrisidir.

$\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $B$  binormaller göstergesi  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$  değerleri için Şekil 4.5(b) de gösterilmiştir.

**Teorem 4.28** Teorem 4.24 de  $a = b$  seçilirse,  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisi silindirik helisdir.

**İspat.** Teorem 4.24 de  $a = b$  olsun. Böylece  $\hat{\alpha}_{a,b}$  T-konik eğrisinin denklemi

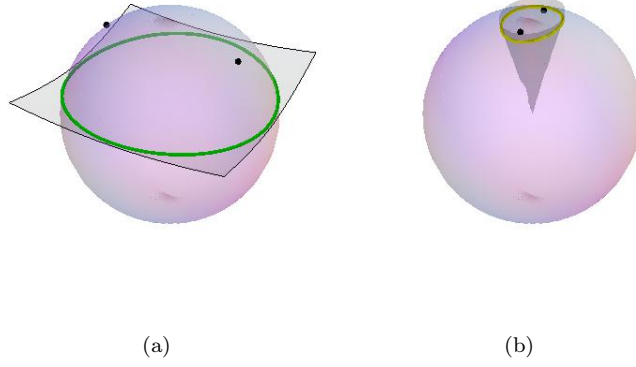
$$\hat{\alpha}_{a,b}(t) = (a \cos t, a \sin t, ct)$$

dir. Buradan  $\hat{\alpha}_{a,b}$  T-konik eğrisinin eğriliği ve torsionu

$$\hat{\kappa} = \frac{a}{a^2 + c^2},$$

$$\hat{\tau} = -\frac{c}{a^2 + c^2}$$

sabitleri olarak bulunur. Bu durumda  $\hat{\alpha}_{a,b}$  T-konik eğrisi bir silindirik helisdir. ■



Şekil 4.5:  $a = 4, b = 3, c = 1$  değerleri için  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin binormaller göstergesi(b)

## 5 $T^H$ -konik, $B^H$ -konik ve $N^H$ -konik Eğriler ve Karakterizasyonları

Önceki bölümde, T-konik eğri ailesinin teğetler göstergelerinin küresel elips ve N-konik eğri ailesinin normaller göstergelerinin küresel elips olması durumları incelendi. Küre üzerinde yatan elips, hiperbol ve parabol eğrileri denk olduğundan ([14]), bu bölümde incelenecek olan  $T^H$ -konik,  $B^H$ -konik ve  $N^H$ -konik eğrileri için karakterizasyonlar ispatsız olarak verilecektir.

### 5.1 $T^H$ -konik Eğri

$\tilde{\beta}$  bir uzay eğrisi,  $\tilde{\beta}$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriligi  $\kappa$  ve torsionu  $\tau$  olsun.

Ayrıca,  $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$  fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_1 : \quad I \subset \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi) \\ \tilde{L}_1(t) &= \arccos\langle T(t), \tilde{F}_1 \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2 : \quad I \subset \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi). \\ \tilde{L}_2(t) &= \arccos\langle T(t), \tilde{F}_2 \rangle \end{aligned}$$

Burada  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 \in S^2$  sabit iki noktadır.

**Tanım 5.1** Teğetler göstergesi  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$  odaklı küresel hiperbol olan eğriye  $T^H$ -

konik eğri denir.

Yani  $\tilde{\beta}$  bir  $T^H$ -konik eğri ise

$$|\tilde{L}_1 - \tilde{L}_2| = 2a \quad (5.1)$$

dir. Burada  $\langle \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 \rangle = \cos(2c)$ ,  $0 < c < a < \frac{\pi}{2}$ .

$T^H$ -konik eğriler için aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

**Teorem 5.1**  $\tilde{\beta}$  bir  $T^H$ -konik eğridir gerek ve yeter koşul

$$\frac{\langle N, F_1 \rangle}{\langle N, F_2 \rangle} = \frac{\sin \tilde{L}_1}{\sin \tilde{L}_2} \quad (5.2)$$

dir.

**İspat.**  $\tilde{\beta}$  bir  $T^H$ -konik bir eğri ve  $\tilde{\beta}$  eğrisinin küresel göstergeleri  $T, N, B$  olsun.

Yani

$$|\arccos\langle T, \tilde{F}_1 \rangle - \arccos\langle T, \tilde{F}_2 \rangle| = sbt \quad (5.3)$$

dir. Burada eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\frac{-\tilde{\kappa}\langle N, \tilde{F}_1 \rangle}{\sqrt{1 - \langle T, \tilde{F}_1 \rangle^2}} - \frac{-\tilde{\kappa}\langle N, \tilde{F}_2 \rangle}{\sqrt{1 - \langle T, \tilde{F}_2 \rangle^2}} = 0 \quad (5.4)$$

olarak bulunur. (5.4) düzenlenirse (5.2) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

**Teorem 5.2**  $\tilde{\beta} : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\tilde{\beta}$  bir  $T^H$ -konik bir eğridir gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= \cos \tilde{L}_1 T - \lambda_1 \sin \tilde{L}_1 N + \mu \sin \tilde{L}_1 B, \\ \tilde{F}_2 &= \cos(2a + \tilde{L}_1) T - \lambda_1 \sin(2a + \tilde{L}_1) N + \mu \sin(2a + \tilde{L}_1) B, \end{aligned} \quad (5.5)$$

ve

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} = \frac{\sqrt{\cos(2c) - \cos(2a)}}{(\cos(2\tilde{L}_1 - 2a) - \cos(2a))^{\frac{3}{2}}} \sin(2a) \quad (5.6)$$

dir. Burada  $\tilde{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{\cos(2\tilde{L}_1 - 2a) - \cos(2c)}{\cos(2\tilde{L}_1 - 2a) - \cos(2a)}}$ ,  $\tilde{\mu}_1 = \sqrt{\frac{\cos(2c) - \cos(2a)}{\cos(2\tilde{L}_1 - 2a) - \cos(2a)}}$  dir.

**İspat.** Teorem 5.2 nin ispatı, Teorem 4.2 nin ispatına benzer olarak yapılabilir.

■

**Teorem 5.3**  $\tilde{\beta}$  bir uzay eğrisi olsun.  $\tilde{\beta}$  bir  $T^H$ -konik bir eğridir gerek ve yeter koşul

$$(\sin \tilde{L}_2)\tilde{F}_1 - (\sin \tilde{L}_1)\tilde{F}_2 = \sin 2a T + \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}} \sin 2a \left(1 - \frac{(L'_1)^2}{\tilde{\nu}^2 \tilde{\kappa}^2}\right) B$$

dir.

**İspat.** Teorem 4.3 ün ispatına benzer şekilde kolayca ispatlanabilir. ■

Teorem 5.3 ün bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5.4** Teorem 5.3 de  $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 = F$  olması durumunda  $\tilde{\beta}$  eğrisi ekseni  $F$  olan bir genel helistir.

**İspat.** Teorem 5.3 de  $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 = F$  alınsın. Böylece

$$F = \cos a T - \cos a \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}} B$$

elde edilir.  $F, \tilde{\beta}$  eğrisinin teğetler göstergesi ile iç çarpılırsa

$$\langle F, T \rangle = \cos a = sbt$$

dir.  $\tilde{\beta}$  eğrisinin teğetler göstergesi, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapar. Bunun anlamı ise  $\tilde{\beta}$  eğrisi, ekseni  $F$  olan bir genel helistir. ■

**Sonuç 5.1**  $\beta$  bir  $T^H$ -konik bir eğri ise

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} = \frac{\sqrt{\cos(2c) - \cos(2a)}}{(\cos(2\tilde{L}_1 - 2a) - \cos(2a))^{\frac{3}{2}}} \sin(2a)$$

veya

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} = \frac{\sqrt{\cos(2c) - \cos(2a)}}{(\cos(2a + 2\tilde{L}_2) - \cos(2a))^{\frac{3}{2}}} \sin(2a)$$

dir.

**Sonuç 5.2**  $\tilde{\beta}$  nın teğetler göstergesinin geodezik eğriliği, (5.6) ile verilen  $\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}}$  oranına eşittir [8].

**Teorem 5.5**  $\tilde{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğri olsun.  $\tilde{\beta}$  bir  $T^H$ -konik eğri ise

$$\frac{d}{d\tilde{L}_1} \left[ \frac{d\left(\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}}\right)^{\frac{2}{3}}}{d\tilde{L}_1} \right] + 4 \left[ \left(\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}}\right)^{\frac{2}{3}} \right] = sbt \quad (5.7)$$

dir.

## 5.2 $B^H$ -konik Eğri

$\tilde{\zeta}$  bir uzay eğrisi,  $\tilde{\zeta}$  eğrisinin Frenet vektörleri  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsionu  $\tau$  olsun.

Ayrıca,  $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$  fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1 &: I \subset \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi) \\ \tilde{K}_1(t) &= \arccos\langle B(t), \tilde{E}_1 \rangle\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{K}_2 &: I \subset \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi). \\ \tilde{K}_2(t) &= \arccos\langle B(t), \tilde{E}_2 \rangle\end{aligned}$$

Burada  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2 \in S^2$  sabit iki noktadır.

**Tanım 5.2** Binormaller göstergesi  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$  odaklı küresel hiperbol olan eğriye  $B^H$ -konik eğri denir.

yani  $\tilde{\zeta}$  bir  $B^H$ -konik eğri ise

$$|\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2| = 2b \quad (5.8)$$

dir. Burada  $\langle \tilde{E}_1, \tilde{E}_2 \rangle = \cos(2d)$ ,  $0 < d < b < \frac{\pi}{2}$ .

$B^H$ -konik eğriler için aşağıdaki teoremleri verebiliriz. Ayrıca  $B^H$ -konik eğri için verilecek teoremler,  $T^H$ -konik eğriler için verilen teoremler ile benzer şekilde ispatlanabileceği için ispatsız olarak verilecektir.

**Teorem 5.6**  $\tilde{\zeta}$  bir  $B^H$ -konik bir eğridir gerek ve yeter koşul

$$\frac{\langle N, \tilde{E}_1 \rangle}{\langle N, \tilde{E}_2 \rangle} = \frac{\sin \tilde{K}_1}{\sin \tilde{K}_2} \quad (5.9)$$

dir.

**Teorem 5.7**  $\tilde{\zeta} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\tilde{\zeta}$  bir  $B^H$ -konik bir eğridir gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1 &= \tilde{\mu}_2 \sin \tilde{K}_1 T - \tilde{\lambda}_2 \sin \tilde{K}_1 N + \cos \tilde{K}_1 B, \\ \tilde{E}_2 &= \tilde{\mu}_2 \sin(2b + \tilde{K}_1) T - \tilde{\lambda}_2 \sin(2b + \tilde{K}_1) N + \cos(2b + \tilde{K}_1) B,\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}} = \frac{\sqrt{\cos(2d) - \cos(2b)}}{(\cos(2\tilde{K}_1 - 2b) - \cos(2b))^{\frac{3}{2}}} \sin(2b) \quad (5.10)$$

dir. Burada  $\tilde{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{\cos(2\tilde{K}_1 - 2b) - \cos(2d)}{\cos(2\tilde{K}_1 - 2b) - \cos(2b)}}$ ,  $\tilde{\mu}_2 = \sqrt{\frac{\cos(2d) - \cos(2b)}{\cos(2\tilde{K}_1 - 2b) - \cos(2b)}}$  dir.

**Teorem 5.8**  $\tilde{\zeta} : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\tilde{\zeta}$  bir  $B^H$ -konik bir eğridir gerek ve yeter koşul

$$(\sin \tilde{K}_2) \tilde{E}_1 - (\sin \tilde{K}_1) \tilde{E}_2 = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} \sin 2b \left( 1 - \frac{(L'_1)^2}{\tilde{\nu}^2 \tilde{\kappa}^2} \right) T + \sin 2b B \quad (5.11)$$

dir.

Teorem 5.8 in bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5.9** Teorem 5.8 de  $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2 = E$  olması durumunda  $\tilde{\zeta}$  eğrisi eksen  $E$  olan bir genel helistir.

**Sonuç 5.3**  $\tilde{\zeta}$  bir  $B^H$ -konik bir eğri ise

$$\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}} = \frac{\sqrt{\cos(2d) - \cos(2b)}}{(\cos(2\tilde{K}_1 - 2b) - \cos(2b))^{\frac{3}{2}}} \sin(2b)$$

veya

$$\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}} = \frac{\sqrt{\cos(2d) - \cos(2b)}}{(\cos(2b + 2\tilde{K}_2) - \cos(2b))^{\frac{3}{2}}} \sin(2b)$$

dir.

**Sonuç 5.4**  $\tilde{\zeta}$  nın binormaller göstergesinin geodezik eğriliği, (5.10) ile verilen  $\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}}$  oranına eşittir [8].

**Teorem 5.10**  $\tilde{\beta}$  bir  $T^H$ -konik bir eğridir gerek ve yeter koşul  $\tilde{\beta}$  bir  $B^H$ -konik eğridir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \frac{\cos b \tan c}{\sin a} \tilde{\mathcal{A}}_{\frac{\pi}{2}}[\tilde{F}_1] + \tilde{O}(t) \\ \tilde{E}_2 &= \frac{\cos b \tan c}{\sin a} \tilde{\mathcal{A}}_{\frac{\pi}{2}}[\tilde{F}_2] + \tilde{O}(t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

ve

$$\tilde{K}_1 = b - \arccos \left[ \frac{\sin c \sin b \cos(a - \tilde{L}_1)}{\sqrt{\sin(2a - \tilde{L}_1) \sin \tilde{L}_1}} \right] \quad (5.13)$$

dir. Burada  $\tilde{\mathcal{A}}_{\frac{\pi}{2}}, \frac{\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2}{\|\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2\|}$  etrafında  $\frac{\pi}{2}$  radyanlık dönme matrisi,

$$\begin{aligned} \tilde{O}(t) = & \left( \frac{\cos b \sin b \tan c \sqrt{\sin(2a - \tilde{L}_1) \sin \tilde{L}_1 - \sin^2 b \sin^2 c \cos^2(\tilde{L}_1 - a)}}{\cos a \sqrt{\sin(2a - \tilde{L}_1) \sin \tilde{L}_1}} \right. \\ & \left. + \frac{\cos b \sin b \sin c \cos(\tilde{L}_1 - a)}{\cos a \sqrt{\sin(2a - \tilde{L}_1) \sin \tilde{L}_1}} \right) B \end{aligned} \quad (5.14)$$

dir.

### 5.3 $N^H$ -konik Eğri

$\tilde{\psi}$  bir uzay eğrisi,  $\tilde{\psi}$  eğrisinin Frenet vektörleri  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsionu  $\tau$  olsun.

Ayrıca,  $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$  fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 : \quad I \subset \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi) \\ \tilde{M}_1(t) &= \arccos\langle N(t), \tilde{R}_1 \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 : \quad I \subset \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi). \\ \tilde{M}_2(t) &= \arccos\langle N(t), \tilde{R}_2 \rangle \end{aligned}$$

Burada  $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in S^2$  sabit iki noktadır.

**Tanım 5.3** Normaller göstergesi  $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$  odaklı küresel hiperbol olan eğriye  $N^H$ -konik eğri denir.

Yani  $\tilde{\psi}$  bir  $N^H$ -konik eğri ise

$$|\tilde{M}_1 - \tilde{M}_2| = 2f \quad (5.15)$$

dir.  $\langle \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \rangle = 2e, 0 < e < f < \frac{\pi}{2}$ .

$N^H$ -konik eğriler için aşağıdaki teoremleri verebiliriz. Ayrıca  $N^H$ -konik eğri için verilecek teoremler,  $T^H$ -konik eğriler için verilen teoremler ile benzer şekilde ispatlanabileceği için ispatsız olarak verilecektir.

**Teorem 5.11**  $\tilde{\psi} : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\tilde{\psi}$  bir  $N^H$ -konik eğridir gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2}} \sin \tilde{M}_1 (\tilde{\kappa} \tilde{\lambda}_3 \mp \tilde{\tau} \tilde{\mu}_3) T - \cos \tilde{M}_1 N \\ &+ \sin \tilde{M}_1 \left( 1 - \frac{1}{\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2} (\tilde{\kappa} \tilde{\lambda}_3 \mp \tilde{\tau} \tilde{\mu}_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} B, \\ \tilde{R}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2}} \sin(2f + \tilde{M}_2) (\tilde{\kappa} \tilde{\lambda}_3 \mp \tilde{\tau} \tilde{\mu}_3) T - \cos(2f + \tilde{M}_2) N \\ &+ \sin(2f + \tilde{M}_2) \left( 1 - \frac{1}{\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2} (\tilde{\kappa} \tilde{\lambda}_3 \mp \tilde{\tau} \tilde{\mu}_3)^2 \right)^{\frac{1}{2}} B,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\kappa}^2}{(\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} \right)' &= \cos \tilde{M}_1 \left( \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\kappa} \tilde{\mu}_3 - \tilde{\lambda}_3 \tilde{\tau}} - \frac{\tilde{\lambda}_3 (\tilde{\kappa} \tilde{\mu}_3 + \tilde{\lambda}_3 \tilde{\tau})}{\tilde{\kappa} \tilde{\mu}_3 - \tilde{\lambda}_3 \tilde{\tau}} \right) \\ &- \frac{\sin(2f - 2\tilde{M}_1)}{2 \sin \tilde{M}_1 \sin(2f - \tilde{M}_1)}\end{aligned}\quad (5.16)$$

dir. Burada  $\tilde{\lambda}_3 = \sqrt{\frac{\cos(2\tilde{M}_1 - 2f) - \cos(2e)}{\cos(2\tilde{M}_1 - 2f) - \cos(2f)}}$ ,  $\tilde{\mu}_3 = \sqrt{\frac{\cos(2e) - \cos(2f)}{\cos(2\tilde{M}_1 - 2f) - \cos(2f)}}$ ,  $\tilde{\lambda}_3^2 + \tilde{\mu}_3^2 = 1$  dir.

**Teorem 5.12** Teorem 5.11 de  $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2$  olması durumunda  $\tilde{\psi}$  slant helistir.

**Sonuç 5.5**  $\tilde{\psi}$  bir  $N^H$ -konik eğridir ise

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\kappa}^2}{(\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2)^{\frac{3}{2}}} &= \cos \tilde{M}_1 \left( \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\kappa} \tilde{\mu}_3 - \tilde{\lambda}_3 \tilde{\tau}} - \frac{\tilde{\lambda}_3 (\tilde{\kappa} \tilde{\mu}_3 + \tilde{\lambda}_3 \tilde{\tau})}{\tilde{\kappa} \tilde{\mu}_3 - \tilde{\lambda}_3 \tilde{\tau}} \right) \\ &- \frac{\sin(2f - 2\tilde{M}_1)}{2 \sin \tilde{M}_1 \sin(2f - \tilde{M}_1)}\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\kappa}^2}{(\tilde{\kappa}^2 + \tilde{\tau}^2)^{\frac{3}{2}}} &= \cos(2a + \tilde{M}_2) \left( \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\kappa} \tilde{\mu}_3 - \tilde{\lambda}_3 \tilde{\tau}} - \frac{\tilde{\lambda}_3 (\tilde{\kappa} \tilde{\mu}_3 + \tilde{\lambda}_3 \tilde{\tau})}{\tilde{\kappa} \tilde{\mu}_3 - \tilde{\lambda}_3 \tilde{\tau}} \right) \\ &+ \frac{\sin(2\tilde{M}_2 + 2f)}{2 \sin \tilde{M}_1 \sin(2f - \tilde{M}_1)}\end{aligned}$$

dir.

**Önerme 5.1**  $\tilde{\psi}$  bir  $N^H$ -konik eğridir gerek ve yeter koşul  $\tilde{\psi}$  eğrisinin  $\tilde{\psi}_T$  teğetler göstergesi bir  $T^H$ -konik eğridir.

**Sonuç 5.6** (4.32) eşitliği,  $\tilde{\psi}$  eğrisinin normaller göstergesinin geodezik eğriliğini verir.



#### 5.4 $T^H$ -konik Eğri Ailesi

Bu bölümde,  $T^H$ -konik egri ailesi için Parametrik denklemler verilecek ve bu egri ailesinin özellikleri incelenecektir.

**Teorem 5.13**  $\tilde{\alpha}_{a,b} : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir eğri ailesi

$$\tilde{\alpha}_{a,b}(t) = \left( \frac{2(\cos^2 b - \cos^2 a \sec(2a)) \sin a \sin^3 a}{3\sqrt{\sin^2(2a) - \cos^2(2a)}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \sin b(\cos^2 b - \cos^2 a \sec(2a)) \cos^3 t, \right. \\ \left. - \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos^2 b \cos t + \cos^2 a \sec(2b) \sin^2 t)^{\frac{3}{2}} \right)$$

parametrik denklemiyle verilsin.  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  bir  $T^H$ -konik eğridir. Burada  $F_1^T = (\sin c, 0, \cos c)$ ,  $F_2^T = (-\sin c, 0, \cos c)$ ,  $\frac{\pi}{4} < c < a < \frac{\pi}{2}$  ve  $\cos c \cos b = \cos a$  dir.

**İspat.**  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin küresel göstergeleri  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$ , sırasıyla,

$$\mathbf{T}(t) = \left( \frac{\sin a \sin t}{\sqrt{\sin^2 a - \cos^2 a}}, \sin b \cos t, \sqrt{\cos^2 b \cos^2 t + \cos^2 a \sec(2a) \sin^2 t}, \right)$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(2b) \cos(2t) - (\cos(2b) + \cos(2t)) \sec(2a)}} (2 \cos^2 a \sec(2a) \sin b \sin t, \\ \frac{2 \cos^2 b \cos t \sin a}{\sqrt{\sin^2(2a) - \cos^2(2a)}}, \frac{2 \sin a \sin b \sqrt{\cos^2 b \cos^2 t + \cos^2 a \sec(2a) \sin^2 t}}{\sqrt{\sin^2(2a) - \cos^2(2a)}}),$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(2b) \cos(2t) - (\cos(2b) + \cos(2t)) \sec(2a)}} \\ \left( \frac{2 \sin a \cos t \sqrt{\cos^2 b \cos^2 t + \cos^2 a \sec(2a) \sin^2 t}}{\sqrt{\sin^2(2a) - \cos^2(2a)}}, \right. \\ \left. - 2 \sin b \sin t \sqrt{\cos^2 b \cos^2 t + \cos^2 a \sec(2a) \sin^2 t}, \right. \\ \left. \frac{1}{2}(\cos(2b) + \sec(2a)) \sin(2t) \right)$$

olarak bulunur.

$\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $\mathbf{T}$  teğetler göstergesinin herhangi bir  $P$  noktası için

$$\langle \vec{F}_1^T, \vec{OP} \rangle = \cos(\widehat{F_1^T OP}) = \cos(|F_1^T P|),$$

$$\langle \vec{F}_2^T, \vec{OP} \rangle = \cos(\widehat{F_2^T OP}) = \cos(|F_2^T P|),$$

ve

$$\sin(\widehat{F_1^T OP}) = \sqrt{1 - \langle \vec{F}_1^T, \vec{OP} \rangle^2},$$

$$\sin(\widehat{F_2^T OP}) = \sqrt{1 - \langle \vec{F}_2^T, \vec{OP} \rangle^2}$$

dir. Böylece kolayca gösterebiliriz ki,

$$\begin{aligned}\cos(|\widehat{F_1^T P}| - |\widehat{F_2^T P}|) &= \cos(|\widehat{F_1^T P}|) \cos(|\widehat{F_2^T P}|) + \sin(|\widehat{F_1^T P}|) \sin(|\widehat{F_2^T P}|) \\ &= \cos(2a)\end{aligned}$$

dir. O halde  $\mathbf{T}$  teğetler göstergesi, odakları  $F_1^T$  ve  $F_2^T$  olan bir küresel hiperboldür. Yani  $\tilde{\alpha}_{a,b}$   $T^H$ -konik eğridir. ■

**Teorem 5.14**  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $\mathbf{T}$  teğetler göstergesi,  $S^2$  ile

$$\frac{x^2}{\tan^2 b} - \frac{y^2}{\tan^2 a} = z^2, \quad z > 0 \quad (5.17)$$

eliptik konisinin arakesit eğrisidir.

**İspat.** Teorem 5.14'nin ispatı, Teorem 4.15'nin ispatına benzer olarak yapılabilir.

■

$\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $T$  teğetler göstergesi  $a = \pi/3$ ,  $b = \pi/4$  değerleri için Şekil 4.5(a) da gösterilmiştir.

**Teorem 5.15**  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $\mathbf{B}$  binormaller göstergesi, odak noktaları

$F_1^B = (0, \cos d, \sin d)$ ,  $F_2^B = (0, -\cos d, \sin d)$  olan bir hiperboldür. Burada  $0 < d < b < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin b = \sin a \sin d$  dir.

**İspat.** Teorem 5.15'in ispatı, Teorem 5.13'in ispatına benzer olarak yapılabilir.

■

**Sonuç 5.7**  $\alpha$  eğrisi için  $a + b = \frac{\pi}{2}$  ise  $a + b = \frac{\pi}{2}$  olacağından binormaller göstergesinin odakları,  $F_1^B = (0, \sin c, \cos c)$  ve  $F_2^B = (0, -\sin c, \cos c)$  şeklinde yazılabilir.

**Teorem 5.16**  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $\mathbf{B}$  binormaller göstergesi,  $S^2$  ile

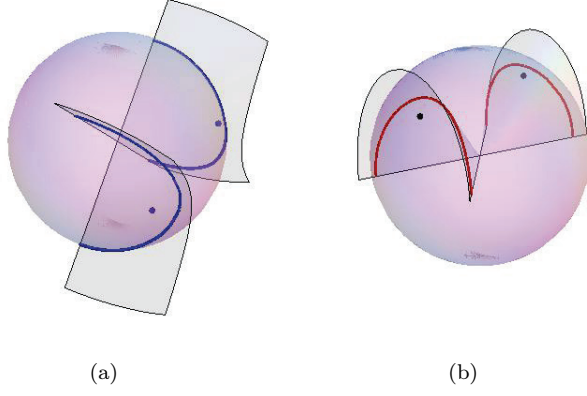
$$\frac{x^2}{\cot^2 b} - \frac{y^2}{\cot^2 a} = z^2, \quad z > 0 \quad (5.18)$$

eliptik konisinin arakesit eğrisidir.

**İspat.** Teorem 5.16'nin ispatı, Teorem 4.15'nin ispatına benzer olarak yapılabilir.

■

$\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $B$  binormaller göstergesi  $a = \pi/3$ ,  $b = \pi/4$  değerleri için Şekil 4.5(b) de gösterilmiştir.



Şekil 5.1:  $a = \frac{\pi}{3}$ ,  $b = \frac{\pi}{4}$  değerleri için,  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin binormallerler göstergesi(b)

Teorem 5.5 nin özel hali olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5.17**  $\tilde{\alpha}_{a,b} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$   $T^H$ -konik eğrisi,

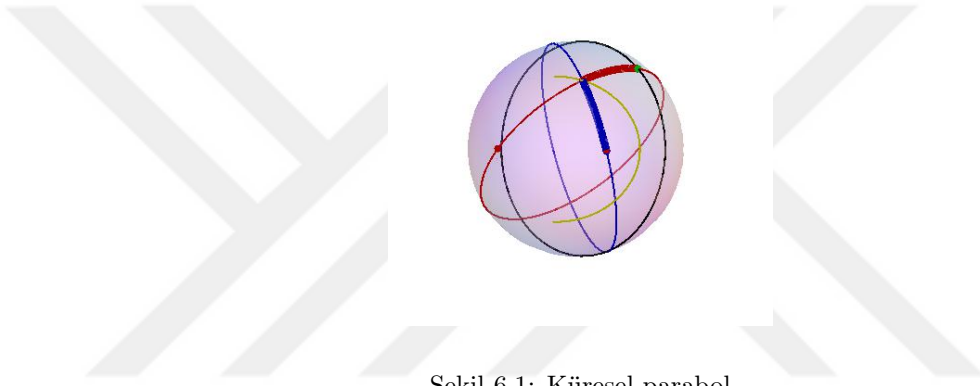
$$\left[ \left( \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}} \right)^{\frac{2}{3}} \right]'' + 4 \left[ \left( \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}} \right)^{\frac{2}{3}} \right] = sbt. \quad (5.19)$$

denklemini sağlar.

## 6 TEĞETLER GÖSTERGESİ KÜRESEL PARABOL OLAN EĞRİLER

Bu bölümde Küresel göstergeleri parabol olan  $T^P$ -konik eğri ailesi için parametrik denklem verildi.

**Tanım 6.1**  $\mathcal{P} : I \in \mathbb{R} \rightarrow S^2$  bir eğri olsun.  $\mathcal{P}$  eğrisinin her bir noktasının  $F_1$  noktasına ve  $C$  büyük çemberine yay uzaklıkları eşit ise  $\mathcal{P}$  eğrisine küresel parabol denir. Burada  $F_1$  noktasına  $\mathcal{P}$  eğrisinin odağı ve  $C$  büyük çemberine de  $\mathcal{P}$  eğrisinin eksenini adı verilir [19].



Şekil 6.1: Küresel parabol

**Teorem 6.1**  $\delta_c : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\delta_c(t) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \tan^2 c, \cos^3 t, \frac{\sqrt{2}}{3} \tan^2 c, \sqrt{\cos(2c)} \sec c \tan^3 c \sin^3 t, \frac{1}{6}(1 + \sec^2 c - \tan^2 c \cos(2t))^{\frac{3}{2}}\right).$$

parametrik denklemleriyle verilen bir uzay eğri ailesi olsun.  $\delta_c$  bir  $T^P$ -konik eğridir. Burada  $F_1^T = (\sin c, 0, \cos c)$ ,  $C(t) = (\cos c \sin t, \cos t, \sin c \sin t)$ ,  $0 < c < \frac{\pi}{4}$  dir.

**İspat.**  $\delta_c$  eğrisinin küresel göstergeleri olan T, N, B sırasıyla,

$$\begin{aligned} T(t) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos(2c)} \sec c \sin t, \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sec^2 c - \tan^2 c \cos(2t)} \right), \\ N(t) &= \frac{\sqrt{3 + \cos(2c) - 2 \sin^2 c \cos(2t)}}{\sqrt{1 + \cos(2c) \cot^2 t}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sqrt{\cos(2c)} \sec c \cot t, \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\cot^2 c \csc t \csc(2t)}{\sqrt{1 + \sec^2 c - \tan^2 c \cos(2t)}} \right), \\ B(t) &= \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \tan^2 c \cos(2t)}} \left( -\sqrt{\cos(2c)} \sec c \cos t, \right. \\ &\quad \left. - \sec^2 c \sin t, \frac{1}{2} \sqrt{\cos(2c) \sec^2 c \sqrt{3 + \cos(2c) - 2 \sin^2 c \cos(2t)}} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi  $\delta_c$  eğrisinin teğetler göstergesi T nin herhangi bir  $P$  noktasının  $F_1^T = (\sin c, 0, \cos c)$  noktasına ve  $C(t) = (\cos c \sin t, \cos t, \sin c \sin t)$  büyük çemberine yay uzaklıklarının eşit olduğu gösterilecektir.

$P$  noktasının  $C$  çemberine uzaklığı demek,  $C$  çemberinin yattığı düzlemin normal vektörü olan  $F_2^T = (-\sin c, 0, \cos c)$  noktasına uzaklığının tümleyeni demektir. Yani

$$|\widehat{CP}| = \frac{\pi}{2} - |F_2^T P|.$$

dir ve buradan

$$|F_1^T P| = \frac{\pi}{2} - |\widehat{CP}|.$$

bulunur.

Herhangi bir  $P$  noktası için

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}_1^T, \vec{OP} \rangle &= \cos(\widehat{F_1^T OP}) = \cos(|F_1^T P|), \\ \langle \vec{F}_2^T, \vec{OP} \rangle &= \cos(\widehat{F_2^T OP}) = \cos(|F_2^T P|), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sin(\widehat{F_1^T OP}) &= \sqrt{1 - \langle \vec{F}_1^T, \vec{OP} \rangle^2}, \\ \sin(\widehat{F_2^T OP}) &= \sqrt{1 - \langle \vec{F}_2^T, \vec{OP} \rangle^2} \end{aligned}$$

dir. Böylece kolayca görülür ki,

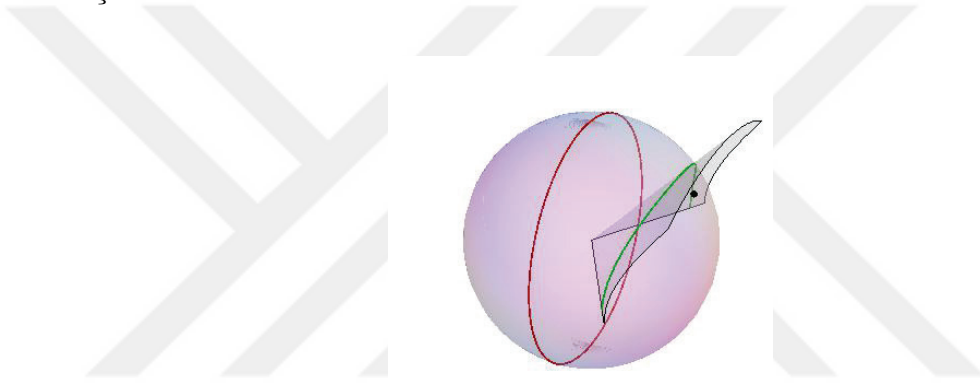
$$\begin{aligned}\cos(|\widehat{F_1^T P}| + |\widehat{F_2^T P}|) &= \cos(|\widehat{F_1^T P}|) \cos(|\widehat{F_2^T P}|) - \sin(|\widehat{F_1^T P}|) \sin(|\widehat{F_2^T P}|) \\ &= 0\end{aligned}$$

dir. O halde T teğetler göstergesi, odağı  $F_1^T$  ve eksenini  $C$  büyük çemberi olan bir küresel parabolüdür. ■

**Teorem 6.2**  $\delta_c$  eğrisinin T teğetler göstergesi,  $S^2$  ile

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos 2c} = z^2, \quad z > 0 \quad (6.1)$$

eliptik konisinin arakesit eğrisidir ve  $c = \pi/3$  değerleri için Şekil 6.2 de gösterilmiştir.



Şekil 6.2:  $c = \frac{\pi}{3}$  için  $\delta_c$  eğrisinin teğetler göstergesi

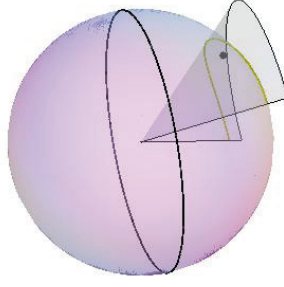
**Teorem 6.3**  $\delta_c$  eğrisinin B binormaller göstergesi, odak noktası  $F_1^B = (0, \cos d, \sin d)$  ve eksenini  $C_1 = (\cos t, \sin d \sin t, \cos d \sin t)$  büyük çemberi olan bir parabolüdür. Burada  $0 < d < \frac{\pi}{4}$  dir.

**İspat.** Teorem 6.1 nin ispatına benzer olarak yapılabilir. ■

**Teorem 6.4**  $\delta_c$  eğrisinin B binormaller göstergesi,  $S^2$  ile

$$x^2 + \frac{y^2}{\sin 2c} = z^2, \quad z > 0 \quad (6.2)$$

eliptik konisinin arakesit eğrisidir ve  $c = \pi/3$  değerleri için Şekil 6.3 da gösterilmiştir.



Şekil 6.3:  $c = \frac{\pi}{3}$  için  $\delta_c$  eğrisinin binormaller göstergesi

**Teorem 6.5**  $\delta_c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$   $T^P$ -konik eğrisi

$$\left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right]'' + 4 \left[ \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \right] = sbt \quad (6.3)$$

denklemini sağlar.

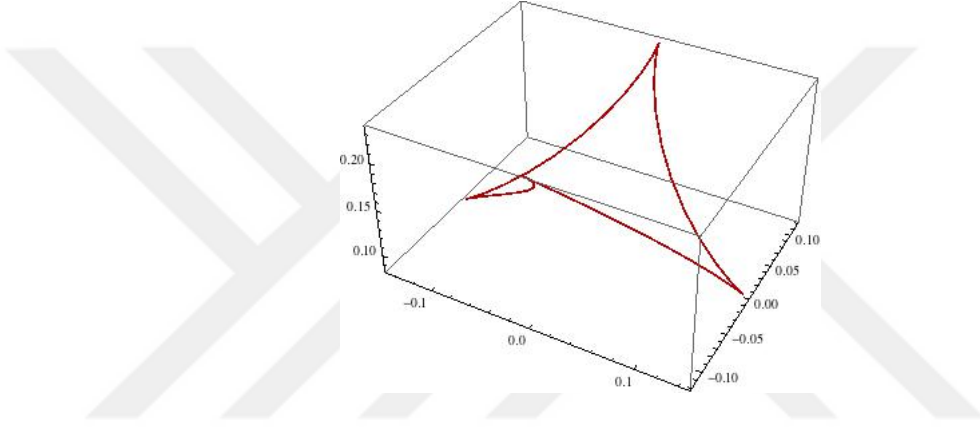
## 7 ÖRNEKLER

Bu bölümde, küresel göstergeleri konik olan eğrilere örnekler verilmiştir ve bu örnekler **Matematica 9** programı ile çizilmiştir.

**Örnek 7.1**  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{4}$  değerleri için Teorem 4.14 de verilen  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin denklemi

$$\alpha(t) = \left( -\frac{1}{4\sqrt{2}} \cos^3 t, \frac{1}{6\sqrt{2}} \sin^3 t, \frac{1}{24\sqrt{2}} (3 - \cos(2t))^{\frac{3}{2}} \right)$$

dir ve Şekil 7.1 de gösterilmiştir.



Şekil 7.1:  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{4}$  için  $\alpha_{a,b}$  eğrisi

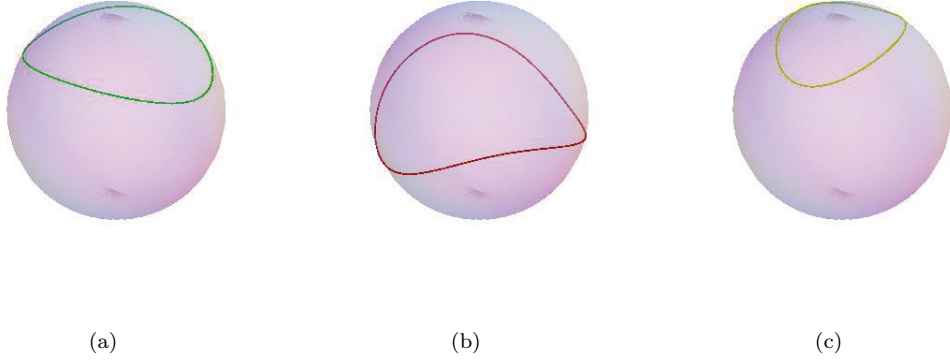
Ayrıca,  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi (bkz. Şekil 7.2(a)), normaller göstergesi (bkz. Şekil 7.2(b)) ve binormaller göstergesi (bkz. Şekil 7.2(c)) aşağıda, sırasıyla, verilmiştir:

$$T(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{3 - \cos(2t)} \right),$$

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2 - \cos(2t)}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \sqrt{3 - \cos(2t)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \sqrt{3 - \cos(2t)}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(2t) \right),$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2 - \cos(2t)}} \left( -\frac{1}{2} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt{3 - \cos(2t)} \right).$$



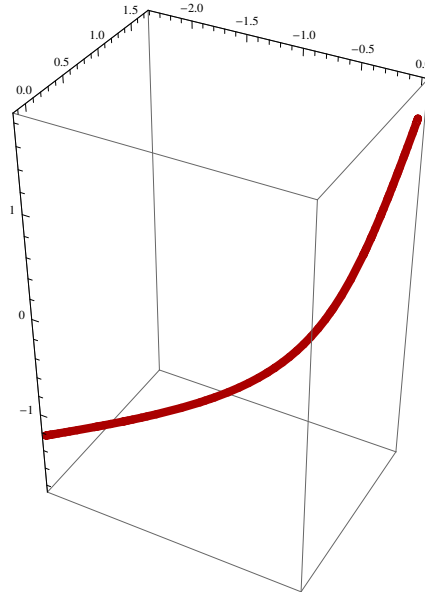


Şekil 7.2:  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve  $\alpha_{a,b}$  eğrisinin binormaller göstergesi(c)

**Örnek 7.2**  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{4}$  değerleri için Teorem 4.21 da verilen  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin denklemi

$$\alpha(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{4 + 2 \cos t + \sqrt{6 - 2 \cos(2t)} \tan^2 \left( \frac{t}{2} \right)}{4 - 2 \cos t + \sqrt{6 - 2 \cos(2t)}} \right], \right. \\ \left. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left[ \tan t \sqrt{\frac{1}{2} + \tan^2 t} \right], \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln[\tan t] \right)$$

dir ve Şekil 7.3 de gösterilmiştir.



Şekil 7.3:  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{4}$  için  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisi

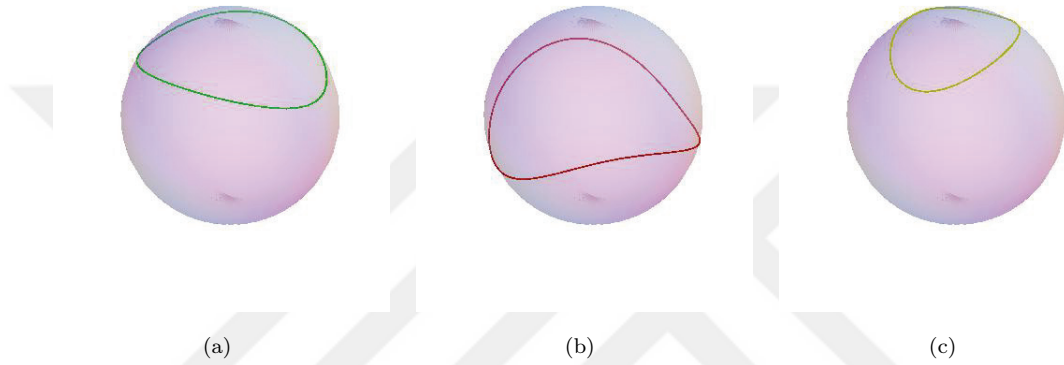
Ayrıca,  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi (bkz. Şekil 7.4(a)), normaller göstergesi (bkz. Şekil 7.4(b)) ve binormaller göstergesi (bkz. Şekil 7.4(c)) aşağıda, sırasıyla,

verilmiştir:

$$T(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{3 - \cos(2t)} \right),$$

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2 - \cos(2t)}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \sqrt{3 - \cos(2t)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \sqrt{3 - \cos(2t)}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(2t) \right),$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2 - \cos(2t)}} \left( -\frac{1}{2} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt{3 - \cos(2t)} \right).$$



Şekil 7.4:  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{4}$ ,  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin binormaller göstergesi(c)

**Örnek 7.3**  $a = b = \frac{\pi}{4}$  değerleri için Teorem 4.22 da verilen  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin denklemi

$$\alpha(t) = \left( \frac{\sqrt{6}}{8} \ln[\tan^2 \left( \frac{t}{2} \right)], \frac{1}{2} \ln\left[\frac{1}{2} \tan t + \sec t\right], \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln[\tan t] \right)$$

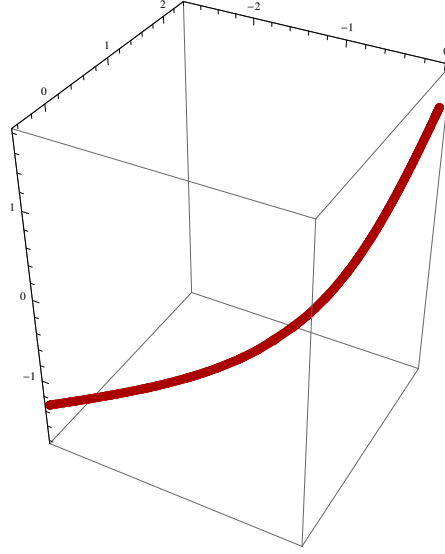
dir ve Şekil 7.5 de gösterilmiştir.

Ayrıca,  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi (bkz. Şekil 7.6(a)), normaller göstergesi (bkz. Şekil 7.6(b)) ve binormaller göstergesi (bkz. Şekil 7.6(c)) aşağıda, sırasıyla, verilmiştir:

$$T(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{1\sqrt{3}}{2} \sin t, \frac{1}{2} \right),$$

$$N(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

$$B(t) = \left( -\frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$



Şekil 7.5:  $a = b = \frac{\pi}{4}$  için  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisi



(a)



(b)



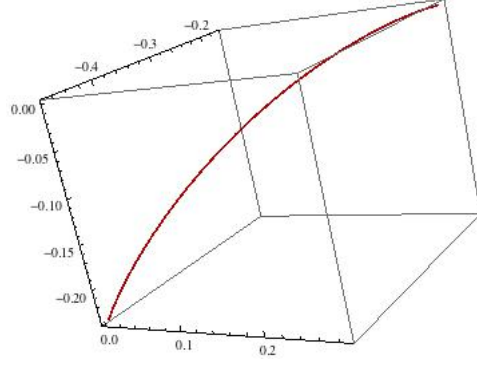
(c)

Şekil 7.6:  $a = b = \frac{\pi}{4}$ ,  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin binormaller göstergesi(c)

**Örnek 7.4**  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{4}$  değerleri için Teorem 5.13 de verilen  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin denklemi

$$\tilde{\alpha}(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^3 t, -\frac{\sqrt{2}}{3} \cos^3 t, -\frac{2}{3} \left( \frac{\cos(2t)}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

dir ve Şekil 7.7 de gösterilmiştir. Ayrıca,  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi (bkz. Şekil 7.8(a)), normaller göstergesi (bkz. Şekil 7.8(b)) ve binormaller göstergesi



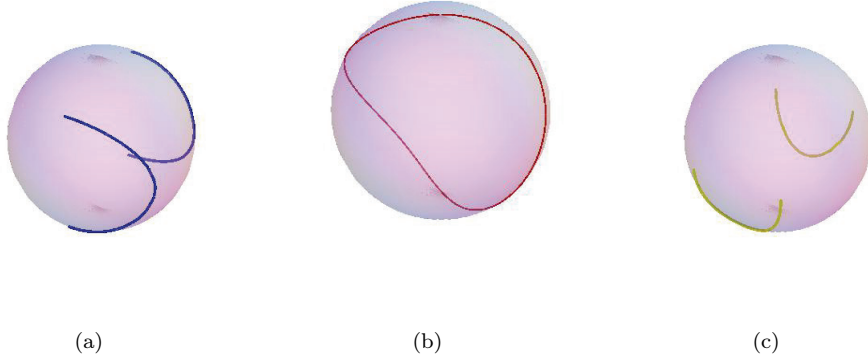
Şekil 7.7:  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{4}$  için  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisi

(bkz. Şekil 7.8(c)) aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{T}(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos(2t)} \right),$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cos(2t)}} \left( \sqrt{3} \cos t \sqrt{\cos(2t)}, -\sin t \sqrt{\cos(2t)}, -\sin(2t) \right),$$

$$\mathbf{B}(t) = \left( -\frac{\sin t}{\sqrt{2 + 4 \cos(2t)}}, \frac{\sqrt{3} \cos t}{\sqrt{2 + 4 \cos(2t)}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 + 2 \sec(2t)}} \right).$$

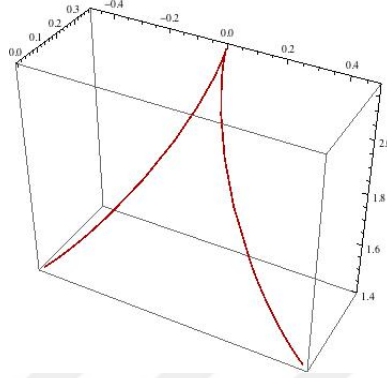


Şekil 7.8:  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{4}$ ,  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin binormaller göstergesi(c)

**Örnek 7.5**  $c = \frac{\pi}{3}$  değeri için Teorem 6.1 da verilen  $\delta_c$  eğrisinin denklemi

$$\delta(t) = \left( -\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos^3 t, -\frac{2}{3\sqrt{3}}(-3 + 4 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}, -\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \sin^3 t \right)$$

dir ve Şekil 7.9 da gösterilmiştir. Ayrıca,  $\delta_c$  eğrisinin teğetler göstergesi (bkz.



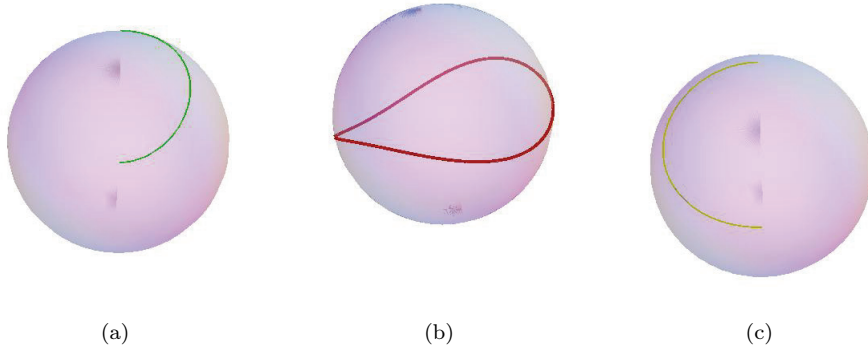
Şekil 7.9:  $c = \frac{\pi}{5}$  için  $\delta_c$  eğrisi

Şekil 7.10(a)), normaller göstergesi (bkz. Şekil 7.10(b)) ve binormaller göstergesi (bkz. Şekil 7.10(c)) aşağıda verilmiştir:

$$T(t) = \left( \sqrt{2} \cos t, \sqrt{-1 + \frac{4 \cos^2 t}{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin t \right),$$

$$N(t) = \left( -\sqrt{2 + \sec(2t)} \sin t, \sqrt{-\frac{2}{3} \sin(2t) \tan(2t)}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2 + \sec(2t)} \right),$$

$$B(t) = \left( -\cos t \sqrt{\sec(2t)}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{2 + \sec(2t)}, \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sec(2t)} \sin t \right).$$



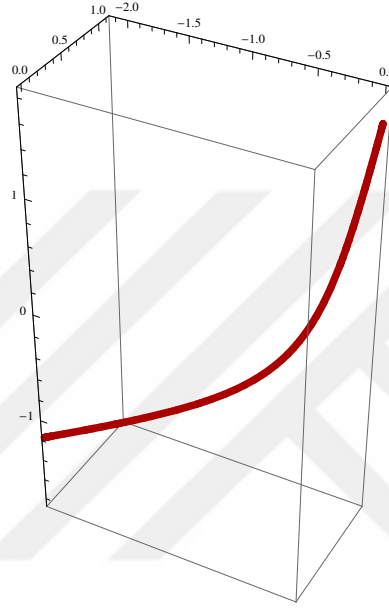
Şekil 7.10:  $c = \frac{\pi}{5}$  için  $\delta_c$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\delta_c$  eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve  $\delta_c$  eğrisinin binormaller göstergesi(c)

**Örnek 7.6**  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{6}$  değerleri için teğetler göstergesi elips olan  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin denklemi

$$\bar{\alpha}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \ln \left( 1 + \frac{4 \cos t}{3 - 2 \cos t + \cos \left( \frac{t}{2} \right) + \sqrt{2 - \cos(2t)}} \tan^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right),$$

$$\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left( \frac{1}{2} (3 \tan t + \sqrt{3 + \tan^2 t}) \right), \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln (\tan t)$$

dir ve Şekil 7.11 de gösterilmiştir.



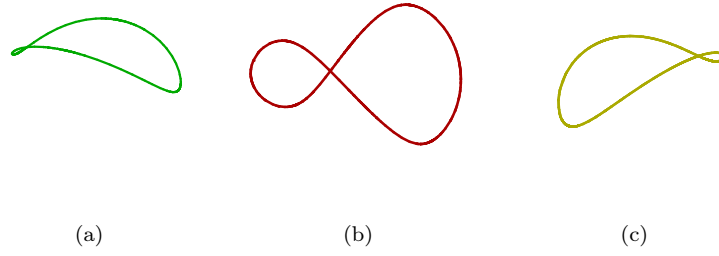
Şekil 7.11:  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{6}$  için  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisi

Ayrıca,  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi (bkz. Şekil 7.12(a)), normaller göstergesi (bkz. Şekil 7.12(b)) ve binormaller göstergesi (bkz. Şekil 7.12(c)) aşağıda, sırasıyla, verilmiştir:

$$T(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{2 - \cos(2t)} \right),$$

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos(2t)}} \left( -\sqrt{3} \sin t \sqrt{2 - \cos(2t)}, \cos t \sqrt{2 - \cos(2t)}, \sin(2t) \right),$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos(2t)}} \left( -\frac{1}{2} \cos t, -\frac{3\sqrt{3}}{3} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2 - \cos(2t)} \right).$$

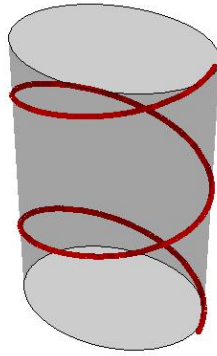


Şekil 7.12:  $a = \frac{\pi}{3}$  ve  $b = \frac{\pi}{6}$  için  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin asli normaller göstergesi(b) ve  $\bar{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin binormaller göstergesi(c)

**Örnek 7.7**  $a = 4$ ,  $b = 3$  ve  $c = 1$  değerleri için,  $\hat{\alpha}_{a,b}$  T-konik eğrisinin denklemi

$$\hat{\alpha}(t) = (4 \cos t, 3 \sin t, t)$$

dir.  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin grafiği şekil 7.13 de gösterilmektedir.



Şekil 7.13:  $a = 4$ ,  $b = 3$  and  $c = 1$  değerleri için  $\hat{\alpha}_{a,b}$  T-konik eğrisi

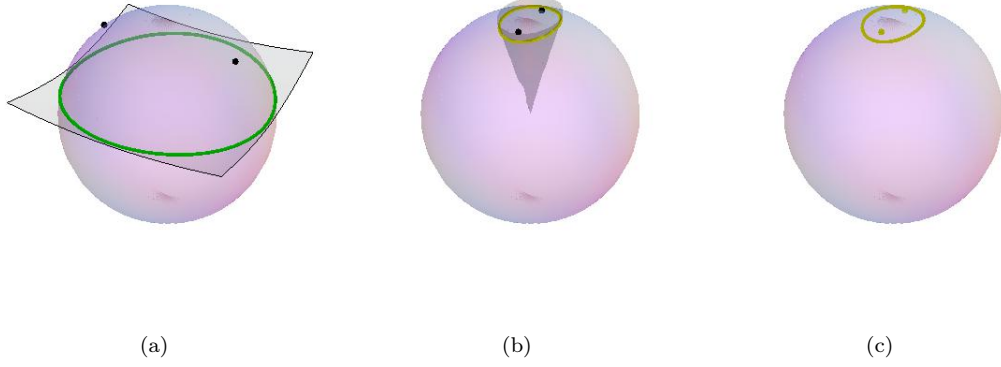
Sırasıyla,  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $T$  teğetler göstergesi,  $N$  normaller göstergesi ve  $B$  binormaller göstergesinin denklemi

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{27 - 7 \cos(2t)}} \left( -4\sqrt{2} \sin t, 3\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \right),$$

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{313 + 7 \cos(2t)} \sqrt{27 - 7 \cos(2t)}} (80 \cos t, 102 \sin t, 7 \sin(2t)),$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{313 + 7 \cos(2t)}} \left( 3\sqrt{2} \sin t, 4\sqrt{2} \cos t, 12\sqrt{2} \right).$$

dir ve  $T$  teğetler göstergesi Şekil 7.14(a) da,  $N$  normaller göstergesi Şekil 7.14(b) de,  $B$  binormaller göstergesi Şekil 7.14(c) de gösterilmektedir.

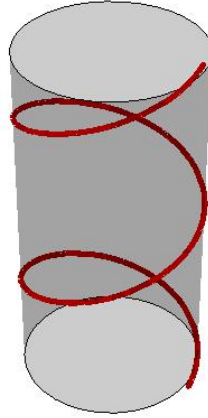


Şekil 7.14:  $a = 4$ ,  $b = 3$  and  $c = 1$  değerleri için  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin normaller göstergesi(b) ve  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin binormaller göstergesi(c)

**Örnek 7.8**  $a = b = 3$  ve  $c = 1$  değerleri için,  $\hat{\alpha}_{a,b}$  T-konik eğrisinin denklemi

$$\tilde{\alpha}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, t)$$

dir.  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin grafiği şekil 7.15 de gösterilmektedir.



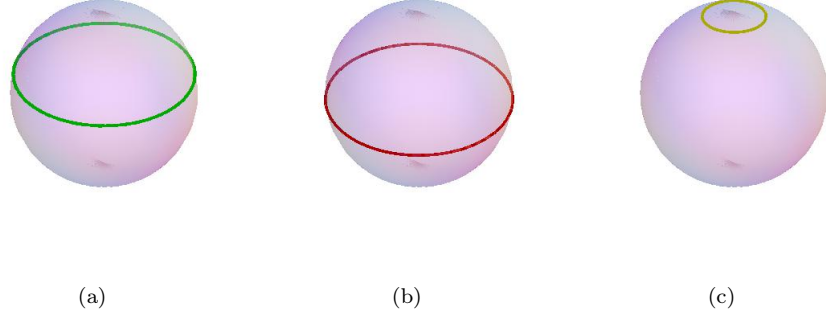
Şekil 7.15:  $a = b = 3$  and  $c = 1$  değerleri için  $\hat{\alpha}_{a,b}$  T-konik eğrisi

Sırasıyla,  $\hat{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin  $T$  teğetler göstergesi,  $N$  normaller göstergesi ve  $B$  binormaller göstergesinin denklemi

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{\sqrt{10}} (-3 \sin t, 3 \cos t, 1), \\ N(t) &= (-\cos t, -\sin t, 0), \\ B(t) &= \frac{1}{\sqrt{10}} (\sin t, -\cos t, 3). \end{aligned}$$

dir ve  $T$  teğetler göstergesi Şekil 7.16(a) da,  $N$  normaller göstergesi Şekil 7.16(b) de,  $B$  binormaller göstergesi Şekil 7.16(c) de gösterilmektedir.





Şekil 7.16:  $a = b = 3$  and  $c = 1$  değerleri için  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin teğetler göstergesi(a),  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin normaller göstergesi(b) ve  $\tilde{\alpha}_{a,b}$  eğrisinin binormaller göstergesi(c)



## KAYNAKLAR

- [1] Altunkaya, B. *Küresel Konikler ve Uygulamaları*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, **2012**.
- [2] Altunkaya, B. ; Yayli, Y. ; Hacısalihoğlu, H. H. ; Arslan, F. *Equations of the spherical conics*, Electronic Journal of Mathematics and Technology, **2011**, 5, no.3, 330-341.
- [3] Altunkaya, B. ; Yayli, Y. ; Hacısalihoğlu, H. H. ; Arslan, F. *One-Parameter Equations of Spherical Conics and Its Application*, Journal of Mathematics Research, **2014**, 6, no.4, 77-84.
- [4] Balcı, M. *Analitik Geometri*, Balcı Yayınları, Ankara, **2007**.
- [5] Dirnbock, H. *Absolute polarity on the sphere; conics; loxodrome; tractrix*, Mathematical Communication, **1999**, 4, 225-240.
- [6] Izumiya, S. ; Takeuchi, N. *New Special Curves and Developable Surfaces*, Turk, J. Math., **2004**, 28, 153-163.
- [7] Izumiya, S. ; Takeuchi, N. *Generic properties of helices and Bertrand curves*, Journal of Geometry, **2002**. 74, 97-109.
- [8] Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri 1. Cilt*, Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara, **2000**.
- [9] Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri 2. Cilt*, Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara. **2000**.
- [10] Karger, A. ; Novak, J. *Space Kinematics and Lie Groups*, Gordon and Breach Science Publishers, **1985**.
- [11] Gibson, C. G., *Elementary Geometry of Algebraic Curves, an Undergraduate Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, **2001**
- [12] Hazewinkel, M., *Antipodes, Encyclopedia of Mathematics*, Springer, London, **2001**.
- [13] Maeda, Y. *Spherical conics and the fourth parameter*, KMITL Sci. J., **2005**, 5, no.1, 165-171.
- [14] Maeda, Y. *How to project spherical conics into the plane*, **2006**.
- [15] Namikawa, Y. *Spherical surfaces and hyperbolas*, Sugaku, The Mathematical Society of Japan , **1959/60**, 11, no.1, 22-24.

- [16] Kopacz, P. *On geometric properties of spherical conics and generalization of Pi in navigation and mapping*, Geodesy and cartography, **2012**, 38, no. 4, 141-151.
- [17] Sabuncuoğlu, A. *Analitik Geometri*, Nobel yayınları, Ankara, **2009**.
- [18] Sabuncuoğlu, A. *Diferensiyel Geometri*, Nobel yayınları, Ankara, **2006**.
- [19] Sykes, G. S. ; Peirce, B. *Spherical Conics*, Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, **1878**, 13, 375-395.
- [20] Xiong, J. *Geometry and singularities of spatial and spherical curves*, Phd Thesis, Hawaii University, **2004**.
- [21] Wong, Y. C. *On an explicit characterization of spherical curves*, Proceeding of the American Mathematical Society, **1972**, 34, no.1, 239-242.

## ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Yozgat ilinin Boğazlıyan ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Boğazlıyan Ahmet Yörükoğlu İlköğretim Okulu'nda okudu. Lise eğitimini 2005 yılında Boğazlıyan Anadolu Lisesi'nde, lisans eğitimini 2009 yılında Gazi Üniversitesi, Kırşehir Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünü'nde, yüksek lisans eğitimini ise 2011 yılında Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nde tamamladı. 2011 yılında Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı Doktora Programına başladı. Evli ve bir çocuk babasıdır.

